

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Распространение
и взаимодействие

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ
И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1981

В сборник включены обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на Пятой Всесоюзной школе по нелинейным волнам (Горький, 1979 г.). Обсуждаются проблемы теории волновых процессов различной физической природы.

Издание рассчитано на специалистов, занимающихся исследованием нелинейных волновых процессов, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

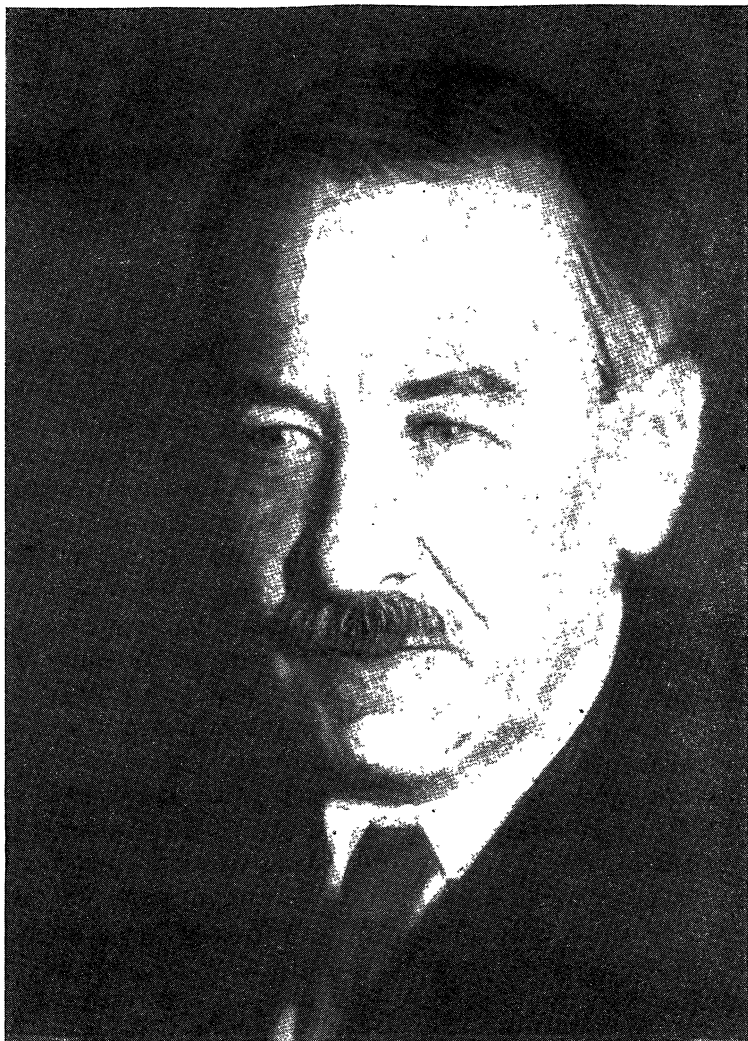
Ответственный редактор
академик
А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

5 мая 1979 г. исполнилось 100 лет со дня рождения основателя советской школы «нелинейных физиков» Леонида Исааковича Мандельштама. Пятая Всесоюзная школа по нелинейным волнам (Горький, март 1979 г.), материалы которой печатаются в настоящем сборнике, посвящена этому юбилею. Хорошо известно, что Л. И. Мандельштаму и его ученикам принадлежит большое число фундаментальных результатов в нелинейной оптике, нелинейной теории плазмы, нелинейной акустике и других «нелинейных науках», обсуждаемых в данной книге. Но этим не исчерпывается та роль, которую Л. И. Мандельштам сыграл в создании теории нелинейных колебаний, а затем и в теории нелинейных волн*. Не менее важным, чем собственный научный вклад и воспитание учеников, для развития этой теории явилось рожденное Л. И. Мандельштамом новое «колебательное мышление», которое он демонстрировал в лекциях и беседах и которое вошло в плоть и кровь наших «школ». Надо сказать, что Леонид Исаакович оказал очень сильное влияние на развитие радиофизики и теории колебаний в Горьком. Здесь работали его замечательные ученики А. А. Андронов, Г. С. Горелик, С. М. Рытов, у которых большинство из нас учились, и все мы поэтому — научные внуки и правнуки Л. И. Мандельштама.

При формировании программы этой, посвященной Л. И. Мандельштаму, школы нам особенно хотелось продемонстрировать возможности теории нелинейных колебаний и волн с точки зрения единого охвата и понимания совершенно разнородных по природе явлений, например, в химии, гидродинамике и электронике. В то же время мы хотели показать ее возможности при исследо-

* Академик Л. И. Мандельштам. К 100-летию со дня рождения. М.: Наука, 1979. 312 с.; Гапонов-Грегов А. В., Рабинович М. И. Л. И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн. — УФН, 1979, 129, № 8.



Л. И. Мандельштам (1879—1944)

вании конкретных явлений со всеми присущими им деталями. Те же задачи ставились и при отборе для публикации материалов школы. Проблема отбора оказалась очень трудной — все лекторы и участники семинаров проявили исключительную активность и внимание к этим материалам. В результате их объем на треть превысил допустимый. Все статьи, с нашей точки зрения, оказались интересными и важными, поэтому было решено объем не сокращать, а разделить материал на две части. Большая часть статей поме-

щена в данном сборнике. Это работы по наиболее актуальным проблемам распространения и взаимодействия волн в нелинейных средах и материалы, относящиеся непосредственно к Леониду Исааковичу Мандельштаму. Остальные работы публикуются в издаваемом ИПФ АН СССР сборнике «Стохастические колебания и турбулентность», который должен выйти в свет одновременно с этим.

Чтобы несколько компенсировать вынужденное разъединение материалов одной школы, охарактеризуем здесь кратко содержание сборника «Стохастические колебания и турбулентность», в котором, в свою очередь, будет помещено обсуждение содержания данной книги.

Проблемы, связанные с возникновением стохастичности в нелинейных диссипативных средах и системах, широко обсуждались и вызвали горячие дискуссии на прошлой — Четвертой школе *. Что изменилось за прошедшие два года? Прежде всего, чрезвычайно усилился интерес экспериментаторов к этим вопросам, и, кроме того, сильно расширился круг исследователей, занимающихся стохастическими автоколебаниями различной природы. Сейчас со стохастическими автоколебаниями происходит то же самое, что с периодическими примерно 30—40 лет назад, — они встречаются в самых разных областях буквально на каждом шагу, хотя совсем недавно мы их не замечали — не были развиты соответствующие представления. Справедливости ради следует сказать, что теории автоколебаний в определенном смысле «везет» — когда возникает потребность в адекватном математическом аппарате для описания автоколебаний, оказывается, что он уже существует и его нужно только увидеть и научиться использовать. Так было с периодическими автоколебаниями, математическим образом которых является предельный цикл, открытый Пуанкаре еще в 1882 г., но фактически пущенный в дело лишь в 1928 г. учеником Л. И. Мандельштама А. А. Андроновым. После того как Андронов поместил предельные циклы на знамени автоколебаний, они стали очень популярны, и почти сразу с их помощью удалось объяснить большое число разнообразных, до того времени не понятых экспериментов. Тогда-то фактически и возникла теория автоколебаний, позволившая связать воедино экспериментальные факты, простые модели и строгую математику.

* *Нелинейные волны*/Под ред. акад. А. В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979.

Аналогично обстоит дело и со стохастическими автоколебаниями, математическим образом которых является «стохастический», или «странный», аттрактор (притягиватель). Экспериментаторы время от времени сталкивались, как мы теперь знаем, со стохастическими автоколебаниями (динамика популяций, системы авторегулирования, радиотехнические генераторы, оптические квантовые генераторы и т. д.). Но понимания не было, и уширение спектра излучения или случайность реализации связывались с присутствием в системе внешних шумов или усилением собственных флуктуаций. Особой точкой была лишь работа Э. Лоренца (1963), который обнаружил хаотическое поведение динамической системы в численном эксперименте и связал его со сложной динамикой системы. И только почти десять лет спустя, после работы Рюэля и Такенса, которые узаконили математический образ стохастических колебаний диссипативных систем, дали ему название «странный аттрактор» и заявили о его связи с турбулентностью, плотину прорвало — в сравнительно краткий период появилось очень большое число работ по стохастичности диссипативных систем. Фактически же математический аппарат, пригодный для описания стохастических автоколебаний, существовал уже с середины 60-х годов (Аносов, Синай, Смейл).

В сборнике «Стохастические колебания и турбулентность» основное место занимают экспериментальные работы, в которых исследуются механизмы возникновения диссипативного хаоса и бифуркации, ведущие к его появлению. В него вошли статьи М. И. Рабиновича «Стохастические автоколебания в радиофизике и гидродинамике», Б. П. Безручко, С. П. Кузнецова, Д. И. Трубецкова «Стохастические колебания в системе электронный пучок — обратная волна», В. Б. Дихтыра, В. Я. Кислова «Стохастические колебания в резонансных автогенераторах с запаздыванием», В. И. Сбитнева «Стохастичность в системе двух связанных вибраторов», В. С. Львова, А. А. Предтеченского «Поэтапный переход к турбулентности в течении Куэтта», Ю. Н. Беляева, И. М. Яворской «Переход к стохастическому режиму в течении между вращающимися сферами», Г. И. Баренблатта «Некоторые явления турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией», Г. С. Голицына «Энергетика конвекции», Ю. Д. Чашечкина «Структуры конвективных течений в стратифицированной жидкости», Ф. В. Должанского, Л. А. Плешановой «Регулярные и нерегулярные автоколебания конвективной ячейки внутри эллипсоида», А. С. Бакая «Умеренная турбулентность», С. В. Волоц-

кого и др. «К теории слаботурбулентных колмогоровских спектров», С. М. Осовца и др. «Ритмы мозга» и В. И. Кринского, В. Г. Яхно «Спиральные волны возбуждения в сердечной мышце».

В двух последних статьях рассматривается не столько возникновение хаоса в динамических системах, сколько обратный процесс — возникновение порядка из беспорядка в сложных неравновесных диссипативных системах. Это проблемы, которыми занимается недавно возникшая на стыке других наук «синергетика»*. На этой школе не удалось, к сожалению, поставить специальный курс лекций по синергетике, однако проблемы, имеющие к ней отношение, обсуждались и вызвали интерес. Я надеюсь, такой курс будет прочитан на следующей — Шестой школе, которая состоится в марте 1981 г.

Пользуюсь случаем, чтобы выразить свою признательность всем авторам за их труд по чтению лекций и представлению материалов для публикаций.

А. В. Гапонов-Грехов

* *Haken H. Sinergetik. Springer Verlag, 1978.*

АКАДЕМИК Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ

С. М. РЫТОВ

Очень трудно коротко рассказать о таком большом человеке и выдающемся ученом, как Леонид Исаакович Мандельштам. Я могу привести его собственные слова из доклада об Алексее Николаевиче Крылове, который он сделал в 1943 г. по случаю 80-летия Крылова. Мандельштам сказал: «Вы видите, что я имею все основания просить вашего снисхождения». Хотя причины у меня иные, но я могу повторить то же самое.

Как только я начал обдумывать этот доклад, у меня, естественно, сразу же возник вопрос: о чем рассказывать? Что может быть интересно и важно для людей, которым сейчас 20—25 лет, в жизни, работе и личности физика, несомненно исключительного и выдающегося, но родившегося 100 лет тому назад и вот уже 35 лет как ушедшего из жизни?

Я вспоминаю, что было интересно мне самому в мои 20 лет, когда я был студентом III курса физико-математического факультета МГУ и даже еще не начал посещать лекции и семинары Мандельштама, что я хотел бы узнать тогда о знаменитых физиках, родившихся где-то около 30-х годов прошлого века и умерших до моего рождения? Скажем, о Гельмгольце, Максвелле, Стоксе, Кельвине, Гиббсе.

Да в общем-то ничего, кроме тех конкретных результатов и достижений в физике или математике, которые навсегда связаны с их именами. И это не было моей особенностью. Подавляющее большинство моих товарищей-студентов тоже не питали никакого пристрастия к истории вообще и к истории науки в частности, не читали мемуаров и биографий.

Лишь позднее, под прямым влиянием Мандельштама я если и не полюбил такие вещи, то по крайней мере осознал их значение, их поучительность и даже их необходимость для того, чтобы ощутить научный подвиг в тех или иных открытиях и теориях не сейчас, когда они уже вошли в плоть и кровь науки, а в те времена, когда они были сделаны. Это действительно поучительно, это дает и ретроспективу, и перспективу, а в каком-то отношении и вдохновляет. Посмотрите хотя бы, как Максвелл пишет о знаменитых дневниках Фарадея.

Короче говоря, я понял, что представление об истории физики и об ее творцах позволяет лучше понять эволюцию и борьбу идей,

позволяет почувствовать динамику науки, внутреннюю логику ее развития лучше, чем знание только добытых результатов.

Но дело, конечно, не только в этом. Ясно, что от меня, т. е. от одного из существующих учеников Мандельштама, видевших его и общавшихся с ним, вы, естественно, в первую очередь ожидаете «показаний очевидца», личных воспоминаний. Беда в том, что я принадлежу (в отличие от М. А. Леонтовича) ко второму поколению учеников Мандельштама. Разница в возрасте между Мандельштамом и мною почти 30 лет, а знал я его только в течение последних 16 лет его жизни. Поэтому я не был в такой же мере близок с ним, как его сотрудники и ученики первого, старшего поколения. Это затрудняет мою задачу, которую я вижу в том, чтобы по мере сил воссоздать некий общий облик или портрет Мандельштама, дать общее представление о нем как о человеке науки и о человеке исключительных личных качеств, душевного благородства и обаяния.

Эта задача несколько облегчается тем, что к 100-летию со дня рождения Мандельштама подготовлен сборник ¹, в который вошло почти все, что говорили о Мандельштаме люди, знавшие его гораздо дольше и ближе, чем я. Большинство из них уже нет в живых. Все, что было ими сказано после кончины Мандельштама в 1944 г., освещает его биографию, его личность, его интересы и творчество, освещает очень полно и в разных ракурсах. Именно поэтому я могу позволить себе затронуть многое только вскользь. Если этот доклад пробудит у вас интерес к Мандельштаму, то вы можете прочитать упомянутый сборник, а также юбилейный выпуск журнала «Успехи физических наук» (1979, т. 129, № 8).

Вместе с тем, работая над сборником, я все перечитал и прочувствовал заново и, надеюсь, вы не посетуете на то, что я довольно часто буду прибегать к цитированию. Во многих случаях не скажешь о Мандельштаме лучше, чем сумели в свое время сказать о нем И. Е. Тамм или А. А. Андронов, Н. Д. Папалекси или Г. С. Горелик. Имея все это в виду, я максимально сокращаю чисто биографические сведения и не буду углубляться в детальный разбор научного и педагогического наследия Мандельштама. Без особой системы и последовательности я попытаюсь, как уже сказал, обрисовать некий общий портрет Мандельштама.

Все же, имея в виду тех, кто не только не видел Мандельштама, но и ничего о нем не читал, мне придется сказать несколько слов о его биографии. Это, так сказать, «пунктирная» биография.

Родился Леонид Исаакович в Могилеве, но его детство и юность проходили в Одессе. До 12 лет он учился дома и лишь в 1891 г. поступил в третий класс гимназии, которую и окончил (с медалью) в 1897 г. Сразу же он поступил на математическое отделение физико-математического факультета Новороссийского университета в Одессе, но уже через два года был исключен в связи со студен-

¹ Академик Л. И. Мандельштам. К 100-летию со дня рождения. М.: Наука, 1979. 312 с.

ческими волнениями. В том же 1899 г. уехал по совету родителей в Страсбург (тогда это означало в Германию), где поступил на физико-математический факультет университета.

В дальнейшем можно условно разделить его жизнь на три периода. Страсбургский период — до 1914 г., т. е. до начала первой мировой войны. Затем с 1914 по 1925 г. — период войны, двух революций, гражданской войны и последующей разрухи, в течение которого Мандельштам сменил ряд городов и мест работы в поисках возможностей для серьезных научных исследований и для настоящего преподавания. И, наконец, с 1925 г. — последний, московский период, самый насыщенный и плодотворный период его жизни, расцвет его научной и педагогической деятельности, принесший главные его достижения.

Прежде чем несколько дополнить эти сведения, я хотел бы все же сказать и об объективных основаниях того, почему Мандельштам играет особую роль в нашей физике. Они заключаются в том, что он является одним из ее основоположников.

Так получилось, что в отечественной физике не было своих Лобачевских и Менделеевых. За исключением Петра Николаевича Лебедева, не оставившего выдающихся учеников, у нас не было своих физиков мирового масштаба. Наша большая физика началась после Октябрьской революции, и в ее становлении главную роль сыграли два человека — Абрам Федорович Иоффе и Леонид Исаакович Мандельштам.

Они совершенно разные, и роль их различна. А. Ф. Иоффе, если можно так выразиться, развивал физику вширь. Он в очень большой мере был дальновидным и активным организатором физического фронта у нас в стране, он положил начало ряду направлений и научно-исследовательских центров, организовал быстрый рост научных кадров. Л. И. Мандельштам же начинал физику вглубь, в смысле постижения духа и основ этой науки — начиная с Ньютона и вплоть до Эйнштейна, Планка, Бора и Шредингера.

Оба наши основоположника учились за рубежом: А. Ф. Иоффе у Рентгена, Л. И. Мандельштам — у Фердинанда Брауна. Этот «импорт» физики продолжался и в следующем поколении. При прямом содействии А. Ф. Иоффе П. Л. Капица поехал работать к Э. Резерфорду, а Л. Д. Ландау — к Н. Борну. В результате возникли отечественные физические школы, одна из самых ранних — школа Мандельштама. Они-то и выдвинули советскую физику на современный мировой уровень.

Кстати сказать, именно в Горьком, у работников здешних физических институтов и у студентов ГГУ имеются дополнительные причины интересоваться Л. И. Мандельштамом. Ведь сегодня здесь развивают физику и учат молодежь научные внуки и правнуки Л. И. Мандельштама. Более того, и в том, чему они учат, и в том, как учат, — иной раз даже без прямого упоминания имени Л. И. Мандельштама — содержатся и его конкретные научные достижения, и наследие его идей, и черты его педагогического стиля. Здесь имеется прямая преемственность от Л. И. Мандель-

штама через А. А. Андропова и Г. С. Горелика к их ученикам, в первую очередь, если говорить о физике, к А. В. Гапонову, а далее — к ученикам их учеников.

Конечно, многие из научных достижений Л. И. Мандельштама уже давно и прочно вошли в физический обиход, причем не только как конкретные открытия, но и как «идеология» — колебательная и волновая идеология, нелинейная идеология, — пронизывающая все развитие современной физики. Это хорошо. Плохо другое — то, что сплошь и рядом эти достижения превратились в фольклор. Читая, скажем, об интерференции радиоволн, о радиоинтерферометрах, редко можно увидеть указание на то, что первым, кто перенес идеи оптической интерференции в радиодиапазон, первым, кто указал на ряд важных практических применений такого переноса, был Л. И. Мандельштам (совместно с Н. Д. Папалекси). Сегодня это фольклор, который — по определению — не имеет автора. Почему это так?

Верно ведь и обратное: если долго не называть имени конкретного автора, то постепенно оно стирается, и произведение становится фольклором. С течением времени имя Мандельштама упоминалось в широкой печати все реже. После смерти Мандельштама Президиум Академии наук учредил две мемориальные премии имени Леонида Исааковича Мандельштама — по физике и по радио. К сожалению, одна из них была присуждена только 2 раза, другая — 3 раза. Это тоже сработало в сторону забвения.

В ту же сторону сработало и другое событие. За открытие комбинационного рассеяния света Нобелевская премия была присуждена индийскому физiku Раману и не была присуждена Мандельштаму и Ландсбергу, хотя события происходили в иной последовательности, чем публикации. Открытие побочных линий в спектре рассеянного света Мандельштам и Ландсберг сделали на неделю раньше Рамана, но их сообщение, содержавшее и факт, и правильное его объяснение, появилось на три с половиной месяца позже, чем посланная Раманом телеграмма в «Nature», в которой не было и намека на объяснение наблюдавшегося явления¹.

В нашей литературе обычно избегают термина «эффект Рамана», а говорят — вслед за самим Мандельштамом — о комбинационном рассеянии света. Хотя мы и имеем полное основание говорить об «эффекте Мандельштама—Ландсберга», нам приходится, видимо, избегать столь острого диссонанса с зарубежной терминологией.

Нечто подобное произошло и за 16 лет до открытия комбинационного рассеяния, еще в Страсбурге. Совместно с Папалекси Мандельштам поставил остроумные опыты, продемонстрировавшие инерцию электронов в металле. Это было сделано за 4 года до классических опытов Толмена и Стюарта, которым и достались лавры. В обоих случаях сыграло роль «болезненно придирчивое»

¹ Все это подробно освещено И. Л. Фабелинским в связи с 50-летием открытия (см. УФН, 1978, 126, № 1).

(слова Папалекси) отношение Манделъштама к стандарту своих публикаций. Статья об инерции электронов так и не была послана в печать. В открытии же комбинационного рассеяния Манделъштам задерживал публикацию вплоть до полного устранения всяких сомнений в чистоте эксперимента и до полного уяснения того, что же именно наблюдается. Здесь можно было бы рассказать много интересного. И о том, что Манделъштам, не зная в то время о теории колебаний в кристаллах Борна, сам быстро понял, что это модуляция света инфракрасными колебаниями решетки. И о том, что это понимание было прямым следствием его колебательной интуиции, прямым переносом предвидений о радиомодуляции в оптический диапазон. Но об этих вещах можно прочесть в ряде статей, включая статьи и лекции самого Манделъштама.

Разумеется, с именем Манделъштама связаны не только комбинационное рассеяние, не только радиоинтерференция, но и предсказание тонкой структуры рэлеевского рассеяния, и обобщение понятия резонанса, и оформление теории колебаний в самостоятельную науку, и создание нелинейной теории колебаний, и соотношение неопределенности энергии—время, и параметрика, и первое в физике блестящее применение аппарата интегральных уравнений, и многое другое, о чем мне еще придется упоминать и без чего современная физика немислима. Поражает разнообразие, даже кажущаяся пестрота этого неполного перечня. (Почему «кажущаяся» — об этом еще пойдет речь.) Но необычайная разносторонность Манделъштама очевидна. Несомненно, он был универсалом в физике и, видимо, одним из последних универсалов. Как хорошо выразился о нем А. А. Андронов, «в громадном здании физической науки для него не было запертых комнат».

Для Л. Д. Ландау тоже не было запертых комнат, но только в теоретической физике. Ландау чувствовал эксперимент и даже являлся связующим звеном, так сказать «переводчиком», между теоретиками своей школы и экспериментаторами. Однако невозможно даже представить себе Ландау выполняющим опыт и того менее — техническую разработку. А Манделъштам ставил и своими руками проводил эксперименты, как демонстрационные, так и исследовательские, сам участвовал в радиотехнических исследованиях — как в натуральных, так и в заводских условиях, и, более того, получил (наполовину в соавторстве с Папалекси) 60 патентов на изобретения, на новые принципы измерений, новые приборы и устройства чисто инженерного характера. Экспериментальное чутье Манделъштама было исключительным. Выслушав экспериментатора и посмотрев на его установку, он тут же на месте давал совет, который снимал все трудности и приводил к успеху опыта. О таких случаях вспоминают и С. М. Райский, и Е. Я. Щеголев, да и я сам помню такие эпизоды из моей студенческой практики в Центральной радиотехнической лаборатории, а потом во время работы в НИИФ.

Такой диапазон, охватывающий и теоретическую, и экспериментальную, и математическую, и техническую физику, и параметрические генераторы переменного тока, и логическую структуру теории относительности, — это универсализм особого, точнее говоря, классического масштаба.

Я позволю себе просто процитировать из уже упомянутого доклада Мандельштама об А. Н. Крылове то, что, по собственному мнению Мандельштама, типично для классиков науки. Вот что он сказал:

«Первое — это отношение к вопросу: чистая или прикладная наука. Классики вообще, насколько я могу судить, этого различия не знали. В их трудах обе стороны знания взаимно дополняли и оплодотворяли друг друга. . .

Далее, для классиков характерен выбор проблемы. В нашей науке, говоря несколько схематично, можно различить двоякого рода проблемы. Одни носят отпечаток искусственности; часто кажется, что они создаются только потому, что дают повод к более или менее остроумным конструкциям. К типу искусственных проблем я отношу также накопление того или иного опытного материала без руководящей идеи. Такие проблемы могут быть полезны и приводят иногда к интересным результатам, но, как правило, они мало способствуют прогрессу науки.

Совершенно иной характер носят проблемы, естественным образом вытекающие из органического развития какой-нибудь отрасли знания. Они жизненны и потому плодотворны. Я не хотел бы быть неправильно понятым. Говоря «жизненный», я не имею в виду сказать «утилитарный».

Эйнштейн своим принципом относительности, Планк, Бор и другие квантовой механикой — я привожу только самые разительные примеры — ответили на глубоко жизненные вопросы, значение которых не может быть переоценено. Науку двигает вперед решение жизненных проблем».

Вот в чем Мандельштам видел типичные черты классиков науки и что он высказал, имея в виду А. Н. Крылова. Но ведь эти черты в полной мере свойственны и самому Мандельштаму. Решенные им проблемы были жизненны, и именно поэтому их решение открывало новые пути и в физике, и в технике.

Быть может, здесь будет уместно — немного отвлекаясь в сторону — привести один из нравившихся Мандельштаму анекдотов.

Андронов, вспоминая о своем последнем разговоре с Мандельштамом, также приводит этот анекдот, повторенный Мандельштамом в связи с элементарной моделью часов, которую Андронов придумал, но сомневался, подойдет ли она людям, фактически занимающимся часами. Мандельштам с улыбкой сказал: «Посмотрим, что это за модель на букву К». Андронов не понял, что это значит, и Мандельштам объяснил ему. Я приведу этот анекдот в иной редакции, как я запомнил его из другого (моего) разговора с Мандельштамом.

В одном захолустном городке неграмотные, когда надо было послать письмо, обращались за помощью к местному писарю. Выяснилось, что все письма он адресует в Киев или Кременчуг. Оправдываясь, он сказал: «Знаете, у меня очень красиво получается буква К».

В такой редакции этот анекдот относится не столько к андроновской модели часов, сколько к тем искусственным проблемам, о которых говорил Мандельштам. Многие из них — это «проблемы на букву К».

Вернемся, однако, к жизненным проблемам, решение которых двигает науку вперед. Я просто продолжу цитату из того же доклада Мандельштама.

«Но именно ввиду их жизненности они большей частью трудны. Природа, ставя проблему по существу, предоставляет нам самим найти соответствующую четкую формулировку, отделить главное от второстепенного, а это часто не легко. Природа, как говорил Френель, строит свои законы через голову математических трудностей, которые физику, однако, нужно преодолеть. Поэтому решение важных жизненных проблем под силу только крупнейшим ученым».

И далее:

«Жизнь, выдвигая те или иные проблемы, не считается с установленными нами — часто искусственно — границами между отдельными науками и их областями, границами, которые мы иногда — неизвестно почему — так ревниво оберегаем. Отсюда — разносторонность исследователя таких проблем. Но это не та разносторонность, которая охватывает одновременно и математику, и историю, и физику, и медицину, которая имела смысл в давно прошедшие времена, а теперь неизбежно связана с поверхностностью. Это разносторонность, происходящая от стремления охватить всю многогранную проблему в целом и от глубокого понимания связи между отдельными, для обычного глаза совершенно разнородными явлениями».

Всего два абзаца, но как много в них сказано. Здесь затронуты и правильная идеализация, и различие между универсализмом и энциклопедизмом, и взаимная связь внешне разнородных явлений. Позвольте мне в меру сил прокомментировать эти вопросы, разумеется, имея в виду самого Мандельштама.

Ландау как-то сказал, что теоретическая физика — это умение делать оценки. Это умение, несомненно, опирается на идеализацию задачи (термин Мандельштама; сейчас чаще говорят о моделировании), т. е. на ее упрощение, отбрасывание несущественного и сохранение только существенного. Без этого задача неприступно сложна. Но как решить заранее, что существенно, а что нет? Для этого нет никаких правил, никаких рецептов, никакого алгоритма. Все опирается на накопленный опыт, на чутье, на интуицию. Поэтому правильная идеализация и является искусством, проявлением мастерства, таланта. В одной из своих лекций Мандельштам выразил это иным образом: при постановке задачи

физик сам должен уметь определять необходимую меру строгости. В другой раз он сказал: «Когда я перевожу физику на математику, я всегда от чего-то отвлекаюсь». По утверждению Андронова, Мандельштам считал, что вопросы идеализации должны занимать фундаментальное место во всяком преподавании физики — как в школьном, так и в университетском. Уже школьник должен сознавать, что в любой физической теории мы работаем с идеальными моделями реальных вещей и процессов. Надо ли добавлять, что Мандельштам был величайшим мастером правильной идеализации.

Говоря о разносторонности, Мандельштам отвергает энциклопедизм, или, как любят теперь выражаться, «эрудированность». Мандельштам вовсе не был человеком, который знает все, что сказали по данному вопросу другие. Его разносторонность сочеталась с внутренним единством. На протяжении всей его жизни, начиная со Страсбурга, можно отчетливо проследить становление, развитие и замечательное использование некоторых общих идей или, говоря его словами, руководящих точек зрения. Именно они направляли его собственное творчество и его размышления. Именно они (наряду с doskonaльным изучением первоисточников) формировали его взгляды. Именно они вели к установлению внутренних связей, объединявших в его сознании всю физику в единое целое. Андронов говорит даже не только о физике, а обо всем точном естествознании, включая математику и технику. Замечу, что хотя и другими путями, но к аналогичной цельности восприятия пришел в теоретической физике Ландау.

Однако и в рамках теоретической физики можно заметить очень характерное для Мандельштама отличие. Когда речь шла об истоках физических теорий, его никогда не удовлетворяло злоупотребление «очевидностью». Его всегда интересовали вопросы гносеологического порядка, и он стремился (с годами — все больше) уяснить себе — а значит, и разъяснить другим — самые глубинные корни физических постулатов и теорий, корни как исторические, так и логические. Он был не только замечательным физиком-универсалом, но и глубоким мыслителем.

У меня нет возможности подробнее осветить эту сторону личности Мандельштама, но прочтите (или перечитайте) его лекции по теории относительности или по основам квантовой механики, и вы сами убедитесь в справедливости сказанного.

Естественно было бы теперь обратиться к вопросу о том, в чем же заключались руководящие точки зрения, которые выработал Мандельштам. Но прежде чем к этому перейти, я хотел бы немного пополнить «пунктирную» биографию Мандельштама и сказать о нем как о человеке.

Вернемся к периоду Страсбурга, где он прошел путь от студента до профессора университета (с 1913 г.). У него там были хорошие учителя — сам Браун, уже известный работами по термодинамике и по электроизмерительным приборам (в частности, трубка Брауна, предок современных электронных осциллографа и кине-

скопа), математик Генрих Вебер, физик-теоретик Эмиль Кон. По мере научного роста Манделъштама его отношения с этими выдающимися людьми переходили в дружбу.

В Страсбурге Манделъштам изучил математику и классические труды Максвелла, Гельмгольца, Больцмана, Герца, Лоренца и Рэлея. Последний оказал на Манделъштама особое влияние. Труды Рэлея, который, в сущности, завершил линейную теорию колебаний, вызывали у Манделъштама особый резонанс, были, как хорошо выразился Папалекси, ему конгенитальны. «И не случайно, — пишет Папалекси, — пути их научного творчества часто шли параллельно и неоднократно пересекались»¹.

Не подлежит сомнению, что «атмосфера» электромагнитных колебаний и волн, в которую сразу же погрузился Манделъштам (сам Браун переключился на радиоизмерения за год до приезда Манделъштама), наряду с изучением трудов Рэлея положили начало «колебательному» подходу Манделъштама ко всей физике. «Беспроволочная телеграфия» сблизила Манделъштама и с Папалекси, с нее началось их многолетнее сотрудничество и дружба.

В 1907 г. Леонид Исаакович женился на Лидии Соломоновне Исакович, с которой много позднее я имел счастье познакомиться лично. Ее отличали не только душевность и благородство, но и незаурядные способности. Она была первой русской женщиной, получившей в 1906 г. в Париже диплом архитектора, а позднее в Страсбурге она окончила Медицинский институт. В 20-х годах, когда Манделъштамы жили в Петрограде, она некоторое время работала по специальности врача-хирурга.

Историк Вадим Сергеевич Алексеев-Попов вспоминает:

«Поразительно нежны и в то же время далеки от всякой сентиментальности были сердечные узы взаимопонимания и взаимоуважения, соединившие навсегда этих людей». Да и по моему собственному впечатлению, Леонид Исаакович и Лидия Соломоновна были какой-то совершенно особенной четой. Они понимали друг друга даже не с полуслова, а, если можно так выразиться, с полувзгляда.

Ряд выдающихся работ в Страсбурге принес Манделъштаму европейскую известность. Совместно с Папалекси он создал точнейший измеритель частот и декрементов, в котором использованы ими же придуманный фазовый динамометр. Манделъштам провел там работы и по направленности антенн, выяснил роль фаз и вскрыл допущенную здесь известным радиоспециалистом Флемингом ошибку. Я подчеркиваю слово «фаза», ибо, несомненно, с тех времен начинается обостренное внимание Манделъштама к фазовым соотношениям в колебаниях и волнах, породившее позднее радиоинтерферометрию. Здесь же произошел перенос радиоидеологии в оптику, начались работы по рассеянию света и после-

¹ К сожалению, доклад Манделъштама о Рэлее, прочитанный им в МГУ в 1939 г. в связи с 20-летием со дня смерти Рэлея, утрачен. Не найдены и более поздние наброски к биографии Рэлея, написанные Манделъштамом во время эвакуации в Боровом.

довавшее затем благодаря Смолуховскому, Эйнштейну и самому Мандельштаму выяснение роли флюктуаций в рассеянии. Здесь и работы по теории дисперсии, и обнаружение ошибки у М. Планка в вопросе об ослаблении света из-за рассеяния. Это было в 1904 г., 25-летний доцент смело вступил в полемику с таким корифеем, как Планк, и доказал свою правоту. Весьма сухо Планк это признал. В открытке, присланной Леониду Исааковичу (31 июля 1905 г.), он писал:

«Милостивый государь! Вы совершенно правы в своем последнем возражении. Соответствующую поправку я сделал на берлинском заседании, т. е. 21 апреля 1904 г. На это указано в оттиске, который я одновременно Вам посылаю. С глубоким уважением М. Планк».

В Страсбурге же Мандельштам сделал свою выдающуюся работу по рассеянию света на границе раздела двух жидкостей — из-за тепловых флюктуаций этой границы. Можно сказать в награду, он получил открытку от Эйнштейна (1913 г.):

«Дорогой г-н Мандельштам! Я только что доложил на коллоквиуме о Вашей красивой работе по флюктуациям поверхности, о которой ранее мне сказал Эрэнфест. Сожалею, что Вас лично тут нет. С наилучшим приветом. Ваш А. Эйнштейн».

На открытке расписались участники коллоквиума.

Усилившийся интерес к оптике, к вопросам разрешающей силы породил классическую работу Мандельштама по строгой теории образования оптического изображения в микроскопе при когерентном и некогерентном освещении объекта. Именно в ней впервые были блестяще использованы интегральные уравнения. И снова возникла полемика — на этот раз с Люммером, и снова Мандельштам оказался прав.

Наконец, еще одна чрезвычайно характерная для Мандельштама работа: он заинтересовался тем, как создать в оптике источник, близкий (в масштабе длины волны) к границе раздела, т. е. создать условия, какие имеют место в радио. Что при этом будет? Он чрезвычайно остроумно осуществил такой источник и изучил весь вопрос как экспериментально, так и теоретически.

«Все эти исследования, — пишет Папалекси, — часть коих представляли собой блестящие, весьма содержательные полемики с Планком, Флемингом, Люммером, в которых Леонид Исаакович доказал ошибочность их воззрений, принесли ему признание и известность».

Заканчивая рассказ о страсбургском периоде, нельзя не упомянуть и о том, что именно в студенческие годы у Мандельштама, по свидетельству Папалекси, внезапно пробудился глубокий интерес к литературе, музыке, к изобразительным искусствам. Он начал поглощать художественную литературу на разных языках, посещать художественные галереи, концерты. Его любимым поэтом был Пушкин. Стихи Пушкина он почти все знал наизусть и много читал о нем. Авторитетные литературоведы считали, что позднее

Мандельштам сделался пушкинистом чуть ли не профессионального уровня.

Первая мировая война оборвала работу в Страсбурге. В конце июля 1914 г., едва закончив лекции, он спешно выехал на родину и прибыл в Одессу в день объявления войны. Как я уже говорил, период до 1925 г. был периодом поисков пригодного для науки места работы. Я скажу несколько слов лишь о трех наиболее длительных этапах этого периода.

Два года (1915—1917) Мандельштам проработал научным консультантом на заводе Сименса и Гальске в Петрограде (ныне завод им. Козицкого). Об этой работе довольно подробно написал ученик Мандельштама, а в дальнейшем его и Папалекси многолетний сотрудник Е. Я. Щеголев, который в то время был там студентом-практикантом. В статье «Л. И. Мандельштам — радиоинженер» (вошедшей в юбилейный сборник) Щеголев описывает целый ряд замечательных разработок и приборов Мандельштама. Он пишет, что всех поражало, «как красиво и подчас гениально просто решал Леонид Исаакович очень непростые технические задачи, так просто, что невольно у каждого из нас возникал вопрос, почему же это раньше не пришло мне в голову?» А вопросы были не только такие, как создание прецизионного абсолютного измерителя частоты, но и такие, как технология оксидирования проволоки для реостатов. Много лет на разных заводах проволоку оксидировали потом по способу Мандельштама, не зная имени автора этого способа.

В течение четырехлетнего пребывания в Одессе в 1918—1922 гг. Мандельштам принял живейшее участие в создании Одесского политехнического института и буквально на голом месте создал физический практикум и лабораторию. Он заведовал там кафедрой физики, привлек в институт Н. Д. Папалекси и И. Е. Тамма и на высоком уровне поставил чтение лекций. Сохранилась вводная лекция Мандельштама к общему курсу физики в этом институте. Она вошла и в Полное собрание трудов и включена в юбилейный сборник. Лекция дает представление и об уже достигнутом в то время педагогическом мастерстве Мандельштама, и об его особом стиле. Тема лекции: нужна ли физика инженеру, причем не только «свой» раздел физики, а вся эта наука в целом, и не только опытная ее часть, но и теория. Ответ, конечно, положительный: широкое владение физикой просто необходимо каждому инженеру.

Любопытно, что основатели Московского физико-технического института исходили из той же идеи ровно через четверть века.

Но всюду и всегда Мандельштам продолжал думать о науке.

Размышляя о рассеянии света — вопросе, который занимал его всю жизнь, он уже в 1918 г. пришел к мысли, что тепловые флуктуации в однородной среде должны при рассеянии монохроматического света создавать в рассеянном свете спектральный дублет. В основе этого предсказания лежал сделанный им ранее решающий шаг — отождествление «формальных» гармонических решеток Эйнштейна с акустическими волнами Дебая. Много позднее он сказал об этом шаге с оттенком гордости, разумеется, ни звуком

не обмолвившись о себе, что «сделать это было нелегко». В 1922 г. к тому же предсказанию пришел Л. Бриллюэн. Экспериментально увидеть дублет Мандельштама—Бриллюэна удалось лишь через 12 лет. Приятно все же констатировать, что дублет Мандельштама—Бриллюэна именуется так повсеместно, т. е. это один из немногих случаев, когда открытие Мандельштама не было забыто или закреплено только за французским автором.

В 1922 г. Мандельштам переехал в Москву в качестве научного консультанта радиолaborатории Треста заводов слабого тока. Здесь были и аппаратура, и научная литература, в особенности после перевода лаборатории в Петроград и преобразования ее в Центральную радиолaborаторию (ЦРЛ). В последующие три года Мандельштам и Папалекси сделали много хороших вещей в области радиомодуляции, стабилизации частоты, повышения селективности приемников, но Мандельштам по-прежнему стремился к физическим исследованиям и к неотделимому от них преподаванию.

И вот, как я уже говорил, в 1925 г. мечта Мандельштама осуществилась: он был приглашен в МГУ. Замечу (я узнал об этом от М. А. Леонтовича), что весьма существенную роль в привлечении Мандельштама в МГУ сыграл тогдашний студент МГУ и очень активный общественник А. А. Андронов.

Мандельштам был приглашен в качестве профессора физики и заведующего теоретическим кабинетом НИИФ МГУ. Очень быстро он стал центральной фигурой факультета и института. Столь же быстро сложилась и московская школа Мандельштама.

В самом начале я сказал, что А. Ф. Иоффе был крупным организатором научных центров. Мандельштам вообще не был организатором. Говоря о московской школе Мандельштама, я имею в виду не какие-либо институты или лаборатории, а коллектив талантливых и очень разных людей, вовлеченных в орбиту его научного влияния и чрезвычайно широких научных интересов исключительно благодаря его собственному притяжению как ученого и человека.

Школа Мандельштама — это и особая атмосфера, полная взаимной доброжелательности и вместе с тем чуждая малейших послаблений в требованиях, предъявляемых к работнику науки. Я не представляю себе подлинно научной школы без такой атмосферы.

Конечно, совместная работа членов школы Мандельштама получала и организационное оформление, и в этом большую роль сыграли руководители уже существовавших институтов, в которых работал Мандельштам. Сами они не входили в школу Мандельштама, но сумели по достоинству оценить и его самого, и эту школу. В этой связи надо с благодарностью отметить и роль тогдашнего директора НИИФ МГУ Б. М. Гессена, и роль С. И. Вавилова, который и в МГУ, и в ФИАНе, и в Академии наук всегда оказывал широкую поддержку работе Мандельштама и его сотрудников.

Имена этих ближайших сотрудников и первых московских учеников Мандельштама хорошо известны. В области радиоп физики и радиотехники это его друг со студенческих лет Н. Д. Папалекси, в физической оптике и ультразвуке — это Г. С. Ландсберг, в теоретической физике — И. Е. Тамм и М. А. Леонтович, в теории колебаний — А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, а позднее Г. С. Горелик.

Небезынтересно отметить, насколько все ученики Мандельштама остались разными, несмотря на общую школу. Это показывает, что Мандельштам развивал, а не подавлял индивидуальность своих учеников. Как пишет Андронов, с каждым из них у него был свой особый разговор. В результате не возникало никакой унификации, как это случалось в других наших физических школах, и по интересам, и по стилю работы, и по стилю публикаций. Статью Горелика не спутаешь со статьей Леонтовича или Андропова. Все они и без подписей тотчас же различимы.

Некоторые из названных первых представителей школы Мандельштама создали в дальнейшем свои физические школы, хотя и менее широкие по профилю, но весьма сильные. Я имею в виду теоретические школы Тамма, Андропова и Леонтовича и экспериментальную школу Ландсберга.

До 1935 г. Мандельштам продолжал совместно с Папалекси руководить радиотехническими исследованиями в ЦРЛ. В 1934 г., после перевода Академии наук в Москву, он взял под идейное руководство две лаборатории ФИАН — оптическую, возглавленную Г. С. Ландсбергом, и лабораторию колебаний, возглавленную Н. Д. Папалекси. Научные исследования по оптике и радиоп физике продолжались и в НИИФ МГУ, а на физфаке Мандельштам регулярно проводил серии ежегодных семинаров и лекционных курсов, представлявших собой совершенно уникальное явление в преподавании физики.

Остается добавить, что к московскому периоду относятся и многократные проявления признания исключительных заслуг Мандельштама. В 1928 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1929 г. — действительным членом Академии наук, причем его выдвинули в академики почти все вузы и научные учреждения Советского Союза. В 1931 г. ему была присуждена премия им. В. И. Ленина, в 1936 г. — премия им. Д. И. Менделеева, в 1942 г. — Государственная премия, в 1940 г. он был награжден орденом Трудового Красного Знамени, а в 1944 г. — орденом Ленина.

Мандельштам был исключительно цельным человеком. Он стремился к истине и был бескомпромиссно принципиален как в науке, так и в любой жизненной ситуации. Вместе с тем эта железная принципиальность удивительным образом сочеталась у него с мягкостью, деликатностью, доброжелательностью и подлинной добротой. А. Н. Крылов сказал о нем: «Леонид Исаакович отличался прямоотой, честностью, полным отсутствием искательства и лукавства. . .». Надеюсь, что старинное слово «искатель-

ство» всем понятно, несмотря на постоянное обновление его содержания.

Вот некоторые примеры из воспоминаний о Мандельштаме.

Изольда Оскаровна Вильнер — дочь друзей Мандельштамов — вспоминает о том, как однажды Леонид Исаакович захотел посмотреть теннисный матч, хотя он не совсем хорошо себя чувствовал. Она попыталась достать такси, но это не удалось, и она предложила вызвать машину из гаража Академии наук. Изольда Оскаровна пишет: «Леонид Исаакович посмотрел на меня так, что я не знала, куда деваться от смущения. «О чем ты говоришь? Поехать посмотреть матч в академической машине? Как это могло прийти тебе в голову?»».

Квартира Мандельштама в здании НИИФ имела внутренний выход в институт и находилась рядом с оптической лабораторией Г. С. Ландсберга. Разумеется, никаких вахтеров тогда не было, квартира воспринималась как часть института, и этим входом постоянно пользовались друзья, коллеги, ученики Леонида Исааковича, он сам и его семья.

Е. Л. Фейнберг пишет: «На самом деле здесь проходила невидимая граница. Неужели Вы думаете, — пояснял Сергей Леонидович Мандельштам, — что если у нас не работает радиоприемник и нужно проверить напряжение на лампе, то можно принести на минуту вольтметр из лаборатории? Это вызвало бы подлинный гнев у отца. Принцип есть принцип — государственное имущество неприкосновенно».

Я вовсе не хочу, чтобы эти два эпизода окружили Мандельштама ореолом особой добродетели. Для него этот принцип был просто проявлением элементарной порядочности, так сказать, простым условием самоуважения.

Вот два других эпизода, характеризующих принципиальность Мандельштама в отношениях с людьми. Об одном из них мне напомнил С. М. Райский.

С московскими физиками школы Мандельштама работал длительно один ленинградец. Хотя его нет в живых, я не буду его называть и обозначу через N. Потом N вернулся в Ленинград, где имелась лучшая аппаратура, и сделал хорошие эксперименты, полностью подтвердившие одно предсказание Мандельштама. N опубликовал статью, в которой ни словом не обмолвился ни о Мандельштаме, ни о тех, с кем он работал первоначально. Это нарушение научной этики вызвало возмущение москвичей. Ландсберг предлагал написать в Ленинград соответствующее письмо. Тамм, со свойственной ему горячностью, заявил, что он немедленно поедет в Ленинград и там выскажет прямо в лицо, кому следует, все, что он по этому поводу думает. Спокойней всех отнесся к этому инциденту Мандельштам. Он сказал:

«Взрослых людей не воспитывают. С ними либо имеют дело, либо не имеют. С N дела иметь не следует».

Больше с N он дела не имел.

И опять же я не хочу создать впечатление о Мандельштаме как о некоем фанатичном правдолюбце. Он был по-настоящему мудрым человеком, видящим жизнь не в черно-белом изображении. Он всесторонне взвешивал чей-либо поступок или проступок, учитывая и причины, и обстоятельства, и мотивы. Именно поэтому его окончательное суждение было глубоко продуманным и обоснованным. В данном случае он не нашел в поступке N ничего, кроме честолюбия.

В. С. Алексеев-Попов вспоминает, что в столовой у Мандельштамов стоял за ширмой диван, часто служивший гостям, которые нуждались в ночлеге. В 1931 г. он сам был таким гостем, причем на короткий срок оказался здесь в компании с гостем совсем иного склада и облика. Он пишет: «Если я, выросший в провинции, напоминал кузена Лариосика, то «сосед» мой, молодой, но уже знаменитый своим открытием физик, живший в Ленинграде, был одет по последней моде Запада, где он успел уже не раз побывать и куда вновь направлял свой путь для участия в одном из научных конгрессов, к чему, однако, встретились не предвиденные им препятствия. Усилия этого моего временного «соседа» и были направлены на то, чтобы прибегнуть к авторитету Леонида Исааковича для устранения этих препятствий. И здесь я мог наблюдать, как почти изысканная любезность Леонида Исааковича в качестве хозяина ни в малейшей степени не распространялась на область искомого заступничества, самую возможность которого он отвергал из глубоко принципиальных соображений. Позицию эту он ни на йоту не изменил, и будущее показало, что, отказав этому человеку в доверии, он был морально глубоко прав».

Неудивительно, что моральный авторитет Мандельштама был исключительно высок и далеко вышел за рамки его школы и института. Иной раз посторонние люди приходили к нему или писали ему, чтобы узнать его мнение или получить ответ по поводу той или иной ситуации или своих поступков и намерений. Пожалуй, лучше всех сказал об этом Г. С. Ландсберг в своем выступлении после смерти Мандельштама:

«Теперь я уже пожилой человек. Но я не стыжусь признаться, что на протяжении двух десятилетий моей близости с Леонидом Исааковичем я, принимая то или иное ответственное решение или оценивая свои поступки и намерения, задавал себе вопрос — как отнесется к ним Леонид Исаакович. И мне было ясно, что то, что может вызвать его осуждение, не должно быть предпринято. Я мог не соглашаться с Леонидом Исааковичем, особенно когда речь шла о тех или иных практических шагах, но никогда у меня не было сомнения в правильности морального суждения Леонида Исааковича о людях и поступках».

Любопытно, что Мандельштам всегда настороженно относился к слову «очень». Услышав суждение о ком-то, что он очень порядочный человек, Мандельштам сказал: «Очень порядочных людей не бывает. Человек может быть либо порядочным, либо

непорядочным. Очень порядочный человек — человек непорядочный».

Так же он реагировал и тогда, когда речь заходила об очень способных молодых людях. Он любил вспоминать в таких случаях изречение старого часового мастера из Одессы: «Не люблю способных. Способные на все способны».

Ландсберг писал о мягкости Леонида Исааковича:

«От Леонида Исааковича можно было услышать порицание за недостаточную мягкость речи и несдержанность выражений. Но твердости поведения он требовал всегда и никогда не рекомендовал уступчивости. Слово «суровость» меньше всего подходит к образу Леонида Исааковича, всегда искренне мягкому, человечному и доброму. И тем не менее ничье суждение не было более суровым, когда дело касалось какого-либо компромисса».

Вот несколько иллюстраций человеческих качеств Мандельштама. Райский вспоминает об отношении Мандельштама к суеверным людям, верящим в то, что если черная кошка перебежала дорогу, то надо обойти путь кошки. . . Мандельштам считал, что «не следует проницательными замечаниями побуждать суеверного человека действовать вопреки приметам. Поступая против своих привычек, человек нервничает, теряет душевное спокойствие и способность хорошо ориентироваться в уличном движении».

Кстати, можно вспомнить и мнение Мандельштама о порядке присуждения ученых степеней. Он считал, что критиковать диссертацию надо до ее постановки на диспут. Если же работа уже принята к защите, то на этой стадии не следует препятствовать присуждению степени.

Я вспоминаю его оценку моей собственной первой статьи «К вопросу о детектировании». Леонид Исаакович дал мне сжатые указания, как написать статью. Я написал и, конечно, был уверен, что написал хорошо. Отдав мой «манускрипт» (слово Мандельштама, он не говорил «рукопись»), я пришел через несколько дней к Мандельштаму и, ожидая похвал, спросил его, как он ее находит. Не сказать правду он не мог, но сказать ее для него было мучительно. Он опустил глаза и очень тихо промолвил лишь одно слово: «Ужасно». Изучая его правку, я понял, что это действительно было ужасно, и понял, как надо писать научные статьи.

Другой эпизод требует некоторых предварительных пояснений.

В 1944 г. приближалось 50-летие изобретения радио А. С. Поповым, в связи с чем подготавливались два сборника. Первый — о самом изобретении — готовил А. И. Берг, а второй — «Из предьстории радио» — готовил Л. И. Мандельштам, а я помогал ему.

Надо сказать, что Мандельштам первоначально держался того мнения (вероятно, принятого среди учеников Ф. Брауна), что Попов и Маркони изобрели радио независимо друг от друга, причем Маркони сразу же обогнал Попова в практических при-

менениях. Берг привозил к Леониду Исааковичу огромные папки собранных им документов и горячо доказывал приоритет Попова. Манделъштам тщательно вникал во все аргументы и в конечном счете согласился с Бергом. Прочитав ряд документов, он в моем присутствии сказал: «Этого я не знал».

Затем он начал писать введение ко второму сборнику. Это введение обрывается на полуслове. Оно было последней статьей Манделъштама.

Манделъштам подбирал весь материал ко второму сборнику и тщательно проверял качество всех переводов. Я перевел знаменитый доклад Герца «О соотношениях между светом и электричеством», прочитанный в 1889 г. в Гейдельберге и подытоживший установление электромагнитной природы света. Поправок к моему переводу у Леонида Исааковича было немного, но об одной из них я и хочу сказать. Она чрезвычайно характерна для Манделъштама, для его деликатности.

В моем первоначальном переводе доклад Герца начинался словами: «Многоуважаемое собрание! Когда речь идет о соотношениях между светом и электричеством, профан (*der Laie*) представляет себе первым делом электрический свет».

Манделъштам сказал: «Нет, так нельзя. Конечно, не «профан», а «человек непосвященный».

Вот еще эпизод, о котором вспоминает И. О. Вильнер:

«Мы зашли к Манделъштамам в то время, когда Леонид Исаакович принимал в аудитории экзамен у какой-то студентки или аспирантки. Он вошел в комнату очень расстроенный и обратился к своей жене со словами: «Пожалуйста, пойди и скажи этой девушке, что она ничего не знает. Пусть придет в другой раз». Ему самому сказать это было слишком трудно.

Я не сказал и половины того, что мне хотелось бы и что я мог бы рассказать о Леониде Исааковиче, как об отдельных штрихах, так и о вещах, существенных для полного о нем представления.

Здесь и его забавная для нас, студентов, склонность прибегать в первые годы московского периода к немецким словечкам и пословицам. Кстати сказать, сразу же после прихода Гитлера к власти в Германии он полностью исключил все это из своего лексикона и сразу же официально заявил о своем выходе из Германского общества физиков и естествоиспытателей.

Здесь и его влияние на людей, в частности на студентов, его способность воспитывать без морализирования. Вспоминает В. А. Фабрикант: «Нас, студентов, воспитывали не нравочениями, а личным примером, своим отношением к науке, друг к другу. Мы ощущали чистоту атмосферы, нас окружавшей, что далеко не всегда бывает. Мы видели, как Леонид Исаакович радуется чужим достижениям, видели, как он сочетает большую терпимость к людям с твердостью в своих научных убеждениях».

Здесь и подчеркнутая Андроновым почти полная неспособность Манделъштама ошибаться в вопросах физики. И Андронов, и Тамм, и Папалекси пишут об известных парадоксах, которыми

Эйнштейн и Подольский пытались опровергнуть квантовую механику и которые Мандельштам на следующий же день полностью разъяснял, задолго до того, как это сделал Н. Бор. Разъяснял, но не публиковал, поскольку «Эйнштейн, Бор, — говорил Мандельштам, — это люди, лучше которых мы не знаем». «Может быть, — говорил он, — я чего-то не понимаю».

Здесь и пребывание Мандельштама во время войны в Боровом. Планы ряда монографий, которые он хотел написать, чувствуя, видимо, что из-за усиливающейся болезни сердца времени у него остается уже немного. В частности, с приехавшим в Боровое Папалекси Мандельштам обсуждал план монографии по параметрике и параметрическим генераторам. Тогда же они пришли к выводу о технической возможности радиолокации Луны, на 15 лет опередив в смысле научной инициативы американцев.

Много еще есть такого, о чем стоило бы рассказать, но я чувствую, что пора заканчивать. Я остановлюсь в заключение только на трех уже упомянутых, но отложенных вопросах — на руководящих точках зрения Мандельштама, на нелинейном мышлении и на мандельштамовском преподавании.

Может быть, лучше, точнее, чем другие, обрисовал научный облик Мандельштама А. А. Андронов. Достаточно взглянуть на построение его доклада о Мандельштаме. После введения идут следующие основные разделы:

Мандельштам как тип ученого. Здесь Андронов выделяет понимание нового на основе исключительного знания старого — черта, свойственная всем классикам, в том числе и Эйнштейну, и Бору; исключительную разносторонность Мандельштама; особую «мандельштамовскую» ясность («прозрачность», как говорил сам Мандельштам); коллективный характер научного творчества и, наконец, отсутствие резкой черты между преподаванием и научной работой.

Как понимал Мандельштам теорию колебаний.

Идея выработки нелинейного физического мышления.

Идея правильной идеализации.

Идея колебательной взаимопомощи различных областей физики и техники.

Здесь действительно охвачены наиболее существенные черты научного творчества Леонида Исааковича. На трех из них я и хочу коротко остановиться, поскольку после выступления Андропова прошло 35 лет.

Начну я с нелинейного мышления.

Нелинейность в физике — отнюдь не новая вещь. Небесная механика, гидродинамика, электротехника с железом, релятивистские законы движения, эйнштейновская теория гравитации — все это «от роду» нелинейно. Но в каждой из названных областей нелинейность всегда воспринималась как некая специфическая неприятность, как «своя» нелинейность в данной области. Первым, кто остро осознал необходимость выработки «нелинейного физического мышления», был именно Мандельштам. Он четко поставил

эту задачу в своем замечательном докладе на конференции по колебаниям в 1931 г., поставил применительно к теории колебаний и радиотехнике. Нелинейность вошла в радиотехнику, начиная с искрового пробоя и с когерера Бранли, но с появлением электронных ламп и автогенераторов незатухающих колебаний она сделалась жизненной проблемой. В ту пору никто не понимал отчетливее и яснее Мандельштама, что большие возможности классической линейной теории колебаний, начавшейся с Лагранжа и в большей мере завершенной Рэлеем, все же ограничены и что широчайший круг физических и технических вопросов требует создания нового подхода, новой — нелинейной — теории.

Вы, конечно, знаете, как развивался нелинейный математический аппарат теории колебаний, ее нелинейный язык, как выработывались самим Мандельштамом или при его участии нелинейные понятия и нелинейная интуиция. Подводя итог этому процессу в 1944 г., Андронов предлагал сравнить положение дел в 1927 г., когда имелись лишь пионерские работы Ван-дер-Поля, Эпплтона и немногих других авторов, с положением в 1944 г., когда уже находилась на вооружении качественная теория дифференциальных уравнений А. Пуанкаре, была развита теория разрывных автоколебаний, началось вторжение в теорию автоматического регулирования и сделаны первые шаги в распределенных нелинейных системах.

Закономерно продолжить сегодня это сопоставление и сравнить положение вещей в 1944 г. с 1979 г. Нелинейное мышление вторглось в теорию полей, в волновые задачи, в распространение электромагнитных волн и в том числе (из-за лазеров) в оптику. Сама школа, на открытии которой мы присутствуем, посвящена нелинейным волнам. Я не говорю уже о дальнейшем развитии нелинейной акустики. Более того, даже специалисты в области квантовой механики сознают, что достижение общей теории элементарных частиц и всех видов их взаимодействий невозможно в рамках линейной теории ψ -волн, а требует, видимо, самосогласованной нелинейной теории разных ψ -функций.

Таким образом, мандельштамовская идея выработки нелинейного мировоззрения охватила всю физику, и трижды прав был Андронов, когда он закончил свое выступление словами: «Идеи Леонида Исааковича Мандельштама в области теории нелинейных колебаний < . . . > имеют непреходящее значение. Этим идеям предстоит интенсивное развитие и богатая событиями жизнь».

Что дает мне основание переносить идеи теории колебаний на всю физику? Это особое положение теории колебаний, новое мандельштамовское понимание фундаментальной роли теории колебаний в развитии всей физики, к которому он пришел в Боровом и которое, разумеется, тут же захотел поведать всем, задумав новый курс теории колебаний. Уже совсем большой, он начал этот курс в 1944 г., но успел прочесть только четыре лекции.

Вы знаете, что первоначальное деление физики на ее традиционные области — механику, акустику, оптику и т. д. — имело

антропоморфный характер. Это было деление по нашему восприятию явлений. В рамках этого деления выросло достаточно глубокое знание законов внутри каждой из таких областей, что и подготовило почву к установлению общности законов, к тому, что Андронов назвал позднее — применительно к теории колебаний — изоморфизмом закономерностей. Это более поздний этап и соответственно более высокий вид классификации явлений — не по их восприятию, а по общности закономерностей. Такая классификация обладает огромной эвристической силой.

Уже Рэлей в своей «теории звука» написал дополнительную главу об электрических колебаниях, подчеркнув, что оба вида малых колебаний — звуковые и электрические — это одно и то же, как говорится один к одному. Но при дальнейшем развитии нелинейной теории колебаний принцип изоморфизма поднялся от тождественности уравнений на более высокий уровень. Не простое тождество уравнений, а принадлежность разных уравнений к одному и тому же типу или классу — в смысле топологической структуры фазового пространства. Вслед за Мандельштамом мы говорим теперь не только об общеколебательных, но и об общеволновых законах, хотя общей качественной теории какого-то функционального фазового пространства для полей пока не существует.

Поскольку и в указанной более развитой форме принципа изоморфизма речь идет об уравнениях, в каком-то смысле, говорил Мандельштам, все это математика. Но он же подчеркивал, что этот принцип нельзя считать чистой математикой. Ведь в отличие от чистой математики физические уравнения — это математическое выражение физических законов, уравнения для физических величин, которые мы обязаны так или иначе уметь измерять. Эти уравнения подконтрольны опыту, и тем самым даже наиболее общие аксиомы (например, вариационные принципы), из которых эти уравнения можно вывести, не являются результатом абстрактного соглашения, а отражают, как устроена природа. Поэтому и изоморфизм закономерностей — это не следствие каких-то логических упражнений, не что-то принимаемое априори, а тоже отражение того, что имеет место в природе. Поэтому же, как выразился Мандельштам, «именно физика учит нас, как допрашивать дифференциальные уравнения».

Поскольку изоморфизм закономерностей не априорен, он может оказаться и не универсальным. Но в теории колебаний с ее общефизическим значением он установлен с очень большой надежностью и уже широчайшим образом оправдал себя как при изучении известных, так и при открытии новых явлений. Я имею в виду мандельштамовскую идею «колебательный взаимопомощи» традиционных разделов физики, тот «интернациональный» язык теории колебаний, на котором эти разделы, говорящие на своих «национальных» языках, могут общаться между собой.

Вряд ли надо приводить относящиеся сюда высказывания из лекций и докладов самого Мандельштама. Кроме его собствен-

ных выступлений, их можно найти почти у всех, кто о нем писал. Я хотел бы только подчеркнуть то изумительное искусство, с каким сам Мандельштам пользовался этой колебательной взаимопомощью и в собственных исследованиях, и в своих лекциях. Это искусство позволяло ему с легкостью перебрасывать мосты между традиционно «разными» явлениями: от радио к оптике во времена Страсбурга, от оптики к радио в московские времена — при развитии радиоинтерференционных методов, и снова от радио к оптике в рэлеевском и комбинационном рассеянии. В учении о резонансе, в модуляции, в параметрике, где угодно, он без малейшего усилия привлекал и механику, и электродинамику, и оптику, и акустику, и молекулярную физику, и квантовую механику. Можно сказать, что традиционное деление физики не играло для него роли, но только там, где действительно справедлив изоморфизм закономерностей. С не меньшей ясностью он видел и специфические особенности разных областей физики.

Вообще в нем удивительным образом сочетались любовь к широким обобщениям и зоркое, обостренное восприятие конкретного факта, в нем сочетались, как сказал Тамм, ум абстрактный и ум пластический.

Конечно, вы слышали о последних достижениях психологической науки, установившей разную роль обоих полушарий мозга: правое оперирует конкретными понятиями, образами, а левое постигает абстракции, логическую структуру и т. п. У всех людей оба полушария связаны между собой, но у Мандельштама это была, по-видимому, какая-то особая, сильная связь...

Быть может, самым ярким и значительным примером выявления специфичности определенной области физики служит проведенный им анализ вопроса о том, что означает измерение в доквантовой и в квантовой физике. Его теория косвенных измерений в квантовой механике, опередившая близкие в некоторых отношениях идеи Гейзенберга, — это, по свидетельству самих квантовиков (в частности, И. Е. Тамма), был оригинальный и весомый вклад в понимание самой квантовой теории.

Лучше всех об идее колебательной взаимопомощи и ее превращении в жизнь самим Мандельштамом написал Андронов. Я не буду развивать эту тему дальше, так как на сегодня колебательная и волновая взаимопомощь уже давно вошла в физический обиход.

Последнее, на чем нельзя не остановиться, — это преподавание Мандельштама, его лекции, семинары и вообще его выступления. Много и многими написано о совершенно особой эмоциональной атмосфере, которую создавали выступления Мандельштама. Его лекции и доклады захватывали аудиторию, заставляли ее испытывать радостное возбуждение, забывать обо всем на свете и переживать услышанное. Даже люди, далекие от физики, бывали потрясены. После доклада Мандельштама о радиоинтерференции (1938) академик А. Е. Ферсман написал ему письмо: «Считаю совершенно необходимым выразить глубочайшую мою

благодарность за тот замечательный доклад, который Вы прочли на Общем собрании Академии». И в конце письма: «Еще раз благодарю Вас за исключительное наслаждение, которое я получил от Вашего доклада».

Врач санатория «Боровое» С. И. Бражников вспоминает о докладе «Об оптических работах Ньютона», прочитанном Мандельштамом академиком, жившим во время эвакуации в этом санатории (этот доклад включен в юбилейный сборник). Бражников пишет, что по окончании доклада воцарилась тишина, а потом грянул взрыв аплодисментов.

«Оружием» Мандельштама было не красноречие, не ораторские ухищрения, а замечательное умение поразить слушателей, зажечь их интерес и заставить их увидеть вопросы там, где, казалось бы, уже все ясно в силу сказанного ранее. Он побуждал слушателей и ловить каждое слово, и напряженно думать. Этой цели служили, в частности, и парадоксы, к которым он любил прибегать. Но это было только «оружие». А в чем заключался корень или «секрет» такого воздействия?

В моих воспоминаниях, написанных для сборника, я указал на обостренное чувство стиля и формы у Мандельштама, на его умение излагать вопрос не только убедительно и «прозрачно», но и красиво. Конечно, я имел при этом в виду не «красоты стиля», а подлинную красоту изложения, к которой он старался приблизить и работы своих учеников.

Недаром П. Л. Капица сказал однажды, что, по его мнению, Мандельштам, конечно, эстет.

Но сейчас я понял, что это не главное.

Преподавание Мандельштама не имело ничего общего с традиционным университетским преподаванием. Это не было многократное чтение курса из учебного плана, хотя бы и с ежегодными дополнениями и улучшениями. Все его восемь семинаров и шесть лекционных курсов в Москве были совершенно различны по тематике или по содержанию. Даже курс теории колебаний, начатый в 1944 г., вовсе не был воспроизведением курса под тем же названием, прочитанного в 1930—1932 гг., а был по замыслу совершенно иным. И я вижу теперь, что главное заключалось в том, что Мандельштам не просто любил и умел учить, а в том, что его лекции, семинары, доклады были необходимы и ему самому. Он жаждал поделиться своими идеями, плодами своих размышлений как по специальному, более узкому вопросу, так и общезначимым.

Поэтому его преподавание не было обычным обучением физике, а было прежде всего школой физического мышления.

Поэтому его выступления были захватывающе интересны не только физикам.

Поэтому они не устаревают и не могут устареть, несмотря на свою давность.

Мой вам совет: читайте Мандельштама. Не бойтесь потратить на это время. Это, как говорил сам Мандельштам о произведениях

классиков, «настоящее чтение». Нельзя ограничиваться только знанием законов физики и умением считать. Надо понимать дух этой науки, учиться физически мыслить, приобретать физическую интуицию. Быть может, это даже более важно, чем усвоение формально-логической стороны. И именно такому, глубокому пониманию учат лекции Мандельштама.

Здесь присутствуют старшие товарищи, заведомо читавшие лекции и выступления Мандельштама. Они подтвердят вам, что я несколько не преувеличиваю.

Более того, я уверен, что, начав читать лекции Мандельштама, вы сами не сможете остановиться. Они вас захватят, каждый почерпнет из них что-то свое, и, как и при чтении выдающихся произведений литературы, при перечитывании вы будете открывать для себя все новое и новое.

УДК 534.222.2

ГОРЕНИЕ: НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕМПЕРАТУРНАЯ ВОЛНА В ВЕЩЕСТВЕ, ВЫДЕЛЯЮЩЕМ ТЕПЛО

Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ

1. ВВЕДЕНИЕ

Локальное выделение тепла при учете теплопроводности вызывает распространение тепла в пространстве. В инертном веществе сохранение энергии приводит к понижению температуры. Градиент температуры при этом уменьшается как за счет увеличения линейных размеров нагретой области, так и вследствие понижения температуры. Естественно, снижается скорость распространения тепла.

В классической линейной задаче (рис. 1)

$$T = T_0 + \frac{Q}{(\chi t)^{3/2}} \exp(-r^2/4\chi t), \quad \chi = \frac{\kappa}{c},$$

расстояние, на котором температура равна половине максимальной (отсчитанной от T_0),

$$r_{1/2} = \sqrt{4\chi t \ln 2}, \quad \text{а } dr/dt = u = \text{const}/\sqrt{t}.$$

Мы не останавливаемся на доказательстве устойчивости этого решения [1] и на обобщении, связанном с зависимостью теплопроводности κ от T [2—4]. Существенно здесь убывание скорости u с течением времени. Рассмотрим среду, в которой при высокой температуре происходят процессы, — конкретно: необратимые химические реакции, сопровождающиеся выделением энергии

(см. общий обзор [5]). Очевидно, что в этом случае возможен эстафетный механизм распространения тепла, выделившегося в некоем слое x_1 , в следующий слой x_2 (рис. 2). При этом достигаемая температура определяется теплотворной способностью и теплоемкостью вещества, волна распространяется, не затухая по амплитуде, и с постоянной скоростью.

Вычисление скорости распространения и структуры переходной зоны составляет предмет теории горения или, точнее, теории равномерного распространения пламени. В принципе частью

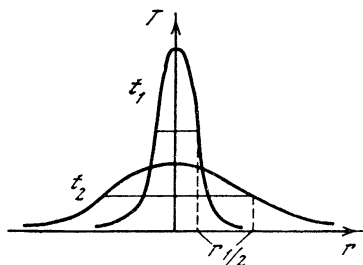


Рис. 1

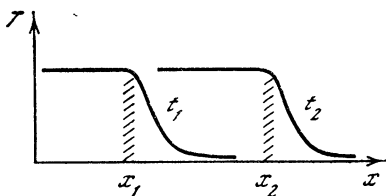


Рис. 2

этой теории является и рассмотрение процесса зажигания, т. е. начального периода после введения тепла извне. Спустя некоторое время роль начального импульса убывает, так как горение доставляет все возрастающее количество тепла, к тому же путь, пройденный пламенем, пропорционален времени, и поэтому с течением времени влияние начального импульса на фронт пламени сглаживается. Стационарное распространение пламени, описываемое зависимостью температуры и других величин от x и t вида $f(x-ut)$, является асимптотикой общей нестационарной задачи с произвольными начальными условиями.

По соображениям размерности зона химической реакции имеет толщину порядка $l=ut$ (τ — время реакции), выделение тепла в единицу времени на единицу площади $W=Qu=c(T_b-T_0)u$, градиент температуры $(T_b-T_0)/u\tau$ и поток тепла $\kappa(T_b-T_0)/u\tau$. Поток тепла из слоя в слой составляет определенную постоянную безразмерную долю химического выделения тепла в единицу времени. Опуская безразмерные множители, получим

$$\kappa(T_b - T_0)/u\tau = c(T_b - T_0)u, \quad u \sim \sqrt{\kappa/c\tau}.$$

Эту оценку скорости можно получить и непосредственно из представления об эстафете, в которой скорость обратно пропорциональна корню из времени бега и бегуны сменяют друг друга через время τ .

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

В точной постановке задачи скорость реакции зависит от температуры и концентрации реагирующих веществ. Это принципиально важно, потому что окончание реакции при определенной

$T = T_b$ определяется расходом исходных веществ, тогда как удельная скорость реакции (при постоянной концентрации) продолжает расти и при $T = T_b$, и при $T > T_b$. Таким образом, нужно решать систему уравнений теплопроводности и диффузии с источниками.

В смеси газов близких молекулярных масс (O_2 , N_2 , CO , CH_4 , C_2H_4 , H_2O , CO_2) коэффициент диффузии отдельных компонентов и коэффициент диффузии тепла κ/c приблизительно равны между собой (обозначим их одной буквой D). В простейшем случае химической реакции правые части в уравнениях диффузии и теплопроводности пропорциональны одной и той же величине скорости реакции. Отсюда следует простая алгебраическая связь между концентрациями и температурой (рис. 3), выражающая подобие теплового и концентрационного полей:

$$\frac{T(x) - T_0}{T_b - T_0} = \frac{C_i(x) - C_0}{C_b - C_0}.$$

Благодаря этому в указанных упрощающих предположениях о диффузии и кинетике реакции все $C_i(x)$ можно выразить через $T(x)$. Подставляя $C_i(x)$ в выражения для скоростей реакции и выделения тепла, получим

$$W(x) = W[C_i(x), T(x)] = W[C_i(T), T] = W(T),$$

причем новая функция $W(T)$ уже тождественно обращается в нуль при $T = T_b$ за счет того, что $C_i(T_b) = 0$ для исходных веществ.

Окончательно задача формулируется так:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W(T) \quad (1)$$

с граничными условиями $T = T_0$ при $x = +\infty$, $T = T_b$ при $x = -\infty$ и $W(T_b) = 0$. Удобно преобразовать уравнение (1) к безразмерным параметрам $T = T_0 + (T_b - T_0)\theta$, так что $0 \leq \theta \leq 1$, $y = x/\sqrt{D}$, $w = W/(T_b - T_0)$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + w(\theta). \quad (2)$$

Ищем решение вида

$$\theta = \theta(y - vt) = \theta(\xi), \quad \xi = y - vt, \quad v = x/\sqrt{D}. \quad (3)$$

Подставляя θ такого вида в (2), получим

$$-v \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + w(\theta).$$

Понижая порядок уравнения обычным образом, получим

$$\begin{aligned} -v \frac{d\theta}{d\xi} &= p, & \frac{d}{d\xi} &= -\frac{p}{v} \frac{d}{d\theta}, \\ p &= \frac{p}{v^2} \frac{dp}{d\theta} + w(\theta), & \frac{dp}{d\theta} &= \frac{v^2}{p} [p - w(\theta)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что граничное условие $\theta=0$ и $\theta=1$ при $\xi=\pm\infty$ включает $d\theta/d\xi=0$ при $\xi=\pm\infty$. Следовательно, на уравнение первого порядка для $p(\theta)$ наложены два условия $p(0)=0$ и $p(1)=0$, что позволяет определить значение параметра v .

В первых работах [6] $w(\theta)$ заменяли кусочно-постоянной функцией (рис. 4)

$$w=0, \quad 0 < \theta < \theta_i; \quad w=1/\tau, \quad \theta_i < \theta < 1,$$

что соответствовало предположению о том, что существует определенная температура воспламенения T_i и соответствующее значение

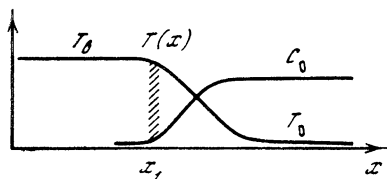


Рис. 3

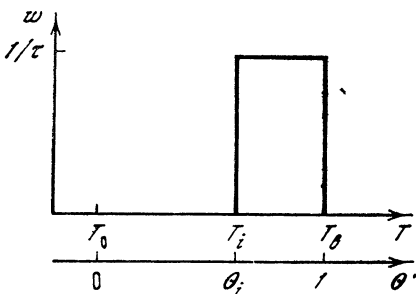


Рис. 4

ние $\theta_i=(T_i-T_0)/(T_b-T_0)$. Ниже T_i реакция совершенно не идет, выше T_i скорость реакции постоянна.

В этом случае легко проинтегрировать уравнение на обоих участках, удовлетворяя обоим граничным условиям.

Условие сшивания двух решений при $\theta=\theta_i$ дает трансцендентное уравнение, решение которого имеет вид

$$v^2 = \frac{1}{\tau} f(\theta_i).$$

Однако представление о температуре воспламенения противоречит современной картине химических реакций. При наличии максвелловского распределения молекул по энергиям реакция в принципе идет при любой температуре со скоростью, пропорциональной аррениусовскому множителю $e^{-A/RT}$, где A — так называемая энергия активации реакции. Воспламенение газа есть явление вторичное, зависящее от соотношения между выделяемой энергией и условиями отвода тепла; в этом отношении T_i не похожа на температуру плавления или кипения (до Семенова любопытные замечания на этот счет содержались у Вант-Гоффа и Таффанеля).

В выражении $w(T)$ учет зависимости скорости реакции от концентрации и учет связи концентрации и температуры приводят окончательно к виду

$$w = K_0 (T_b - T)^n e^{-A/RT},$$

$$w(\theta) = \text{const} (1 - \theta)^n \exp \left[-\frac{\alpha(1 - \theta)}{1 + (\theta - 1)\beta} \right],$$

где $\alpha = A(T_b - T_0)/RT_b^2$, $\beta = 1 - T_0/T_b$, n — порядок реакции.

Итак, w обращается в нуль при $T = T_b$, $\theta = 1$, но тем не менее обычно имеет место $A/RT_b \gg 1$, и функция w имеет резко выраженный максимум при T , близком к T_b , при $1 - \theta \ll 1$ (рис. 5). В этом случае Зельдович и Франк-Каменецкий [7] предложили эффективный приближенный метод интегрирования уравнения (4): в области θ от 1 до максимума пренебрегаем в скобке p по сравнению с w и получаем

$$p dp \approx -v^2 w(\theta) d\theta, \quad p_1 = v \left(2 \int_{\theta_1}^1 w(\theta) d\theta \right)^{1/2}.$$

При этом уже при $1 - \theta_{\max} < 1 - \theta_1 \ll 1$ достигается максимальное значение

$$p_{\max} = v \left(2 \int_0^1 w(\theta) d\theta \right)^{1/2}.$$

Следующее, второе приближение состоит в том, что в области, где w , пройдя максимум, стало малым, пренебрегаем w по сравнению с p . Получим

$$p = p_1 - v^2(\theta_1 - \theta) \approx p_{\max} - v^2(1 - \theta).$$

Это решение, удовлетворяющее условию $\theta = 1$, $p = 0$, продолжаем до $\theta = 0$. Имеем $p(0) = p_{\max} - v^2$, и условие $p(0) = 0$ дает искомого величину

$$v = \left(2 \int_0^1 w(\theta) d\theta \right)^{1/2}.$$

В размерном виде получается

$$u = \left[\frac{2x}{c(T_b - T_0)} \int_{T_0}^{T_b} w(T) dT \right]^{1/2}.$$

При большой теплоте активации, когда только и справедлива формула, интеграл берется. Например, для реакции первого порядка со скоростью $w = K_0 C_1 e^{-A/RT}$ получим

$$u = \exp(-A/2RT_b) \frac{RT_b^2}{A(T_b - T_0)} \left(\frac{2K_0 C_{10} x}{c} \right)^{1/2}.$$

Физическая картина, соответствующая этой формуле, состоит в том, что реакция в пламени всегда идет при температуре, близкой к максимальной. Этот результат не тривиален, так как максимальная температура зависит от начальной концентрации горючего. Естественный вопрос заключается в том, почему в случае богатой смеси реакция идет при высокой температуре (и при этом можно пренебречь реакцией при более низкой температуре, хотя для бедной смеси именно эта реакция является определяющей). Ответ заключается в том, что при высокой температуре горения

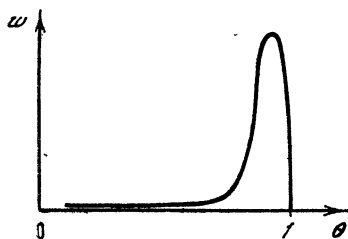


Рис. 5

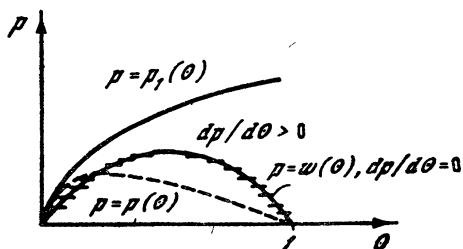


Рис. 6

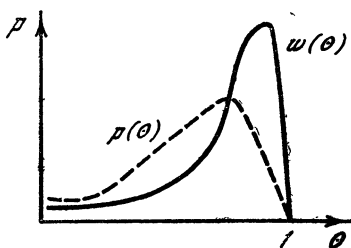


Рис. 7

скорость пламени велика и поэтому зону низкой температуры газ проходит быстро, не успевая прореагировать. При низкой температуре горения пламя распространяется медленно, как раз так, чтобы реакция успела пройти. Позднее было показано, что решение является единственным, найдена ошибка приближенной формулы, пропорциональная RT_b/A , получены поправочные члены, проведено — с удовлетворительными результатами — сравнение с экспериментом.

Примерно за год до работы Зельдовича и Франк-Каменецкого [7] Колмогоров, Петровский и Пискунов [8] рассмотрели аналогичную задачу о вытеснении одного биологического вида другим, более приспособленным. Задача свелась к уравнению диффузии, не отличающемуся от уравнения теплопроводности, с функцией генерации w вида $K\theta(1-\theta)$, с пологим максимумом в середине интервала при $\theta=1/2$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + K\theta(1-\theta). \quad (5)$$

Они искали решение вида $\theta = \theta(y-vt)$ и получили уравнение

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} = \frac{v^2}{p} [p - K\theta(1-\theta)].$$

Рассмотрим решения, входящие в точку $\theta=0$, $p=0$ по закону $p=a\theta$. Получим

$$a = \frac{v^2}{a\theta} (a\theta - K\theta), \quad a = \frac{v^2}{2} \pm \left(\frac{v^4}{4} - Kv^2\right)^{1/2}.$$

Условие существования вещественного решения

$$v = 2\sqrt{K}, \quad a = 2K.$$

В фазовой плоскости θ, p (рис. 6) линия $p = K\theta(1 - \theta) = w(\theta)$ есть изоклина нулей; $p = p_1(\theta)$, выходящая из начала как $p(\theta) = 2K\theta$, есть одно из решений. Легко убедиться, что существует частное решение (оно не выражается через элементарные функции), выходящее из $\theta = 1, p = 0$ в сторону уменьшения θ и увеличения p , пересекающее изоклину при $\theta < 1/2$ и асимптотически приближающееся к частному решению $p = p_1(\theta)$ при $\theta \rightarrow 0$. Рассматривая фазовую плоскость, можно убедиться, что решения нет при $v < 2\sqrt{K}$ и что решение есть при любом $v \geq 2\sqrt{K}$. Таким образом, новый момент, отмеченный в работе Колмогорова, Петровского и Пискунова [8] с $w(\theta=0)=0$, но $dw/d\theta|_0 \neq 0$, заключается в том, что спектр возможных значений скорости есть континуум, ограниченный снизу $v_{\min} = 2\sqrt{K}$. Физический смысл результата ясен. При $v \geq 2\sqrt{K}$ распространение тепла представляет собой последовательный взрыв не взаимодействующих между собой слоев.

В самом деле, при отсутствии теплопроводности (пренебрегая $d^2\theta/dy^2$ в уравнении (5)) получим

$$d\theta/dt = K\theta(1 - \theta),$$

время реакции $t_p = \frac{1}{K} \int_{\theta_0}^1 \frac{d\theta}{\theta(1-\theta)} \sim \frac{1}{K} \ln \frac{1}{\theta_0}$. Зададим начальное рас-

пределение $\theta_0 = e^{-\alpha y}$, получим $t_p = \alpha y_p / K$, т. е. $y_p = K t_p / \alpha$ и при $\alpha \rightarrow 0$ можно получить распространение с любой сколь угодно большой скоростью. Такой режим распространения, обусловленный начальными условиями, есть режим адских машин со сферизованной установкой взрыва, скорость распространения может превзойти скорость света¹. Авторы [8] показывают, что при естественных начальных условиях $\theta=0$ при $y > y_0$ возникает режим с $v = v_{\min} = 2\sqrt{K}$.

Вернемся к случаю $w \sim (1 - \theta)^n \exp\left[\frac{\alpha(1 - \theta)}{1 + \beta(\theta - 1)}\right]$ (закон Арениуса для реакции n -го порядка). Единственное решение было получено за счет того, что рассматривается вклад w в окрестности максимума. При этом молчаливо был опущен тот факт, что при $\theta=0$ величина w хотя и весьма мала, но, строго говоря, отлична от 0. Так как изоклина нулей есть $p=w$, то решения, которое вышло бы из $\theta=1, p=0$ и приходило в $\theta=0, p=0$, вообще не существует (рис. 7). Физически результат вполне понятен: при наличии реакции в начальном состоянии процесс происходит полностью за определенное время независимо от прихода тепловой волны (пламени). Следовательно, в достаточно длинной трубе точное решение вида $T(x - ut)$ не может существовать сколь угодно долго. С течением времени самопроизвольная реакция перед фронтом перебивает такое решение. В рамках общей задачи о не-

¹ О таких режимах см. [9].

стационарной реакции с теплопередачей распространение пламени есть промежуточная асимптотика — между моментом, когда сглаживается влияние начального импульса, и моментом окончания спонтанной реакции вдали от места зажигания. Трудность, связанную с тем, что формально решения нет при $w(\theta=0) \neq 0$, ранее преодолевали искусственно, полагая $w \equiv 0$ при $\theta < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, лишь недавно было найдено [10] решение такой задачи.

Запишем снова

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W(T) \quad (6)$$

и будем искать решение в виде суммы

$$T = T_a(t) + [T_b - T_a(t)] \theta \left(x - \int u dt, t \right), \quad (7)$$

где $T_a(t)$ — температура, получавшаяся при адиабатической реакции вдали от фронта. Определяем ее уравнением

$$dT_a/dt = W(t), \quad \text{при } t=0 \quad T_a = T_0,$$

отбрасывая теплообмен. Вдали от фронта такое приближение оправдано.

Так как ситуация перед фронтом медленно изменяется, то естественно, что изменяются и скорость пламени, и профиль фронта пламени. Это обстоятельство выражено в функциональной записи $\theta \left(x - \int u dt, t \right) = \theta(\xi, t)$, а из условия $x - \int u dt = \text{const}$ скорость $dx/dt = u(t)$. Изменение формы фронта считаем медленным, т. е. пренебрегаем $\partial \theta / \partial t|_{\xi}$. Подставляя решение предлагаемого вида в исходное уравнение, получим

$$u \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + w_m(\theta).$$

Величина w_m — модифицированная функция источника,

$$w_m = \frac{1}{T_b - T_a(t)} \left[W(T) - \frac{T_b - T}{T_b - T_a} W(T_a) \right],$$

причем T является функцией θ (см. уравнение (7)). В другой записи

$$w_m = w(\theta) - (1 - \theta)w(0).$$

Основной результат заключается в том, что при подстановке в (6) решения в разумной форме модифицированная функция источника становится такой, что она тождественно равна нулю перед фронтом пламени в каждый момент. Следовательно, предлагаемое решение не сталкивается больше с принципиальными трудностями, которые получались ранее при учете $w(T_0) \neq 0$. Численный эксперимент, проделанный Алдушиным и Худяевым [11, 12], прекрасно подтверждает предлагаемую приближенную схему.

Наконец, обратимся к вопросу устойчивости решения, описывающего распространение пламени с постоянной скоростью в случае $W(T_0)=0$. Рассмотрим устойчивость по отношению к малым возмущениям. Для этого решение нестационарного уравнения ищем в виде

$$T = T_s(x - ut) + \sum a_i e^{\lambda_i t} \psi_i(x - ut),$$

считаем a_i малыми и пренебрегаем их произведениями. Полагая, что T_s есть решение стационарного уравнения, получим для определения λ_i и ψ_i уравнения ($\xi = x - ut$, $x/c = 1$)

$$\lambda_i \psi_i - u \frac{d\psi_i}{d\xi} = \frac{d^2\psi_i}{d\xi^2} + U(\xi) \psi_i, \quad (8)$$

где роль потенциала $U(\xi)$ играет $U = dW(T)/dT - \Phi(T)$, вычисленная во возмущенном решении $T_s(\xi)$. Уравнение (8) несамосопряженное, однако его легко привести к такому подстановкой

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi) e^{-u\xi/2}, \quad \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = e^{-u\xi/2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - u \frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{u^2}{4} \varphi \right),$$

так что окончательно

$$\lambda_i \varphi_i = \frac{d^2\varphi_i}{d\xi^2} + \left[U(\xi) - \frac{u^2}{4} \right] \varphi_i.$$

По замечанию Зельдовича и Баренблатта [13], основной результат — доказательство устойчивости — может быть получен без всяких конкретных расчетов.

В самом деле, очевидно, что возмущенное решение определено лишь с точностью до сдвига, $T(x - ut + \delta)$ является решением, если $T(x - ut)$ — решение. Это можно проследить и формально, замечая, что после решения уравнения первого порядка $p = d\theta/d\xi$ остается найти квадратуру $\xi = \int d\theta/p(\theta)$, и при этом появляется константа интегрирования

$$\xi = f(\theta) \text{ const}, \quad \theta = \theta(\xi - \text{const}).$$

Теперь заметим, что для малого δ можно записать

$$T(x - ut + \delta) = T(x - ut) + \delta dT(x - ut)/dx.$$

Это выражение можно рассматривать как частный случай возмущения

$$\delta \frac{dT_s}{dx} = a_i e^{\lambda_i t} \varphi_i e^{-u\xi/2}.$$

При этом констатируем, что существует решение с $\lambda_i = 0$. Функция $\varphi_i(\xi) = \frac{dT_s}{d\xi} e^{u\xi/2}$ везде отрицательна, она не имеет узлов. Отсюда по теореме Штурма—Лиувилля следует, что эта функция является нулевой в ряду собственных функций

$$\lambda_0 = 0, \quad \varphi_0(\xi) = \frac{dT_s}{d\xi} e^{u\xi/2}.$$

Все следующие функции $\varphi_n(\xi)$ имеют n узлов ($n > 0$), и соответствующие λ_i все отрицательны. Но это означает, что решение устойчиво. Малое возмущение приводит лишь к сдвигу пламени ($x - ut \rightarrow x - ut + \delta$), не меняя его формы (рис. 8, а).

Можно сделать еще один шаг [14]. Представим себе (рис. 8, б), что перед фронтом задано некое малое возмущение начальной температуры: $t=0$, $T=T_0+f(x)$, $f \neq 0$, $x_1 < x < x_2$. Подразумевается, что имеет место соответствующее возмущение концентрации, та-

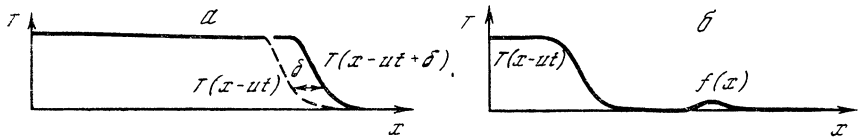


Рис. 8

кое, что вид функции $W(T)$ и, в частности, температура горения T_b (условие $W(T_b)=0$) не возмущены. Тогда применима теория возмущений в том виде, как она записана выше.

Домножим $f(x)$ на $\int e^{u x/2}$ (в связи с операцией перехода от φ к φ , которое подчиняется самосопряженному уравнению) и найдем амплитуду φ_0 из условия

$$a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f e^{u x/2} \varphi_0 dx \Bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^2 dx. \quad (9)$$

При этом $\varphi_0 = \psi_0 e^{u x/2}$, но вдали от фронта $\psi_0 = \partial T_s / \partial x = b e^{-u x}$.

Следовательно, в числителе (9) стоит просто $b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, а выра-

жение в знаменателе сводится к $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial T_s}{\partial x} \right)^2 e^{u x} dx$. Нетрудно убе-

диться, что этот интеграл сходится. Смещение пламени δ выражается, таким образом, через интеграл возмущения начальной температуры $\int f(x) dx$ и интеграл по стационарному решению.

С другой стороны, для малого плавного и растянутого возмущения начальной температуры смещение фронта может быть выражено через производную скорости по начальной температуре:

$$x - \int u dt = x - u_0 t + \int \frac{du}{dT} f(x) dt = x - u_0 t + \frac{1}{u_0} \frac{du}{dT} \int f(x) dx.$$

Таким образом получаем du/dT , выраженное через $T_s(\xi)$ и его производную $dT_s/d\xi$, найденные при фиксированной T_0 . Более того, доказано, что общее смещение пламени при прохождении зоны переменной начальной температуры равно $\frac{1}{u} \frac{du}{dT} \int f(x) dx$,

даже если возмущение $f(x)$ меняется не плавно на длине порядка ширины фронта.

Без вычислений удается также установить устойчивость фронта по отношению к его искривлению в двумерной и трехмерной задачах [15]. Рассмотрим распространение в цилиндрической или сферической задачах. Очевидно, вместо $\partial^2 T / \partial x^2$ в уравнении (6) фигурирует градиент температуры ΔT , который записывается как $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{g}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$, где $g=1$ для цилиндрической и $g=2$ для сферической геометрии.

Будем искать стационарные решения в виде $T = T(\xi)$, где $\xi = r \pm \int u dt$, знак «плюс» соответствует сходящемуся, а минус — расходящемуся пламени. Легко получим уравнение

$$\left(u \pm \frac{\kappa}{c} \frac{g}{r}\right) \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + W(T).$$

Отсюда следует, что скорость сходящегося пламени увеличивается, а расходящегося пламени уменьшается на $\kappa g / cr$. Вспоминая, что $\kappa / c = D$, а $\pm g / r$ есть гауссова кривизна поверхности, отчитанная по направлению распространения, обобщаем этот результат и записываем $\delta_u = DG$. Величина δ_u / G называется константой Маркштейна.

Знак константы таков, что слабо искривленное пламя будет приближаться к плоскому. Участки ушедшего вперед пламени (выпуклые) распространяются медленнее, а оставшиеся вогнутые участки распространяются быстрее, чем в среднем; плоское пламя как целое устойчиво по отношению к дву- и трехмерным возмущениям так же, как оно устойчиво по отношению к одномерным возмущениям распределения температуры.

Однако надо подчеркнуть, что вывод об устойчивости целиком связан с упрощающими предположениями о равенстве коэффициентов диффузии и теплопроводности и о том, что газ покоится. В 1943 г. было показано [16] (см. также [15]), что при $D > \kappa / c$ пламя двумерно-неустойчиво: усиление диффузии к выпуклым участкам пересиливает увеличение теплоотдачи. При $D \ll \kappa / c$ возникает одномерная неустойчивость¹: прогретый, но не потерявший горючего слой воспламеняется, затем пламя гаснет или почти гаснет, и снова накапливается прогретый слой. Это предвидели еще Льюис и Эльбе [19, 20], затем одномерную неустойчивость при горении пороха обнаружил автор [21], в последнее время ее исследовали Алдушин, Каспарян [18], наконец, Ландау [22] и независимо француз Даррье [23] показали, что расширение газа при горении приводит к гидродинамической дву- и трехмерной неустойчивости пламени. Однако все эти чрезвычайно интересные вопросы, включая взаимодействие тепловых диффу-

¹ Как было показано позже [17], при $D=0$ возникает также и двумерная неустойчивость (см. также более общий случай [18]: $0 < D < \kappa / c$).

зионных и гидродинамических факторов и нелинейные явления [15], связанные с неустойчивостью, уже далеко выходят за намеченные рамки статьи.

Я пользуюсь случаем выразить свою благодарность академику А. В. Гапонову-Грехову, по инициативе которого был прочитан этот доклад в рамках школы по нелинейным волнам. Я благодарен сотруднику Института химической физики Ю. В. Фролову за помощь в оформлении работы. Наконец, совместная работа с Д. А. Франк-Каменецким и Г. И. Баренблаттом в далеком прошлом и с А. П. Алдушиным в последние годы была весьма существенной для разработки изложенных идей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. — Докл. АН СССР, 1958, 118, с. 671.
2. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. — В кн.: Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950, с. 61.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн. М.: Физматгиз, 1963, с. 462.
4. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 208 с.
5. Зельдович Я. Б. Теория горения и детонации газов. М.: Изд-во АН СССР, 1946. 67 с.
6. Daniell P. Y. — Proc. Roy. Soc. London, 1930, 126A, p. 393.
7. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. — ЖФХ, 1938, 12, № 1, с. 100.
8. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. — Бюл. МГУ. Сер. А., 1937, 1, № 16, с. 1.
9. Зельдович Я. Б. Классификация режимов экзотермической реакции в зависимости от начальных условий. Препринт, Черноголовка, 1978.
10. Зельдович Я. Б. Распространение пламени по смеси, реагирующей при начальной температуре. Препринт, Черноголовка, 1978.
11. Алдушин А. П., Зельдович Я. Б., Худяев С. И. — Физ. горения и взрыва, 1980, 16, № 2.
12. Алдушин А. П., Зельдович Я. Б., Худяев С. И. Распространение пламени по реагирующей газовой смеси. Препринт, Черноголовка, 1979; Физ. горения и взрыва, 1979, 15, № 6, с. 20—27.
13. Zeldovich Y. B., Varenblatt G. I. — Comb. and Flame, 1959, 3, N 1, p. 61.
14. Зельдович Я. Б. — Докл. АН СССР, 1976, 230, № 3, с. 567.
15. Зельдович Я. Б. Структура и устойчивость стационарного ламинарного пламени при умеренно больших числах Рейнольдса. Препринт, Черноголовка, 1979.
16. Дроздов И. П., Зельдович Я. Б. — ЖФХ, 1943, 17, № 3, с. 134.
17. Махвиладзе Г. М., Новожилов Б. В. — ПМТФ, 1971, № 5, с. 51.
18. Алдушин А. П., Каспарян С. Г. — Докл. АН СССР, 1979, 244, № 1, с. 67.
19. Lewis B., Elbe G. Combustion flames and explosions of cases. N. Y.: Acad. Press, 1938.
20. Lewis B., Elbe G. — J. Chem. Phys., 1934, 2, p. 537.
21. Зельдович Я. Б. — ЖЭТФ, 1942, 12, с. 498.
22. Landau L. D. — ЖЭТФ, 1944, 14, № 6, с. 240.
23. Darriens G. — In: 6th Intern. Congr. Appl. Mech. Paris, 1946.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В БИОЛОГИИ

А. С. ДАВЫДОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди поисков различных подходов к решению на молекулярном уровне некоторых биологических проблем в последние годы привлекает внимание возможность применения методов теории твердого тела, использующей представления об элементарных возбуждениях выделенных коллективных степеней свободы.

Особенно часто делаются такие попытки применения методов теории твердого тела при выяснении высокой эффективности переноса энергии и электронов вдоль больших белковых молекул, обладающих квазипериодической структурой. К белкам этого типа, в частности, относятся α -спиральные белки, входящие в состав мышечных волокон, и некоторые другие.

Белковые молекулы являются самыми крупными и наиболее сложными из всех молекул, входящих в состав клеток живых организмов. Все они образуются при линейной полимеризации 20 различных аминокислот и представляют собой очень длинные полипептидные цепи, содержащие несколько сотен повторяющихся одинаковых пептидных групп. В состав каждой пептидной группы входят атомы водорода, азота, углерода и кислорода. Энергия первого вибрационного возбуждения отдельной пептидной группы равна около 0,21 эВ. Это возбуждение часто называют Амид-1.

В процессе жизнедеятельности живые организмы используют энергию, выделяемую при окислении пищевых продуктов. На первом этапе эта энергия затрачивается на синтез молекул аденозинтрифосфата (АТФ). Каждая молекула АТФ в присутствии специальных ферментов выделяет запасенную энергию (около 0,5 эВ) при отщеплении фосфорной кислоты. Такая энергия только в 20 раз превышает среднюю энергию теплового движения отдельной молекулы. Место выделения энергии при гидролизе молекул АТФ и место ее использования обычно находятся в разных участках белковой молекулы. Поэтому необходим перенос энергии возбуждения вдоль молекулы. В связи с этим возникает вопрос о механизме перемещения энергии по белковой молекуле.

В 1973 г. в Нью-Йорке состоялась конференция, посвященная исследованию механизма транспорта энергии в биологических системах [1]. Обсуждались три вопроса: 1. Имеется ли кризис в биоэнергетике? 2. Какова природа кризиса? 3. Как может быть разрешен этот кризис? Учитывая малую энергию, выделяемую при гидролизе молекул АТФ, ряд выступавших (Мак Клейр, Грин, Штауб, Шогет) высказали мнение, что в биологических системах вдоль белковых молекул переносится вибрационная энергия

возбуждения пептидных групп. Это мнение оспаривалось Вебером и др., которые утверждали, что из-за небольшого времени жизни (порядка 10^{-13} с) вибрационных возбуждений отдельных пептидных групп они не могут участвовать в переносе возбуждения.

Далее будет показано, что энергия гидролиза молекул АТФ может перемещаться вдоль α -спиральных белковых молекул практически без потерь в виде особых возбужденных состояний — солитонов.

Многие биологические процессы связаны также с переносом электронов вдоль белковых молекул. Таковы, например, движения электронов вдоль цепи электронного транспорта в фотосинтезирующих системах, по дыхательным цепям митохондрий и др. Установлено, что в некоторых случаях перемещение электронов осуществляется на расстояния, превышающие 30—70 Å. Перенос электронов без значительных потерь на такие большие расстояния на основе механизма туннелирования весьма маловероятен.

В отличие от переноса энергии нейтральными возбуждениями (солитоны, экситоны, фононы) перенос электрических зарядов (в отсутствие внешних источников (свет, электрическое и магнитное поля и др.) возможен только при наличии внутренних электрических полей и градиентов концентраций. Эти внутренние поля определяются окислительно-восстановительным потенциалом между донорной и акцепторной молекулами.

Вопрос о возможности перемещения электронов от донорной к акцепторной молекуле через белковую молекулу обсуждался в научной литературе неоднократно. При этом предполагалось, что «лишние» (избыточные) электроны перемещаются по зоне проводимости белковых молекул. В частности, такое предположение высказывалось крупным биохимиком Сцент-Дьерди [2]. Донорно-акцепторная модель переноса электронов через белки в последнее время развивалась в работе Петрова, Украинского и Харкянена [3] и в работе Давыдова [4]. Во всех исследованиях этого типа предполагалось, что при движении лишнего электрона не происходит изменения равновесных положений атомов в белковой молекуле.

В работе Давыдова [5] показано, что при таком упрощении теряются некоторые особенности движения электрона. Оказалось, что взаимодействие электронов со смещениями атомов в некоторых случаях стабилизирует его движение — наступает своеобразное явление квазисверхпроводимости. Вопросы перемещения электрона по квазипериодическим молекулярным системам при учете возможности смещений молекул из равновесных положений рассматриваются ниже.

Следует отметить, что все выводы этой статьи относятся только к одномерным системам. Без специального исследования они не могут быть перенесены на системы с большим числом измерений.

2. ЭКСИТОНЫ И СОЛИТОНЫ В ОДНОМЕРНЫХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ СИСТЕМАХ

Теоретическое исследование явлений переноса энергии и зарядов в сложных биологических молекулах, находящихся в водном окружении, неизбежно связано со значительными упрощениями и моделированием, отражающим только главные свойства рассматриваемых явлений.

В качестве грубой модели будем рассматривать молекулярную цепь большой длины, составленную из одинаковых групп атомов, например, пептидных групп, расположенных на расстоянии z_0 друг от друга. Такие группы атомов для простоты далее будут называться молекулами. Предположим, что эти молекулы имеют массу M и одно внутримолекулярное возбуждение дипольного типа.

Возбужденные состояния в такой одномерной квазипериодической цепи имеют коллективный характер, обусловленный резонансным взаимодействием между молекулами (J). Если не учитывать смещений равновесных положений молекул (см. ниже), то такие возбуждения описываются плоскими волнами

$$\psi_k = A \exp \{i [kz - \Omega(k)t]\} \quad (2.1)$$

с определенным значением волнового числа k ($-\pi/z_0 < k < \pi/z_0$) и энергии. Такие возбуждения называются экситонами. Энергия экситонов с малыми волновыми числами изображается простой формулой

$$\hbar\Omega(k) = \mathcal{E}_0 + \hbar^2 k^2 / 2m_{\text{экс}}, \quad z_0 k \ll 1, \quad (2.2)$$

где \mathcal{E}_0 — их внутренняя энергия, или энергия дна экситонной зоны,

$$m_{\text{экс}} = -\hbar^2 / 2Jz_0^2 \quad (2.3)$$

— эффективная масса экситона. Далее рассматривается случай, при котором дипольный электрический момент внутримолекулярного возбуждения направлен вдоль цепи. В этом случае эффективная масса экситона положительна. Возбуждения, описываемые плоскими волнами (2.1), распределены равномерно по всей цепи, поэтому они не переносят энергию.

Квазистационарные возбуждения, локализованные на отрезке l_0 , описываются волновыми пакетами

$$\Psi(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) \exp \{i [kz - \Omega(k)t]\} dk, \quad \Delta k = \frac{\pi}{2l_0}. \quad (2.4)$$

Такие возбуждения распространяются с групповой скоростью $V(k_0) = \hbar k_0 / m_{\text{экс}}$ и переносят энергию $E \approx \mathcal{E}_0 + \hbar^2 k_0^2 / 2m_{\text{экс}}$.

Вследствие дисперсии фазовых скоростей волн (2.1) волновой пакет (2.4) расплывается. Область, охваченная возбуждением, равная l_0 при $t=0$, к моменту времени t делается равной

$$l_t = [l_0^2 + (\hbar t / l_0 m_{\text{экс}})^2]^{1/2}. \quad (2.5)$$

Возбужденные состояния типа экситонов соответствуют при слабом взаимодействии внутримолекулярных возбуждений со смещениями молекул оператору энергии

$$H_{\text{экс}} = \sum_n \left[\left(\mathcal{E}_0 - \frac{\hbar^2}{m_{\text{экс}} z_0^2} \right) a_n^+ a_n + \frac{\hbar^2}{2m_{\text{экс}} z_0^2} (a_{n+1}^+ a_n + a_{n+1} a_n^+) \right], \quad (2.6)$$

где индекс n нумерует молекулы в цепочке, оператор a_n^+ соответствует переходу молекулы n в возбужденное состояние. Оператор a_n описывает обратный переход. Они удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям $[a_n, a_m] = \delta_{nm}$.

Если через u_n обозначить смещение молекулы n из ее равновесного положения, то взаимодействие внутримолекулярных возбуждений со смещениями в первом приближении можно описать оператором

$$H_{\text{вз}} = \chi_1 \sum_n a_n^+ a_n (u_{n+1} - u_{n-1}) + \chi_2 \sum_n (a_{n+1}^+ a_n + a_{n+1} a_n^+) (u_{n+1} - u_n), \quad (2.7)$$

который учитывает тот факт, что при смещении молекул из равновесных положений изменяются деформационное и резонансное взаимодействия между молекулами (χ_1 и χ_2 — параметры теории).

Роль оператора $H_{\text{вз}}$ в коллективном возбуждении обычно учитывается методами теории возмущений. В этом случае он приводит к рассеянию экситонов с потерей энергии на испускание фононов. Такое приближение оправдывается при сравнительно жестком закреплении молекул в их равновесных положениях или в случае движения экситонов с групповой скоростью, превышающей скорость продольного звука в цепи. В последнем случае не успевает установиться самосогласованное состояние между внутримолекулярными возбуждениями и изменениями равновесных положений.

Если указанные выше условия не выполняются, то внутримолекулярные возбуждения и смещения молекул следует рассматривать на равных правах без использования теории возмущений. Следовательно, возбуждения цепочки должны описываться полным гамильтонианом

$$H = H_{\text{экс}} + H_{\text{вз}} + H_{\text{фон}}, \quad (2.8)$$

который, кроме операторов (2.6) и (2.7), содержит оператор смещений

$$H_{\text{фон}} = \frac{1}{2} \sum_n \left[\frac{1}{M} p_n^2 + \kappa (u_n - u_{n-1})^2 \right], \quad (2.9)$$

где p_n — оператор импульса, канонически сопряженный оператору смещений u_n ; κ — коэффициент продольной упругости цепи, через который выражается скорость продольных звуковых волн:

$$V_{\text{а}} = z_0 \sqrt{\kappa/M}. \quad (2.10)$$

В работах Давыдова с сотрудниками [6—10] было показано, что оператор (2.8) характеризует очень устойчивые элементарные

возбуждения, распространяющиеся с постоянной скоростью вдоль цепи в виде уединенных волн — солитонов. Эти возбуждения соответствуют связанным состояниям экситонов и локальной деформации цепи.

Свойства солитонов описываются волновой функцией

$$\psi_{\text{сол}} = \sum_n A_n(t) e^{\sigma(t)} a_n^+ |0\rangle, \quad (2.11)$$

нормированной условием $\langle \psi_{\text{сол}} | \psi_{\text{сол}} \rangle = 1$, где $|0\rangle$ — функция состояния без внутримолекулярных возбуждений. В выражение (2.11) входит оператор смещений молекул из равновесных положений невозбужденной цепи

$$\sigma(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n [\beta_n(t) p_n - \pi_n(t) u_n].$$

Условие нормировки функции (2.11) выполняется, если

$$\sum_n |A_n(t)|^2 = 1.$$

Функции $|A_n(t)|^2$ характеризуют распределение внутримолекулярных возбуждений по цепи молекул, а функции $\beta_n(t)$ и $\pi_n(t)$ определяют средние значения смещений молекул из равновесных положений невозбужденной цепи и соответствующих импульсов в состоянии, определяемом функцией (2.11). В самом деле, можно убедиться, что выполняются равенства

$$\beta_n(t) = \langle \psi_{\text{сол}} | u_n | \psi_{\text{сол}} \rangle, \quad \pi_n(t) = \langle \psi_{\text{сол}} | \hat{p}_n | \psi_{\text{сол}} \rangle.$$

С помощью (2.8) и (2.11) можно вычислить функционал

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\text{сол}} | H | \psi_{\text{сол}} \rangle = & \sum_n \left[A_n^* \left(\mathcal{E}_0 - \frac{\hbar^2}{z_0^2 m_{\text{экс}}} \right) A_n + \right. \\ & + \frac{\hbar^2}{2z_0^2 m_{\text{экс}}} (A_{n-1} + A_{n+1}) + \chi_1 |A_n|^2 (\beta_{n+1} - \beta_n) + \\ & \left. + \chi_2 (A_n^* A_{n-1} + A_n A_{n-1}^*) (\beta_n - \beta_{n-1}) \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$W = \frac{1}{2} \sum_n \left[\frac{1}{M} \pi_n^2 + \kappa (\beta_{n-1} - \beta_n)^2 \right], \quad \sum_n |A_n(t)|^2 = 1.$$

Из условия минимума этого функционала получим систему уравнений, определяющих неизвестные функции $A_n(t)$, $\beta_n(t)$ и $\pi_n(t)$. В континуальном приближении, т. е. при замене этих функций функциями от непрерывной переменной, соответствующие уравнения имеют вид

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda + \frac{\hbar^2}{2m_{\text{экс}}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\chi z_0 \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) A(z, t) = 0, \quad \chi = \chi_1 + \chi_2, \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \beta(z, t) - \frac{2\chi z_0}{M} \frac{\partial}{\partial z} |A|^2 = 0, \quad (2.14)$$

$$\pi(z, t) = M \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad \frac{1}{z_0} \int |A(z, t)|^2 dz = 1. \quad (2.15)$$

В уравнении (2.13) использовано сокращенное обозначение

$$\Lambda = \mathcal{E}_0 + \frac{1}{2z_0} \int \left[M \left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)^2 + \chi z_0^2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial z}\right)^2 \right] dz \quad (2.16)$$

для суммы внутренней энергии экситона и энергии деформации решетки. Полная энергия возбуждения в состоянии (2.11) определяется выражением

$$E = \frac{1}{z_0} \int A^*(z, t) \left(\Lambda - \frac{\hbar^2}{2m_{\text{экс}}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\chi z_0 \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) A(z, t) dz. \quad (2.17)$$

Удобно перейти от функции $\beta(z, t)$, характеризующей средние значения смещений из равновесных положений, к переменной

$$\rho(z, t) = -z_0 \partial \beta / \partial z, \quad (2.18)$$

определяющей изменение расстояний между соседними молекулами. В этом случае уравнения (2.13) и (2.14) заменяются уравнениями

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda + \frac{\hbar^2}{2m_{\text{экс}}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\chi \rho(z, t) \right] A(z, t) = 0, \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho(z, t) + \frac{2\chi z_0^2}{M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} |A(z, t)|^2 = 0. \quad (2.20)$$

Согласно (2.19) и (2.20) возбуждения, перемещающиеся с постоянной скоростью V , т. е. при условиях

$$\rho(z, t) = \rho(z - Vt), \quad |A(z, t)|^2 = \Phi(z - Vt),$$

описываются уравнениями

$$\rho(z, t) = \frac{2\chi |A(z, t)|^2}{\chi(1 - s^2)}, \quad (2.21)$$

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda + \frac{\hbar^2}{2m_{\text{экс}}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G |A(z, t)|^2 \right] A(z, t) = 0, \quad (2.22)$$

где

$$s = V/V_a, \quad G = 4\chi^2/\chi(1 - s^2). \quad (2.23)$$

Уравнение (2.22) является хорошо изученным нелинейным уравнением Шредингера. Параметр нелинейности G обусловлен взаимодействием экситона с локальной деформацией цепи. Из (2.23) следует, что эффективное взаимодействие экситона с деформацией возрастает при увеличении скорости $V (< V_a)$.

При $V < V_a$ нормированное условием (2.15) решение уравнения (2.22) имеет вид

$$A(z, t) = \frac{\sqrt{qz_0} \exp\{i[k(z - z_0) - \omega t]\}}{\sqrt{2} \operatorname{ch}[q(z - z_0 - Vt)]}. \quad (2.24)$$

При значениях

$$k = m_{\text{экс}} V / \hbar, \quad \hbar\omega = \mathcal{E}_0 + \hbar^2(k^2 - q^2)/2m_{\text{экс}},$$

$$q = \frac{m_{\text{экс}} z_0 G}{2\hbar^2} = \frac{2\chi^2 z_0 m_{\text{экс}}}{(1-s^2)\chi\hbar^2}. \quad (2.25)$$

Подставив (2.24) в выражение (2.21), убедимся, что в области, охваченной возбуждением, равновесные межмолекулярные расстояния z_0 уменьшаются на величину

$$\rho(z, t) = \frac{\chi q z_0}{\chi(1-s^2)\text{ch}^2[q(z-z_0-Vt)]}. \quad (2.26)$$

Значение $z = z_0 + Vt$ в (2.24) и (2.26) указывает положение максимальной деформации и наибольшей вероятности $|A(z, t)|^2$ возбуждения. Область, охваченная возбуждением и деформацией, имеет приближенные размеры

$$\Delta z = \frac{\pi z_0}{q} = \frac{\pi\chi\hbar^2(1-s^2)}{2m_{\text{экс}}\chi^2}. \quad (2.27)$$

Использованное нами континуальное приближение оправдывается при выполнении неравенства $\Delta z \gg z$. Согласно (2.27) такое неравенство при фиксированных значениях χ , χ , $m_{\text{экс}}$ и $V < V_a$ ограничивает допустимую скорость солитона. Энергия солитона, движущегося со скоростью $V \ll V_a$, выражается простой формулой

$$E_{\text{сол}}(V) = E_{\text{сол}}(0) + \frac{1}{2} m_{\text{сол}} V^2, \quad (2.28)$$

где

$$m_{\text{сол}} = m_{\text{экс}} (1 + 8M\chi^4/3\chi^3\hbar^2) \quad (2.29)$$

— эффективная масса солитона, $E_{\text{сол}}(0)$ — его внутренняя энергия, определяемая равенством

$$E_{\text{сол}}(0) = \mathcal{E}_0 - \frac{\chi^4}{3\chi^2 J}, \quad J = \frac{\hbar^2}{2m_{\text{экс}} z_0^2} \quad (2.30)$$

(\mathcal{E}_0 — внутренняя энергия экситона). Вследствие большой массы солитона его кинетическая энергия может быть большой даже при малых V .

При скоростях V , превышающих скорость продольного звука V_a , значение $s > 1$ и нелинейное уравнение Шредингера (2.22) принимает вид

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda + \frac{\hbar^2}{2m_{\text{экс}}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\chi^2}{\chi(s^2-1)} |\psi|^2 \right] \psi = 0. \quad (2.31)$$

Это уравнение не имеет нормированных локализованных решений в цепочке бесконечной длины. При циклических граничных условиях в цепочке достаточно большой длины ($\mathcal{L} \gg z_0$) нормированное решение уравнения (2.31) изображается плоской волной

$$\psi(z, t) = \sqrt{z_0/\mathcal{L}} \exp[i(kz - \omega t)]. \quad (2.32)$$

Оно соответствует однородному распределению возбуждения вдоль всей цепочки, так как $|\psi|^2 = z_0/\mathcal{L}$. При этом согласно (2.21) происходит увеличение межмолекулярных расстояний

$$\rho(z, t) = -\frac{2z_0\chi}{x(s^2 - 1)\mathcal{L}}, \quad (2.33)$$

которое не зависит от z и t и очень мало, поскольку $z_0 \ll \mathcal{L}$. Учитывая независимость смещений от времени, из (2.16) получаем

$$\Lambda = \mathcal{E}_0 + \frac{2\chi^2 z_0}{x(s^2 - 1)\mathcal{L}} \approx \mathcal{E}_0. \quad (2.34)$$

Энергия возбуждения, описываемого функцией (2.32), равна

$$\hbar\omega = \mathcal{E}_0 + \hbar^2 k^2 / 2m_{\text{вкс}}, \quad k = mV/\hbar. \quad (2.35)$$

Следовательно, возбужденные состояния, распространяющиеся в молекулярной цепочке со скоростью $V > V_a$, являются экситонами.

3. СРАВНЕНИЕ СВОЙСТВ ЭКСИТОНОВ И СОЛИТОНОВ В ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПИ

Выше было показано, что в молекулярной цепи могут возникать два типа коллективных состояний, соответствующих внутримолекулярным дипольным возбуждениям, — экситоны и солитоны.

Экситоны представляют собой коллективные возбуждения, распространяющиеся вдоль цепи с групповой скоростью, превышающей скорость продольных звуковых волн. Они описываются расползающимися с течением времени волновыми пакетами. Вследствие быстрого перемещения экситона локальная деформация не успевает за ним следовать. Поэтому экситоны переносят вдоль цепи только энергию внутримолекулярного возбуждения. Эффективная масса экситона обратно пропорциональна энергии резонансного взаимодействия между соседними молекулами в цепи. При своем движении экситоны порождают фононы, поэтому они быстро тормозятся.

Солитоны соответствуют комбинации внутримолекулярного возбуждения и локальной деформации цепи. Внутренняя энергия такого связанного состояния меньше суммы энергий возбуждений его составляющих. Это одна из причин большой стабильности солитонов. Поскольку внутренняя энергия солитона меньше энергии экситона, его образование энергетически более выгодно, чем образование экситона. Эффективная масса солитона значительно превышает эффективную массу экситона. Уединенная волна, описывающая движение солитона, не меняет свою форму.

При возрастании жесткости x решетки и величины резонансного взаимодействия J различие в свойствах солитонов и экситонов уменьшается. Согласно (2.27) и (2.30) при этом протяженность солитона увеличивается и уменьшается разность внутренних энергий солитона и экситона. В мягких цепочках (малые x) при большой связи внутримолекулярных возбуждений с деформацией (большие χ) оба типа возбуждений различаются весьма существенно.

В соответствии с так называемым принципом Франка—Кондона поглощение света молекулярными системами происходит без изменения координат более тяжелых частиц, входящих в систему. Переход молекулярной цепочки из основного в экситонное состояние, соответствующее внутримолекулярному возбуждению, не сопровождается изменением координат молекул, поэтому экситоны легко возбуждаются. В силу того же принципа возбуждение светом солитонов весьма маловероятно, так как образование солитонов требует изменения положений молекул в небольшой области цепочки. По той же причине весьма мала и вероятность излучения света солитонами. Такая вероятность рассчитывалась в работе Давыдова и Еремко [9].

Возбуждение солитонов может происходить при локальных внешних воздействиях, например, при химических реакциях. Вероятность возбуждения будет наибольшей, когда такое воздействие прилагается к краю молекулы. Возбуждение солитона в средней области молекулярной цепи маловероятно, так как требует смещения больших участков цепи для образования локальной деформации в области возбуждения.

Исключительная стабильность солитонов и их движение без потери энергии напоминают явление сверхпроводимости металлов. Сверхпроводимость обусловлена спариванием электронов, вызываемым ими же создаваемой деформацией кристаллической решетки металла. Связь электронов с деформацией решетки затрудняет преобразование их кинетической энергии в энергию теплового движения. Сверхпроводящее состояние возникает при низких температурах в металлах, в которых энергия электрон-фононного взаимодействия достаточно велика. При повышении температуры выше критической нарушается связь электронов с деформацией решетки, исчезает спаривание и электроны тормозятся при своем движении тем сильнее, чем больше электрон-фононная связь. Слабым электрон-фононным взаимодействием объясняется известный факт, что хорошие проводники (серебро, медь, золото) не переходят в сверхпроводящее состояние.

Солитоны также могут образовываться только в молекулярных цепях с сильным взаимодействием внутримолекулярных возбуждений со смещениями молекул из положений равновесия. Если средняя энергия теплового движения превышает энергию $\chi^4/3\alpha^2 J$, соответствующую согласно (2.30) разности внутренних энергий экситона и солитона, то связанное состояние внутреннего возбуждения и деформации разрушается, солитон преобразуется в экситон, который быстро тормозится при своем движении.

4. СОЛИТОНЫ В α -СПИРАЛЬНЫХ БЕЛКОВЫХ МОЛЕКУЛАХ

В предыдущих разделах рассматривались возбужденные состояния в одномерных квазипериодических молекулярных структурах. Возникает вопрос, какое отношение имеет эта упрощенная модель к реальным белковым молекулам?

Выше уже отмечалось, что белковые молекулы представляют собой очень длинные полипептидные цепи, содержащие периодически повторяющиеся пептидные группы, состоящие из атомов Н, N, С, О. Эти цепи могут находиться в разных пространственных конфигурациях, среди которых особую роль играют структуры, получившие название α -спиралей.

В α -спиральных белках полипептидные цепи свернуты в длинные спирали. Такая структура обусловлена дополнительными водородными связями между пептидными группами, помимо основных химических связей с соседними атомами углерода, удерживающими пептидные группы в первичной полипептидной цепи. В каждой молекуле имеются три цепи водородных связей. Первая цепь образована взаимодействиями атома водорода первой пептидной группы с атомом кислорода четвертой, атома водорода четвертой с атомом кислорода седьмой и т. д. Вторая цепь осуществляется водородными связями между атомам водорода второй пептидной группы с атомом кислорода пятой, между атомом водорода пятой группы и атомом кислорода восьмой и т. д. Третья цепь образована водородными связями между атомом водорода третьей пептидной группы и атомом кислорода шестой, атомом водорода шестой и атомом кислорода девятой и т. д.

Таким образом, вдоль трех цепей водородных связей пептидные группы располагаются на равных расстояниях друг от друга, образуя периодические структуры. Строгая периодичность всей молекулы частично нарушена тем, что к атомам углерода, соединяющим в первичной цепи пептидные группы, присоединены некоторые из 20 возможных радикалов — групп атомов, которыми отличаются друг от друга аминокислоты. Эти радикалы располагаются на внешней стороне α -спиралей и, по-видимому, вносят слабое возмущение на расположение и коллективные свойства пептидных групп.

Энергия водородных связей примерно на порядок меньше энергии обычных химических связей. Поэтому смещения пептидных групп из их равновесных положений вдоль цепей водородных связей осуществляются значительно легче, чем их смещения вдоль основной пептидной цепи. Следовательно, в первом приближении можно не рассматривать изменения расстояний между пептидными группами соседних цепей. Учет двух типов смещений проведен в работе [11].

Если допустить, что коллективные возбуждения типа солитонов могут возникать независимо в каждой из трех цепей пептидных групп, то такие солитоны будут описываться рассмотренной выше квазиодномерной моделью. Желательно, конечно, исследовать возбужденные состояния α -спиральных белковых молекул без использования такого упрощения.

Первая попытка исследования возбуждений в трех параллельных цепочках пептидных групп была предпринята в работе Давыдова и Супруна [12], которые моделировали α -спиральную молекулу белка квазиодномерной кристаллической структурой с тремя

молекулами в элементарной ячейке и осью симметрии третьего порядка. Исследовались деформационные изменения спирали при возбуждении покоящегося солитона.

В работе [13] исследовались движущиеся солитоны в модели α -спиральной белковой молекулы, учитывающей более реальное расположение пептидных групп. Положение пептидных групп в α -спиральной белковой молекуле характеризуется радиус-векторами

$$\mathbf{R}_{n\alpha} = r \left[\mathbf{e}_x \cos \frac{2\pi}{p}(3n + \alpha) + \mathbf{e}_y \sin \frac{2\pi}{p}(3n + \alpha) \right] + \mathbf{e}_z \frac{l}{p}(3n + \alpha), \quad (4.1)$$

где r — радиус спирали, l — расстояние между пептидными группами вдоль каждой цепи водородных связей; $p=3,6$ — число пептидных групп, приходящихся на один виток спирали. Число n , равное $0, 1, \dots$, нумерует ячейки, состоящие из трех ближайших пептидных групп, с разными индексами α , равными $1, 2, 3$. В белковой молекуле трансляционно-эквивалентными группами являются группы с номерами n и $n+6$. Следовательно, элементарная кристаллографическая ячейка молекулы содержит 18 пептидных групп. Модель, использованная в работе [12], соответствовала значению $p=3$.

При учете смещений $u_{n\alpha}$ пептидных групп $n\alpha$ только вдоль цепей водородных связей и одного вибрационного возбуждения пептидной группы гамильтониан возбужденных состояний молекулы определяется выражением

$$H = \sum_{n,\alpha} [(\Delta\varepsilon + D_{n\alpha}) B_{n\alpha}^+ B_{n\alpha} + M_{n\alpha; n+1, \alpha} (B_{n\alpha}^+ B_{n+1, \alpha} + B_{n\alpha} B_{n+1, \alpha}^+) + M_{n\alpha; n, \alpha+1} (B_{n\alpha}^+ B_{n, \alpha+1} + B_{n\alpha} B_{n, \alpha+1}^+) + H_{\text{фон}}], \quad (4.2)$$

где

$$H_{\text{фон}} = \frac{1}{2} \sum_{n,\alpha} \left[\frac{1}{M} \hat{p}_{n\alpha}^2 + \kappa (u_{n\alpha} - u_{n+1, \alpha})^2 \right] \quad (4.3)$$

— оператор энергии смещений пептидных групп из равновесных положений; величина

$$D_{n\alpha} = D_0 + \chi_1 (u_{n+1, \alpha} - u_{n-1, \alpha}) \quad (4.3a)$$

учитывает изменение энергии взаимодействия с соседними группами при переходе пептидной группы $n\alpha$ в возбужденное состояние;

$$M_{n\alpha; n-1, \alpha} = -J + \chi_2 (u_{n\alpha} + u_{n-1, \alpha}), \quad M_{n\alpha; n, \alpha-1} = L. \quad (4.3b)$$

Здесь $-J < 0$ — энергия резонансного диполь-дипольного взаимодействия между расположенными на расстоянии l пептидными группами одной цепочки; $L > 0$ — энергия резонансного взаимодействия соседних пептидных групп из разных цепочек. Согласно измерениям Невской и Чиргадзе [14], значение $J=9,8 \cdot 10^{-4}$ эВ, значение $L=15,4 \cdot 10^{-4}$ эВ. Параметры χ_1 и χ_2 характеризуют

связь вибрационных возбуждений пептидных групп с их смещениями.

Используя описанный выше метод исследования возбужденных состояний одномерных систем, можно найти уравнения для функций, характеризующих вероятности $|a_{n\alpha}|^2$ распределения вибрационного возбуждения по пептидным группам, и средних значений смещений $\beta_{n\alpha}$ пептидных групп из равновесных положений. В континуальном приближении

$$a_{n\alpha}(t) \rightarrow a_\alpha(z, t), \quad \beta_{n\alpha}(t) \rightarrow \beta_\alpha(z, t)$$

эти уравнения принимают вид

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{E}_0 + z_0^2 J \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\chi\rho_\alpha \right) a_\alpha(z, t) = L [a_{\alpha+1}(z, t) + a_{\alpha-1}(z, t)], \quad \mathcal{E}_0 \equiv \Delta\varepsilon + D_0 - 2J, \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - V_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho_\alpha(z, t) + \frac{2\chi z_0^2}{M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} |a_\alpha(z, t)|^2 = 0, \quad (4.5)$$

где $\rho = -z_0 \partial \beta / \partial z$, $z_0 = 3l/p$ — расстояние по оси между пептидными группами, $\chi = \chi_1 + \chi_2$,

$$V_a = z_0 \sqrt{\kappa/m} \quad (4.6)$$

— скорость продольного звука.

Система уравнений (4.4)—(4.6) имеет два типа решений в виде уединенных волн, распространяющихся вдоль оси спирали с постоянной скоростью $V < V_a$,

$$a_{\alpha, i}(z, t) = \gamma_{\alpha, i} \Phi_i(z - Vt) \exp[i(kz - \omega t)], \quad i = 1, 2, \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{z_0} \int |a_{\alpha, i}|^2 dz = 1, \quad k = \frac{m_{\text{акс}} V}{\hbar};$$

$$\rho_{\alpha, i} = 2\chi \gamma_{\alpha, i}^2 \Phi_i^2 / \kappa, \quad (4.8)$$

$$\Phi_i = \sqrt{q z_0 / 2} \operatorname{sech}[q_i(z - Vt)], \quad (4.9)$$

$$E_{0, i}(V) \equiv \hbar\omega_i = E_{0, i}(0) + \frac{1}{2} m_{\text{сох}, i} V^2. \quad (4.10)$$

Один тип решений системы уравнений (4.4)—(4.6) соответствует одинаковым амплитудам уединенных волн в трех цепях

$$\gamma_{1, 1} = \gamma_{2, 1} = \gamma_{3, 1} = 1/\sqrt{3}. \quad (4.11)$$

Такие возбуждения будем называть симметричными солитонами. Им соответствуют значения

$$q_1 = \chi^2 / 3\kappa J, \quad (4.12)$$

$$E_{0, 1}(0) = \mathcal{E}_0 + 2L - \chi^4 / 27\kappa J,$$

$$m_{\text{сох}, 1} = \hbar^2 / 2z_0^2 J + 4\chi^4 / 27\kappa^2 V_a^2 J.$$

При возбуждении симметричных солитонов происходит одинаковое уменьшение расстояний между пептидными группами во всех трех цепях. Это уменьшение определяется формулой

$$\rho_1 = \rho_{a1} = \frac{qz_0\chi}{3\chi \operatorname{ch}^2 [q_1(z - Vt)]} \cdot$$

Как показано в работе Давыдова и Супруна [12], в этом случае в области возбуждения происходит увеличение диаметра спирали. Качественно это объясняется отталкиванием параллельных дипольных моментов, векторы которых перпендикулярны линии, их соединяющей.

Второй тип возбуждений в α -спиральной молекуле, характеризуемый коэффициентами

$$\gamma_{1,2} = 0, \quad \gamma_{2,2} = -\gamma_{3,2} = 1/\sqrt{2} \quad (4.13)$$

в волновой функции (4.7), будем называть несимметричными солитонами. Им соответствуют значения

$$\begin{aligned} q_2 &= \chi^2/2\kappa J, \\ E_{0,2}(V) &= E_{0,1}(V) - 3L - 5\chi^4/108\kappa^2 J, \\ m_{\text{сол},2} &= m_{\text{сол},1} + 5\chi^4/27\kappa^2 V_a^2 J. \end{aligned} \quad (4.14)$$

В соответствии с (4.8) и (4.13) при возбуждении несимметричных солитонов в области возбуждения в спиральной молекуле происходит несимметричное уменьшение расстояний между пептидными группами в цепях. В одной из них, которую мы условно назовем первой, эти расстояния не меняются, а в двух других (второй и третьей) они уменьшаются так, что

$$\rho_{2,2} = \rho_{2,3} = \frac{qz_0\chi}{2\chi \operatorname{ch}^2 [q(z - Vt)]} \cdot$$

В работе [12] было также показано, что одновременно с изменением расстояний между пептидными группами вдоль двух цепей уменьшаются расстояния между ними при сохранении их расстояний до первой цепи. Уменьшение расстояний между цепями, по которым распространяется несимметричное возбуждение, обусловлено притяжением наведенных дипольных моментов вибрационных возбуждений пептидных групп. В результате изменений расстояний между пептидными группами в спиральной молекуле в области возбуждения появится прогиб, который будет перемещаться вместе с возбуждением.

Из выражений (4.12) и (4.14) следует, что несимметричные солитоны отличаются от симметричных меньшей нулевой энергией, большей эффективной массой и большей компактностью. Таким образом, они являются наиболее устойчивыми возбуждениями α -спиральных белковых молекул [15, 16].

Итак, несимметричные солитоны являются идеальными переносчиками энергии вибрационных колебаний Амид-1, которые, по видимому, возбуждаются при гидролизе молекул АТФ.

Представление о том, что энергия, выделяемая при гидролизе молекул АТФ, преобразуется в энергию солитонных возбуждений и переносится с большой эффективностью вдоль белковой молекулы, было использовано Давыдовым [16—19] для объяснения на молекулярном уровне механизма сокращения длины поперечно-полосатых мышц животных.

Кроме солитонов, в α -спиральных белковых молекулах могут возбуждаться экситоны. Такое возбуждение происходит при поглощении света. Если пренебречь малым искажением оси симметрии третьего порядка в α -спиральной молекуле, т. е. положить в (5.1) значение p равным трем, то экситоны, соответствующие вибрационному колебанию Амид-1, образуют в молекуле в области частот $\sim 1660 \text{ см}^{-1}$ две энергетические зоны: симметричную и несимметричную. Расщепление вибрационных колебаний Амид-1 в α -спиральной молекуле на две экситонные зоны обусловлено тем, что в каждой элементарной ячейке n содержатся три пептидные группы [20]. Несимметричная зона дважды вырождена.

5. ДВИЖЕНИЕ ИЗБЫТОЧНОГО ЭЛЕКТРОНА В ОДНОМЕРНОЙ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ЦЕПИ

При исследовании перемещения электрона от донора, присоединенного к одному концу белковой молекулы, к акцептору, расположенному на другом ее конце, обычно используют модель квазиодномерной молекулярной системы, имеющей один лишний электрон. В случае α -спиральных белковых молекул такой одномерной квазипериодической системой будет одна из цепей пептидных групп, образованная водородными связями между ними.

Движение избыточного электрона в молекулярной системе наиболее часто исследуется в адиабатическом приближении, т. е. при допущении, что равновесные положения молекул остаются неизменными, а взаимодействие электрона со смещениями молекул из этих равновесных положений рассматривается как возмущение, тормозящее электрон.

В работе Давыдова [5] исследовалось движение электрона в одномерной молекулярной цепи при учете смещений равновесных положений молекул без использования теории возмущений. Рассматривалась молекулярная цепь, в которой межмолекулярные движения характеризуются оператором (2.9). Если b_n^+ и b_n^- — соответственно операторы присутствия и отсутствия внешнего электрона у молекулы, занимающей место номера n , то оператор энергии этого электрона можно записать в виде

$$H_{3x} = \sum_n \left[\left(\mathcal{E}_0 - \frac{\hbar^2}{m^* z_0^2} \right) b_n^+ b_n + \frac{\hbar^2}{2m^* z_0^2} (b_{n+1}^+ b_n + b_{n+1} b_n^+) \right], \quad (5.1)$$

где z_0 — расстояние между соседними молекулами; \mathcal{E}_0 — энергия дна зоны проводимости; m^* — эффективная масса электрона в зоне проводимости, она обратно пропорциональна энергии обменного взаимодействия между соседними молекулами и может

существенно отличаться от массы свободного электрона. Ниже рассматривается только случай, когда эта масса положительна.

Потенциальную энергию взаимодействия электрона со смещениями молекул в первом приближении можно записать в виде

$$H_{\text{вз}} = \sigma \sum_n b_n^+ b_n (u_{n+1} - u_{n-1}), \quad (5.2)$$

где σ — параметр деформационного потенциала [21].

Волновая функция, описывающая стационарные состояния электрона в системе с оператором энергии

$$H = H_{\text{эз}} + H_{\text{вз}} + H_{\text{фон}}, \quad (5.3)$$

записывается в виде

$$\Psi(t) = \sum_n \psi(t) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \sum_n [\beta_n(t) \hat{p}_n - \pi_n(t) u_n] \right\} b_n^+ |0\rangle; \quad (5.4)$$

$$\sum_n |\psi_n|^2 = 1.$$

Функции $\psi_n(t)$, $\beta_n(t)$, $\pi_n(t)$ подлежат определению из условия минимума функционала

$$\Phi_2 \equiv \langle \Psi(t) | H | \Psi(t) \rangle = \sum_n \left\{ \psi_n^* \left[\left(\mathcal{E}_0 - \frac{\hbar^2}{m^* z_0^2} \right) \psi_n - \frac{\hbar^2}{2m z_0^2} (\psi_{n+1} - \psi_{n-1}) + \sigma |\psi_n|^2 (\beta_{n+1} - \beta_{n-1}) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} \pi_n^2 + \kappa \rho_n^2 \right) \right] \right\}. \quad (5.5)$$

Функции β_n и π_n определяют средние значения смещений и импульсов молекул в состоянии (5.4), а функция $|\psi_n|^2$ — вероятность нахождения электрона на молекуле n ; $\rho_n = u_{n-1} - u_n$.

Из условия минимума функционала (5.5) в континуальном приближении получаем уравнения

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{E}_0 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\sigma\rho \right) \psi(z, t) = 0, \quad (5.6)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho(z, t) - \frac{2\sigma z_0}{M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} |\psi|^2 = 0, \quad (5.7)$$

$$\rho(z, t) = -z_0 \frac{\partial}{\partial z} \beta(z, t), \quad (5.8)$$

$$\int |\psi|^2 dz = 1, \quad (5.9)$$

которые формально совпадают с уравнениями (2.19) и (2.20) для солитонов.

При отсутствии связи между электроном и деформацией ($\sigma=0$) уравнение (5.7) определяет продольные звуковые волны $\rho = \rho_0 \sin(t \pm z/V_a)$, распространяющиеся с постоянной скоростью $V_a = z_0 \sqrt{\kappa/M}$. В этом случае ($\sigma=0$) нормированные условия (5.9) решения уравнения (5.6) соответствуют квазистацио-

нарным состояниям электронов, описываемым расплывающимися с течением времени волновыми пакетами

$$\psi(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) \exp\{i[kz - \omega(k)t]\} dk. \quad (5.10)$$

Такие электроны движутся с групповой скоростью $V < V_a$ и имеют энергию

$$E \approx E(k_0) = \mathcal{E}_0 + \frac{1}{2} m^* V_0^2. \quad (5.11)$$

При $\sigma \neq 0$ система уравнений (5.6), (5.7) описывает движение электрона с постоянной скоростью $V < V_a$, сопровождаемое локальной деформацией цепи. Такое движение описывается волновой функцией $\psi(z - Vt)$, удовлетворяющей нелинейному уравнению Шредингера

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{E}_0 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G |\psi|^2 \right) \psi(\zeta) = 0, \quad (5.12)$$

где $G = 4\sigma^2/x(1-s^2)$. Деформация цепи, сопровождающая движение электрона, определяется функцией

$$\rho(\zeta) = \frac{2\sigma}{x(1-s^2)} |\psi(\zeta)|^2, \quad \zeta = z - Vt. \quad (5.13)$$

Нормированное условием (5.9) решение уравнения (5.12) имеет вид

$$\psi(\zeta) = \frac{\sqrt{q} \exp\{i[k\zeta - (\omega - kV)t]\}}{\sqrt{2} \operatorname{ch}(q\zeta)}, \quad (5.14)$$

где

$$k = m^*V/\hbar, \quad \hbar\omega = \mathcal{E}_0 + \hbar^2(k^2 - q^2)/2m^*, \quad (5.14a)$$

$$q = z_0 m^* G / 2\hbar^2 = 2\sigma^2 m^* z_0 / [x(1-s^2)\hbar^2]. \quad (5.15)$$

При этом уменьшение межмолекулярных расстояний в цепи определяется функцией

$$\rho(\zeta) = \sigma q z_0 / [(1-s^2)x \operatorname{ch}^2(q\zeta)]. \quad (5.16)$$

Применяемое континуальное приближение оправдано при выполнении неравенства

$$\Delta z \approx \pi/q = \pi x (1-s^2) \hbar^2 / 2\sigma^2 m^* z_0 \gg z_0. \quad (5.17)$$

Итак, при $\sigma \neq 0$ лишний электрон в одномерной молекулярной цепи движется вместе с деформацией и описывается уединенной волной, огибающая которой перемещается вдоль цепи в виде одного возвышения без изменения формы. Такой электрон, связанный с создаваемой им же деформацией, будем называть электросолитоном. Он напоминает полярон, введенный Пекаром [22] при исследовании движения лишнего электрона в трехмерном ионном кристалле. Полярон перемещается в кристалле вместе с поляризацией, создаваемой электрическим полем электрона. Дейген и Пекар [23] показали, что в случае трехмерного гомеополярного кристалла взаимодействие электрона. (с помощью

деформационного потенциала) с продольными акустическими колебаниями не приводит к его локализации даже в случае покоящегося электрона. Они использовали также континуальное приближение и метод эффективной массы. Мы видим, однако, что в случае одномерной системы такая локализация электрона осуществляется для скоростей электрона $V \ll V_a$. При этом энергия электросолитона определяется простой формулой

$$E = E_0 + \frac{1}{2} m_{\text{cox}} V^2, \quad (5.18)$$

где

$$m_{\text{cox}} = m^* (1 + 8M\chi^4/3\hbar^2\kappa^3) \quad (5.19)$$

— масса электросолитона, она значительно превышает эффективную массу электрона в зоне проводимости;

$$E_0 = \mathcal{E}_0 - 4m^*\chi^4 z_0^2/3\kappa\hbar^2 \quad (5.20)$$

— энергия покоящегося электросолитона.

Таким образом, появление электросолитона в одномерной молекулярной системе сопровождается выигрышем энергии. Отделение электрона от деформации требует затраты энергии. Двигаясь со скоростью $V < V_a$, электросолитон не затрачивает энергию на рождение фононов. Следовательно, взаимодействие электрона с создаваемой им же деформацией стабилизирует его движение. Такое взаимодействие переводит его как бы в квазисверхпроводящее состояние. При малых κ и больших χ эта стабилизация весьма существенна.

6. ПЕРЕНОС ЭЛЕКТРОНА АКУСТИЧЕСКИМ СОЛИТОНОМ

Рассмотрим молекулярную цепь с кубическим ангармонизмом. В этом случае к оператору энергии (2.9) гармонических колебаний надо прибавить дополнительное слагаемое

$$- \frac{1}{3} \kappa_3 \sum_n (u_{n-1} - u_n)^3, \quad \kappa_3 \ll z_0 \kappa. \quad (6.1)$$

Поэтому функционал (5.5) заменяется функционалом

$$\Phi_3 = \Phi_2 - \frac{1}{3} \kappa_3 \sum_n \rho_n^3, \quad \rho_n = \beta_{n-1} - \beta_n. \quad (6.2)$$

Из условия минимума функционала определяются уравнения для функций ψ_n и ρ_n . Эти уравнения в континуальном приближении имеют вид

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{E}_0 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\sigma\rho \right) \psi(z, t) = 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - V_a^2 \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \frac{z_0^2}{12} \frac{\partial^4 \rho}{\partial z^4} + \frac{\kappa_3}{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rho^2 \right) + \frac{2\sigma z_0}{M} \frac{\partial^2 |\psi|^2}{\partial z^2} = 0, \quad (6.4)$$

где $V_a^2 = \kappa z_0^2/M$.

В молекулярной цепи без электрона учет слагаемого $z_0 \partial^4 \rho / \partial z^4$ эквивалентен учету дисперсии продольных акустических волн. В самом деле, при $x_3 = \sigma = 0$ уравнение (6.4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - V_a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{z_0^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \rho = 0.$$

Это уравнение имеет решение в виде бегущих волн $\rho = \rho_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ при $\omega^2 = k^2 V_a^2 (1 - k^2 z_0^2 / 12)$.

Если электрон вместе с деформацией перемещается с постоянной скоростью V , то функции $\rho(\zeta)$ и $|\psi(z, t)|^2$ зависят только от переменной $\zeta = z - z_0 - Vt$. Интегрируя уравнение (5.4) дважды по ζ и принимая во внимание, что при больших ζ , когда $|\psi|^2 = 0$, деформация цепи должна отсутствовать, получим уравнение

$$\frac{z_0}{12} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta^2} - (s^2 - 1) \rho + \frac{x_3}{x} \rho^2 = \frac{2z_0}{x} |\psi|^2. \quad (6.5)$$

В нулевом приближении можно опустить правую часть уравнения (6.5), тогда получим уравнение Буссинеска, определяющее собственные колебания молекул в цепочке при наличии ангармонизма и дисперсии:

$$\frac{z_0^2}{12} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial \zeta^2} - (s^2 - 1) \rho_0 + \frac{x_3}{x} \rho_0^2 = 0. \quad (6.6)$$

Решение этого уравнения исследовалось в работе [24]. Точное решение в виде уединенной волны — акустический солитон — определяется функцией

$$\rho_0 = z_0^2 x q^2 / [2x_3 \operatorname{ch}^2(q\zeta)], \quad (6.7)$$

где

$$q^2 = 3(s^2 - 1)/z_0^2 > 0, \quad s = V/V_a > 1. \quad (6.8)$$

Функция (6.7) характеризует уменьшение межмолекулярных расстояний в области возбуждения.

Из выражений (6.7) и (6.8) следует, что акустический солитон перемещается вдоль цепи с постоянной скоростью V , превышающей скорость продольного звука. Из условия применимости континуального приближения $qz_0 \ll \pi$ следует ограничение на скорость акустического солитона

$$1 < s^2 < 1 + \pi^2/3. \quad (6.9)$$

Локальная деформация ρ_0 , характеризующая акустический солитон, образует потенциальную яму для внешнего электрона. Эта яма может захватить электрон и переносить его вдоль цепи со скоростью, намного превышающей скорость продольного звука. Для исследования этой возможности подставим значение (6.7) в уравнение (6.3). Тогда получим уравнение Шредингера:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{E}_0 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{U_0}{\operatorname{ch}^2(q\zeta)} \right] \psi(z, t) = 0, \quad (6.10)$$

где $U_0 = 3\sigma x (s^2 - 1)/x_3 > 0$.

Введем функцию $\varphi(\zeta)$ с помощью равенства

$$\psi(z, t) = \varphi(\zeta) \exp[i(kz - \omega t)], \quad (6.11)$$

где $k = m^*V/\hbar$, $\zeta = z - z_0 - Vt$, $\hbar\omega$ — энергия электрона в лабораторной системе координат.

Подставив выражение (6.11) в уравнение (6.10), получим уравнение, определяющее движение электрона в потенциальной яме, перемещающейся вместе с акустическим солитоном:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + \frac{2m^*}{\hbar^2} \left(E - \frac{U_0}{\text{ch}^2(q\zeta)} \right) \varphi = 0, \quad (6.12)$$

где $E = \hbar\omega - \mathcal{E}_0 - 1/2 m^* V^2$ — энергия электрона в движущейся системе координат.

Решение уравнения типа (6.12) рассматривалось Ландау и Лифшицем [25, § 23]. Дискретный спектр отрицательных энергий определяется выражением

$$E_n = -\frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} (\nu - n)^2, \quad n = 0, 1, \dots, n_{\max}, \quad (6.13)$$

где

$$n_{\max} \leq \nu \equiv \frac{1}{2} [(1 + 8z_0^2 \alpha m^* / \kappa_3 \hbar)^{1/2} - 1]. \quad (6.14)$$

Нижайший энергетический уровень имеет энергию

$$E_0 = -3(s^2 - 1) \nu^2 \hbar^2 / 2m^* z_0 \quad (6.15)$$

и волновую функцию

$$\varphi_0(\zeta) = \sqrt{N/\text{ch}^\nu(q\zeta)}, \quad N = q\Gamma(\nu + 1/2) / \sqrt{\pi} \Gamma(\nu). \quad (6.15a)$$

Здесь $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция. Захват электрона акустическим солитоном возможен, когда $|E_0|$ превышает среднюю энергию теплового движения. Проведенное выше исследование условий захвата электрона акустическим солитоном не учитывало обратное действие электрона на акустический солитон. Для выяснения предела применимости этого приближения подставим в уравнение (6.5) значения (6.11) и (6.16) и положим, что $\rho = \rho_0 + \rho_1$, где ρ_0 определено выражением (6.7). Тогда убедимся (см. [5]), что условие $\rho_1 \ll \rho_0$ выполняется, если выполняются сравнительно жесткие неравенства

$$\nu \geq 2, \quad \frac{4\alpha \kappa_3 \Gamma(\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu) z^2 [3(s^2 - 1)]^{3/2}} \ll 1. \quad (6.16)$$

Эффект переноса электрона акустическим солитоном при выполнении неравенств (6.16) может играть роль в биологических системах в тех случаях, когда взаимодействие донорной молекулы с белковой молекулой, переносящей электрон к акцептору, вызывает одновременно и рождение акустического солитона в этой молекуле. По-видимому, эти случаи осуществляются весьма редко.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Green D. E.* — Science, 1973, 181, p. 583.
2. *Szent-gyorgyi A.* — Science, 1941, 93, p. 609.
3. *Petrov E. G., Ukrainkii I. I., Kharkyanen V. N.* — J. Theor. Biol., 1978, 73, p. 29.
4. *Davydov A. S.* The role of proteins in electron transport at large distances. Preprint. ITP-78-43E. Kiev, 1978.
5. *Davydov A. S.* Electron-phonon interaction effect on the electron motion in the dimensional molecular system. Preprint, ITP-79-27E. Kiev, 1979.
6. *Давыдов А. С., Кислюха Н. И.* — ЖЭТФ, 1976, 71, с. 1090.
7. *Davydov A. S., Kislukha N. I.* — Phys. status solidi (b), 1976, 75, p. 735.
8. *Davydov A. S.* — J. Theor. Biol., 1977, 66, p. 379.
9. *Давыдов А. С., Еремко А. А.* — Укр. физ. журн., 1977, 22, с. 881.
10. *Davydov A. S.* — Phys. scripta, 1979, 24, p. 273.
11. *Davydov A. S.* — Intern. J. Quant. Chem., 1979, 26, p. 88.
12. *Давыдов А. С., Сунпрун А. Д.* — Укр. физ. журн., 1974, 19, с. 44.
13. *Давыдов А. С., Еремко А. А., Сергеевко А. И.* — Укр. физ. журн., 1978, 23, с. 983.
14. *Nevskaya N. A., Chirgadze Y. N.* — Biopolymers, 1976, 15, p. 637.
15. *Davydov A. S.* — Stud. biophys., 1977, 62, p. 1.
16. *Davydov A. S.* — J. Theor. Biol., 1973, 38, p. 559.
17. *Давыдов А. С.* — Биофизика, 1974, 19, с. 670.
18. *Давыдов А. С.* — Укр. физ. журн., 1975, 20, с. 179.
19. *Давыдов А. С.* — В кн.: Биофизика и биохимия мышечного сокращения. М.: Наука, 1976, с. 254.
20. *Давыдов А. С.* Теория молекулярных экситонов. М.: Наука, 1968. 296 с.
21. *Давыдов А. С.* Теория твердого тела. М.: Наука, 1976. 639 с.
22. *Пекар С. И.* Исследования по электронной теории кристаллов. М.: Гостехиздат, 1951. 256 с.
23. *Дейген М. Ф., Пекар С. И.* — ЖЭТФ, 1951, 21, с. 803.
24. *Toda M., Waddati M.* — J. Phys. Soc. Jap., 1973, 34, p. 18.
25. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. 702 с.

УДК 533.951.7

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ПЛОТНОЙ ПЛАЗМОЙ

А. Г. ЛИТВАК, Г. М. ФРАЙМАН

Исследование ленгмюровской турбулентности, возбуждаемой в плазме сильными электромагнитными волнами, является сложной физической проблемой, представляющей интерес для разнообразных приложений, связанных с необходимостью нагрева плазмы мощным излучением, и в первую очередь для работ в области лазерного термоядерного синтеза. В достаточно горячей плазме обычное соударительное поглощение электромагнитных волн становится неэффективным из-за того, что частота электронно-ионных соударений быстро убывает с ростом температуры элект-

тронов: $\nu_{ei} \sim T_e^{-3/2}$. Поэтому главным каналом передачи энергии излучения плазме оказываются ленгмюровские колебания, возбуждаемые в результате бесстолкновительных линейных или нелинейных процессов. Наиболее эффективно эти колебания генерируются в плотной плазме в области плазменного резонанса, в которой плазменная частота близка к частоте излучения.

В сильных полях основным нелинейным процессом, определяющим характеристики ленгмюровских колебаний, а следовательно, и величину поглощения, является так называемая модуляционная неустойчивость [1]. Эта неустойчивость приводит к созданию в плазме когерентных нелинейных образований типа ленгмюровских солитонов или кавитонов, в которых ленгмюровские колебания оказываются захваченными в самосогласованные ямки плотности. Сильная ленгмюровская турбулентность может быть представлена в виде ансамбля таких взаимодействующих динамических образований.

Несмотря на несомненные успехи в исследовании сильной ленгмюровской турбулентности (см., например, обзоры [2, 3]), ряд ключевых вопросов теории в настоящее время остается нерешенным. В статье мы попытаемся проанализировать современные теоретические представления с учетом особенностей, специфических для проблемы возбуждения ленгмюровской турбулентности электромагнитными волнами. Наряду с изложением основных идей теории в ряде случаев будут рассмотрены также результаты экспериментов по взаимодействию сильных электромагнитных волн с плазмой.

1. СИЛЬНАЯ ЛЕНГМЮРОВСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

При описании динамических нелинейных эффектов удобно пользоваться не уравнениями для фурье-гармоник полей, как это делается обычно в теории слабой турбулентности плазмы, а системой усредненных по периоду высокочастотных полей уравнений для медленной амплитуды электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t}$ и возмущений плотности плазмы. Одним из обстоятельств, значительно упрощающих теоретический анализ задачи, является существенное различие пространственных масштабов плазменных колебаний λ_p и электромагнитной волны λ_e : $\lambda_e \gg \lambda_p$. Оказывается, что, несмотря на нелинейное взаимодействие, крупномасштабное поле электромагнитной волны сохраняет вихревой характер, а поле мелкомасштабных ленгмюровских колебаний остается потенциальным — возникающие отклонения малы.

Опуская подробности обоснования используемого подхода [4, 5], приведем без вывода исходную систему уравнений, описывающую взаимодействие в самом простом случае. Рассмотрим распространение в плазме линейно-поляризованной плоской электромагнитной волны с электрическим полем $\mathbf{E} =$

$=x_0(z, t)e^{i\omega t}$ и частотой, близкой к плазменной $(\omega - \omega_p)/\omega \ll 1$. Такая волна в результате модуляционной неустойчивости возбуждает ленгмюровские колебания, распространяющиеся в направлении ее электрического поля (вдоль x_0). Уравнения для комплексных амплитуд электрического поля и малых (усредненных по периоду ВЧ-поля) возмущений плотности n ($\delta n/N_0 \ll 1$) можно представить в виде

$$-\frac{2i}{\omega} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\epsilon_0 - i\gamma - n) \mathbf{E} + 3r_d^2 \text{grad div } \mathbf{E} = \mathbf{D}(z, t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \gamma_s \frac{\partial n}{\partial t} - v_s^2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = v_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{|\mathbf{E}|^2}{E_p^2}, \quad (2)$$

$$-\frac{2i}{\omega} \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{E}}}{\partial z^2} + \epsilon_{\text{эф}}(|\bar{\mathcal{E}}|) = \bar{\mathcal{E}}0, \quad (3)$$

$$\mathbf{D} = \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{E}}}{\partial z^2}, \quad \bar{\mathcal{E}} = \langle \mathbf{E}(x, t) \rangle,$$

$$\bar{\mathcal{E}} \epsilon_{\text{эф}} = \langle (\epsilon_0 - i\gamma - n) \mathbf{E} \rangle. \quad (4)$$

Уравнения (1), (2) описывают возбуждение потенциальных ленгмюровских колебаний полем электромагнитной волны в данном сечении $z = \text{const}$, D — величина электрической индукции вихревого поля, γ , γ_s — декременты затухания соответственно ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний, r_d — дебаевский радиус электронов, v_s — скорость ионно-звуковых волн. Знак $\langle \rangle$ обозначает операцию усреднения по быстрой пространственной зависимости (по периоду мелкомасштабных ленгмюровских колебаний). Мы ввели также понятие эффективной (усредненной по мелкомасштабным осцилляциям) диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\text{эф}}$, определяющей влияние ленгмюровских колебаний на структуру поля электромагнитной волны — зависимость от z амплитуды среднего (вихревого) поля $\bar{\mathcal{E}}$ [6].

Таким образом, даже в упрощенной постановке мы имеем сложную нестационарную краевую задачу для системы уравнений (1)—(3), решение которой является серьезной проблемой и при использовании первоклассных ЭВМ. Поэтому попытаемся получить информацию о характере взаимодействия с помощью разбиения процедуры решения на два этапа. Сначала мы рассмотрим модельную задачу о динамике одномерной ленгмюровской турбулентности, возбуждаемой в плазме, помещенной в плоский конденсатор, на обкладках которого поддерживается заданная плотность высокочастотного заряда (электрическая индукция $D = \text{const}$), т. е. будем анализировать решения системы уравнений (1), (2) в одномерном случае, предполагая, что возбуждаются лишь ленгмюровские колебания, распространяющиеся в направлении поля накачки. С помощью найденных решений можно определить величину $\epsilon_{\text{эф}}$ и в некоторых частных случаях самосогласовать задачу, т. е. найти самосогласованные распределения

поля электромагнитной волны и ленгмюровских колебаний. Разумеется, при этом надо будет убедиться, что найденные решения удовлетворяют всем исходным приближениям.

1. Одномерная ленгмюровская турбулентность

В дальнейшем будем пользоваться уравнениями, записанными в безразмерных переменных

$$A = E \left(\frac{16\pi N T_e m}{3M} \right)^{-1/2}, \quad x_n = \frac{x}{3r_d} \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2},$$

$$n_n = \frac{3M}{m} n, \quad \varepsilon_n = \frac{3M}{m} \varepsilon_0, \quad D_n = D \left(\frac{3M}{m} \right)^{3/2} (16\pi N T_e)^{-1/2}, \quad (5)$$

$$t_n = \frac{t V_e}{3r_d (M/m)^{1/2}},$$

причем индекс «н» будем опускать.

В результате имеем систему уравнений

$$-2i \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (\varepsilon_0 - i\gamma_e - n) A = D, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2} |A|^2. \quad (7)$$

В отсутствие источника ($D=0$) и диссипации ($\gamma_e = \gamma_s = 0$) система (6), (7) обладает интегралами. Сохраняются число квантов

$$W = \int |A(x, t)|^2 dx = \text{const}, \quad (8)$$

импульс

$$P = \int \left[A \frac{\partial A^*}{\partial x} - A^* \frac{\partial A}{\partial x} + n v + |A|^2 v \right] dx = \text{const} \quad (9)$$

и гамильтониан (квазиэнергия ленгмюровских колебаний)

$$H = \int \left(\left| \frac{\partial A}{\partial x} \right|^2 + \varepsilon_0 |A|^2 + n |A|^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) dx = \text{const}. \quad (10)$$

В (9), (10) входит гидродинамическая скорость, определяемая уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

При наличии постоянной накачки ($D = \text{const} \neq 0$) сохраняющимися величинами являются импульс системы и гамильтониан H , выражение для которого получим, если дополним (10) членом $(DA^* + D^*A)$, а вместо закона сохранения числа квантов (8) можно написать соотношение эволюционного типа

$$dW/dt = iD \int [A(x) - A^*(x)] dx. \quad (12)$$

Рассмотрим некоторые известные следствия системы уравнений (6), (7).

Ленгмюровские солитоны. При отсутствии накачки ($D=0$) эти уравнения имеют частные решения в виде солитонов,двигающихся со скоростью u [7]:

$$A = \frac{W}{2\sqrt{2}(1-u^2)^{1/2}} \operatorname{ch}^{-1} \frac{W(x-ut)}{4(1-u^2)} \exp i \left\{ ux + \left[\frac{u^2}{2} - \frac{W^2}{16(1-u^2)^2} \right] t \right\}, \quad (13)$$

$$n = -|A|^2/(1-u^2).$$

Ленгмюровский солитон — это движущаяся ямка плотности, возникающая из-за вытеснения плазмы под действием ponderomotorной силы и удерживающая создающие ее ленгмюровские колебания. Одномерный ленгмюровский солитон является энергетически выгодным устойчивым состоянием, так как он обеспечивает минимум энергии H при фиксированных импульсе P и числе квантов W . Из этого следует важная роль солитонов в динамике сильной ленгмюровской турбулентности. В частности, в ряде работ (см. [8]) была сделана попытка построения модели сильной ленгмюровской турбулентности как газа взаимодействующих ленгмюровских солитонов.

Линейная теория модуляционной неустойчивости. Однородное электрическое поле A_0 неустойчиво относительно мелкомаштабных возмущений. Представляя решение (6), (7) в виде

$$A = A_0 + A_1 \exp(i\Omega t - ikx) + \text{к. с.}, \quad (14)$$

где к. с. — комплексно-сопряженная величина, нетрудно получить дисперсионное уравнение для инкремента $\Gamma = \operatorname{Im} \Omega$ и волнового числа этой модуляционной (аперриодической) неустойчивости, аналогичной известной самофокусирующей неустойчивости электромагнитных волн:

$$\Omega^2 = \frac{1}{4} (k^2 - \varepsilon_0) \left[-\frac{2A_0^2 k^2}{k^2 - \Omega^2} + (k^2 - \varepsilon_0) \right]. \quad (15)$$

Неустойчивыми являются масштабы, удовлетворяющие условию $k^2 - \varepsilon_0 < 2A_0^2$ или в размерных переменных $(k^2 r_d^2 - \varepsilon_0) < E_0^2/12\pi N T_e$. Максимальный инкремент Γ_{\max} и оптимальная пространственная частота k^* возмущения определяются соотношениями, которые мы для удобства дальнейшего использования приведем в размерных переменных:

$$\frac{E_0^2}{8\pi N T_e} \ll \frac{m}{M}, \quad 3k^{*2} r_d^2 = \varepsilon_0 + \frac{E_0^2}{8\pi N T_e}, \quad \Gamma_{\max} = \omega_p \frac{E_0^2}{16\pi N T_e}; \quad (16)$$

$$\frac{m}{M} \ll \frac{E_0^2}{8\pi N T_e} \ll 1, \quad 3k^{*2} r_d^2 = 4 \left(\frac{m}{3M} \frac{E_0^2}{8\pi N T_e} \right)^{2/3}, \quad \Gamma_{\max} = 2\omega_p \left(\frac{m}{3M} \frac{E_0^2}{8\pi N T_e} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

В (17) мы для простоты положили $\varepsilon_0 = 0$. Из (16) следует, что о модуляционной (аперриодической) неустойчивости имеет смысл говорить, если $\varepsilon_0 \leq E_0^2/8\pi N T_e$, т. е. когда диэлектрическая проницаемость плазмы на частоте накачки мала ($0 < \varepsilon_0 \leq 1$) или отрицательна ($\varepsilon_0 < 0$, $|\varepsilon_0| \leq 1$).

Модуляционная неустойчивость обладает порогом. При $\varepsilon_0 \geq 0$ этот порог определяется диссипацией ленгмюровских колебаний, при $\varepsilon_0 < 0$ порог $E_0^2/16\pi NT_e > |\varepsilon_0|$.

Нелинейная стадия модуляционной неустойчивости. Численное исследование нелинейной стадии модуляционной неустойчивости проводилось в [9] путем решения уравнений (6), (7) с периодическими граничными условиями при $D = \text{const}$ и начальными условиями, при которых должна реализоваться модуляционная неустойчивость. Приведем для примера результаты решения уравнений в отсутствие диссипации ($\gamma_s = \gamma_e = 0$) и при условии $\varepsilon_0 = 0$.

На начальной стадии после включения накачки происходит преимущественный рост однородного электрического поля (рис. 1) до величины, определяемой стационарным решением (6), (7): $A_0 = D^{1/2}$. При этом система выходит из резонанса с накачкой из-за появления нелинейного сдвига частоты $\sim A_0^2$. На последующей стадии развивается модуляционная неустойчивость, в которой нарастающие модуляционные возмущения взаимодействуют в основном с однородным электрическим полем. Картина не отличается от картины модуляционной неустойчивости свободных ленгмюровских колебаний (при $D = 0$) — происходит увеличение мелкомасштабной составляющей электрического поля и формирование солитонной структуры без изменения полной энергии электрического поля. Распределение электрического поля представляет собой последовательность равно отстоящих солитонов с заметно отличающимися амплитудами, причем расстояние между солитонами соответствует оптимальному масштабу модуляционной неустойчивости (рис. 2). Хотя амплитуды солитонов пульсируют, полная энергия плазменных колебаний почти постоянна. Амплитуда среднего поля A_0 в квазистационаре оказывается на уровне более низком, чем пороговый уровень для развития модуляционной неустойчивости колебаний с масштабами, меньшими расстояния между солитонами. Усредненные по времени спектры ленгмюровской турбулентности являются экспоненциальными — амплитуды пространственных гармоник E_n экспоненциально зависят от номера n (рис. 3).

Реализующаяся в рассматриваемой системе картина ленгмюровской турбулентности принципиально отличается от традиционной, в которой стационарная турбулентность устанавливается за счет баланса между накачкой энергии колебаний источником и диссипацией — в данном случае стационарное состояние возможно и в отсутствие диссипации, за счет нелинейного сдвига частоты ленгмюровских колебаний. Учет малой диссипации, включающейся для малых масштабов (типа затухания Ландау), не приводит к существенному изменению средних характеристик турбулентности — в системе лишь возникает малый поток энергии от больших масштабов к малым. Как уже говорилось, уравнение (6) при $D = \text{const}$ описывает ленгмюровские колебания, возбуждаемые в плазме между двумя плоскими пластинами, на которых

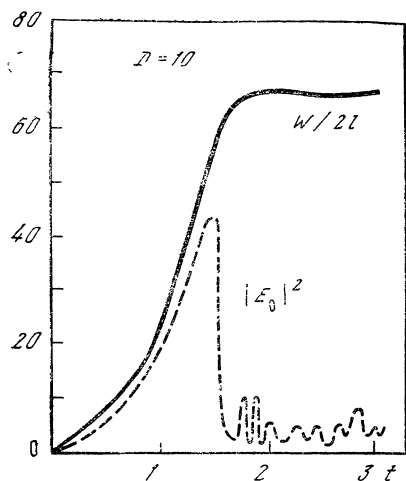


Рис. 1. Зависимости числа плазменных W и интенсивности среднего поля $|E_0|^2$ (пунктир) от времени

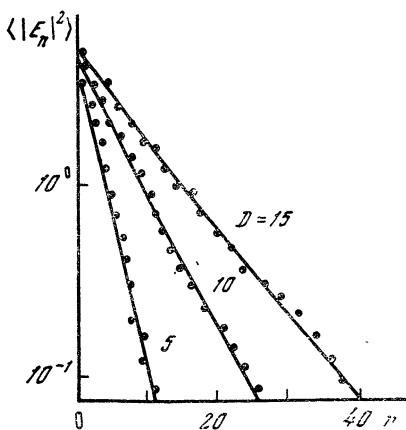


Рис. 3. Усредненные по времени распределения интенсивностей пространственных гармоник поля $\langle |E_n|^2 \rangle$ для различных значений индукции D

Точки — результат численного эксперимента

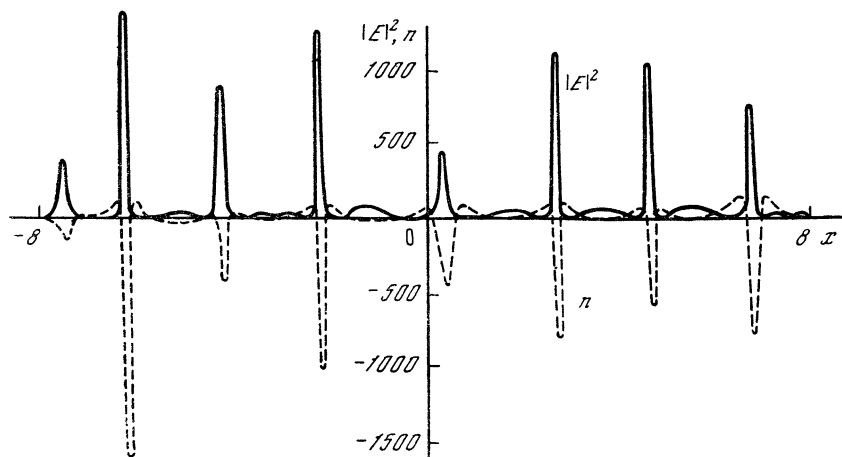


Рис. 2. Типичные распределения интенсивности поля $|E|^2$ и концентрации n (пунктир) по координате

с помощью внешнего источника поддерживается постоянная плотность заряда (плотность тока). Можно рассмотреть эту квазистатическую задачу в другом предельном случае в предположении, что внешний источник поддерживает между пластинами постоянную разность потенциалов¹, т. е. в системе фиксированной

¹ В общем случае внешний источник задает некоторую связь между разностью потенциалов и током, зависящую от импеданса плазмы и внутреннего сопротивления источника.

является величина среднего (по x) поля $\langle E \rangle$. Такой постановке задачи [10, 11], отвечающей, на наш взгляд, задаче о возбуждении сильной ленгмюровской турбулентности потоками заряженных частиц, соответствует уравнение типа (6), но с другой правой частью:

$$-2i \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (\epsilon_0 - i\gamma - n) A = \epsilon_0 A_0 - \langle nA \rangle. \quad (18)$$

Картина модуляционной неустойчивости при $\langle E \rangle = \text{const}$ (см. [11]) принципиально отличается от описанной выше картины в случае $D = \text{const}$. На начальной стадии неустойчивости также

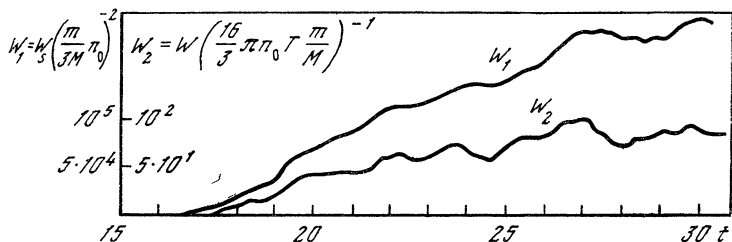


Рис. 4. Зависимости от времени плотности энергии звуковых колебаний W_s и числа плазмонов W при $\langle E \rangle = \text{const}$ и учета диссипации (при $t > 25$ наблюдается насыщение неустойчивости)

возникает почти периодическая решетка солитонов с периодом, соответствующим максимуму инкремента модуляционной неустойчивости. Однако установления стационарного состояния не происходит, а энергия продолжает накапливаться в системе за счет увеличения числа солитонов, так как по мере роста мелко-масштабных колебаний происходит увеличение правой части уравнения (18) — величины $\langle nA \rangle$. Действительно, в отсутствие диссипации энергия ленгмюровских колебаний в системе продолжает расти экспоненциально, а квазистационарное состояние возможно лишь при включении диссипации коротковолновых масштабов (рис. 4). Следовательно, в этой модельной задаче реализуется стационарная схема турбулентности: в k -пространстве можно выделить три участка — длинноволновая область накачки колебаний, инерционный интервал и коротковолновая область поглощения. При заданной накачке ($\langle E \rangle = \text{const}$) уровень энергии в системе принципиально зависит от характеристик диссипации [11].

Таким образом, в зависимости от характера правой части уравнения (6) в системе могут реализоваться два существенно различающихся стационарных состояния, причем уровень энергии в случае $D = \text{const}$ намного ниже соответствующего уровня в случае $\langle E \rangle = \text{const}$.

Очевидно, что в стационарном состоянии одновременно выполняются условия $D = \text{const}$ и $\langle E \rangle = \text{const}$. Следовательно, из-

ложенные выше результаты работ [9—12] показывают, что исходная система уравнений (6)—(8) имеет, по крайней мере, два квазистационарных состояния с существенно различающимися уровнями энергии ленгмюровских колебаний (явление гистерезиса). Какое из этих состояний реализуется в системе, зависит от характера включения поля накачки. При обычном медленном включении поля, по-видимому, должно устанавливаться состояние, обладающее меньшей энергией, т. е. состояние, в которое система приходит в результате выхода из резонанса с накачкой за счет нелинейного сдвига частоты. Характеристики этого состояния можно определить из решения уравнений (6), (7) при условии $D = \text{const}$.

2. Динамика неодномерных распределений ленгмюровских колебаний

Характер нелинейной стадии модуляционной неустойчивости и количественные характеристики развитой сильной ленгмюровской турбулентности существенно зависят от размерности задачи. Рассмотренная выше одномерная картина типична лишь для плазмы в сильном магнитном поле, а в изотропной плазме соответствует лишь начальному этапу развития неустойчивости. Поскольку возникающая в плазме квазиодномерная солитонная структура при умеренной диссипации оказывается слабо связанной с полем электромагнитной волны, последующую динамику колебаний можно рассматривать, не учитывая их взаимодействия с накачкой. Далее мы рассмотрим самовоздействие неодномерных распределений свободных ленгмюровских колебаний. Как и в одномерном случае, рассмотрение будет базироваться на упрощенной динамической системе неодномерных уравнений типа (6), (7) при $D = 0$.

Устойчивость одномерных колебаний. В настоящее время хорошо известно [13—15], что одномерные распределения солитонного типа неустойчивы относительно малых возмущений их поперечной структуры. Физический механизм этой неустойчивости тождественен механизму модуляционной неустойчивости однородного поля, но количественный анализ характеристик этой неустойчивости несколько осложняется неоднородностью плазмы в поле солитона и векторным характером электрического поля.

Аналитическое рассмотрение наиболее просто проводится в рамках так называемой скалярной задачи с кубической нелинейностью, в которой распределение поля описывают скалярным двумерным нелинейным уравнением Шредингера и пренебрегают инерцией ионов ($n = -|A|^2$):

$$-2iA'_t + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + |A|^2 A = 0. \quad (19)$$

Если размер возмущения велик по сравнению с масштабом солитона, т. е. $k_y \ll A_M$ (A_M — амплитуда солитона (13), k_y — волно-

вое число возмущения в y направлении), то выражение для инкремента имеет вид [13]

$$\Gamma = 1/2 k_y^2 A_M^2. \quad (20)$$

Ясно, что существует оптимальный масштаб возмущения, обладающий максимальным инкрементом, и этот масштаб с точностью до численного коэффициента порядка единицы совпадает с шириной солитона. Численное моделирование [15] динамики неустойчивости на основе двумерных уравнений типа (6), (7) подтверждает этот вывод, хотя и дает другую, более слабую, количественную зависимость инкремента Γ от k_y . Развитие неустойчивости приводит к разбиению одномерных солитонов на набор двумерных квазиизотропных ямок плотности (каверн), в которые захвачены ленгмюровские колебания. Исследование нелинейной стадии неустойчивости показывает, что эти сгустки ленгмюровских колебаний, называемые кавитонами, имеют тенденцию к схлопыванию.

Хотя сам факт неустойчивости плоского (одномерного) солитона не вызывает сомнения, экспериментально эта неустойчивость пока никем не исследована. Более того, в [16] сообщается о наблюдении в модельном эксперименте квазиплоских ленгмюровских кавитонов с поперечными масштабами Λ_{\perp} , в 20 раз превышающими продольный масштаб Λ_{\parallel} ($\Lambda_{\parallel} = 30r_d$, $\Lambda_{\perp} = 600r_d$). По-видимому, существование устойчивого плоского кавитона связано с наличием неоднородности плазмы в области плазменного резонанса, однако для объяснения результатов [16] необходимы более детальные сведения о параметрах плазмы. Аналогичные результаты получаются и в трехмерной задаче.

Коллапс ленгмюровских колебаний. Возможность ленгмюровского коллапса впервые обсуждалась В. Е. Захаровым, который, используя идеи теории самофокусировки волновых пучков, показал, что трехмерные распределения колебаний имеют тенденцию к схлопыванию [17]. Уравнение для потенциального электрического поля ленгмюровских колебаний можно получить из уравнения (1), используя соотношение $\text{div } \mathbf{D} = 0$. Тогда, полагая в (1), (2) $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ и переходя к безразмерным переменным (5), имеем

$$\Delta(-2i\psi_t + \Delta\psi) = \text{div}(n\nabla\psi), \quad (21)$$

$$n_{tt} - \Delta n = \Delta|\nabla\psi|^2. \quad (22)$$

Эти уравнения обладают и соответствующими интегралами типа (8)–(10).

Некоторые свойства решений можно установить, используя интегралы уравнений и соображения размерности. Так, в [17] показано, что начальные распределения с отрицательной энергией $H < 0$ оказываются захваченными в конечной области прост-

ранства — максимальное возмущение плотности ограничено снизу:

$$\min \max n(r, t) > |H|/W. \quad (23)$$

В одномерном случае существуют стационарные состояния с $H < 0$ — устойчивые солитоны, и процесс самовоздействия заканчивается образованием солитонов. В двумерном и трехмерном случаях для стационарных распределений $H \geq 0$, и хорошо известно, что такие распределения неустойчивы по отношению к возмущениям, приводящим к схлопыванию (самосжатию) [17]. В то же время в рамках уравнений (21), (22) не существует факторов, препятствующих схлопыванию. Это обстоятельство является достаточным основанием для предположения о том, что эволюция «схлопывающихся» распределений должна приводить к образованию у решения за конечное время сингулярности. В реальной физической системе бесконечная плотность энергии не будет реализоваться, так как, начиная с некоторых амплитуд или масштабов области сильного поля, должен включаться один из механизмов бесстолкновительного затухания (обычно затухание Ландау на тепловых электронах), приводящий к поглощению колебаний. Поэтому с точки зрения физики представляет интерес вопрос о величине энергии колебаний, уходящей в особенность, так как от нее зависит эффективность диссипации энергии в системе.

Основным источником информации о характере коллапсирующих решений системы уравнений (21), (23) до настоящего времени являются численные расчеты, а также рассмотрение возможных автомоделных решений этих уравнений. Не вдаваясь в историю вопроса, сформулируем кратко результаты проведенных к настоящему времени исследований.

Анализ системы уравнений (21), (22) показывает, что можно различать два предельных случая эволюции распределений с отрицательной энергией $H < 0$. При малых амплитудах $|\nabla\psi|_{\max}^2 \ll 1$ распределение поля меняется медленно и возмущения плотности успевают выноситься со скоростью звука из области поля, так что нелинейность среды является локальной $n = -|\nabla\psi|^2$. Процесс самовоздействия колебаний такой малой интенсивности $W/NT_e \ll m/M$ описывается уравнением

$$\Delta (-2i\partial\psi/\partial t + \Delta\psi) + \text{div} (|\nabla\psi|^2 \nabla\psi) = 0. \quad (24)$$

Это уравнение допускает автомоделную $\frac{1}{2}$ подстановку

$$\psi = \theta(\xi) \exp[-i\mu^2 \ln(t_0 - t)], \quad \xi = v/(t_0 - t)^{1/2}. \quad (25)$$

Автомоделное решение должно удовлетворять закону сохранения числа плазмонов:

$$W = \int |\nabla\psi|^2 d\mathbf{r} = (t_0 - t)^{p-2} \int |\nabla_\xi\theta|^2 d^p\xi = \text{const}, \quad (26)$$

где p — показатель размерности задачи. В наиболее важном трехмерном случае ($p=3$) соотношение (26) может быть выполнено,

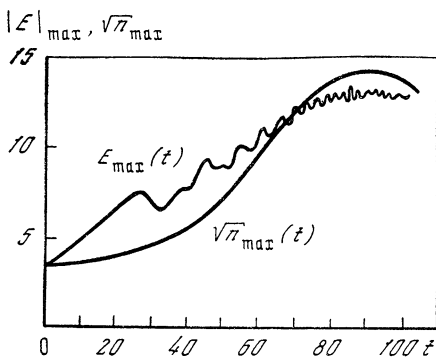


Рис. 5. Типичные зависимости амплитуды поля $|E|_{\max}$ и концентрации n_{\max} от времени для сферически симметричных начальных условий

а

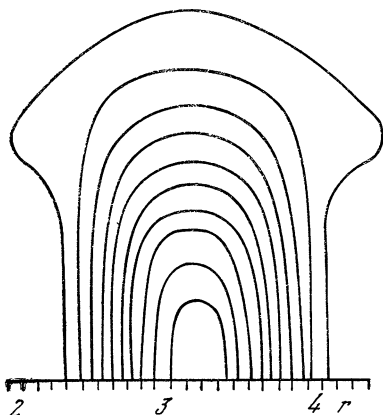
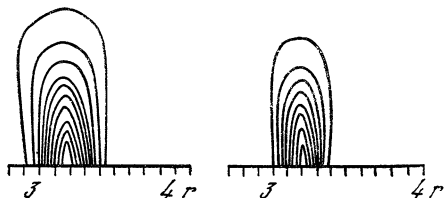


Рис. 6. Линии уровня $|E(r, z)|^2$ в различные моменты времени для аксиально симметричной задачи (r, z) с дипольным начальным полем
 а — $t=0,0$, $|E|_{\max}^2=22,1$; б — $t=0,4$, $|E|_{\max}^2=176,0$; в — $t=0,5$, $|E|_{\max}^2=515,0$

б

в



только если $\int |\nabla_{\xi} \theta|^2 d\xi^3 = \infty$. Это означает, что соответствующие уравнения не имеют локализованных решений. Более детальный анализ показывает, что можно сконструировать автомодельные решения с сохраняющимся числом квантов, если в уравнение (24) включить сторонний источник. Этот источник должен компенсировать потери, связанные с излучением плазменных волн из схлопывающейся по закону (25) каверны. В отсутствие источника число квантов в схлопывающихся трехмерных кавернах не сохраняется, т. е. в рамках уравнения (24) возможно лишь возникновение сингулярностей, содержащих нулевую энергию.

Процесс коллапса на дозвуковой стадии может привести лишь к достижению плотности энергии $W/NT_e \approx m/M$. Дальнейшее самосжатие должно происходить либо со скоростью порядка звуковой, либо со сверхзвуковой скоростью. Звуковой коллапс, удовлетворяющий законам сохранения, может реализоваться лишь при некоторых специальных конфигурациях электрического поля. Так, в [18] построены точные двумерные аксиально-симметричные автомодельные решения, а в работах [8, 13,

19, 20] рассмотрены приближенные трехмерные квазисолитонные решения уравнений в виде тонких сферических слоев колебаний. Однако такие распределения, коллапсирующие со скоростью, близкой к скорости звука, неустойчивы относительно возмущений, в которых все пространственные масштабы одного порядка, причем время развития неустойчивости меньше времени коллапса [19, 20].

Поэтому принято считать, что центральным является вопрос о характере эволюции колебаний при сверхзвуковом коллапсе, когда поле меняется быстрее, чем происходит вынос колебаний со скоростью звука. В этом случае можно пренебречь в уравнении (22) членом, учитывающим перенос возмущений:

$$\partial^2 n / \partial t^2 = \Delta |\nabla \psi|^2, \quad (27)$$

и описывать процесс уравнениями (24), (27).

Наиболее выгодными энергетическими представляются сферически симметричные распределения. Однако численные расчеты и анализ автомодельных решений [13, 21] показывают, что сверхзвуковой сферически симметричный коллапс запрещен уравнениями (24), (27). На рис. 5 представлена типичная картина эволюции начального сферически симметричного распределения с $H < 0$, полученная в численных расчетах [21]. Наблюдаемое насыщение связано с тем, что в симметричном пучке электрическое поле создает в центре симметрии ($r=0$) потенциальную яму, в которой происходит накопление частиц, выносимых из области максимума поля. Диэлектрическая проницаемость в центре становится отрицательной $\epsilon(r=0) < 0$ и препятствует схлопыванию колебаний к центру.

Естественно предположить, что запрет симметричного коллапса связан с этой особенностью топологии электрического поля, и пытаться рассмотреть несимметричные распределения, которые в центре имеют максимум квадрата амплитуды. Так, в работах [22, 23] численно исследовался коллапс каверны с дипольной (дисковой) конфигурацией электрического поля. В этом случае процесс самосжатия идет более эффективно, чем в сферически симметричном случае. К сожалению, проведенные расчеты имеют преимущественно демонстрационный характер. В случае двух и трех пространственных переменных задача численного исследования коллапса требует использования предельных возможностей современных ЭВМ. Поэтому в расчетах сразу задаются сильнонадкритические условия, при которых начальное распределение плотности соответствует сильно фокусирующей линзе. Полученные результаты убедительно свидетельствуют о наличии тенденции к схлопыванию (рис. 6), но не дают ответа на такие тонкие принципиальные вопросы, как существование решений с сингулярностью, содержащей конечную энергию колебаний W , зависимость характера процесса от начальной симметрии распределения и др. Для решения подобных вопросов необходимо аналитическое рассмотрение и более детальные численные эксперименты.

Энергетический запрет сверхзвукового коллапса. Обычно в теории коллапса предполагается, что если особенность в решении возникает в некоторый момент t_0 , то вблизи момента ее образования плотности плазмы и поля в каверне имеют автомодельный характер. Следуя этому предположению, попытаемся исследовать возможные автомодельные решения уравнений сверхзвукового коллапса.

Система уравнений (21), (27) в трехмерном случае допускает автомодельную подстановку

$$\begin{aligned}\psi &= (t_0 - t)^{-1/3} \theta(\xi) \exp [i\mu^2/(t_0 - t)^{4/3}], \\ n &= N(\xi) (t_0 - t)^{-1/3}, \quad \xi = r/(t_0 - t)^{2/3},\end{aligned}\tag{28}$$

причем на этот раз подстановка оставляет сохраняющимся число квантов $\int |\nabla\psi|^2 d^3r = \int |\nabla_\xi\theta|^2 d^3\xi$. Факт наличия подходящей автомодельной замены еще не означает существования локализованных автомодельных решений. Действительно, в [13] с помощью представления решения в виде суммы степенного ряда показано, что таких сферически симметричных решений не существует. До последнего времени предполагалось, что в случае дипольных дисковых конфигураций поля, которые фигурировали в численных расчетах, локализованные автомодельные решения могут существовать, хотя соответствующие решения сложной краевой задачи не были найдены. Недавно в работе [24] было показано, что существуют жесткие ограничения на класс автомодельных решений сверхзвукового коллапса, связанные с законами сохранения. Проиллюстрируем идею этого доказательства на более простой модельной задаче для скалярного поля $u(r, t)$, описываемой уравнениями

$$-2i\partial u/\partial t + \Delta u - nu = 0,\tag{29}$$

$$\partial v/\partial t = -\nabla |u|^2, \quad \partial n/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.\tag{30}$$

Эта модель обладает всеми свойствами масштабного подобия исходной векторной задачи, но лишена топологической особенности, связанной с требованием нуля поля в центре для симметричных решений, которая являлась главным препятствием коллапсу. Интегралы уравнений (29), (30) имеют вид

$$\begin{aligned}W &= \int |u|^2 d\mathbf{r}, \\ H &= \int \{ |\nabla u|^2 + n |u|^2 + 1/2 v^2 \} d\mathbf{r}.\end{aligned}\tag{31}$$

В уравнениях (21) также можно сделать автомодельную замену переменных типа (28)

$$u = a^{-3/2} u(\xi) \exp \left(i \int \mu^2 dt \right),$$

$$n = a^{-2} N(\xi), \quad v = a^{-3/2} \nabla \Phi(\xi), \quad (32)$$

$$\mu^2 = \mu_0^2 / a^2(t), \quad a(t) = (t - t_0)^{2/3}, \quad \xi = r/a(t).$$

Подстановка автоматически обеспечивает условие сохранения числа квантов $W = \text{const}$. Замена переменных в интеграле энергии приводит к соотношению

$$H_{\text{авт}} = H_{\xi} / a^2 = \text{const}, \quad (33)$$

для выполнения которого необходимо

$$H_{\xi} = 0, \quad (34)$$

т. е. локализованные автомодельные распределения должны в автомодельных переменных иметь квазиэнергию, равную нулю.

Рассмотрим для простоты сферически симметричный случай. Тогда $\Phi(\xi)$ и $N(\xi)$ можно записать через $|u|^2$ в квадратурах

$$\Phi(\xi) = \frac{3}{2} \xi^{-3/2} \int_0^{\xi} \xi^{-1/2} |u|^2 d\xi, \quad \Phi(0) = |u(0)|^2, \quad (35)$$

$$N(\xi) = \frac{3}{2} \xi^{-2} \int_0^{\xi} \xi \Delta \Phi d\xi = \frac{3}{2} \xi^{-3/2} \frac{d}{d\xi} \{ \xi [\Phi(\xi) - \Phi(0)] \} \quad (36)$$

при $\xi \rightarrow \infty$, $\Phi(\xi) \rightarrow 0$, так что для возмущения плотности имеем асимптотику

$$N(\xi) = -^{3/2} |u(0)|^2 / \xi^2. \quad (37)$$

Нас интересуют устойчивые автомодельные решения. Довольно естественно предположить, что решение устойчиво, если само-согласованная яма плотности $N(\xi)$ такова, что в ней не могут существовать более высокие моды. Когда это условие нарушается, т. е. в яме может возбуждаться еще одна более мелкомасштабная мода, то основная мода оказывается модуляционно-неустойчивой относительно таких запертых в яме возмущений. Сделанное предположение не доказано строго, но подтверждается всеми известными нам примерами аналитического и численного исследований устойчивости нелинейных мод.

Из квантовой механики известно [25], что в яме типа $N(\xi) = -\beta/\xi^2$ существует бесконечное число дискретных уровней, если $\beta \geq 1/4$. Следовательно, условие одномодовости ямы (36) имеет вид

$$^{3/2} |u(0)|^2 \leq 1/4. \quad (38)$$

Вычислим теперь гамильтониан H для автомодельных одно-модовых распределений:

$$H_{\xi} = \int \left[|\nabla u|^2 - \frac{3}{2} |u(0)|^2 \frac{|u|^2}{\xi^2} \right] d\xi + \int \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\Phi^2}{4\xi^2} \right] d\xi. \quad (39)$$

Единственное отрицательное слагаемое в $H_{\text{авт}}$ связано с тем, что $u(0) \neq 0$. Для объемных интегралов справедливо неравенство

$$\int |\nabla u|^2 d\xi \geq \frac{1}{4} \int \frac{|u|^2}{\xi^2} d\xi. \quad (40)$$

Поэтому получаем, что в классе одномодовых распределений $H_\xi > 0$, т. е. одномодовых автомодельных решений, удовлетворяющих законам сохранения исходных уравнений, сверхзвукового коллапса не существует. Аналогичный вывод может быть сделан и для несимметричных распределений скалярной задачи, и для автомодельных решений векторной задачи о ленгмюровском коллапсе.

На наш взгляд, реализация коллапса существенно неодномодовых распределений энергетически невыгодна, а сам процесс коллапса таких распределений в силу приведенных выше аргументов должен оказаться неустойчивым.

Таким образом, мы приходим к выводу, что при схлопывании трехмерных каверн число квантов и квазиэнергия колебаний не могут сохраняться одновременно. При условии $W/NT_e > m/M$ каверна сжимается со скоростью порядка или больше ионно-звуковой, причем естественно предположить, что в соответствии с соотношениями размерности по мере сжатия происходит уменьшение числа захваченных плазмонов, как это происходит в дозвуковом режиме коллапса. Поскольку затухание Ландау включается при малых, но конечных масштабах колебаний, коллапс приводит к доставке конечной энергии к области поглощения. Однако темп поглощения оказывается более низким, чем в случае, когда коллапс происходил бы с сохранением числа плазмонов в каверне.

3. Макроскопические характеристики сильной ленгмюровской турбулентности

Попытаемся представить качественную картину трехмерной ленгмюровской турбулентности, возбуждаемой в однородной плазме полем сильной электромагнитной волны, и рассмотреть ее некоторые макроскопические следствия.

Модуляционная неустойчивость, возникающая в поле электромагнитной волны, первоначально приводит к образованию в плазме одномерной квазипериодической стоячей солитонной структуры, слабо взаимодействующей с накачкой. При умеренных амплитудах электромагнитной волны $\langle E_0 \rangle^2 / 8\pi NT_e \ll 1$ размеры образующихся солитонов заметно превышают дебаевский радиус r_d , так что бесстолкновительное поглощение не оказывает существенного влияния на динамику турбулентности. Одномерная решетка неустойчива относительно поперечных возмущений, приводящих к образованию в плазме набора трехмерных коллапсирующих каверн.

Энергию в одной каверне можно оценить по формуле

$$\mathcal{E}_{\text{кав}} \approx W_0 (\pi/k^*)^3, \quad (41)$$

где $W_0 = \langle E_0 \rangle^2 / 8\pi$ — плотность энергии поля накачки, k^* — оптимальное волновое число модуляционной неустойчивости.

В процессе коллапса энергия колебаний, захваченных в каверну, убывает пропорционально размеру каверны, так что для величины энергии, поглощенной в одной каверне, имеем

$$\mathcal{E}_{\text{кол}} \approx \mathcal{E}_{\text{кав}} (k^* r_d) = \pi^3 (N r_d^3) T_e. \quad (42)$$

Можно оценить и величину плотности поглощающей энергии в единицу времени, так как нам известно полное число каверн $N_{\text{кав}} \approx (k^*/\pi)^3$, и характерное время коллапса (со звуковой скоростью) $\tau_{\text{кол}} \approx (k^* c_s)^{-1}$,

$$Q = \mathcal{E}_{\text{кол}} N_{\text{кав}} / \tau_{\text{кол}} \approx \omega_p W_0 (k^* r_d)^2. \quad (43)$$

Если ввести понятие эффективной частоты соударений, характеризующей темп бесстолкновительного поглощения волны накачки: $Q = \nu_{\text{эф}} W_0$, то из (43) получим окончательную оценку:

$$\nu_{\text{эф}} \approx \alpha \omega_p W_0 / N T_e, \quad (44)$$

α — численный коэффициент порядка единицы (по-видимому, $\alpha \leq 10$). Разумеется, приведенная оценка $\nu_{\text{эф}}$ справедлива лишь на начальной стадии взаимодействия, в дальнейшем появление значительного числа ускоренных электронов, связанное с поглощением ленгмюровских колебаний, может привести к заметному изменению характеристик турбулентности.

Еще одним макроскопическим проявлением сильной ленгмюровской турбулентности является существенное изменение действительной части диэлектрической проницаемости плазмы. Дело в том, что образование динамических квазиодномерных солитонных распределений плазменных колебаний сопровождается расслоением первоначально непрозрачной плазмы ($\epsilon_0 < 0$), приводящим к созданию знакопеременной структуры диэлектрической проницаемости (в кавернах $\epsilon > 0$). Такая слоистая структура с масштабами, много меньшими длины, может быть прозрачной для исходной волны накачки, так как слои перпендикулярны электрическому полю волны [6].

Принципиальную возможность этого механизма нелинейной прозрачности можно проиллюстрировать с помощью решения линейной задачи о распространении волн в стратифицированной (перпендикулярно оси x) среде, состоящей из периодического набора плазменных слоев двух типов: диэлектрическая проницаемость слоя с толщиной a положительна ($\epsilon_a > 0$), а диэлектрическая проницаемость слоя толщиной L отрицательна ($\epsilon_L < 0$). Решая задачу стандартным путем, получим дисперсионное уравнение для постоянной распространения неоднородных монохроматических плоских волн, распространяющихся в такой системе в направлении

\bar{z} , с составляющими электрического поля вида $E_x(x)e^{ihz}$, $E_z(x)e^{-ihz}$. Из этого уравнения в пределе квазистатически тонких слоев (грубо это требование сводится к неравенствам $ha \ll 1$, $hL \ll 1$) получаем

$$h^2 = k_0^2 \varepsilon_{\text{эф}} = k_0^2 \frac{(L+a) \varepsilon_a |\varepsilon_L|}{a |\varepsilon_L| - \varepsilon_a L}, \quad (45)$$

причем выражение для $\varepsilon_{\text{эф}}$ совпадает с соответствующим выражением, следующим из решения одномерной квазистатической задачи $1/\varepsilon_{\text{эф}} = 1/\langle \varepsilon \rangle$. Из (45) имеем условие существования распространяющихся волн $h^2 > 0$:

$$\varepsilon_a < (a/L) |\varepsilon_L|. \quad (46)$$

Следовательно, в плотной плазме при наличии не очень значительной модуляции ε (даже при $a \ll L$ и $\varepsilon_a \ll |\varepsilon_L|$) возможно распространение электромагнитной волны ТМ-типа. Электрическое поле такой волны обладает небольшой составляющей $E_z \ll E_x$, а групповая скорость может существенно отличаться от скорости света в вакууме ($h \gg k = \omega/c$).

Вернемся теперь к нелинейной задаче. Нам нужно найти зависимость эффективной диэлектрической проницаемости от среднего поля $\varepsilon_{\text{эф}}(\langle E \rangle)$. Учитывая, что эта характеристика плазмы достаточно грубо зависит от принимаемой модели расслоения плазмы (она определяется средним дипольным моментом единицы объема сильнонеоднородной плазмы), рассмотрим задачу в простейшей постановке.

Предположим, что в случае линейной поляризации падающей электромагнитной волны возникающие каверны являются квазиодномерными, и для нахождения $\varepsilon_{\text{эф}}$ воспользуемся решениями одномерного стационарного уравнения для плазменных колебаний

$$d^2 E/dx^2 + (\varepsilon_0 + |E|^2 - |\langle E \rangle|^2) E = D, \quad (47)$$

в котором усреднение проводится наиболее просто. Для определения нужного нам квазисолитонного решения (47) необходимо задаться зависимостью среднего расстояния между солитонами (периода эллиптической функции) от величины D . Естественно предположить, что расстояние между солитонами в стационарном случае совпадает с масштабом наиболее быстро растущего возмущения при модуляционной неустойчивости. Если в системе нет сильной диссипации, то сохраняется память о предыстории процесса, и даже в неоднородной плазме масштаб расслоения одинаков во всей области неустойчивости и определяется максимальным значением поля в начальный момент времени (в области точки поворота) [6]. В другой предельной постановке предполагается локальная связь между масштабом расслоения L и полем электромагнитной волны [26]. Опуская подробности, в качестве примера

приведем выражение для $\varepsilon_{\text{эф}}$, полученное в предположении локальной связи L с D [26]:

$$\varepsilon_{\text{эф}}(D \geq D_m) = \frac{\sqrt{2D}}{[(2D^2)^{1/3} - |\varepsilon_0| - (\sqrt{2D})^{1/3}]^{1/2}}, \quad (48)$$

$$\varepsilon_{\text{эф}}(D \leq D_m) = \varepsilon_0.$$

Здесь $D_m = |\varepsilon_0|^{3/2}/\sqrt{2}$ — пороговое поле модуляционной неустойчивости.

Из (48) следует, что просветление плазмы $\varepsilon_{\text{эф}} > 0$ происходит, если поле превышает некоторую пороговую величину

$$D > D_{\text{пор}} \approx 1,17 D_m,$$

незначительно отличающуюся от величины порога модуляционной неустойчивости.

В ряде экспериментов [27—29] при взаимодействии сильной электромагнитной волны с непрозрачной (закритической $\omega_{pe} > \omega$) изотропной плазмой наблюдался эффект нелинейного просветления плазмы. Неожиданным явилось, что нелинейная прозрачность возникала за время, много меньшее времени макроскопического перераспределения плотности плазмы (на масштабах порядка размеров волнового пучка и плазмы). Предложенный в [6] и кратко описанный выше механизм просветления, связанного с модуляционным расслоением плазмы, позволяет удовлетворительно объяснить наблюдавшиеся в экспериментах особенности взаимодействия, в первую очередь малость времени установления прозрачности и ее поляризационную анизотропию¹, а также наличие ускоренных электронов, сателлитов в спектре прошедшего через плазму сигнала и т. д. Детальное сравнение теоретических представлений с результатами эксперимента проведено в [30].

II. РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ СИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

До сих пор речь шла о возбуждении ленгмюровских колебаний в однородной плазме. Обобщение этих результатов на неоднородную плазму с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon(z)$ не представляет особого труда в случае, если электромагнитная волна распространяется в направлении градиента плотности плазмы. Принципиально новая ситуация возникает при наклонном падении на неоднородную плазму поляризованной волны, имеющей составляющую электрического поля, параллельную градиенту диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$. В этом случае возбуждение ленг-

¹ При зондировании возмущенной области слабой волны с линейной поляризацией электрического поля плазма оказывалась прозрачна для пробной волны, если ее электрическое поле было параллельно электрическому полю накачки, и непрозрачна в случае ортогональных поляризаций [27].

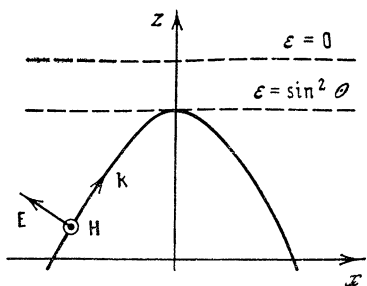


Рис. 7. Схема падения p -поляризованной волны на слоисто-неоднородную плазму

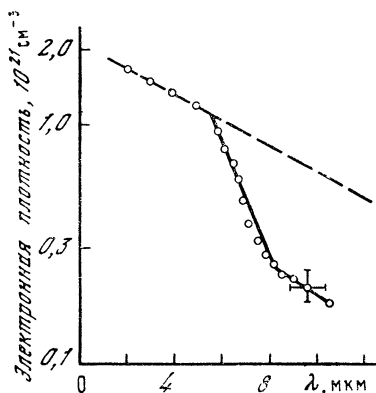


Рис. 8. Измеренное распределение плотности электронов в плазменной короне мишени

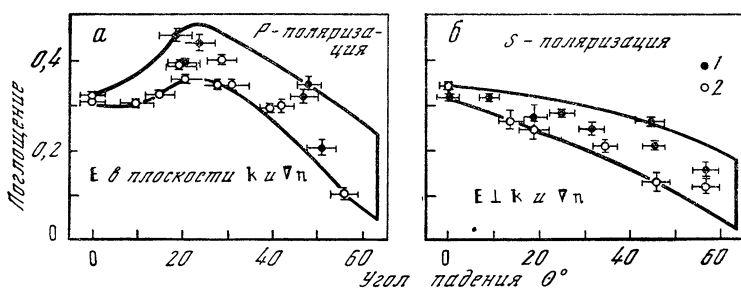


Рис. 9. Экспериментально измеренные зависимости коэффициента поглощения лазерного излучения в плазме около плоской мишени от поляризации электрического поля и угла облучения при разных значениях мощности импульса U

a : 1 — $(5,6 \pm 0,4) \cdot 10^{15}$, 2 — $(2,5 \pm 0,9) \cdot 10^{16}$ Вт·см²; $б$: 1 — $(8,5 \pm 4,0) \cdot 10^{15}$, 2 — $(2,6 \pm 0,4) \times 10^{15}$ Вт·см²

мюровских колебаний в области плазменного резонанса происходит даже в случае малых амплитуд падающей электромагнитной волны. Нелинейные эффекты могут приводить лишь к изменению коэффициента трансформации падающей волны в плазменные колебания, а следовательно, к изменению коэффициента поглощения излучения.

Напомним сначала результаты линейной теории. Пусть на слоисто-неоднородную плазму с $\epsilon = \epsilon(z)$ под углом θ падает из вакуума p -поляризованная волна с составляющими электрического поля E_x, E_z , лежащими в плоскости падения (рис. 7). Эта волна имеет точку поворота, определяемую из условия $\epsilon(z) = \sin^2 \theta$, от которой поле в глубь плазмы спадает. Если не учитывать механизмы потерь, то в области плазменного резонанса $\epsilon = 0$ со-

ставляющая электрического поля имеет особенность типа $E_z \sim 1/\varepsilon$, которая впервые рассматривалась в работе Денисова [31]. Структуру поля и поглощение волны в этой области можно рассчитать с помощью той же квазистатической модели о возбуждении поля в конденсаторе с заданной индукцией D_z : $E_z = D_z/\varepsilon$ [32]. В случае слоя с линейной зависимостью

$$\varepsilon(z) = -z/l + i\nu/\omega, \quad (49)$$

где ν — частота соударений электронов, величину диссипируемой энергии можно определить с помощью простого соотношения

$$Q_0 = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu |E_z|^2 dz = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu \frac{D_z^2}{|\varepsilon|^2} dz = \frac{D_z^2 \omega l}{8}. \quad (50)$$

Диссипируемая энергия не зависит от ν , а следовательно, и от механизма потерь, который может быть связан не только с соударениями, но и с генерацией убегающей из области плазменного резонанса в сторону малой плотности плазменной волны. Анализ показывает [33], что при малых ν ($\nu/\omega < (r_d/l)^{2/3}$) амплитуда поля в резонансной области ограничивается из-за генерации убегающей плазменной волны.

Мощность потерь Q определяется величиной $D_z = H_y \sin \theta$ (H_y — амплитуда магнитного поля электромагнитной волны) и зависит от угла падения θ двояко, так как величина H спадает в область непрозрачности от точки поворота. Оказывается, существует оптимальный угол, при котором величина D , а следовательно, и потери максимальны:

$$\theta_{\text{opt}} = (k_0 l)^{-1/2}, \quad D_z = E_0 / \sqrt{2\pi k_0 l}, \quad (51)$$

$$Q = \frac{1}{8} \omega l D^2 = \frac{c}{16\pi} E_0^2. \quad (52)$$

Здесь E_0 — амплитуда падающей волны в вакууме. Оптимальному углу соответствует коэффициент поглощения $\sim 50\%$. Более строгое рассмотрение подтверждает этот вывод, но показывает, что в случае специально подобранных профилей возможно, в принципе, полное согласование падающего излучения с плазмой [34].

Эффект линейной трансформации электромагнитной волны в плазменные колебания известен давно [31]. Около 15 лет назад В. Б. Гильденбург впервые попытался исследовать влияние нелинейных эффектов на поглощение [35], но особенно возрос интерес к этой проблеме в последние годы в связи с экспериментами по взаимодействию мощного лазерного излучения с плазмой.

На рис. 8 и 9 приведены в качестве иллюстрации результаты лазерных экспериментов, взятые соответственно из работ [37] и [36]. Рис. 9 показывает зависимость коэффициента поглощения лазерного излучения в плазме, образующейся при взаимодействии его с плоской мишенью, от поляризации электрического поля и угла облучения. (Лазер «Янус», длительность импульса 30 пс,

мощность 10^{15} — 10^{16} Вт/см², диаметр пучка 20 мкм, диаметр полиэтиленовой мишени 300 мкм.) Видно, что в случае наклонного падения p -поляризованного излучения имеет место максимум при углах $\theta = 20$ — 30° , и коэффициент поглощения значительно больше, чем в случае s -поляризации. На рис. 8 приведено измеренное с помощью интерферометрических методов распределение плотности электронов в плазменной короне мишени. Видно, что под действием мощного излучения (плотность потока энергии в эксперименте $s \approx 3 \cdot 10^{14}$ Вт/см², $\lambda = 1,06$ мкм, что соответствовало отношению $W/NT_e \approx 0,1$ при температуре электронов $T_e \approx 1$ кэВ) в плазме в области критической плотности формируется крутой перепад плотности с масштабом порядка длины волны излучения.

Очевидно, что теория взаимодействия сильных электромагнитных волн с неоднородной плазмой должна описывать эти эффекты, наблюдаемые в экспериментах, и предсказывать величину поглощения. В этом разделе мы кратко остановимся на существующих теоретических представлениях.

Следует сразу подчеркнуть, что в случае лазерной плазмы взаимодействие имеет динамический характер, и вряд ли можно рассчитывать (за исключением каких-то специальных условий) на установление стационарных состояний. Однако нестационарная задача даже в одномерной постановке требует привлечения громоздких численных расчетов. Поэтому, не претендуя на детальное объяснение лазерных экспериментов, рассмотрим простейшую одномерную стационарную модель взаимодействия, позволяющую выделить основные физические процессы и получить необходимые оценки.

Очевидно, что нелинейные эффекты в первую очередь должны проявляться в области плазменного резонанса. Структуру поля в этой области можно по-прежнему рассматривать в квазистатической модели, так как отношение масштабов плазменной и электромагнитной волн является малым параметром задачи даже в случае лазерной плазмы: $\lambda_p/\lambda_t \approx V_{Te}/c \ll 1$. Задача о деформации профиля плотности в резонансной области впервые рассматривалась В. Б. Гильденбургом [35], который показал, что под действием поля в этой области формируется резкий перепад. При учете пространственной дисперсии этот перепад должен иметь конечные размеры — порядка длины генерируемой плазменной волны, а структура поля в резонансной области при отсутствии соударений ($V=0$) описывается уравнением

$$d^2\mathcal{E}/dz^2 + (-z + \eta |\mathcal{E}|^2) \mathcal{E} = 1. \quad (53)$$

Здесь введены новые переменные

$$\mathcal{E} = \frac{E}{D} \frac{\sqrt{3} r_d}{l}, \quad z_n = z (3r_d^2 l)^{-1/3}, \quad \eta = \frac{D^2 l^2}{48\pi N T_e r_d^2}.$$

Характер решения (53) определяется одним параметром η . На рис. 10 приведено взятое из [38] численное решение (53), удовлетворяющее естественным краевым условиям (ограниченность

при $z \rightarrow \infty$ и условие излучения при $z \rightarrow -\infty$). Полученные самосогласованные распределения $\varepsilon(z)$ для нескольких значений параметра (сплошные кривые при $\eta=0$ и $\eta=20$, пунктир при $r_d=0$) показывают, что заметные деформации ε возникают при $\eta > 1$, причем переход становится все более крутым с ростом η , а распределение поля представляет из себя набор пиков (кавитонов).

Деформация профиля плотности приводит при $\eta \gg 1$ к существенному уменьшению амплитуды убегающей продольной волны, т. е. к уменьшению коэффициента линейной трансформации. Численные расчеты и аналитические оценки показывают, что поток энергии убегающей волны можно описывать соотношением $S_i \approx Q_0/\sqrt{\eta}$, где Q_0 — поток энергии (42) в линейном случае. Коэффициент трансформации $\alpha = S_i/S_0$ ($S_0 = (c/8\pi)E_0^2$) при перестает зависеть от градиента невозмущенной концентрации плазмы [38]:

$$\alpha = 2\sqrt{3} \frac{V_{Te} DE_p}{c E_0^2}. \quad (54)$$

В настоящее время численно исследована и динамика нестационарного взаимодействия квазистатического внешнего поля с неоднородной плазмой [39—41]. Оказывается, что в области плазменного резонанса происходит нестационарный процесс генерации кавитонов, по своему характеру аналогичный описанным в разд. I модуляционным процессам в однородной плазме. При включении внешнего поля $D = \text{const}$ сначала происходит линейная подкачка энергии в области резонанса, однако при $\eta > 1$ амплитуда резонансного электрического поля оказывается меньшей, чем в линейном случае. Дальнейшие искажения профиля плотности и поля происходят без взаимодействия с накачкой; первоначальная яма плотности разбивается на более мелкомасштабные образования, и образующиеся кавитоны перемещаются в сторону уменьшения плотности плазмы. Вслед за этим в резонансной области снова начинается накачка энергии и образование кавитонов. Результаты решения нестационарной задачи подтверждают основной вывод стационарного рассмотрения о снижении среднего (по времени) коэффициента трансформации электромагнитной волны в плазменную при большой величине параметра η .

Установление скачка плотности в резонансной области наблюдалось также в микроволновых лабораторных экспериментах, в которых моделировалось взаимодействие сильного квазистатического электрического поля с неоднородной плазмой. На рис. 11, взятом из работы [42], приведены осциллограммы пространственного распределения плотности, снятые в различные моменты времени. Видно, что в соответствии с теоретическими представлениями в области критической плотности возникает крутой перепад и плато (характерный масштаб перепада $L_p \approx 25r_d$).

Соотношение (54) позволяет определить величину резонансного поглощения. Строго эта задача рассмотрена в [43] путем решения

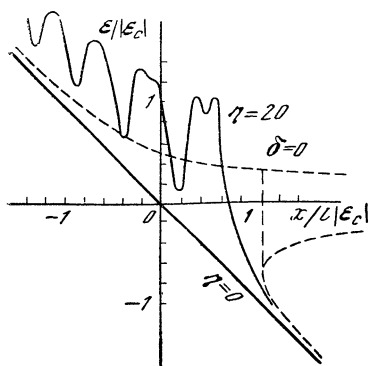


Рис. 10. Самосоглашенное распределение диэлектрической проницаемости для различных значений параметра η ($\epsilon_c = -3/4 (D^2/\pi M T_e)^{1/3}$)

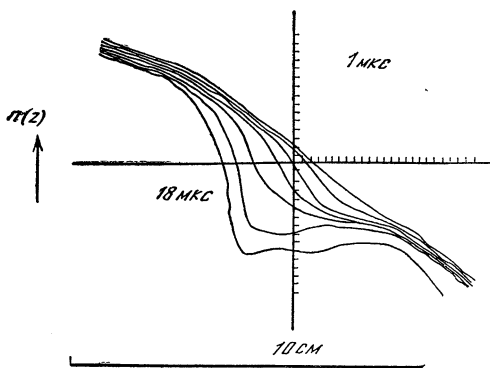


Рис. 11. Осциллограммы пространственного распределения плотности плазмы в различные моменты времени

соответствующей краевой задачи для электромагнитной волны. Здесь мы ограничимся лишь качественными оценками, которые проще всего провести в двух предельных случаях [44].

В случае сравнительно малых амплитуд эффекты деформации профиля плотности плазмы локализованы лишь в малой области вблизи точки $\epsilon=0$, плазма вблизи точки поворота остается практически невозмущенной. Это происходит, если выполнено неравенство

$$(E_0^2/E_p^2) k_0 l \ll 1. \quad (55)$$

Тогда величину индукции можно оценить по-прежнему с помощью линейной теории. При оптимальном угле падения $D \approx E_0/\sqrt{2\pi k_0 l}$ и эффективность трансформации электромагнитной волны в убегающую плазменную убывает с ростом E_0 согласно (54): $\alpha \sim E_0^{-1}$.

При больших амплитудах (при нарушении неравенства (46)) существенным становится еще один нелинейный эффект — сдвиг точки поворота в глубь плазмы под действием пондеромоторной силы. Для простоты величину сдвига точки поворота можно оценить, рассматривая случай нормального падения волны. Анализ [43] показывает, что при условии

$$(E_0^2/E_p^2) k_0 l \gg 1 \quad (56)$$

точка поворота смещается в глубь плазмы вплоть до точки плазменного резонанса, причем существенно изменяется крупномасштабный градиент плотности плазмы в области плазменного резонанса. Под действием поля волны формируется неоднородное распределение концентрации с масштабом порядка длины электромагнитной волны в окрестности точки поворота $\Lambda_e \sim (c/\omega)\sqrt{\epsilon}$. Здесь $\epsilon = (E_0/E_p)^{2/3}$ — величина диэлектрической проницаемости перед пере-

ходом. На фоне этого крупномасштабного перехода в результате возбуждения плазменных волн образуется еще более крутой квазистатический скачок с характерным масштабом порядка плазменной волны $\lambda_p \approx V_{Te}/\omega \sqrt{\epsilon_{кр}}$, на котором диэлектрическая проницаемость изменяется от значения $\epsilon = \epsilon_{кр} = (\bar{\epsilon} \sin \theta)^{1/3}$ до значения $\epsilon = -\epsilon_{кр}$.

Для построенной качественной картины также можно определить величину индукции D в резонансной области. В ВКБ-приближении

$$D = \sqrt{\bar{\epsilon}} E_x \sin \theta = \sqrt[4]{\bar{\epsilon}} E_0 \sin \theta, \quad (57)$$

и, следовательно, для величины коэффициента трансформации имеем из (45) соотношение ¹

$$\alpha = 2\sqrt{3} \frac{V_{Te}}{c} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\bar{\epsilon}}}. \quad (58)$$

При больших углах падения $\sin^2 \theta \gg \bar{\epsilon}$ поле в области плазменного резонанса экспоненциально мало, поэтому и в нелинейном режиме существует оптимальный угол

$$\sin \theta_{\text{опт}} \approx \sqrt{\bar{\epsilon}} \approx (E_0/E_p)^{2/3} \quad (59)$$

с шириной $\Delta\theta \sim \theta_{\text{опт}}$.

Соотношение (59) позволяет определить величину бесстолкновительного резонансного поглощения волны p -поляризации в случае амплитуд $(k_0 l)^{-1} \ll E_0^2/E_p^2 \ll 1$:

$$\alpha_{\text{max}} \approx 2\sqrt{3} V_{Te}/c. \quad (60)$$

Таким образом, мы получили оценку дополнительного поглощения p -поляризованной волны (по сравнению с s -поляризованной волной). Величина этого дополнительного поглощения не убывает с ростом амплитуды падающей волны E_0 , тогда как эффективность поглощения s -поляризованного излучения, связанного с модуляционным возбуждением плазменных колебаний нормальной компонентой электрического поля, уменьшается с ростом E_0 из-за возникновения сильных градиентов плотности. Коэффициент трансформации (60) существенно зависит от температуры электронов. Для достаточно горячей плазмы с $T_e \geq 1$ кэВ он составляет несколько десятков процентов $\alpha \geq 20\%$. Если поглощение на одном скачке невелико, электромагнитная волна в области отражения имеет структуру, близкую к стоячей, так что образуется квазисинусоидальная модуляция диэлектрической проницаемости с несколькими переходами через плазменный резонанс. Поглощение во всех этих областях суммируется, так что полная поглощаемая мощность оказывается порядка падающей.

¹ При условии (58) генерация убегающей плазменной волны всегда приводит к тому, что профиль плотности в области $\epsilon=0$ становится круче, параметр нелинейной деформации оказывается равным $\eta = c^2/3V_{Te}^2 \gg 1$.

Построенная одномерная стационарная модель, разумеется, не может претендовать на полное объяснение конкретных лазерных экспериментов — она не учитывает не только нестационарности взаимодействия и гидродинамического движения плазмы (см., например, [45, 46]), но и существенных неодномерных нелинейных эффектов, таких, как рифление (неустойчивость) поверхности критической плотности, самофокусировочный распад лазерных пучков на нити и т. д. Однако уже эта простейшая модель позволяет интерпретировать некоторые наблюдавшиеся в экспериментах особенности взаимодействия мощного излучения с плазмой, в частности зависимость поглощения от поляризации волны и угла облучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ведынов А. А., Рудаков Л. И. — Докл. АН СССР, 1964, 159, с. 767.
2. Rudakov L. I., Tsytovich V. N. — Phys. Rept, 1978, 40C, N 1, p. 73.
3. Thornhill S. G., Haar D. ter. — Phys. Rept, 1978, 43, N 2, p. 62.
4. Литвак А. Г. — В кн.: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1980, вып. 10, с. 164.
5. Литвак А. Г., Фрайман Г. М. — В кн.: Взаимодействие сильных электромагнитных волн с плазмой. Горький: ИПФ АН СССР, 1980.
6. Литвак А. Г., Миронов В. А., Фрайман Г. М. — Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, с. 368.
7. Рудаков Л. И. — Докл. АН СССР, 1972, 207, с. 821.
8. Горев В. В., Кингсен А. С., Рудаков Л. И. — Изв. вузов. Радиофизика, 19, с. 691.
9. Kol'chugina I. A., Litvak A. G., Fedoseeva T. N., Fraiman G. M. — J. phys., suppl. au, 1979, 40, N 7, p. C7—629.
10. Дегтярев Л. М., Соловьев Г. И., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. — Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, с. 543.
11. Дегтярев Л. М., Сагдеев Р. З., Соловьев Т. И. и др. — Физика плазмы, 1980, 6, с. 287.
12. Литвак А. Г., Трахтенгерц В. Ю., Федосеева Т. Н., Фрайман Г. М. — Письма в ЖЭТФ, 1974, 19, с. 23.
13. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Рудаков Л. И. — ЖЭТФ, 1975, 68, с. 115.
14. Smidt G. — Phys. Rev. Lett., 1975, 34, p. 724.
15. Pereira N. R., Sudan R. N., Denavit J. — Phys. Fluids, 1977, 20, p. 936.
16. Stenzel R. L., Wong A. Y., Kim H. C. — Phys. Rev. Lett., 1974, 32, p. 654.
17. Захаров В. Е. — ЖЭТФ, 1972, 62, с. 1745.
18. Гольцман В. Л., Фрайман Г. М. — Физика плазмы, 1980, 6, с. 564.
19. Литвак А. Г., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д. Препринт НИРФИ № 60. Горький, 1974.
20. Литвак А. Г. — В кн.: Проблемы теории плазмы. Киев: Наук. думка, 1976, с. 134.
21. Литвак А. Г., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д. — Письма в ЖЭТФ, 1974, 19, с. 23.
22. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Рудаков Л. И. — Физика плазмы, 1976, 2, с. 438.
23. Буднева О. Б., Захаров В. Е., Сынах В. С. — Физика плазмы, 1975, 1, с. 606.
24. Фрайман Г. М. — Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, с. 557.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1964. 720 с.
26. Литвак А. Г., Миронов В. А., Фейгин А. М. — ЖЭТФ, 1979, 77, с. 1360.
27. Бродский Ю. Я., Еремин Б. Г., Литвак А. Г., Сахончик Ю. А. — Письма в ЖЭТФ, 1971, 13, с. 136.

28. Батанов Г. М., Силин В. А. — Письма в ЖЭТФ, 1971, 14, с. 445.
29. Батанов Г. М., Силин В. А. — Труды ФИАН. М.: Наука, 1977, т. 92.
30. Бродский Ю. Я., Гольцман В. Л., Миронов В. А., Нечуев С. И. — ЖЭТФ, 1978, 78, с. 1636.
31. Денисов Н. Г. — ЖЭТФ, 1956, 31, с. 609.
32. Гильденбург В. Б. — ЖЭТФ, 1963, 45, с. 1978.
33. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Физматгиз, 1967. 683 с.
34. Жаров А. А., Кондратьев И. Г., Миллер М. А. — Письма в ЖЭТФ, 1977, 25, с. 355.
35. Гильденбург В. Б. — ЖЭТФ, 1964, 45, с. 1978.
36. Manes K., Rupert V., Auerbach J. et al. — Phys. Rev. Lett., 1977, 39, p. 281.
37. Attwood D. T., Sweeney D. W., Auerbach J. M., Lee P. H. Y. — Phys. Rev. Lett., 1978, 40, p. 184.
38. Гильденбург В. Б., Фрайман Г. М. — ЖЭТФ, 1975, 69, с. 1601.
39. Morales J. C., Lee Y. C. — Phys. Fluids, 1977, 20, p. 1138.
40. Коврижных Л. М., Сахаров А. С. — Физика плазмы, 1979, 5, с. 840.
41. Коврижных Л. М., Сахаров А. С. — В кн.: Взаимодействие сильных электромагнитных волн с плазмой. Горький: ИПФ АН СССР, 1980, с. 117.
42. Wong A. Y. Laser interaction and related phenomenas. Plenum Press, 1978, 48, p. 783.
43. Гильденбург В. Б., Литвак А. Г., Фейгин А. М. — Физика плазмы, 1980, 6, с. 432.
44. Гильденбург В. Б., Литвак А. Г., Фрайман Г. М. — Письма в ЖЭТФ, 28, с. 433.
45. Андреев Н. А., Силин В. П., Стенчиков Г. Л. — Письма в ЖЭТФ, 1978, 28, с. 533.
46. Андреев Н. А., Силин В. П., Стенчиков Г. Л. — В кн.: Взаимодействие сильных электромагнитных волн с плазмой. Горький: ИПФ АН СССР, 1980, с. 156.

УДК 533.525

НЕРАВНОВЕСНЫЙ ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ РАЗРЯД В ПОЛЯХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В. Б. ГИЛЬДЕНБУРГ

1. ВВЕДЕНИЕ

Высокочастотный разряд в волновых полях является сравнительно новым объектом исследований в физике плазмы и нелинейной электродинамике. Интерес к нему стимулирован главным образом перспективами получения в полях различных частотных диапазонов (от оптического до радио) достаточно плотной свободно-подвешенной плазмы [1—5].

По аналогии с двумя основными типами статического разряда (телющим и дуговым) целесообразно различать два характерных режима (или этапа существования) разряда в волновых полях: 1) неравновесный («холодный») разряд, характеризуемый низкими температурами всех степеней свободы молекул ($T_m \sim 300$ К) и высокими температурами электронов ($T_e \geq 1$ эВ); 2) термиче-

ский разряд в нагретом газе ($T_m \geq 3 \cdot 10^3$ К), приближающийся в той или иной мере к термодинамически равновесному.

Нужно отметить, что подавляющее большинство исследований (включая работы по лазерной искре [1] и по шнуровым разрядам в резонаторах [2, 3]) касалось либо условий возникновения пробоя газа, либо термического режима разряда; неравновесный режим, несмотря на то что он существует (в течение более или менее длительного промежутка времени) на первых послепробойных стадиях любого разряда, рассматривался в сравнительно небольшом числе работ [4, 6—12]. В данной статье излагаются основные физические представления, проблемы и результаты, относящиеся к этому, пока еще относительно малоизученному режиму разряда. Заметим, что вопросы кинетики элементарных процессов для данного режима весьма просты и могут считаться в основном выясненными, так что центр тяжести задачи переносится здесь на электродинамику, точнее, на исследование совместной эволюции волнового поля и разрядной плазмы при определенном (хотя и весьма специфическом) виде нелинейности.

Концентрация электронов в широкой области параметров неравновесного разряда определяется уравнением баланса

$$\partial N / \partial t = D \Delta N + \nu_i N - \nu_a N, \quad (1)$$

в котором частота ионизации электронным ударом ν_i рассматривается как заданная функция амплитуды электрического поля $|E|$ (обычно принимаемая аппроксимация $\nu_i \sim |E|^\beta$, для воздуха $\beta \approx 5$ [13]), а коэффициент диффузии D и частота прилипания электронов к молекулам ν_a , зависящие от $|E|$ гораздо слабее, как правило, предполагаются постоянными. При необходимости правая часть уравнения (1) может быть дополнена членами, учитывающими электрон-ионную рекомбинацию и ионизацию сторонним источником.

Уравнение для N должно решаться совместно с уравнениями электромагнитного поля. Различные физические модели, для которых найдены решения такого рода, и рассматриваются ниже.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Исследование пространственно-временной картины развития неравновесного разряда после возникновения пробоя естественно начать с изучения его возможных стационарных состояний (в которых газ еще продолжает оставаться холодным). Время существования таких состояний (если они не разрушаются рассматриваемыми ниже неустойчивостями) может быть достаточно большим благодаря малой скорости энергообмена между электронами и тяжелыми частицами.

Наиболее прост для исследования бездиффузионный разряд, условием стационарности которого является равенство частот ионизации и прилипания

$$\nu_i(|E|) = \nu_a, \quad (2)$$

фиксирующее амплитуду поля во всей области разряда на некотором постоянном («пробойном») уровне

$$|E| = E_c = \text{const} \quad (3)$$

(E_c — амплитуда пробойного поля в отсутствие диффузии).

Единственной физической причиной, способной остановить начавшийся в газе (при $|E| > E_c$) лавинообразный процесс пробоя и привести к установлению стационарного состояния, является в рассматриваемых условиях снижение амплитуды поля в области разряда под действием самой разрядной плазмы. Отыскание стационарной структуры разряда сводится при этом к решению весьма своеобразной электродинамической задачи [7]: при заданных источниках излучения требуется найти такое распределение концентрации электронов $N(\mathbf{r})$, при котором поле удовлетворяет условиям

$$|E| = E_c \text{ при } N > 0, \quad |E| < E_c \text{ при } N = 0.$$

Некоторые решения этой задачи найдены для случая, когда комплексная амплитуда электрического поля $\mathbf{E} = \xi_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$ описывается скалярным уравнением Гельмгольца с переменным волновым числом:

$$\Delta E + k^2 \varepsilon(\mathbf{r}) E = 0. \quad (4)$$

Здесь $k = \omega/c$ — волновое число в вакууме, $\varepsilon = 1 - n - in\delta$ — комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы разряда, n — электронная концентрация, отнесенная к критическому значению ($n = N/N_c$, $N_c = m(\omega^2 + \nu^2)/4\pi e^2$), $\delta = \nu/\omega$, ν — эффективная частота столкновений электронов, e и m — заряд и масса электрона. Полагая $E = |E|e^{i\varphi}$, $|E| = \text{const}$, получаем из (4) систему уравнений для фазы φ и концентрации n в области разряда:

$$(\nabla\varphi)^2 = k^2(1 - n), \quad (5a)$$

$$\Delta\varphi = \delta k^2 n \quad (5b)$$

или одно уравнение для фазы:

$$\Delta\varphi + \delta(\nabla\varphi)^2 = \delta k^2 n, \quad (6)$$

которое заменой $\psi = e^{\delta\varphi}$ приводится к линейному:

$$\Delta\psi - \kappa^2\psi = 0, \quad \kappa = \delta k = \nu/c. \quad (7)$$

Из уравнения (5a) (совпадающего с геометрикооптическим уравнением эйконала) следует, что концентрация электронов в разряде не может превышать критическую: $n \leq 1$ (конечно, это справедливо только для рассматриваемого режима разряда в рамках односкалярного описания (4)). Вне области разряда поля описываются уравнением (4) с $\varepsilon = 1$ и должны быть связаны с полями внутри условием непрерывности тангенциальных компонент на границе, положение которой заранее не известно и определяется в конечном счете (вместе со всей структурой $n(\mathbf{r})$) распределением

и мощностью сторонних источников. Для симметричных разрядов, поддерживаемых полями плоских, цилиндрических или сферических волн, нетрудно получить соответствующие строгие аналитические решения, дающие следующие выражения для концентрации [7]:

а) плоскостойный разряд, создаваемый двумя плоскими волнами s -поляризации ($E_{x_0}=0$, x — декартова координата, θ — угол между волновыми векторами обеих волн в вакууме):

$$n(x) = \sin^2 \frac{\theta}{2} \operatorname{ch}^{-2} \left(x \sin \frac{\theta}{2} \right); \quad (8)$$

б) разряд в сходящейся симметричной цилиндрической волне (r — расстояние до оси z , $E=z_0 E$):

$$n(r) = 1 - I_1^2(xr)/I_0^2(xr); \quad (9)$$

в) разряд в сходящейся симметричной сферической волне (r — расстояние до центра) ¹:

$$n(r) = 1 - \left(\frac{1}{\operatorname{th} xr} - \frac{1}{xr} \right)^2. \quad (10)$$

Во всех трех случаях концентрация монотонно убывает с удалением от центра разряда. Для цилиндрического и сферического разрядов максимальное значение концентрации равно критическому ($n_{\max}=1$), а характерный размер ее спада $L=1/\kappa=c/v$. Для плоскостойного разряда n_{\max} и L зависят от угла сходимости θ создающих его плоских волн; при малых θ имеем $n_{\max} = \theta^2/4 \ll 1$, $L = 2c/v\theta$.

Положение внешней границы разряда (которая в бездиффузионном приближении является абсолютно резкой) и поглощаемая разрядом мощность зависят от амплитуды падающей волны: с ростом амплитуды граница отодвигается от центра, а доля поглощаемой мощности возрастает, приближаясь к ста процентам (соответствующие формулы нетрудно получить из условий шивания полей на границе). Заметим, что стационарные плоскостойные решения существуют лишь в том случае, когда плоские волны падают на разряд с обеих сторон, а их амплитуды E_0 заключены в пределах $E_c \geq E_0 \geq E_c/2$.

Важный случай разряда в квазиоптическом волновом пучке удалось пока проанализировать лишь на уровне качественных оценок (вообще говоря, оставляющих открытым вопрос о самом существовании стационарного решения). Основными факторами, компенсирующими сходимостью невозмущенного пучка и способными обеспечить постоянство амплитуды поля в области разряда в стационарном состоянии ($|E|=E_c$), являются поглощение и рефракция волн. Эти процессы снижают величину поля в пучке до требуемого уровня E_c уже при значениях концентрации, много меньших критического ($n \ll 1$), поэтому прямого отражения волны

¹ Данное решение носит преимущественно иллюстративный характер, так как поперечная волна не может быть полностью сферически-симметричной.

от плазмы разряда не возникает и «бегучесть» в пучке сохраняется. Предполагая, что поперечные распределения поля и плазмы в пучке характеризуются неким общим размером a , являющимся функцией продольной координаты z , и не интересуясь прочими деталями радиальной структуры разряда, получаем для описания качественной зависимости $a(z)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{1}{k^2 a^3} - \frac{c}{\nu a^2} \frac{da}{dz}. \quad (11)$$

При этом концентрация электронов, точнее, ее некоторое эффективное среднее \bar{n} в сечении $z = \text{const}$ дается выражением

$$\bar{n} = -\frac{2c}{\nu a} \frac{da}{dz}.$$

Первый член в правой части уравнения (11) учитывает поперечную диффузию поля (дифракционную расходимость), второй — рефракцию.

Основные результаты исследования решения этого уравнения сводятся к следующему: при $\nu \gg \omega$ главную роль в пучке играет поглощение, а максимальная концентрация электронов $\bar{n}_m \approx \approx \theta^2 \omega / \nu \ll 1$, где θ — угол сходимости невозмущенного пучка; при $\nu \ll \omega$ структура пучка и разряда определяется рефракцией, $\bar{n}_m \approx \theta^2 \ll 1$.

3. ДИНАМИКА РАЗРЯДА В ВОЛНОВОМ ПУЧКЕ В ОТСУТСТВИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

Процессы развития бездиффузионного разряда после возникновения пробоя в параксиальном гауссовом волновом пучке исследовались на основании качественных расчетов и путем расчетов на ЭВМ в той области параметров, где отсутствуют мелкомасштабные неустойчивости (см. следующий раздел). Здесь, как и при исследовании стационарных состояний, целесообразно различать две основные причины воздействия образующейся плазмы на поле: поглощение и рефракцию. В отсутствие рефракции (при достаточно больших ν/ω) динамика разряда в осевой области пучка описывается уравнениями

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nu_a (|E|^{\beta} - 1) n, \quad n = n_0 \exp \left[-\nu_a \int_0^t (|E|^{\beta} - 1) dt \right], \quad (12)$$

$$|E| = E_0(z) \exp \left[-\frac{\nu}{2c} \int_{-\infty}^z n(z) dz \right]. \quad (13)$$

Здесь E — поле, отнесенное к пробойному; $E_0(z)$ — поле на оси в отсутствие плазмы; для невозмущенного гауссова пучка $E_0(z) = E_m (1 + z^2/l_F^2)^{-1/2}$, $l_F = ka_F^*$, $ka_F = \theta^{-1}$; l_F и a_F — продольный и попереч-

ный размеры фокальной области, E_m — максимальное поле в фокусе; n_0 — начальная («затравочная») концентрация.

Ввиду неоднородности невозмущенного поля при $E_m > 1$ на начальном этапе развития разряда в направлении от фокуса к источнику излучения (навстречу пучку) бежит так называемая волна пробоя [1]. При этом рост концентрации в каждой точке z (где $E_0(z) > 1$) продолжается до тех пор, пока затухание волны в лежащем перед этой точкой плазменном слое не приведет к достаточному снижению поля $E(z)$. Анализируя качественно на основе указанных соображений уравнения (12), (13), получаем следующую оценку для максимальной величины n в бегущей волне пробоя:

$$n_m \approx \bar{n}_m \ln(\bar{n}_m/n_0), \quad (14)$$

где $\bar{n}_m \approx \theta^2 \omega/\nu$ — максимальная концентрация в стационарном состоянии. Для типичных значений параметров $\ln(\bar{n}_m/n_0) \approx 20 \div 30$, так что n_m существенно превышает соответствующее стационарное значение.

Если главную роль в разряде играет не поглощение, а рефракция, уравнение (13) следует заменить уравнением безабберационного приближения для радиуса приосевой лучевой трубки $a(z)$. Оценка максимальной концентрации в волне пробоя приводит в этом случае к результату, подобному (14) [12]:

$$n_m \approx \theta^2 \ln(\theta^2/n_0). \quad (14a)$$

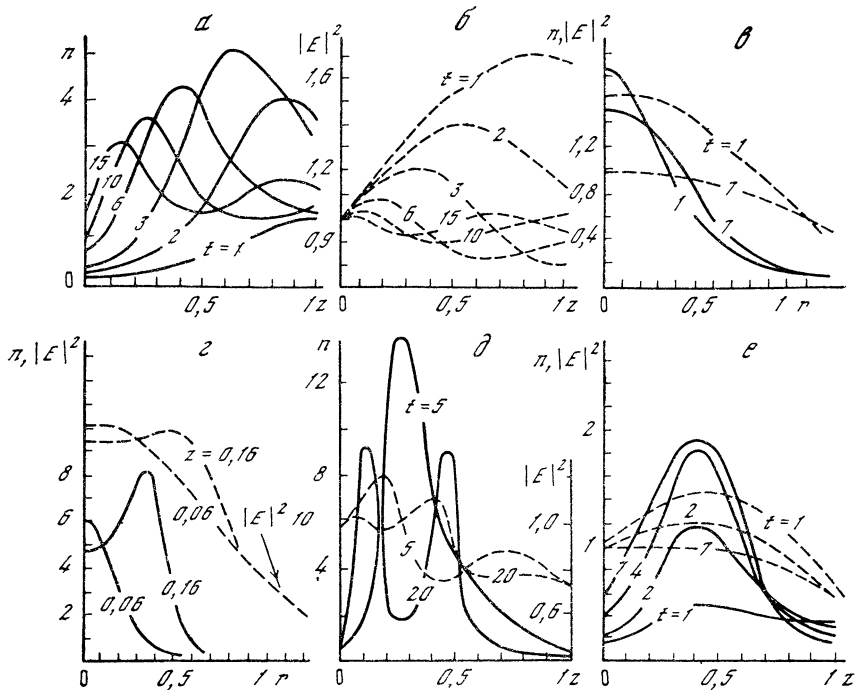
Численные исследования динамики разряда [10] проводились путем решения на ЭВМ уравнения баланса совместно с параболическим уравнением для «медленной» комплексной амплитуды поля, описывающим дифракционную расходимость пучка, поглощение и рефракцию:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) - 2i \left(\frac{\partial E}{\partial z} + \mu \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \tilde{n} \left(1 + i \frac{\nu}{\omega} \right) E. \quad (15)$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные и обозначения: $t \rightarrow \nu_a t$, $r \rightarrow r/a_F$ (расстояние до оси пучка), $z \rightarrow z/l_F$ (осевая координата, отсчитываемая от передней границы области пробоя по направлению к фокусу), $E \rightarrow E/E_c$, $\mu = \nu_a l_F/c$ (параметр запаздывания электромагнитного сигнала), $\tilde{n} = nk l_F = N/N_c \theta^2$. Начальные и граничные условия задавались исходя из того, что начальный уровень концентрации мал ($\tilde{n}_0 = \tilde{n}(t=0) \ll 1$), а невозмущенный пучок является гауссовым и фокусируется на заданном расстоянии z_0 от границы:

$$E(0, r) = E_0 e^{-\alpha r^2}, \quad E_0 = \frac{E_m}{\sqrt{1+z_0^2}}, \quad \alpha = \frac{1}{2(1+iz_0)}. \quad (16)$$

Расчеты проводились для значений параметров $\tilde{n}_0 = 10^{-1}$, $z_0 = 1$, $E_0 = 1$ ($E_m = \sqrt{2}$), $\mu = 1$, $\beta = 4$ и трех значений параметра ν/ω : 0; 0.2; 3. Результаты представлены на рисунке в виде графиков радиальных и осевых распределений концентрации n и амплитуды $|E|^2$ для различных моментов времени t .



Радиальные и осевые распределения концентрации n (сплошные линии) и амплитуды $|E|^2$ (пунктир) для различных моментов времени t

а, б — $v/\omega=0,2, r=0$; в — $v/\omega=0,2, z=1$; г — $v/\omega=0, t=20$; д — $v/\omega=0, r=0$; е — $v/\omega=3, r=0$

Как видим, происходящий на начальном этапе в области фокуса быстрый («лавинообразный») рост концентрации вследствие снижения амплитуды поля при $t \approx 1$ прекращается, и максимум концентрации начинает перемещаться от фокуса навстречу падающему излучению (волна пробоя). Со временем темпы эволюции разряда замедляются, а превышение поля над пробойным значением всюду становится незначительным (в качественном согласии с предпосылкой стационарной модели). При малых v/ω вслед за первым солитоноподобным всплеском ионизации появляются вторичные (более слабые), при больших t практически останавливающиеся. При $v/\omega=3$ разряд быстро приближается к стационарному состоянию.

4. НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ДРОБЛЕНИЕ РАЗРЯДА НА ПЛАЗМОИДЫ

Рассмотренные выше «гладкие» структуры разряда (с размером неоднородности, превышающим длину электромагнитной волны λ) могут разрушаться разного рода ионизационными неустойчиво-

стями [9, 11], представляющими собой своеобразные аналоги известных неустойчивостей взаимодействующей с переменным полем бесстолкновительной плазмы. В частности, для разряда большой протяженности могут быть существенными эффекты вынужденного ионизационного рассеяния (неустойчивость встречной волны) [9], связанные с возникновением полуволновой пространственной решетки плотности. В разряде умеренной протяженности $L \geq \lambda$ главную роль играют квазистатические мелкомасштабные неустойчивости, природа и характер проявления которых различны в различных областях значений параметра ν/ω . При низких давлениях ($\nu/\omega < 1$) разряд может стать неустойчивым по отношению к расслоению в направлении вектора электрического поля волны (волновой вектор возмущений $\propto \|\mathbf{E}\|$) [9]. Линеаризация уравнений баланса электронов и векторного волнового уравнения для поля на фоне квазиоднородного стационарного состояния с концентрацией $n = n_s$ приводит (при $\nu \ll \omega$) к следующему выражению для инкремента этой неустойчивости γ :

$$\gamma = -\nu_a x^2 L_a^2 + \beta \nu_a n_s (1/\varepsilon_s - k^2/x^2). \quad (17)$$

Здесь $\beta = \frac{E}{v_i} \frac{dv_i}{dE} \approx 5$, $L_a = \sqrt{D/\nu_a}$ — диффузионная длина прилипания, $\varepsilon_s = 1 - n_s$, x — волновое число возмущений. Максимум инкремента

$$\gamma_{\max} = \beta \nu_a n_s / \varepsilon_s - 2 \nu_a k L_a (\beta n_s)^{1/2} \quad (18)$$

достигается при значении

$$x = x_m = (\beta n_s k^2 / L_a^2)^{1/4}. \quad (19)$$

Как видно из (18), неустойчивость возникает, если концентрация превышает некоторое пороговое значение

$$n_s > n_{s\text{пор}} = 4 (k L_a \varepsilon_s)^2 / \beta, \quad (20)$$

которому соответствует значение волнового числа $x_m = k \sqrt{2\varepsilon_s}$. Данная неустойчивость может рассматриваться как аналог известной модуляционной неустойчивости в плазме при другом знаке нелинейности. Ее физический механизм весьма прост: при увеличении электронной концентрации n в тонком слое, перпендикулярном полю, плазменная частота ω_p приближается к частоте поля ω и поле в слое возрастает, что в свою очередь приводит к увеличению частоты ионизации ν_i и, следовательно, к дальнейшему росту n . Нетрудно понять также происхождение порогового условия $n_s > n_{s\text{пор}}$: масштаб развивающихся возмущений x^{-1} должен быть, с одной стороны, меньше длины волны k^{-1} (так как неустойчивость имеет квазистатическую природу), а с другой — превышать в достаточное число раз (в $n_s^{-1/2}$ раз) диффузионную длину L_a , чтобы диффузия не успевала выравнять развивающиеся возмущения.

Пороговый характер неустойчивости означает возможность существования в области $\nu < \omega$ двух типов неравновесного разряда: «сплошного» и «раздробленного». Пока концентрация в разряде $n_s < n_{s\text{пор}}$, разряд является «сплошным», т. е. представляет собой единое плазменное образование с плавным (в масштабе длины волны) распределением плотности. Именно к этому случаю относятся результаты, изложенные в предыдущих параграфах. Если же концентрация в процессе развития разряда достигает порогового значения, разряд начинает распадаться на слои, перпендикулярные электрическому полю.

Весьма сложной и далекой от разрешения задачей является исследование нелинейной стадии неустойчивости. На основе качественных соображений можно утверждать, что разряд на этой стадии оказывается раздробленным на множество движущихся плазмидов с концентрацией порядка критической, с размерами и взаимными расстояниями, меньшими или порядка длины волны. Возможность возникновения «раздробленного» разряда в волновом пучке явствует и из некоторых экспериментальных данных [14].

Из сказанного следует, что при зажигании разряда в квазиоптических волновых пучках высокие значения электронной концентрации на неравновесной стадии (в случае $n_{\text{max}} \approx \theta^2 \ln(\theta^2/n_0) \ll 1$, $\nu/\omega \ll 1$) могут быть достигнуты только в результате развития рассмотренной неустойчивости. Требуемые для ее возникновения значения электронной концентрации в «сплошном» разряде достигаются при достаточно больших углах сходимости пучка или в скрещенных пучках, пересекающихся под достаточно большим углом.

В области высоких давлений, при $\nu > \omega$, основные значения неустойчивости другого типа, существенно связанные с возмущениями температуры нейтральных частиц. Такова, например, ионизационно-перегретная неустойчивость [11], приводящая к разбиению разряда на нити, параллельные вектору электрического поля и, по-видимому, способствующая быстрому переходу разряда в режим термической ионизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Райзер Ю. П. Лазерная искра и распространение разрядов. М.: Наука, 1974. 308 с.
2. Капица П. Л. — ЖЭТФ, 1969, 57, с. 1801.
3. Мейерович Б. Э., Пятаевский Л. П. — ЖЭТФ, 1971, 61, с. 335.
4. Lombardini P. P. — Radio Sci., 1965, 69D, p. 83.
5. Гуревич А. В. — Геомагнетизм и аэрономия, 1972, 12, с. 631.
6. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Наука, 1973. 272 с.
7. Гильденбург В. Б., Голубев С. В. — ЖЭТФ, 1974, 67, с. 89.
8. Feit M. D., Fleck J. A., Jr. — Appl. Phys. Lett., 1974, 24, p. 169.
9. Гильденбург В. Б., Кум А. В. — ЖЭТФ, 1978, 74, с. 141.
10. Gil'denburg V. B., Litvak A. G., Yunakovskiy A. D. — J. Phys., 1979, 40, p. C7—215.

11. Гильденбург В. Б., Ким А. В. — Физика плазмы, 1980, 6, № 4, с. 670.
12. Гильденбург В. Б. — ЖЭТФ, 1980, 78, с. 952.
13. Mayhan J. T., Fante R. L., O'Keefe R. et al. — J. Appl. Phys., 1971, 42, p. 5362.
14. Scharfman W. E., Taylor W. C., Morita T. — IEEE Trans., 1964, AP-12, p. 709.

УДК 535.214

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДВИЖЕНИЯ АТОМОВ В СВЕТОВОМ ПОЛЕ

В. С. ЛЕТОХОВ, В. Г. МИНОГИН

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди основных процессов, определяющих взаимодействие атома с резонансным световым полем, особое место занимает обмен импульсом между атомом и фотонами светового поля. При каждом акте поглощения или испускания фотона атомом обмен энергией и моментом импульса радикально меняет внутреннее состояние атома, при этом его трансляционное состояние практически не изменяется.

Например, поглощение фотона на переходе $3S-3P$ атома натрия изменяет его скорость всего на $2,9$ см/с, в то время как средняя тепловая скорость атома $4,7 \cdot 10^4$ см/с.

Столь ничтожное влияние отдачи на поступательное движение атома длительное время ограничивало интерес к проблеме давления света на свободные атомы. Появление лазерных источников света кардинально изменило отношение к световому давлению. Во-первых, благодаря высокой монохроматичности лазерного излучения стало возможным длительное взаимодействие атома с полем на разрешенном оптическом переходе. Во-вторых, благодаря высокой спектральной яркости лазерное излучение резко увеличило скорость поглощения фотонов. В целом эти причины привели к возможности создания экспериментальных ситуаций, в которых из-за значительного увеличения числа фотонов, рассеянных атомом, эффект отдачи стал играть важную роль. Так, с использованием давления лазерного излучения стало возможным отклонять [1], фокусировать (или дефокусировать) [2] и замедлять [3] пучки атомов. Без преувеличения можно сказать, что применение лазеров выдвинуло световое давление в качестве наиболее эффективного средства воздействия на пространственное движение нейтральных атомов.

Следуя такой точке зрения, рассмотрим основы теории движения атомов в световых полях и укажем ряд наиболее важных применений светового давления для управления движением атомов.

2. ДЕЙСТВИЕ СВЕТА НА ВНУТРЕННЕЕ И ТРАНСЛЯЦИОННОЕ СОСТОЯНИЯ АТОМА

В проблеме резонансного светового давления наибольший интерес представляет двухуровневая модель атома (рис. 1), в которой нижний уровень $|g\rangle$ атома является основным, а спонтанный распад верхнего уровня $|e\rangle$ происходит только на нижний уровень с вероятностью 2γ . Частота светового поля ω отличается от частоты атомного перехода ω_0 на величину Ω . При такой схеме взаимодействия с полем атом, поглощая и испуская фотоны, все время находится в резонансе с полем.

Рассмотрим, исходя из указанной схемы, качественные особенности взаимодействия атома с резонансным световым полем, ограничиваясь для простоты случаем плоской линейно-поляризованной волны

$$E(\mathbf{r}, t) = eE_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (1)$$

где ω — частота, \mathbf{k} — волновой вектор, \mathbf{e} — единичный вектор поляризации волны. Для описания состояния атома будем использовать матрицу плотности в представлении Вигнера $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, которая зависит как от координаты \mathbf{r} , так и от скорости атома \mathbf{v} . При дипольном взаимодействии атома с полем элементы вигнеровской матрицы плотности $\rho_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ связаны уравнениями [4]

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \rho_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= -V_0 \exp(-i\Omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) \rho_{ge}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{u}, t\right) + \\ &+ V_0 \exp(i\Omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) \rho_{eg}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{u}, t\right) - 2i\gamma \rho_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \rho_{eg}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= -V_0 \exp(-i\Omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) \left[\rho_{gg}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{u}, t\right) - \right. \\ &\left. - \rho_{ee}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{u}, t\right) \right] - i\gamma \rho_{eg}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (2) \\ i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \rho_{gg}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= V_0 \exp(-i\Omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) \rho_{ge}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{u}, t\right) - \\ &- V_0 \exp(-i\Omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) \rho_{eg}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{u}, t\right) + \\ &+ \frac{3i}{4\pi} \gamma \int \mathfrak{A}n [1 - (n\mathbf{e})^2] \rho_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{v} + n\mathbf{u}, t), \end{aligned}$$

где $V_0 = dE_0/2\hbar$ — параметр, определяющий энергию дипольного взаимодействия атома с полем (d — матричный элемент проекции дипольного момента атома на вектор \mathbf{e}); $\mathbf{u} = \hbar\mathbf{k}/M$ — скорость отдачи атома, единичный вектор \mathbf{n} определяет направление испускания фотона при спонтанном распаде атома.

В приведенных уравнениях члены, содержащие параметр V_0 , описывают индуцированные переходы атома в световом поле. Интегральный член, пропорциональный константе спонтанного распада γ , описывает спонтанные переходы атома. Изменение импульса атома при индуцированных и спонтанных переходах

учитывается сдвигом аргумента в элементах матрицы плотности (при индуцированном поглощении (испускании) фотона изменение скорости атома $\Delta v = \pm u$, при спонтанном распаде атома $\Delta v = -nu$).

Исходя из этих уравнений, можно сделать все основные качественные заключения о движении атома под действием отдачи индуцированных и спонтанных переходов. Рассмотрим прежде всего случай сильных оптических переходов, когда $\hbar\gamma \gg R$, где $R = \hbar^2 k^2 / 2M$ — энергия отдачи атома. Этот случай является основным для дипольных переходов атомов. Например, для перехода $3S-3P$ атома натрия естественная полуширина линии $\gamma = 5$ МГц, а энергия отдачи $R/\hbar = 25$ кГц.

При указанном условии три характерных времени определяют взаимодействие атома с полем: $\tau_{\text{вн}} \approx 1/\gamma (1+G)^{1/2}$ — время установления внутреннего состояния атома, $\tau_{\text{тр}} \approx \hbar/R$ — время изменения скорости атома под действием отдачи на характерную величину $\gamma (1+G)^{1/2}/k$ и $\tau_d = \hbar^2 \gamma (1+G)^{1/2} / R^2$ — время диффузионного нарастания скорости атома за счет флуктуаций направления и числа рассеянных фотонов до характерной скорости $\gamma (1+G)^{1/2}/k$ (здесь $G = 2V_0^2/\gamma^2$ — параметр насыщения, пропорциональный интенсивности световой волны). Эти времена при условии $\hbar\gamma \gg R$ связаны соотношениями

$$\tau_{\text{вн}} \ll \tau_{\text{тр}} \ll \tau_d. \quad (3)$$

Поэтому в рассматриваемом случае взаимодействие атома с полем приводит прежде всего к установлению внутреннего состоянию атома, согласованного с величиной поля. Затем начинается ускорение (или замедление) атома и, наконец, спустя время τ_d , — скоростное (импульсное) распывание волнового пакета атома. Представление о порядках указанных характерных времен можно получить на примере атома натрия, взаимодействующего со светом на переходе $3S-3P$ с длиной волны $\lambda = 5890 \text{ \AA}$. Для этого случая при $G = 1$ $\tau_{\text{вн}} = 2,2 \cdot 10^{-8}$ с, $\tau_{\text{тр}} = 6,4 \cdot 10^{-6}$ с, $\tau_d = 1,8 \cdot 10^{-3}$ с.

В случае $\hbar\gamma \leq R$, характерном для слабых дипольных переходов атомов, одно время определяет изменение как внутреннего, так и трансляционного состояний атома: $\tau_{\text{вн}} \approx \tau_{\text{тр}} \approx 1/\gamma (1+G)^{1/2}$. За это время скорость атома изменяется на характерную величину $|u|$. Время распывания скоростного распределения волнового пакета атома определяется значением $\tau_d \approx 1/\gamma$. Поэтому при $\hbar\gamma \leq R$ прежде всего одновременно устанавливаются внутреннее и трансляционное состояния атома, а уже затем начинаются ускорение и распывание волнового пакета атома.

Приведенные соображения достаточно просто могут быть получены из уравнений (2), записанных для простейшего случая плоской бегущей волны. Фактически они дают правильное представление о временной эволюции внутреннего и трансляционного состояний атома и для полей более сложного вида.

3. ДВИЖЕНИЕ АТОМОВ ПРИ РАССЕЯНИИ СВЕТА НА СИЛЬНОМ ДИПОЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ

С практической точки зрения основной интерес представляет изучение движения атома при $\hbar\gamma \gg R$. Благодаря большой вероятности спонтанного испускания при таком условии атом переизлучает значительное число фотонов, и отдача оказывает заметное влияние на движение атома.

При $\hbar\gamma \gg R$ изменение трансляционного состояния является адиабатически медленным по сравнению с изменением внутреннего состояния атома. Это обстоятельство позволяет усреднить уравнения для вignerовской матрицы плотности по времени ($\tau_{in} \ll \tau \ll \tau_{tr}$) и получить уравнение, описывающее только трансляционное движение центра масс атома. Формально такая процедура соответствует разложению элементов матрицы плотности по степеням $ku/\gamma \ll 1$ и переходу к функции распределения $\omega = \rho_{gg} + \rho_{ee}$, описывающей движение волнового пакета атома.

Используя этот подход и ограничиваясь разложением до второго порядка по ku/γ , уравнение для функции распределения $\omega(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ может быть приведено к уравнению типа Фоккера—Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \omega = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{\mathbf{F}}{M} \omega\right) + \frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} (D_{\alpha\beta} \omega). \quad (4)$$

В этом уравнении первый член в правой части описывает движение центра масс атома под действием силы светового давления \mathbf{F} . Второй член описывает диффузию скорости атома, обусловленную стохастичностью индуцированного поглощения (испускания) и спонтанного испускания атома. Коэффициент диффузии \hat{D} , вообще говоря, является тензором, так как вероятность спонтанного испускания зависит от ориентации направления испускания по отношению к вектору поляризации \mathbf{e} .

Выписанное уравнение относится к широкому классу монохроматических лазерных полей. Конкретный вид силы светового давления и тензора диффузии зависит от формы светового поля. Порядок ускорения, создаваемого силой \mathbf{F} , определяется величиной 10^8 см/с^2 , порядок коэффициента диффузии — $10^9 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-3}$. В связи с тем, что скоростная диффузия является относительно медленным процессом ($\tau_g \simeq 10^{-3} \text{ с}$), основной интерес представляет движение атома под действием силы светового давления. Укажем вид сил для двух важных конфигураций поля: плоских бегущей и стоячей волн.

Для бегущей волны (1) сила светового давления определяется выражением [5]

$$F = \hbar k \gamma \frac{G}{1 + G + (\Omega - kv)^2 / \gamma^2}. \quad (5)$$

Эта сила обусловлена процессами, в которых вынужденное поглощение фотонов сопровождается их спонтанным испусканием. Для существования этой силы принципиально важными являются спонтанные распады атома (при $\gamma=0$ сила $F=0$). Поэтому силу (5) часто называют силой спонтанного светового давления. Основной особенностью силы спонтанного светового давления является ее резонансная зависимость от скорости атома (рис. 2, а).

В стоячей световой волне вида

$$E = 2eE_0 \cos \omega t \cos kr \quad (6)$$

на атом действует значительно более сложная сила. В эту силу дают вклад как процессы индуцированного поглощения с последующим спонтанным испусканием фотонов, так и процессы только индуцированных поглощения и испускания фотонов. В общем случае эта сила может быть представлена в виде пространственного ряда Фурье [6, 7]:

$$F = \sum_n F_n e^{i n k r}, \quad (7)$$

число гармоник которого зависит от интенсивности световой волны.

В качестве иллюстрации на рис. 3 представлена зависимость нулевой фурье-компоненты силы (7) от скорости атома. Широкие максимум и минимум обусловлены, как и в случае силы (5), индуцированным поглощением и спонтанным испусканием фотонов, узкие структуры связаны в основном только с индуцированным поглощением (испусканием) фотонов.

Характерной особенностью сил резонансного светового давления является их нелинейная резонансная зависимость от скорости атома. Это обстоятельство, а также зависимость сил от координаты атома обуславливают существенно нелинейный характер движения атомов в световом поле. В бегущей световой волне нелинейность связана с лоренцевой зависимостью силы от скорости. Поэтому под действием силы (5) в скоростном распределении атомов ω образуется узкая структура, обусловленная ускорением атомов со скоростями в интервале $v \simeq (\Omega \pm \gamma)/k$ (см. рис. 2, б). В стоячей световой волне каждая фурье-компонента силы содержит несколько лоренцевых контуров и сила (7) резко меняется при небольшом изменении скорости атома. Это обстоятельство приводит к еще более значительному изменению скоростного распределения, вид которого, кроме того, зависит от положения атомов в пространстве.

Рис. 2. Зависимость силы спонтанного светового давления F от проекции скорости атома v на направление распространения волны k (а) и соответствующая ей деформация скоростного распределения атомов (б)

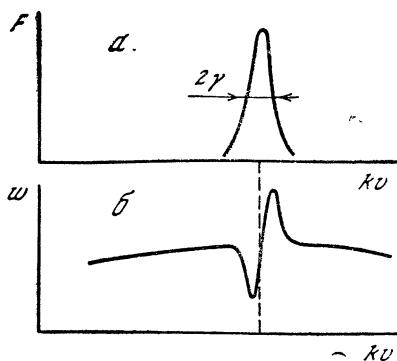
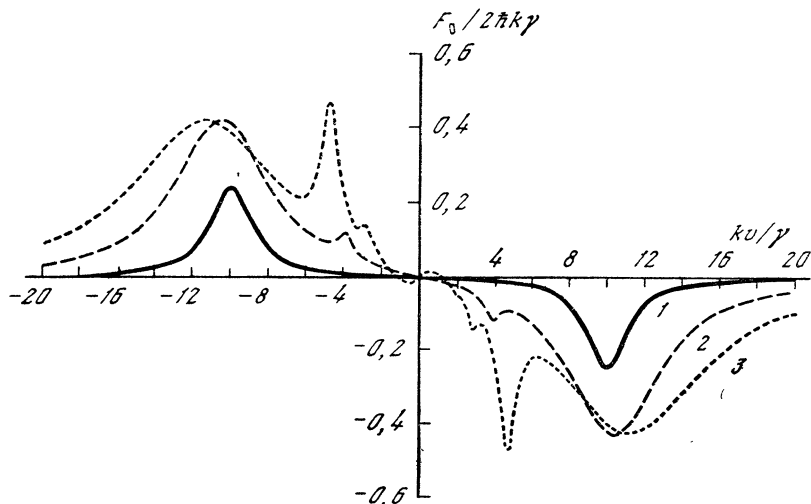


Рис. 3. Зависимость осредненной по пространству силы светового давления в стоячей волне от проекции скорости атома на вектор k при $\Omega = -10\gamma$ и $G=1$ (кривая 1), 9 (кривая 2) и 25 (кривая 3)



Нелинейный характер сил светового давления представляет большой интерес для применений светового давления для целей управления движением атомов. Так, используя силы (5), (7), можно изменять направление движения атомных пучков или формировать нужное скоростное распределение атомов в пучке. Еще более важным применением сил светового давления может быть их использование для глубокого охлаждения атомарных газов [8], недоступного никакими другими известными способами. Возможность такого применения связана с зависимостью знака сил светового давления от знака расстройки Ω . При отрицательной расстройке ($\Omega < 0$) сила светового давления всегда направлена против скорости атома (см. рис. 3). Это означает, что облучение газа атомов светом с частотой, меньшей частоты атомного перехода, должно приводить к охлаждению газа. Одним из возможных путей реализации такого охлаждения может быть использование стоячих световых волн с изменяемой частотой [6].

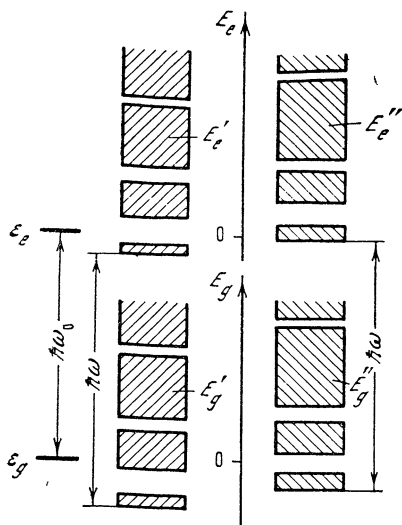


Рис. 4. Энергетический спектр атома в стоячей световой волне при $\Omega \neq 0$

Четыре собственных значения энергии E'_g, E''_g и E'_e, E''_e относятся к одному квазивектору \mathbf{K}

Действительно, если сканировать частоты стоячих волн от значения $\omega_0 - k\bar{v}$ (\bar{v} — средняя тепловая скорость атома) к центру линии атомного перехода, то сила (7) будет последовательно замедлять все атомы газа, начиная с атомов со скоростями \bar{v} . Расчеты показывают [9], что такой подход может привести к охлаждению газа до температуры $T = \hbar\gamma/k \approx 10^{-4} \div 10^{-3}$ К.

Охлаждение атомов до столь низких температур уже при плотности $n \approx 10^{17}$ ат./см³ должно приводить к вырождению газа. Если охлаждаемые атомы подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, то такое охлаждение может даже привести к образованию нового состояния вещества — бозе-эйнштейновского конденсата нейтральных атомов.

4. ДВИЖЕНИЕ АТОМОВ ПРИ РАССЕЯНИИ СВЕТА НА СЛАБОМ ДИПОЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ

Новые важные особенности нелинейного действия лазерного поля на движение свободных атомов проявляются при взаимодействии света со слабым дипольным переходом атома. При $\hbar\gamma \ll R$ основную роль во взаимодействии атома с полем играют индуцированные переходы атома. Для анализа их влияния на движение атома пренебрежем в нулевом приближении спонтанными распадами атома. Тогда при $\gamma = 0$ волновая функция $\psi_i(\mathbf{x})$ состояний $|g\rangle$ и $|e\rangle$ свободного атома

$$\psi(\mathbf{r}, t, \mathbf{x}) = \psi_g(\mathbf{r}, t)\psi_g(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_g t\right) + \psi_e(\mathbf{r}, t)\psi_e(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_e t\right), \quad (8)$$

где функции $\psi(\mathbf{r}, t)$ описывают движение центра масс атома и могут быть определены из решения уравнения Шредингера.

Анализ последнего уравнения показывает, что в случае бегущей световой волны индуцированные переходы расщепляют волновой пакет атома на два поступательно движущихся пакета [10]. Эти пакеты движутся с различными скоростями, отличающимися на величину порядка скорости отдачи $u = \hbar k/M$, и, кроме того, расщепляются с различными скоростями.

Еще более интересные явления могут быть обнаружены при изучении движения атомов в стоячей световой волне [11]. Для

поля (6) пространственная периодичность гамильтониана взаимодействия приводит к тому, что оказываются возможными только движения атомов с определенным значением энергии. В таком поле пространственное движение холодного атома описывается блоховскими функциями:

$$\psi_i(\mathbf{r}, t) = \omega_i(\mathbf{r}) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_i(\mathbf{K})t + i\mathbf{K}\mathbf{r}\right], \quad (9)$$

где функции $\omega_i(\mathbf{r})$ периодичны с пространственным периодом $2\pi/k = \lambda$, а спектр энергий $E_i(\mathbf{K})$ состоит из систем разрешенных и запрещенных зон (рис. 4).

Как расщепление волнового пакета атома, так и разбиение спектра на зоны существенным образом связано с квантовым характером взаимодействия атома со светом при $\hbar\gamma \leq R$. Особое значение эти явления представляют для холодных атомов с импульсами $p \approx \hbar k$. Действие лазерного поля на такие атомы, подобно действию светового давления на атомы с $\hbar\gamma \geq R$, может быть эффективным средством управления движением холодных атомов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schieder R., Walter H., Woste L. — Opt. Commun., 1972, 5, N 5, p. 337.
2. Bjorkholm J. E., Freeman R. R., Ashkin A., Pearson D. B. — Phys. Rev. Lett., 1978, 41, N 20, p. 1361.
3. Балькин В. И., Летохов В. С., Мишин В. И. — Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, № 10, с. 614.
4. Бакланов Е. В., Дубецкий Б. Я. — Оптика и спектроскопия, 1976, 41, № 1, с. 3.
5. Ashkin A. — Phys. Rev. Lett., 1970, 25, N 19, p. 1321.
6. Летохов В. С., Миногин В. Г., Павлик Б. Д. — ЖЭТФ, 1977, 72, № 4, с. 1328.
7. Minogin V. G., Serimaa O. T. — Preprint series in theoretical physics, N HU-TFT-79-9. Univ. Helsinki, 1979.
8. Hansch T. W., Schawlow A. L. — Opt. Commun., 1975, 13, N 1, p. 68.
9. Letokhov V. S., Minogin V. G. — J. Opt. Soc. Amer., 1979, 69, N 3, p. 413.
10. Пусен А. Ю. — ЖЭТФ, 1976, 70, № 3, с. 851.
11. Летохов В. С., Миногин В. Г. — ЖЭТФ, 1978, 74, № 4, с. 1318.

УДК 621.372.22; 530.18

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Е. И. ЯКУБОВИЧ

1. В настоящей статье обращается внимание на некоторые особенности нелинейной интерференции волн.

Физическая сущность этого явления чрезвычайно проста: периодическая структура поля, возникающая из-за интерферен-

ции, модулирует свойства среды, так как последние зависят от поля. Созданная таким образом пространственная решетка вещества обуславливает в свою очередь переотражение поля. Из-за этой дифракции на решетке собственного производства возникает ряд особенностей и даже парадоксов, которые и отделяют эту область от других разделов теории колебаний.

Простейшим объектом, с которого удобно начинать изучение нелинейной интерференции, являются встречные монохроматические волны в изотропной среде с нелинейностью стрикционного типа, т. е. с поляризуемостью в монохроматическом поле, зависящей от $|E|^2$.

Такое поле описывается например, уравнением

$$\Delta E + k^2 E = \chi (|E|^2) E, \quad (1)$$

где E — комплексная амплитуда полного поля $E' = E e^{i\omega t} + E^* e^{-i\omega t}$.

Напрашивающиеся дальнейшие упрощения (скалярность поля и нелинейность $\chi = \alpha + \beta |E|^2$), которыми часто пользуются в утилитарных целях, хотя и облегчают исследование, но не позволяют заметить ряд особенностей нелинейной интерференции, иные из которых очень важны.

Рассмотрим далее три группы свойств нелинейной интерференции:

- а) закон сохранения для одномерных встречных волн;
- б) поляризационные эффекты;
- в) закон сохранения для встречных волн, зависящих от поперечной координаты.

По крайней мере, первое не сводится ни к одному из известных законов сохранения и является следствием переотражений квазимонохроматического по координате поля от мандельштамовской решетки.

2. Итак, рассмотрим случай поля, состоящего из двух встречных волн

$$E = C_1(r) e^{ikz} + C_2(r) e^{-ikz}, \quad (2)$$

здесь C_1 и C_2 — медленные векторные функции по сравнению с $e^{\pm ikz}$. Такая ситуация реализуется, например, для достаточно больших k ($k^2 \gg \chi$). Уравнениями для медленно меняющихся амплитуд будут

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} C_1 + 2ik \partial C_1 / \partial z &= \langle \chi E e^{-ikz} \rangle = \langle \chi \rangle C_1 + \langle \chi e^{-2ikz} \rangle C_2 \\ \Delta_{\perp} C_2 - 2ik \partial C_2 / \partial z &= \langle \chi \rangle C_2 + \langle \chi e^{2ikz} \rangle C_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где знаком $\langle \dots \rangle$ обозначена операция усреднения за период $2\pi/k$. Квадрат модуля $|E|^2$, от которого зависит χ , равен в этих обозначениях

$$|E|^2 = |C_1|^2 + |C_2|^2 + (C_1 \cdot C_2^*) e^{2ikz} + (C_1^* \cdot C_2) e^{-2ikz}. \quad (4)$$

Первые два члена в правой части (4) определяют среднюю энергию поля (обозначим ее W), другие два — интерференцию, про-

порциональную $(C_1 \cdot C_2^*)$ и $(C_1^* \cdot C_2)$ (обозначим их через u и u^* соответственно), квадрат модуля $|(C_1 \cdot C_2^*)|^2$ назовем взаимной энергией (обозначим ее v).

Вторые члены в правых частях системы (3) ответственны за преобразования. Они, естественно, равны нулю, когда нет интерференции, т. е. при $v=0$. Коэффициент $\langle \chi \rangle$ в первых членах определяет изменение фазы и амплитуды, непосредственно не связанное с преобразованиями.

Чтобы вывести законы сохранения для встречных волн, нам необходимо установить некоторые математические свойства операций усреднения, которые, кстати сказать, могут быть полезны и в других областях теоретической физики.

Пусть мы имеем произвольную функцию f , зависящую от аргумента $x + 2\sqrt{y} \cos \theta$. Ее разложение в ряд Фурье по θ будет иметь коэффициенты, зависящие от x и y :

$$f(x + 2\sqrt{y} \cos \theta) = R(x, y) + 2\sqrt{y} I(x, y) \cos \theta + \dots \quad (5)$$

Здесь R — среднее от f , а I — нормированная гармоника по θ . Можно бы коэффициенты при $\cos \theta$ обозначить просто через y и I , но принятые обозначения будут удобней.

Используя определения R и I , можно вывести соотношения $\partial R / \partial y = \partial I / \partial x$, $\partial R / \partial x = \partial (yI) / \partial y$. (6)

Из этих свойств следует, что существуют потенциалы K и J , такие, что

$$R = \partial K / \partial x, \quad I = \partial K / \partial y, \quad R = \partial J / \partial y, \quad yI = \partial J / \partial x, \quad (7)$$

причем K и J сами являются соответственно средним значением и нормированной гармоникой от функции

$$F = \int_0^{x+2\sqrt{y} \cos \theta} f(\xi) d\xi.$$

Легко убедиться, что величины R , I , K , J удовлетворяют уравнению Трикоми по переменным x и y , например:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial R}{\partial y} \right).$$

Все это напоминает свойства аналитических функций. Только вместо условий аналитичности — условия (6), а вместо уравнения Лапласа — уравнение Трикоми. Поэтому данные функции назовем трикомическими, а условия (6) — условиями трикомичности. Продолжая аналогию, можно обнаружить у трикомических функций много свойств, сопоставимых со свойствами аналитических функций, но здесь от них понадобятся только соотношения (7).

Теперь вернемся к рассмотрению взаимодействия одномерных волн.

Воспользовавшись изложенной теорией, получим:

$$\begin{aligned} 2ikC'_1 &= \frac{\partial J}{\partial v} C_1 + \frac{u}{v} \frac{\partial J}{\partial W} C_2, \\ -2ikC'_2 &= \frac{\partial J}{\partial v} C_2 + \frac{u^*}{v} \frac{\partial J}{\partial W} C_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Можно показать, что потенциал $J = u \left\langle e^{2ikz} \int_0^{|\mathbf{E}|^2} \chi(\xi) d\xi \right\rangle$ является функцией только v и W .

Путем умножения скалярно этих уравнений на C_1^* и на C_2^* соответственно и сложения с комплексно-сопряженными выражениями можно получить уравнения для W и v :

$$\begin{aligned} kW' &= (|C_1|^2 - |C_2|^2) \operatorname{Im} \partial J / \partial v, \\ kv' &= -(|C_1|^2 - |C_2|^2) \operatorname{Im} dJ / \partial W. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\operatorname{Im} J(v, W) = \operatorname{Im} \left[(C_1 \cdot C_2^*) \left\langle e^{2ikz} \int_0^{|\mathbf{E}|^2} \chi(\xi) d\xi \right\rangle \right] = \operatorname{const}. \quad (10)$$

Этот закон устанавливает связь между энергией W и взаимной энергией v встречных волн при их медленном изменении по z . Он не сводится к закону сохранения энергии, так как $\operatorname{Im} \chi \neq 0$.

Если C_1 и C_2 параллельны, то в этом случае $v = m_1 m_2$ (здесь $m = |C|^2$) и линии уровня $\operatorname{Im} J(m_1 m_2)$ будут фазовыми траекториями на фазовой плоскости m_1, m_2 .

По-видимому, самым интересным свойством этого закона сохранения является его аддитивность по отношению к поляризуемости: J для смеси нелинейных сред равен смеси в тех же пропорциях J_i каждой из сред:

$$J_{\chi_1 + \chi_2} = J_{\chi_1} + J_{\chi_2}.$$

Пусть надо, например, найти одномерное поле встречных волн в плазме с фиксированной функцией распределения по скоростям. Естественно было бы поступить так: найти отклик моноскоростной плазмы на заданное (произвольное) поле, затем усреднить его по скоростям и с полученной после этого нелинейной поляризуемостью уже находить поле как функцию z .

Если бы кто-нибудь для получения макроскопического поля стал бы искать его (поле) в моноскоростной плазме, а затем усреднил бы результат по скоростям, то он получил бы неверный результат, так как в нелинейной среде принцип суперпозиции несправедлив. Но если бы, полностью решив моноскоростную задачу, он нашел бы в ней зависимость амплитуды одной волны от

амплитуды другой в неявном виде через наш закон сохранения

$$\operatorname{Im} J(m_1, m_2, V) = \text{const},$$

а затем усреднил бы это выражение по V , то он получил бы правильное соотношение между амплитудами макроскопического поля и более простым, чем традиционный, путем.

Иными словами, фазовые плоскости в этих нелинейных задачах в некотором смысле можно складывать!

Отсюда видно, что можно научиться быстро предсказывать изменение топологии фазовой плоскости при добавлении новой нелинейности в вещество. Можно составить также универсальную таблицу «элементарных» фазовых плоскостей, с помощью которых проводить анализ и «синтез» ситуаций для любой сложной нелинейности¹.

3. Вторая группа особенностей нелинейной интерференции, на которой хотелось бы остановиться, связана с векторными характеристиками взаимодействия.

При взаимодействии встречных волн даже в изотропной среде будет, вообще говоря, меняться как направление векторных амплитуд волн, так и тип их поляризации (эллиптичность). Связано это вот с чем. Встречная волна, отражаясь от решетки Мандельштама, добавляет в прямую волну вектор, не обязательно параллельный последней; это может быть комплексный добавок, тогда будет меняться и тип поляризации прямой волны.

От чисто диссипативной или чисто активной среды (χ мнимое) переотражение идет в фазе. От нелинейного диэлектрика (действительное χ) — в квадратуре. Очевидно, что изменения поляризации не будет, если по какой-либо причине будет отсутствовать решетка. Эффект, естественно, зависит от глубины модуляции свойств среды и пропорционален, как это видно из уравнения (9), величине $\partial J / \partial W$.

Предсказанный в 1969 г. [2], этот эффект был экспериментально обнаружен год спустя [3], а уже начиная с 1976 г. он нашел одно важное применение [4].

Дело в том, что если производная $\partial J / \partial W$ зависит от частоты поля, то изменение поляризации также зависит от частоты поля. Учет этого обстоятельства и привел к созданию целой отрасли нелинейной спектроскопии, основанной на использовании этого явления изменения поляризации, так называемой поляризационной спектроскопии.

4. Итак, мы установили определяющую роль потенциальной функции J для продольной структуры встречных волн. Аналогичную роль для поперечной структуры встречных волн играет потенциальная функция

$$K(W, v) = \left\langle \int_0^{|E|^2} \chi(\xi) d\xi \right\rangle.$$

¹ Такая таблица приведена в книге [4].

Покажем, что в случае нелинейного диэлектрика задача о поперечной структуре встречных волн полностью аналогична задаче о движении частицы в потенциальном поле с потенциалом K .

Пусть теперь $C_{1,2}$ зависят от x , тогда

$$C_1'' + \kappa_1^2 C_1 = \frac{\partial K}{\partial W} C_1 + u \frac{\partial K}{\partial v} C_2 = \frac{\partial K}{\partial C_1^*}, \quad (11)$$

$$C_2'' + \kappa_2^2 C_2 = \frac{\partial K}{\partial W} C_2 + u^* \frac{\partial K}{\partial v} C_1 = \frac{\partial K}{\partial C_2^*},$$

так как $C_1 = \partial W / \partial C_1^*$, $u C_2 = \partial v / \partial C_1^*$.

Ясно, что при действительном K все это можно записать так:

$$C_1'' + \kappa_{1,2}^2 C_1 = \partial K / \partial C_1 \quad (12)$$

или

$$C_1'' = \partial K_{\text{эф}} / \partial C_1. \quad (13)$$

Здесь индексом γ отмечена совокупность всех обозначений $\begin{pmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$K_{\text{эф}} = \kappa_1^2 |C_1|^2 + \kappa_2^2 |C_2|^2 + K.$$

Таким образом, задача стала полностью аналогична задаче о движении частицы в потенциальном поле. Записываем уравнение Гамильтона—Якоби и определяем, когда у него разделяются переменные. Так, в цилиндрических координатах решается задача для $K(W)$, в эллиптических координатах — для $K \sim W^2$ и $\kappa_1^2 \neq \kappa_2^2$; для $\chi \sim |E|^4$ задача решается в гиперболических координатах.

Не останавливаясь подробно на возникающих здесь решениях, отметим, что удастся получить аналитическое описание встречных волн, распадающихся на нерегулярные чередующиеся слои — «нити».

5. В данной статье более подробно освещены вопросы закона сохранения для одномерных волн и коротко вопросы изменения поляризации и поперечной структуры. Это не означает, что им уделялось меньше внимания при исследовании, но есть проблемы, которыми действительно не занимаются, но которыми стоит заняться. К ним относятся, в частности, обобщения на другие типы нелинейности, например на зависимость χ не от $|E|^2$, а от $E \otimes E^*$ (\otimes — тензор); учет тензорного характера поляризуемости; исследование взаимодействий волн с неравными ω и k ; изучение вопросов устойчивости и вообще нестационарных процессов и т. д.¹

¹ Недавно в журнале «Успехи физических наук» был опубликован обзор, в котором рассмотрены некоторые вопросы нелинейной интерференции [5]. Однако содержания обзора и данной статьи не перекрываются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Резонансные взаимодействия света с веществом. М.: Наука, 1977, с. 143—171.
2. Якубович Е. И. — ЖЭТФ, 1969, 56, № 2, с. 676.
3. Берштейн И. Л., Рогачев В. А. — Изв. вузов. Радиофизика, 1970, 13, № 1, с. 33.
4. Wieman C., Hänsch T. — Phys. Rev. Lett., 1976, 36, p. 1170.
5. Винецкий В. А., Кухтарев Н. В., Одулов С. Г., Соскин М. С. — УФН, 1979, 129, № 1, с. 113.

УДК 538.576.452.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН СЛОЖНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ В КУБИЧНЫХ СРЕДАХ

В. И. БЕСПАЛОВ, А. А. БЕТИН, А. И. ДЯТЛОВ,
С. Н. КУЛАГИНА, В. Г. МАНИШИН, А. З. МАТВЕЕВ,
Г. А. ПАСМАНИК, А. А. ШИЛОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования взаимодействия световых волн в инерционных кубичных средах привлекают в последнее время большое внимание в связи с разработкой принципов оптического управления пространственно-временной структурой лазерного излучения и создания на их основе адаптивных оптических устройств [1, 2]. Изучение указанной проблемы позволяет также выявить наиболее существенные особенности распространения мощного оптического излучения [3].

Физические причины, приводящие к взаимодействию световых волн в изотропных кубических средах, могут быть совершенно различны. Сюда относятся практически все нелинейные механизмы, обуславливающие наличие различных видов вынужденного рассеяния (ВР), самовоздействия и двухквантового поглощения световых волн. В то же время в полях сложной пространственно-временной структуры все указанные процессы приобретают некоторые общие характерные черты, позволяющие, например, использовать их для формирования оптического излучения с требуемыми свойствами, селективного выделения полезного сигнала на фоне шумов и т. п.

Мы рассмотрим процессы взаимодействия световых волн в инерционных кубических средах в рамках подхода, сводящегося к усреднению нелинейных квазиоптических уравнений по несинусоидальным волнам, зависящим как от пространственных координат, так и от времени. В отличие от других методов, использующих усреднение по несинусоидальным волнам (см., например,

[4]), базисные функции определяются нами таким образом, чтобы не только выполнялись условия усреднения по ним, но и число функций, по которым раскладываются поля световых волн, было для заданных граничных условий наименьшим. В результате удается развить теорию, позволяющую (в отсутствие расстройки групповых скоростей) аналитически исследовать характерные особенности некоторых важных для приложений видов нелинейных взаимодействий, в частности процессов обращения волнового фронта (ОВФ) оптического излучения при комбинационном преобразовании и двухквантовом поглощении встречных световых волн. Отдельно разберем вопрос о роли шумового излучения в подобных взаимодействиях. В заключение приведем экспериментальные результаты по исследованию динамики ОВФ в условиях четырехволнового комбинационного взаимодействия двух пар встречных световых волн.

2. УСРЕДНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КВАЗИОПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Исходные уравнения

В конденсированной изотропной кубичной среде под действием электрического поля \mathbf{E} световой волны возникают возмущения диэлектрической проницаемости $\Delta \epsilon^{\alpha\beta}$, описываемые уравнением

$$\hat{G}^{-1} \Delta \epsilon^{\alpha\beta} = \hat{g}^{\alpha\beta\mu\nu} E^\mu E^\nu, \quad (1)$$

где $\hat{G}^{-1} = \hat{G}^{-1}(\partial/\partial t, \nabla)$ — оператор, характеризующий изменение возмущений $\Delta \epsilon^{\alpha\beta}$ в отсутствие электромагнитного поля, $\hat{g}^{\alpha\beta\mu\nu}$ — тензор нелинейности 4-го ранга (в общем случае этот тензор может быть пространственным или временным оператором), задаваемый соотношением

$$\hat{g}^{\alpha\beta\mu\nu} = \hat{g}' \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \hat{g}'' \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \hat{g}''' \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) с учетом (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon^{\alpha\beta} &= \hat{G} \hat{g}^{\alpha\beta\mu\nu} E^\mu E^\nu = \hat{G} [\hat{g}' \delta_{\alpha\beta} E^2 + (\hat{g}'' + \hat{g}''') E^\alpha E^\beta], \\ E^2 &= \sum_{\mu} E^\mu E^\mu \end{aligned} \quad (3)$$

или, во избежание громоздкости, в символической форме

$$\Delta \epsilon = \hat{G} \hat{g} \mathbf{E} \mathbf{E}. \quad (4)$$

Мы опустили индексы α, β, μ, ν , подразумевая при этом, что $\Delta \epsilon$ и \hat{g} — соответственно тензоры 2-го и 4-го рангов.

Вид операторов \hat{G} и \hat{g} зависит от конкретного механизма нелинейности. Так, если мы интересуемся самовоздействием световых волн в инерционных кубичных средах с анизотропно-поляризуемыми

молекулами (керровская нелинейность), то возмущения $\Delta\varepsilon$ связаны с локальными изменениями анизотропии среды. В этом случае

$$\hat{G}^{-1} = \partial/\partial t + \gamma, \quad \hat{g} = g, \quad (5)$$

где γ^{-1} — время релаксации анизотропных возмущений $\Delta\varepsilon$ (отсутствие крышки над g означает, что этот коэффициент уже не оператор).

Формула (5) описывает также самовоздействие световых волн в резонансной двухуровневой среде в условиях, когда изменение населенности вследствие нелинейного преобразования относительно мало. Для того чтобы это показать, рассмотрим уравнение изменения разности населенностей N двухуровневой среды. Если ширина частотного спектра излучения лежит в пределах ширины линии люминесценции T_2^{-1} , определяемой временем поперечной релаксации T_2 , то разность населенностей удовлетворяет уравнению

$$\dot{N} + \frac{N - N_0}{T_1} = -\frac{2d^2 T_2}{\hbar^2} N \langle E^2 \rangle, \quad (6)$$

где N_0 — стационарное значение разности населенностей, d — дипольный момент резонансного перехода, T_1 — время продольной релаксации; угловые скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по высокочастотному периоду поля. В том случае, когда изменение населенностей $n = N - N_0$ мало по сравнению с величиной N_0 , в правой части (6) N можно приближенно заменить на N_0 :

$$\dot{n} + \frac{n}{T_1} = -2 \frac{d^2 T_2}{\hbar^2} N_0 \langle E^2 \rangle. \quad (7)$$

В то же время в уравнение Максвелла для электромагнитного поля войдет поляризация \mathbf{P} , пропорциональная $iN_0\mathbf{E} + in\mathbf{E}$. Член $iN_0\mathbf{E}$ отвечает за поглощение (или усиление) световой волны, а член $in\mathbf{E}$ — также за самовоздействие (на активной нелинейности) этой волны, обусловленное ее рассеянием на возмущениях разности населенностей n , наводимых самой этой волной. В рассматриваемом приближении $\Delta\varepsilon \sim in$, и поскольку в левую часть уравнения (7) входит тот же оператор \hat{G}^{-1} , что и в (5), то становится ясным, что для описания обсуждаемых здесь эффектов самовоздействия световых волн в резонансной двухуровневой среде можно воспользоваться тем же материальным уравнением, что и для описания обычного самовоздействия в инерционных кубичных средах с временем релаксации $\gamma^{-1} = T_1$. Разница состоит лишь в том, что в данном случае возмущения диэлектрической проницаемости вместо действительных становятся мнимыми.

Другой важный пример дает комбинационное преобразование и двухквантовое поглощение световых волн. В этом случае в пре-

небрежении изменением разности населенностей уровней, ответственных за указанные взаимодействия,

$$\hat{G}^{-1} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0^2, \quad \hat{g} = g. \quad (8)$$

Здесь Ω_0 — частота собственных колебаний в среде, γ^{-1} — время релаксации этих колебаний. При комбинационном преобразовании частота световых волн превышает частоту Ω_0 , и колебания в среде, модулирующие возмущения $\Delta\epsilon$, раскачиваются вследствие наложения двух высокочастотных волн, разность частот которых совпадает с Ω_0 . При двухквантовом поглощении частота световых волн меньше частоты Ω_0 , и колебания в среде раскачиваются при наложении двух волн, сумма частот которых равна Ω_0 .

Изменение $\Delta\epsilon$ в случае вынужденного молекулярного рассеяния может быть связано с изменением плотности среды. Так, если эти изменения происходят при постоянной энтропии, то

$$\hat{G}^{-1} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \Delta - 2\Gamma \frac{\partial}{\partial t} \Delta, \quad \hat{g} = \text{const } \Delta, \quad (9)$$

где v_s — скорость звука, Γ — коэффициент, характеризующий его затухание в вязкой среде. Если изменения плотности происходят при постоянном давлении, то

$$\hat{G}^{-1} = \partial/\partial t - D\Delta, \quad \hat{g} = g, \quad (10)$$

где D — коэффициент диффузии температуры. В том случае, когда энтропия и давление изменяются одновременно, возмущения плотности зависят и от давления, и от энтропии и описываются системой двух уравнений. Тогда вид оператора \hat{G}^{-1} усложняется, однако, в принципе, существо рассмотрения не изменится. Заметим, наконец, что операторы вида (10) описывают также изменения $\Delta\epsilon$, связанные с диффузией возмущений относительной концентрации в бинарных растворах двух жидкостей или газов.

В общем случае несколько рассмотренных нелинейных механизмов могут одновременно дать вклад в $\Delta\epsilon$. Это изменит конкретный вид оператора \hat{G}^{-1} , но суть дальнейшего изложения останется прежней.

Далее нас будет интересовать взаимодействие не только попутных, но и встречных световых волн. Поэтому полное поле представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ \exp(i\omega_+ t - ik_+ z) + \text{к. с.} + \mathbf{E}^- \exp(i\omega_- t + ik_- z) + \text{к. с.}, \quad (11)$$

соответствующих волнам, распространяющимся вдоль и против оси z (к. с. — комплексно-сопряженная величина). В (11) \mathbf{E}^+ и \mathbf{E}^- — комплексные амплитуды, зависящие как от пространственных координат, так и от времени; ω_{\pm} , k_{\pm} — частоты и волновые векторы.

В общем случае пространственные возмущения диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon$ могут иметь как крупно-, так и мелко-масштабные вариации, а возмущения $\Delta\epsilon$ во времени — как низко-, так и высокочастотную составляющую. Полное возмущение $\Delta\epsilon$

удобно представить в виде суммы более простых возмущений $\Delta\epsilon_{i,j}\exp(i\Omega_i t - iq_j z) + \text{к. с.}$, которые можно классифицировать с использованием табл. 1. В этой таблице комплексные амплитуды возмущений $\Delta\epsilon$, созданных волнами, распространяющимися в одном направлении вдоль или против оси z , отмечены индексами «+» или «-», а комплексные амплитуды возмущений, созданных наложением встречных волн, индексов не имеют.

Таблица 1
Классификация возмущений $\Delta\epsilon$

Временной масштаб	Пространственный масштаб	
	длинноволновый	коротковолновый
Низкочастотный	$\Delta\epsilon_{11}^{\pm} \exp(i\Omega_1 t \mp iq_1 z)$ ($\Omega_1 \approx 0, q_1 \approx 0$)	$\Delta\epsilon_{12} \exp(i\Omega_1 t - iq_2 z)$ ($\Omega_1 = \omega_+ - \omega_-$, $q_2 = k_+ + k_-$)
Высокочастотный	$\Delta\epsilon_{21} \exp(i\Omega_2 t - iq_1 z)$ ($\Omega_2 = \omega_+ + \omega_-$, $q_1 = k_+ - k_-$)	$\Delta\epsilon_{22}^{\pm} \exp(i\Omega_2 t \mp iq_2 z)$ ($\Omega_2 = 2\omega_{\pm}$, $q_2 = 2k_{\pm}$)

Полное возмущение $\Delta\epsilon$ записывается в виде

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_{11}^+ + \text{к. с.} + \Delta\epsilon_{11}^- + \text{к. с.} + \Delta\epsilon_{22}^+ \exp(2i\omega_+ t - 2ik_+ z) + \text{к. с.} + \Delta\epsilon_{22}^- \exp(2i\omega_- t - 2ik_- z) + \text{к. с.} + \Delta\epsilon_{12} \exp[i(\omega_+ - \omega_-)t - i(k_+ - k_-)z] + \text{к. с.} + \Delta\epsilon_{21} \exp[i(\omega_+ + \omega_-)t - i(k_+ + k_-)z] + \text{к. с.} \quad (12)$$

Осцилляторный характер изменения $\Delta\epsilon$ в пространстве и во времени позволяет осуществить усреднение оператора \hat{G} и выразить комплексные амплитуды $\Delta\epsilon_{i,j}$ в более простом виде. Подставляя (11) и (12) в (4) и выполняя операцию усреднения, получим

$$\Delta\epsilon_{11}^{\pm} = 2\hat{G}_{11}g_{11}E^{\pm}E^{\pm*}, \quad \Delta\epsilon_{22}^{\pm} = \hat{G}_{22}g_{22}E^{\pm}E^{\pm}, \quad (13)$$

$$\Delta\epsilon_{12} = 2\hat{G}_{12}g_{12}E^+E^{-*}, \quad \Delta\epsilon_{21} = 2\hat{G}_{21}g_{21}E^+E^-.$$

Здесь усредненные операторы $\hat{G}_{i,j}g_{i,j}$ определяются соотношением

$$\hat{G}_{i,j}g_{i,j} = \langle \exp(i\Omega_i t - iq_j z) \hat{G} \hat{g} \exp(-i\Omega_i t + iq_j z) \rangle. \quad (14)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по пространственному и временному масштабу, существенно меньшему, чем масштаб изменения комплексной амплитуды $\Delta\epsilon_{i,j}$. Поскольку свойства среды не зависят от направления распространения световых волн, то уравнения для $\Delta\epsilon_{11}^+$ и $\Delta\epsilon_{11}^-$ содержат один и тот же оператор \hat{G}_{11} и имеют одинаковый коэффициент нелинейности g_{11} . То же самое относится к уравнениям для $\Delta\epsilon_{22}^+$ и $\Delta\epsilon_{22}^-$.

Уравнения для комплексных амплитуд световых волн в квази-оптическом приближении записываются в виде

$$\left(\frac{1}{v_+} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_+\right) \mathbf{E}^+ = -\frac{ik_+}{2\epsilon_0} [(\Delta\epsilon_{11}^+ + \text{к. с.} + \Delta\epsilon_{11}^- + \text{к. с.}) \mathbf{E}^+ + \Delta\epsilon_{22}^+ \mathbf{E}^{*+} + \Delta\epsilon_{12}^- \mathbf{E}^- + \Delta\epsilon_{21} \mathbf{E}^{*-}], \quad (15)$$

$$\left(-\frac{1}{v_-} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_-\right) \mathbf{E}^- = \frac{ik_-}{2\epsilon_0} [(\Delta\epsilon_{11}^+ + \text{к. с.} + \Delta\epsilon_{11}^- + \text{к. с.}) \mathbf{E}^- + \Delta\epsilon_{22}^- \mathbf{E}^{*-} + \Delta\epsilon_{12}^+ \mathbf{E}^+ + \Delta\epsilon_{21} \mathbf{E}^{*+}]. \quad (16)$$

Здесь v_{\pm} — скорость света вдоль и против оси z ,

$$\hat{L}_{\pm} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k_{\pm}} \Delta_{\perp} + \frac{ik_{\pm} \delta\epsilon}{2\epsilon_0}, \quad (17)$$

где $\delta\epsilon$ — возмущения линейной части диэлектрической проницаемости ϵ_0 . Уравнения (15) и (16) совместно с соотношениями (13) полностью описывают взаимодействие квазимонохроматических световых волн в кубичных средах.

2.2. Укороченные уравнения для коэффициентов разложения полей по функциям, зависящим от пространственных координат

Будем считать, что характерная длина распространения возмущений $\Delta\epsilon$ в отсутствие световых волн мала по сравнению с масштабом пространственного изменения комплексных амплитуд этих волн при их нелинейном взаимодействии. Тогда в усредненных операторах \hat{G}_{ij} можно пренебречь пространственными производными, описывающими собственные нелокальные изменения комплексных амплитуд $\Delta\epsilon_{ij}$, и ограничиться учетом лишь временных производных. Это допущение исключает из дальнейшего рассмотрения эффекты типа вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна (ВРМБ) в средах с малым затуханием гиперзвука, некоторые виды вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) на поляритонах, однако для большинства наблюдаемых в настоящее время нелинейных волновых процессов в кубичной среде указанное допущение оправданно. Кроме того, допустим, что частоты ω_+ и ω_- близки настолько, чтобы можно было пренебречь различием волновых векторов k_+ и k_- в левой части уравнений (15) и (16) и положить $\hat{L}_+ = \hat{L}_-$. Это можно сделать, если характерный масштаб нелинейного взаимодействия вдоль оси z мал по сравнению с величиной $(|k_+ - k_-|^2)^{-1}$, где θ — ширина углового спектра, в пределах которой сосредоточены пространственные частоты взаимодействующих волн.

Для решения уравнений (15), (16) воспользуемся подходом, суть которого состоит в предположении, что в любой плоскости z в полях \mathbf{E}^+ и \mathbf{E}^- с наибольшим весом представлены наборы

из N ортогональных структур (мод) \mathcal{E}_j и \mathcal{E}_j^* , удовлетворяющих линейным квазиоптическим уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k_+} \Delta_{\perp} + \frac{ik_+ \delta \varepsilon}{2\varepsilon_0}\right) \mathcal{E}_j = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k_+} \Delta_{\perp} - \frac{ik_+ \delta \varepsilon}{2\varepsilon_0}\right) \mathcal{E}_j^* = 0, \quad (18)$$

$$\int \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k^* dS = S \delta_{jk}, \quad (19)$$

где S — площадь поперечного сечения объема взаимодействия. В этом случае поля \mathbf{E}^+ и \mathbf{E}^- запишем в виде

$$\mathbf{E}^+ = \sum_{j=1}^N \mathbf{c}_j^+(z, t) \mathcal{E}_j(z, \mathbf{r}_{\perp}) + \tilde{\mathbf{E}}^+, \quad (20)$$

$$\mathbf{E}^- = \sum_{j=1}^N \mathbf{c}_j^-(z, t) \mathcal{E}_j^*(z, \mathbf{r}_{\perp}) + \tilde{\mathbf{E}}^-,$$

$$\int \tilde{\mathbf{E}}^+ \mathcal{E}_j^* dS = 0, \quad \int \tilde{\mathbf{E}}^- \mathcal{E}_j dS = 0. \quad (21)$$

Представление (20) означает, что решение нелинейных уравнений для полей \mathbf{E}^{\pm} мы ищем в виде, близком к решению соответствующей линейной задачи, что и типично для процедуры получения укороченных уравнений.

Моды \mathcal{E}_j и \mathcal{E}_j^* во многих практически важных случаях удобно выбрать таким образом, чтобы при конечном N входные значения полей $\mathbf{E}^+(0, \mathbf{r}_{\perp}, t)$ и $\mathbf{E}^-(L, \mathbf{r}_{\perp}, t)$ раскладывались по ним в ряд с минимальным остаточным членом. Этого можно добиться, если потребовать, чтобы на границе среды $z=0$ коэффициенты разложения $\mathbf{c}_j^+ = W_j^{\perp} \varphi_j$, $W_j = \int_T |\mathbf{c}_j^+(0, t)|^2 dt$ удовлетворяли условию

$$\sum_{\alpha} \int_T \varphi_j^{\alpha} \varphi_k^{\alpha} dt = \delta_{jk}. \quad (22)$$

Здесь T — масштаб ортогональности, равный или меньший длительности импульса. Тогда для поля $\mathbf{E}^+(0, \mathbf{r}_{\perp}, t)$ мы получим так называемое каноническое разложение Карунена—Лозва [5]. Далее следует во встречной волне $\mathbf{E}^-(L, \mathbf{r}_{\perp}, t)$ выделить проекции на найденные орты $\mathcal{E}_j^*(L, \mathbf{r}_{\perp})$ и $\varphi_j(t)$, а оставшуюся часть поля опять представить в виде канонического разложения. В результате такой процедуры найдутся все интересующие нас моды \mathcal{E}_j и \mathcal{E}_j^* . Если при конечном числе мод N остаточный член пренебрежимо мал, то составляющие $\tilde{\mathbf{E}}^{\pm}$, ортогональные выделенным структурам \mathcal{E}_j и \mathcal{E}_j^* , на границах $z=0$ и $z=L$ равны нулю ($\tilde{\mathbf{E}}^+(0, \mathbf{r}_{\perp}) = \tilde{\mathbf{E}}^-(L, \mathbf{r}_{\perp}) = 0$) и могут стать отличными от нуля лишь в результате взаимодействия волн внутри среды.

Подставляя разложения (20) в (13), (15) и (16) и воспользовавшись тем, что функции \mathcal{E}_j удовлетворяют (18), получим экви-

валентную (13), (15) и (16) систему уравнений для c_j^\pm (уравнения для $\tilde{\mathbf{E}}^\pm$ не выписаны вследствие их громоздкости):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v_+} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) c_i^+ = & -\frac{ik_+}{\varepsilon_0} \sum_{ijk}^N (A_{ijkl} c_k^+ \hat{G}_{11} g_{11} c_j^{+*} + \\ & + A_{jikl} c_k^+ \hat{G}_{11} g_{11} c_i^- c_j^- + \frac{1}{2} A_{ikjl} c_k^{+*} \hat{G}_{22} g_{22} c_i^+ c_j^+ + \\ & + A_{ikjl} c_k^- \hat{G}_{12} g_{12} c_i^+ c_j^- + A_{ijkl} c_k^- \hat{G}_{21} g_{21} c_i^+ c_j^-) + \mathbf{f}^+(\tilde{\mathbf{E}}^+, \tilde{\mathbf{E}}^-), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{v_-} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) c_i^- = & \frac{ik_-}{\varepsilon_0} \sum_{ijk}^N (A_{ijkl} c_k^- \hat{G}_{11} g_{11} c_i^+ c_j^{+*} + \\ & + A_{jikl} c_k^- \hat{G}_{11} g_{11} c_i^- c_j^- + \frac{1}{2} A_{kijl} c_k^- \hat{G}_{22} g_{22} c_i^- c_j^- + \\ & + A_{kijl} c_k^+ \hat{G}_{12} g_{12} c_i^+ c_j^- + A_{ijkl} c_k^+ \hat{G}_{21} g_{21} c_i^+ c_j^-) + \mathbf{f}^-(\tilde{\mathbf{E}}^+, \tilde{\mathbf{E}}^-), \end{aligned} \quad (24)$$

где $A_{ijkl} = S^{-1} \int \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j^* \mathcal{E}_k \mathcal{E}_l^* dS$ — интегралы перекрытия выделенных структур. Через $\mathbf{f}^\pm(\tilde{\mathbf{E}}^+, \tilde{\mathbf{E}}^-)$ в (23) и (24) обозначены слагаемые, пропорциональные $\tilde{\mathbf{E}}^\pm$.

Оценку полей $\tilde{\mathbf{E}}^\pm$ и их вклада во взаимодействие выделенных мод \mathcal{E}_j можно выполнить различными способами. Так, например, для сильно неоднородных в пространстве структур \mathcal{E}_j удобно поступить подобно тому, как это делается при исследовании распространения волн в сильно неоднородных средах в приближении марковского случайного процесса [6]. Указанная процедура использовалась ранее для анализа ОВФ при ВР [7].

Оценки показывают, что вклад полей $\tilde{\mathbf{E}}^\pm$ в уравнения (23) и (24) несуществен, когда пренебрежимо мало изменение каждого из коэффициентов c_j^\pm на длине корреляции z_{jk} моды \mathcal{E}_j со всеми модами \mathcal{E}_k , вносящими основной вклад в поля \mathbf{E}^\pm . Значение z_{jk} определяется минимумом из двух величин: продольной длины взаимной корреляции $(k_\pm \theta_{jk}^2)^{-1}$ мод \mathcal{E}_j и \mathcal{E}_k (θ_{jk} — средний угол между направлением их распространения) и наименьшей из длин корреляции $k_{\pm\rho_j^2}$ или $k_{\pm\rho_k^2}$ для каждой из этих мод в отдельности. В частности, при большом числе мод \mathcal{E}_j с примерно равными интенсивностями и случайными на входе в среду фазами каждая из них может иметь плоский волновой фронт, но средний угол между модами должен соответствовать указанному выше условию [8, 9]. Пренебрежение слагаемыми $\tilde{\mathbf{E}}^\pm$ в рассматриваемом случае означает фактически переход к приближению укороченных уравнений для амплитуд c_j^\pm , получаемых с помощью метода усреднения, широко используемого в асимптотической теории взаимодействия волн [10].

Для вычисления коэффициентов A_{ijkl} и дальнейшего упрощения уравнений (24) воспользуемся предположением о статистической независимости структур \mathcal{E}_j , их сильной неоднородности

по \mathbf{r}_\perp и постоянстве средней (по сечению пучка) интенсивности $|\overline{\mathcal{E}_j}|^2$ (усреднение осуществляется по масштабу, существенно большему, чем характерный интервал ρ_j знакопостоянства функций $\mathcal{E}_j(\mathbf{r}_\perp, z)$). При этом естественно считать, что компоненты матрицы A_{ijkl} отличны от нуля лишь при $i=j, l=k$ или $i=l, j=k$, а остальные компоненты достаточно малы, так что приближенно справедливо представление

$$A_{ijkl} = A_{iikk} \delta_{ij} \delta_{kl} + A_{ijji} \delta_{il} \delta_{jk} - A_{iiii} \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{il}. \quad (25)$$

Соотношение (25) означает, по сути дела, использование приближения, в рамках которого учитывается взаимодействие лишь некоторых выборочных комбинаций мод, а именно четырехволновые взаимодействия мод $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_i^*, \mathcal{E}_j^*$ с попарно совпадающими индексами. Подобные комбинации выделяют лишь сильно связанные между собой моды, в то время как остальные комбинации таковых мод не содержат.

Теорию, использующую указанное приближение, называют иногда модовой [8]. Само же приближение можно определить как приближение сильно связанных мод в асимптотической теории взаимодействия волн (эта формулировка стимулирована плодотворной дискуссией с В. Г. Сидоровичем). Это приближение в отличие от близкого по смыслу приближения хаотизированных фаз, используемого обычно в теории слабой турбулентности для получения замкнутых уравнений относительно корреляционных функций 2-го порядка, позволяет получить упрощенные уравнения непосредственно для амплитуд выделенных мод c_k , что дает возможность проследить за динамическим изменением каждой из них в пространстве и во времени.

Считая условия малости полей \mathbf{E}^\pm выполненными и полагая в уравнениях (23) и (24) слагаемое $f^\pm(\mathbf{E}^+, \mathbf{E}^-) = 0$, для коэффициентов $c^\pm(z, t)$ с учетом (25) получим замкнутую систему уравнений. На основании этой системы можно исследовать различные особенности взаимодействия многокомпонентных волн \mathbf{E}^+ и \mathbf{E}^- .

2.3. Взаимодействие двух пар встречных световых волн

Для многих приложений достаточно ограничиться исследованием взаимодействия лишь двух пар встречных световых волн. Рассмотрим более подробно подобные взаимодействия в условиях, когда возбуждаются коротковолновые низкочастотные

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{12} \exp[i(\omega_+ - \omega_-)t - i(k_+ + k_-)z] + \text{к. с.}$$

или длинноволновые высокочастотные

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{21} \exp[i(\omega_+ + \omega_-)t - i(k_+ - k_-)z] + \text{к. с.}$$

скалярные возмущения $\Delta \varepsilon (g^{\alpha\beta\mu\nu} = g' \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu})$.

Остановимся сначала на эффектах возбуждения световых волн с участием коротковолновых низкочастотных возмущений $\Delta\epsilon_{12}$. Это взаимодействие приводит, в частности, к обратному ВР, четырехволновому смещению с ОВФ, другим подобным процессам комбинационного преобразования.

Будем считать $\hat{G}_{12} = \int_{-\infty}^t dt' \{ \exp[-\gamma(t-t')] \times \dots \}$. Пусть для определенности волна E^+ состоит из двух линейно-поляризованных компонент $e_1 c_1^+ \mathcal{E}_1$ и $e_2 c_2^+ \mathcal{E}_2$ ($(e_1 e_1) = (e_2 e_2) = 1$), первая из которых имеет частоту ω_{+1} , совпадающую с ω_+ , а вторая — либо отличную от нее частоту ω_{+2} , либо ортогональную поляризацию e_2 . Допустим также, что встречная волна E^- тоже имеет две компоненты $e_2 c_1^- \mathcal{E}_1^*$ и $e_1 c_2^- \mathcal{E}_2^*$ соответственно с частотами $\omega_{-1} = \omega_{+2} - \Omega$ и $\omega_{-2} = \omega_{+1} - \Omega$, сдвинутыми в стоксову область на величину $\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega$ ($\delta\Omega$ — расстройка от точного резонанса с собственными колебаниями среды). С учетом частотных расстройек сделаем для стационарного взаимодействия замену:

$$\begin{aligned} c_1^+(z, t) &= c_1^+(z), \quad c_1^-(z, t) = c_1^-(z) \exp[i(\delta\Omega + \delta\omega)t + i\delta k_2 z], \\ c_2^+(z, t) &= c_2^+(z) \exp[i\delta\omega(t - z/v)], \\ c_2^-(z, t) &= c_2^-(z) \exp(i\delta\Omega t + i\delta k_1 z), \\ \delta\omega &= \omega_{+1} - \omega_{+2}, \quad \delta k_1 = \delta\Omega/v, \quad \delta k_2 = (\delta\omega + \delta\Omega)/v, \quad v = v_+ = v_-. \end{aligned}$$

После подстановки $c_{1,2}^\pm$ в (23) и (24) и учитывая, что суммирование идет до $N=2$, а коэффициенты $g_{11} = g_{22} = g_{21} = 0$, $g_{12} = g'_{12}$, в стационарном случае получим

$$\begin{aligned} \frac{dc_{1,2}^+}{dz} &= -\frac{\bar{g}_{12}^+}{2} \left\{ \frac{A_{1212}}{1 + i\delta\Omega/\gamma} [|c_{2,1}^-|^2 c_{1,2}^+ + c_{2,1}^+ c_{2,1}^- c_{1,2}^{+*} \exp(\mp i\delta k z)] + \right. \\ &\quad \left. + A_{1111, 2222} (e_1 e_2) \left(1 + i \frac{\delta\omega + \delta\Omega}{\gamma} \right)^{-1} |c_{1,2}^-|^2 c_{1,2}^+ \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{dc_{1,2}^-}{dz} &= -\frac{\bar{g}_{12}^-}{2} \left\{ \frac{A_{1212}}{1 - i\delta\Omega/\gamma} [|c_{2,1}^+|^2 c_{1,2}^- + c_{2,1}^+ c_{2,1}^- c_{1,2}^{+*} \exp(\mp i\delta k z)] + \right. \\ &\quad \left. + A_{1111, 2222} (e_1, e_2) \left(1 - i \frac{\delta\omega + \delta\Omega}{\gamma} \right)^{-1} |c_{1,2}^+|^2 c_{1,2}^- \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\delta k = 2\delta\omega/v$, $\bar{g}_{12}^\pm = (2ik_\mp/\epsilon_0\gamma) g'_{12}$ ($g_{12}^\pm = \text{Re } \bar{g}_{12}^\pm$).

Эти уравнения при $\delta\Omega$, $\delta\omega \ll \gamma$ и $\delta k z \ll \pi$ описывают стационарное ВР накачки E^+ во встречную стоксову компоненту E^- , в частности, эффект ОВФ при ВРМБ [11]. Если $A_{1111} = A_{2222} = 2A_{1212}$, то при $c_{1,2}^+ = \text{const}(z)$ существует решение $(e_{11} \parallel e_{22})$:

$$c_{1,2}^- = \text{const} c_{1,2}^{+*} \exp[2\lambda(L - z)], \quad (28)$$

где $\lambda = \bar{g}_{12}^- (|c_1^+|^2 + |c_2^+|^2)$. Это решение соответствует тому, что волны $c_{1,2}^- \mathcal{E}_{1,2}^*$, обращающие волновой фронт волн $c_{1,2}^+ \mathcal{E}_{1,2}$, нарастают в поле многомодовой накачки с удвоенным инкрементом. Если же условия $A_{1111} = A_{2222} = 2A_{1212}$ не выполняются, то ре-

шение вида (28) отсутствует и полного ОВФ не происходит (см., например, [12]).

При $A_{1111} = A_{2222} = 2A_{1212}$, исходя из нелинейной системы (26), (27), можно получить уравнения для трех величин: интенсивностей $I_+ = |c_1^+|^2 + |c_2^+|^2$, $I_- = |c_1^-|^2 + |c_2^-|^2$ и функции $\psi = c_1^+ c_1^- + c_2^+ c_2^-$, характеризующей взаимную проекцию поля E^+ на E^- . Аналитическое решение такой системы уравнений не представляет затруднений (см., например, [13, 14]). Однако найденные три функции I_+ , I_- и ψ не позволяют определить четыре значения $c_{1,2}^\pm$ и проследить за перераспределением энергий между различными компонентами.

Для оценки влияния последних слагаемых в правой части (26) и (27) при $\delta\omega \gg \gamma$ в случае $e_1 \parallel e_2$ предположим, что мощность волн c_1^\pm существенно превосходит мощность слабых компонент c_2^\pm . Тогда изменение c_1^+ и c_1^- вдоль z определяется решением (26) и (27) при $c_2^+ = c_2^- = 0$. При этом произведение $c_1^+ c_1^-$, определяющее коэффициент параметрического взаимодействия слабых компонент c_2^+ и c_2^- , выражается в виде (при $\delta\Omega = 0$, $\bar{g}_{12}^+ = \bar{g}_{12}^- = \bar{g}_{12}$)

$$c_1^+ c_1^- = |c_1^+(z) c_1^-(z)| \exp \left[i \bar{g}_{12} A_{1111} d \frac{\delta\omega/\gamma}{(1 + (\delta\omega/\gamma)^2) z} \right],$$

где $d = |c_1^+|^2 - |c_1^-|^2 = \text{const}$. Таким образом, нелинейное взаимодействие волн c_1^+ и c_1^- при $\delta\omega \neq 0$ приводит к появлению дополнительной расстройки в уравнениях для c_2^+ и c_2^- :

$$\delta k_{z\phi} = \delta k + \bar{g}_{12} A_{1111} d \frac{\delta\omega/\gamma}{1 + (\delta\omega/\gamma)^2}. \quad (29)$$

Нелинейная добавка к волновой расстройке вначале растет с увеличением $\delta\omega$, что должно приводить к снижению эффективности параметрического преобразования. С дальнейшим ростом $\delta\omega$ она уменьшается и при $\delta\omega \gg \gamma$ становится пренебрежимо мала. В случае $\delta\omega \gg \gamma$ удастся пренебречь взаимодействием волн, связанных с последним слагаемым в (26), (27), и, учитывая, что $A_{1212} = 1$, можно для описания комбинационного преобразования воспользоваться следующей системой уравнений:

$$\frac{dc_{1,2}^+}{dz} = - \frac{\bar{g}_{12}}{2(1 + i\delta\Omega/\gamma)} (|c_{2,1}^-|^2 c_{1,2}^+ + c_{2,1}^+ c_{2,1}^- c_{1,2}^{*+} e^{\mp i\delta k z}), \quad (30)$$

$$\frac{dc_{1,2}^-}{dz} = - \frac{\bar{g}_{12}}{2(1 - i\delta\Omega/\gamma)} (|c_{2,1}^+|^2 c_{1,2}^- + c_{2,1}^- c_{2,1}^+ c_{1,2}^{*-} e^{\mp i\delta k z}). \quad (31)$$

Для описания взаимодействия двух пар световых волн с участием скалярной длинноволновой высокочастотной решетки (в обычных условиях это взаимодействие характеризует процессы двухквантового поглощения) предположим, что $g_{11} = g_{12} = 0$, $g^{\alpha\beta\mu\nu} = g_{21}' \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu}$, и волна E^+ состоит из двух линейно-поляризованных компонент $e_1 c_1^+ \mathcal{E}_1$ и $e_2 c_2^+ \mathcal{E}_2$ ($(e_1 e_1) = (e_2 e_2) = 1$), первая из которых имеет частоту ω_{+1} , совпадающую с ω_+ , а вторая — либо отличную от нее частоту ω_{+2} , либо ортогональную поляризацию

e_2 . Допустим также, что встречная волна тоже имеет две компоненты $e_2 c_1^- \mathcal{E}_1^*$ и $e_1 c_2^- \mathcal{E}_2^*$ соответственно с такими частотами $\omega_{-1,2} = \Omega - \omega_{+1,2}$, что их сумма $\omega_{+1,2} + \omega_{-1,2}$ отличается от точного резонанса на величину $\delta\Omega = \Omega - \Omega_0$. При $\delta\omega - \delta\Omega \gg \gamma$ получаем $\left(\frac{1}{2} \bar{g}_{21}^\pm = \frac{ik_\pm}{\gamma \varepsilon_0} g'_{21}, \text{Im } \bar{g}_{21}^\pm = 0\right)$:

$$\frac{dc_{1,2}^+}{dz} = -\frac{\bar{g}_{21}^+}{2} \left(1 + i \frac{\delta\Omega}{\gamma}\right)^{-1} (A_{1111, 2222} |c_{1,2}^-|^2 c_{1,2}^+ + c_{2,1}^+ c_{2,1}^- c_{1,2}^{*+} e^{\mp i\delta kz}), \quad (32)$$

$$\frac{dc_{1,2}^-}{dz} = -\frac{\bar{g}_{21}^-}{2} \left(1 + i \frac{\delta\Omega}{\gamma}\right)^{-1} (A_{1111, 2222} |c_{1,2}^+|^2 c_{1,2}^- + c_{2,1}^+ c_{2,1}^- c_{1,2}^{*+} e^{\mp i\delta kz}). \quad (33)$$

Решение уравнений (30), (31) и (32), (33) рассматривается в разд. 3.3.

2.4. Произвольное число взаимодействующих компонент. Дальнейшее усреднение полученных уравнений

Перейдем теперь к дальнейшим исследованиям уравнений (23) и (24). Предположим, что во взаимодействии участвует достаточно большой набор компонент N . Кроме того, будем считать, что все функции \mathcal{E}_j распределены по нормальному закону, для которого

$$A_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{jk}.$$

Остановимся сначала на взаимодействии световых волн, связанном с раскачкой низкочастотных возмущений $\Delta\varepsilon$ скалярного типа ($g^{\alpha\beta\mu\nu} = g' \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu}$). Обсудим прежде всего особенности взаимодействия волн при попутном ВКР. В этом случае $g_{12} = g_{22}^\pm = g_{21} = 0$ и, кроме того, $c_i^- = 0$. Значение c_i^+ при ВКР следует представить в виде суммы двух компонент, средняя частота одной из которых равна $\omega'_+ = \omega_+$, а другой — $\omega''_+ = \omega'_+ - \Omega_0$:

$$c_i^+ = c'_i + c''_i \exp(-i\Omega_1 t - iq_1 z), \quad (34)$$

где $\Omega_1 = \omega'_+ - \omega''_+ = \Omega_0$, $q_1 = k'_+ - k''_+$. Подставляя (34) в (23) и учитывая, что усредненный по периоду $2\pi/\Omega_0$ и длине волны

$2\pi/q_1$ оператор \hat{G}_{11} равен $\int_{-\infty}^t dt' \{\exp[-\gamma(t-t')] \times \dots\}$, получим

$$(\bar{g}'_{11} = 2ik'_+ \bar{g}_{11}/\varepsilon_0 \gamma, \bar{g}''_{11} = 2ik''_+ \bar{g}'_{11}/\varepsilon_0 \gamma, \bar{g}_{11} = \text{Re } \bar{g}'_{11}, \bar{g}''_{11} = \text{Re } \bar{g}''_{11}):$$

$$\left(\frac{1}{v_+} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) c'_i = -\frac{1}{2} \bar{g}'_{11} \sum_{n=1}^N \gamma \left\{ c'_i \int_{-\infty}^t dt' \exp[-\gamma(t-t')] (c'_n c_n^{*n}) + c''_n \int_{-\infty}^t dt' \exp[-\gamma(t-t')] (c'_i c_n^{*n}) \right\}, \quad (35)$$

$$\left(\frac{1}{v_+} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathbf{c}_i'' = \frac{1}{2} \bar{g}_{11}'' \sum_{n=1}^N \gamma \left\{ \mathbf{c}_i' \int_{-\infty}^t dt' \exp[-\gamma(t-t')] (\mathbf{c}_n'' \mathbf{c}_n'^*) + \right. \\ \left. + \mathbf{c}_n' \int_{-\infty}^t dt' \exp[-\gamma(t-t')] (\mathbf{c}_i'' \mathbf{c}_n'^*) \right\}. \quad (36)$$

Пренебрежем расстройкой групповых скоростей, что оправдано, если характерная длина взаимодействия меньше длины рассогласования, определяемой параметром $(|1/v_+' - 1/v_+'| \Delta \omega)^{-1}$, где $\Delta \omega$ — максимальная ширина частотного спектра взаимодействующих волн. Граничные условия для $\mathbf{c}_i^{+'}$ и $\mathbf{c}_i^{+''}$, как уже указывалось, будем задавать, исходя из разложения граничных значений функции $E^{+'}$ и $E^{+''}$ в ряд Карунена—Лоэва. Предположим, что временной масштаб ортогональности T мал по сравнению со временем релаксации $1/\gamma$ возмущений $\Delta \epsilon_{11}$. Тогда решение уравнений (35) и (36) будем искать в виде разложений по базису φ_i , заданному граничными условиями в плоскости $z=0$:

$$\mathbf{c}_i^{+'} = \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} \varphi_k(\eta), \quad (37)$$

$$\mathbf{c}_i^{+''} = \sum_{k=1}^N \beta_{ik} \varphi_k(\eta), \quad (38)$$

где $\eta = t - z/v_+'; \alpha_{ik}$ и β_{ik} — коэффициенты разложения, медленные в масштабе времени ортогональности T . Подставляя (37) и (38) в (35) и (36) и учитывая медленность коэффициентов α_{ik} и β_{ik} , после усреднения получаем матричные уравнения

$$\frac{d\alpha_{ik}}{dz} = -\frac{\bar{g}_{11}'}{2T} \sum_{n,m} (\beta_{ik} \alpha_{nm} \beta_{nm}^* + \beta_{nk} \alpha_{im} \beta_{nm}^*), \quad (39)$$

$$\frac{d\beta_{ik}}{dz} = \frac{\bar{g}_{11}''}{2T} \sum_{n,m} (\alpha_{ik} \beta_{nm} \alpha_{nm}^* + \alpha_{nk} \beta_{im} \alpha_{nm}^*) \quad (40)$$

или в символической записи

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{\bar{g}_{11}'}{2T} [\alpha \beta^+ \beta + \beta \text{Sp}(\alpha \beta^+)], \quad (41)$$

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{\bar{g}_{11}''}{2T} [\beta \alpha^+ \alpha + \alpha \text{Sp}(\beta \alpha^+)]. \quad (42)$$

Здесь через α и β обозначены соответственно матрицы α_{ik} и β_{ik} ; индекс «+» означает эрмитово сопряжение, а Sp — сумму диагональных элементов матрицы. Следует отметить, что если на границе среды $|\mathbf{c}_i^+|^2 = \text{const}(t)$, то в инкремент для β_{ik} величина T не войдет, поскольку граничное значение $|\alpha_{ii}(0)|^2 \sim T$ и параметр $|\alpha_{ii}(0)|^2/T$ от T не зависит.

Из уравнений (41) и (42) видно, что при $\alpha \sim \beta$ или $\alpha_{ik} \sim \beta_{ik}$ эффективность ВКР определяется в основном полной энергией накачки $\sum_{i,j}^N |\alpha_{i,j}|^2$ и слабо зависит от распределения энергии по отдельным компонентам. Учитывая, что количество компонент в пучке накачки определяет степень пространственной когерентности излучения, замечаем, что эффективность попутного ВКР мало зависит от когерентности возбуждающего излучения. Если бы член, пропорциональный сумме диагональных элементов матрицы, отсутствовал в матричных уравнениях (41) и (42), описывающих взаимодействие световых волн, то эффективность преобразования определялась бы не суммой энергий, а энергией каждой компоненты в отдельности. Тогда при уменьшении степени пространственной когерентности эффективность преобразования должна уменьшаться. Подобные особенности мы обсудим ниже на примере обратного ВР.

Рассмотрим теперь взаимодействия встречных световых волн с участием низкочастотных возмущений $\Delta \epsilon$. Предположим, что

операторы \hat{G}_{11}^{\pm} , \hat{G}_{12} имеют вид $\hat{G}_{11}^{\pm} = \int_{-\infty}^t dt' \{ \exp[-\gamma_{11}(t-t')] \times \dots \}$,

$\hat{G}_{12} = \int_{-\infty}^t dt' \{ \exp[-\gamma_{12}(t-t')] \times \dots \}$. В соответствии с приня-

тым подходом граничные условия для c_i^+ и c_i^- будем задавать таким образом, чтобы полные поля E^+ и E^- на границе среды раскладывались в ряд Карунена—Лозва, т. е. в ряд с минимальным остаточным членом. Внутри нелинейного слоя из-за взаимодействия компонент $\varphi_i \mathcal{E}_i$ и $\varphi_j \mathcal{E}_j^*$ коэффициенты c_i^+ и c_i^- , разумеется, изменяются по сравнению с заданными на противоположной границе значениями c_i^+ и c_i^- .

Если расстройка групповых скоростей незначительна (характерный масштаб нелинейной перекачки много меньше длины расогласования, определяемой при взаимодействии встречных волн параметром $(|1/v_+ + 1/v_-| \Delta \omega)^{-1}$) и масштаб ортогональности T мал по сравнению с временами релаксации $1/\gamma_{11,12}$, коэффициенты c_i^{\pm} удобно представить в виде ряда по функциям φ_i :

$$c_i^+ = \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} \varphi_k, \quad c_i^- = \sum_{k=1}^N \beta_{ik} \varphi_k, \quad (43)$$

где α_{ik} и β_{ik} — коэффициенты, медленные в масштабе времени ортогональности T . Подставляя (43) в (23), (24) и считая $g_{22} = g_{21} = 0$, после усреднения уравнений приходим к соотношениям

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{1}{2T} \{ \bar{g}_{11}^+ [\alpha \text{Sp}(\alpha\alpha^+) + \alpha\alpha^+ \alpha + \alpha \text{Sp}(\beta\beta^+) + \beta^*\beta^* \alpha] + \bar{g}_{12}^+ (\beta^* \alpha' \beta + \alpha \beta^+ \beta) \}, \quad (44)$$

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{1}{2T} \{ \bar{g}_{11}^- [\beta \text{Sp}(\alpha\alpha^+) + \alpha^* \alpha' \beta + \beta \text{Sp}(\beta\beta^+) + \beta\beta^* \beta] - \bar{g}_{12}^- (\alpha^* \beta' \alpha + \beta \alpha^+ \alpha) \}, \quad (45)$$

где $\bar{g}_{11}^\pm = \frac{2ik_\pm}{\epsilon_0 \gamma} g'_{11}^\pm$, $\bar{g}_{12}^\pm = \frac{2ik_\pm}{\epsilon_0 \gamma} g'_{12}^\pm$, $(\alpha')_{ik} = \alpha_{ki}$, $(\beta')_{ik} = \beta_{ki}$. Эти уравнения описывают как самовоздействие световых волн в инерционной кубической среде (члены, пропорциональные \bar{g}_{11}^\pm), так и эффект взаимодействия между встречными волнами (члены, пропорциональные \bar{g}_{12}^\pm).

При взаимодействии волн с разными частотами коэффициенты g_{11} и g_{12} мнимые. Известно, что в этом случае взаимодействие двух волн ($c_1^+ \mathcal{E}_1$ и $c_2^+ \mathcal{E}_2^*$) происходит лишь в условиях нестационарного процесса [1]. Однако если на среду падает волна, обращенная по отношению к одной из двух имеющихся волн, например, по отношению к $c_1^+ \mathcal{E}_1$, то уже в условиях стационарного процесса возможно усиление компоненты $c_2^- \mathcal{E}_2^*$ с возбуждением $c_2^+ \mathcal{E}_2$. При этом можно осуществить преобразование волны $c_1^+ \mathcal{E}$ в волну $c_2^- \mathcal{E}_2^*$ с заданной пространственной структурой.

В случае комбинационного взаимодействия коэффициент \bar{g}_{12}^\pm действителен, а собственным самовоздействием волн можно пренебречь ($\bar{g}_{11}^\pm = 0$). Тогда уравнения (44) и (45) примут вид

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{1}{2T} \bar{g}_{12}^+ (\beta^* \alpha' \beta + \alpha \beta^* \beta), \quad (46)$$

$$\frac{d\beta}{dz} = -\frac{1}{2T} \bar{g}_{12}^- (\alpha^* \beta' \alpha + \beta \alpha^+ \alpha). \quad (47)$$

При взаимодействии уже двух пар встречных волн ($N=2$) требуется решить 8 уравнений. Однако, когда в волнах E^+ и E^- содержится по две структуры \mathcal{E}_j и \mathcal{E}_j^* ($j=1, 2$), каждая из которых изменяется во времени с частотой, отличной от частот, характеризующих изменение других структур, матрицы β_{jk} и α_{jk} упрощаются:

$$\alpha = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & 0 \\ 0 & \beta_{22} \end{vmatrix}, \quad (48)$$

и задача взаимодействия волн описывается всего четырьмя уравнениями, совпадающими с уравнениями (30), (31), приведенными в разд. 2.3.

Однако если на одной из границ среды задана двухкомпонентная волна $c_1^+ \mathcal{E}_1 + c_2^+ \mathcal{E}_2$, а на другой границе задана волна со структурами \mathcal{E}_1^* и \mathcal{E}_2^* и зависимостью от времени, совпадающей с c_1^+ (или c_2^+), то в процессе взаимодействия волн все элементы матриц α и β становятся отличными от нуля. В частности, появляются составляющие $c_2^- \mathcal{E}_2^*$ и $c_2^- \mathcal{E}_1^*$ (или $c_1^- \mathcal{E}_1^*$ и $c_1^- \mathcal{E}_2^*$), имеющие временную структуру c_2 (или c_1), которой не было во встречной волне на границе среды. В результате может произойти ОВФ

многомодового многочастотного излучения в среде с большим временем релаксации. В более общем случае для осуществления этой процедуры и ОВФ излучения вида $\mathbf{E}^{+'} = \sum_{j=2}^N \mathbf{e}_j^+ \mathcal{E}_j$ требуется

иметь встречные волны $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^+ \mathcal{E}_1$ и $\mathbf{e}_1 \sum_{j=1}^N \mathbf{e}_j^- \mathcal{E}_j^*$. Тогда можно обратить волну $\mathbf{E}^{+'}$, даже если ее поляризация ортогональна поляризации \mathbf{e}_1 .

Перейдем теперь к исследованию взаимодействия волн, связанного с раскачкой высокочастотных возмущений $\Delta \varepsilon_{22,21}$ скалярного типа. Предположим, что $g_{11} = g_{12} = 0$ и операторы \hat{G}_{22}^{\pm} , \hat{G}_{21} записываются в виде

$$\hat{G}_{22}^{\pm} = \int_{-\infty}^t dt' \{ \exp[-\gamma_{22}(t-t')] \times \dots \},$$

$$\hat{G}_{21} = \int_{-\infty}^t dt' \{ \exp[-\gamma_{21}(t-t')] \times \dots \}.$$

Поскольку для раскачки высокочастотных возмущений $\Delta \varepsilon$ требуется, чтобы произведение волн имело фиксированную частоту, каждое из решений \mathbf{e}_j^{\pm} будем искать в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{e}_j^+ = \sum_{k=1}^N \alpha_{jk} \varphi_k + \sum_{k=1}^N \beta_{jk} \varphi_k^*, \quad (49)$$

$$\mathbf{e}_j^- = \sum_{k=1}^N \gamma_{jk} \varphi_k + \sum_{k=1}^N x_{jk} \varphi_k^*, \quad (50)$$

где функции α_{jk} , β_{jk} и γ_{jk} , x_{jk} задаются граничными условиями. Выделяя в явном виде φ и φ^* , мы предполагаем, что соответствующие наборы функций отличны от нуля на границе среды. Если хотя бы один из указанных наборов отсутствует, то резонансного возбуждения высокочастотных возмущений $\Delta \varepsilon_{22, 21}$ также не происходит.

Далее, полагая, что масштаб ортогональности T мал по сравнению с временем релаксации, и пренебрегая групповым рассогласованием, после подстановки (49) и (50) в (23) и (24) и усреднения полученных уравнений приходим к следующим соотношениям:

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{1}{2T} \{ \bar{g}_{22}^+ (\beta \alpha' \beta^* + \alpha \beta' \beta^*) + \bar{g}_{21}^+ x^* [\text{Sp}(\alpha x') + \text{Sp}(\beta \gamma')] + \bar{g}_{21}^+ (\alpha x' x^* + \beta \gamma' x^*) \}, \quad (51)$$

$$\frac{d\beta}{dz} = -\frac{1}{2T} \{ \bar{g}_{22}^+ (\beta \alpha' \alpha^* + \alpha \beta' \alpha^*) + \bar{g}_{21}^+ \gamma^* [\text{Sp}(\alpha x') + \text{Sp}(\beta \gamma')] + \bar{g}_{21}^+ (\alpha x' \gamma^* + \beta \gamma' \gamma^*) \}, \quad (52)$$

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{1}{2T} \{ \bar{g}_{22}^- (\alpha\gamma'x^* + \gamma x'x^*) + \bar{g}_{21}^+ \beta^* [\text{Sp}(\alpha x') + \text{Sp}(\beta\gamma')] + \bar{g}_{21}^- (\gamma\beta'\beta^* + x\gamma'\beta^*) \}, \quad (53)$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{1}{2T} \{ \bar{g}_{22}^- (x\gamma'\gamma^* + \gamma x'\alpha^*) + \bar{g}_{21}^- \alpha^* [\text{Sp}(\alpha x') + \text{Sp}(\beta\gamma')] + \bar{g}_{21}^- (\gamma\beta'\alpha^* + x\gamma'\alpha^*) \}. \quad (54)$$

При $N=1$ волны E^+ и E^- содержат по две компоненты. Взаимодействие этих волн, как легко видеть, описывается четырьмя уравнениями, совпадающими с уравнениями (32), (33) (в последних уравнениях из-за пренебрежения групповой расстройкой следует положить $\delta k=0$ и учесть, что при взаимодействии волн с временной структурой φ_k и φ_k^* отстройка от резонанса равна нулю).

3. ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВСТРЕЧНЫХ СВЕТОВЫХ ВОЛН

3.1. ОВФ слабых сигналов в условиях развитого ВР

В настоящем разделе рассмотрим возможности ОВФ слабой сигнальной волны в поле двух встречных плоских монохроматических волн $c_1^+ \mathcal{E}_1$ и $c_1^- \mathcal{E}_1^*$, разность частот которых совпадает с частотой собственных колебаний в среде Ω_0 .

Предположим, что подлежащая ОВФ сигнальная волна $c_2^- \mathcal{E}_2^*$ с частотой ω_- задана на границе $z=L$. Взаимодействие волн c_2^+ и c_2^- , описываемое уравнениями (26), (27) при $\delta k=0$, проанализируем в условиях, когда пренебрежимо мало влияние этих волн на c_1^+ и c_1^- . В этом случае в пренебрежении $|c_1^+| \gg |c_2^+|$, $|c_1^-| \gg |c_2^-|$ получаем линейную систему уравнений (26) и (27) для c_1^+ и c_2^- с переменными коэффициентами $c_1^+(z)$ и $c_1^-(z)$, изменение которых вдоль z определяется уравнениями (при $\delta\omega = \delta\Omega = 0$)

$$\frac{dc_1^+}{dz} = -\frac{\bar{g}_{12}^+}{2} A_{1111} |c_1^-|^2 c_1^+ (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2), \quad (55)$$

$$\frac{dc_1^-}{dz} = -\frac{\bar{g}_{12}^-}{2} A_{1111} |c_1^+|^2 c_1^- (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \quad (56)$$

с хорошо известным решением [15]. Решение для c_2^+ и c_2^- можно найти методом ВКБ [16]. В интересующем нас случае, когда сигнальная волна имеет стоксову частоту, т. е. $\bar{g}_{12}^+ = \bar{g}_{12}^- = \bar{g}_{12} > 0$, выражение для коэффициента преобразования по интенсивности $R = |R_s|^2 = |c_2^+(L)/c_2^-(L)|^2$ в ВКБ-приближении примет вид ($\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{e}_2$, $A_{1111} = 1$):

$$R = 4 \left| \frac{c_1^+(L)}{c_1^-(L)} \right|^2 \left[\frac{c_1^+(L) - c_1^+(0)}{c_1^+(L) + c_1^+(0)} \right]^2. \quad (57)$$

Зависимость коэффициента преобразования от отношения $|c_1^-(L)/c_1^+(0)|^2$ при $\bar{g}_{12} |c_1^+(0)|^2 L = 10$ показана на рис. 1 (кривая 1 построена по формуле (57), кривая 2 — результат численного

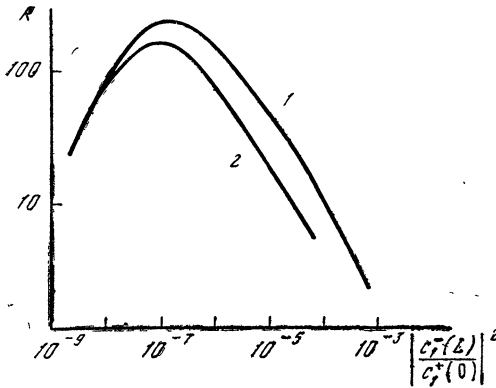


Рис. 1. Зависимость коэффициента преобразования $R = |c_2^-(L)/c_2^-(L)|^2$ от отношения $|c_1^-(L)/c_1^-(0)|^2$

интегрирования уравнений (26), (27)). При небольших значениях $c_1^-(L)$ коэффициент преобразования R почти линейно растет с увеличением $c_1^-(L)$. Когда $c_1^-(L)$ сравнивается с величиной $c_1^-(0)e^{-M/2}$ ($M = g |c_1^-(0)|^2 L$), начинают сказываться эффекты насыщения по полю накачки E^+ , и величина R падает с ростом $c_1^-(L)$. При $c_1^-(L) < c_1^-(0)e^{-M/2}$ накачка E^+ мало изменяется в процессе нелинейного взаимодействия, и коэффициент преобразования R согласно (57) примерно равен

$$R = \frac{1}{4} \left| \frac{c_1^-(0)}{c_1^-(0)} \right|^2 e^M. \quad (58)$$

3.2. Обратное ВР многомодового многочастотного излучения

Перейдем теперь к исследованию комбинационного взаимодействия встречных световых волн сложной пространственной и временной структуры с участием низкочастотных коротковолновых решеток. Этот процесс реализуется, например, при обратном ВР многомодового многочастотного излучения, описываемого уравнениями (46), (47).

Рассмотрим сначала ВР в приближении заданного поля накачки, предполагая, что встречная волна E^- на противоположной границе среды имеет очень малую интенсивность. В этом случае первые N членов базиса φ_j и \mathcal{E}_j удобно выбрать, исходя из разложения в ряд Карунена—Лоэва лишь одной интенсивной волны E^+ [17]. Остальную часть базиса φ_j и \mathcal{E}_j следует выбрать, исходя из разложения Карунена—Лоэва, не разложенной по первым N членам базиса части встречной волны на противоположной границе. Тогда в приближении заданного поля накачки $\alpha_{ik} = \delta_{ik} \alpha_{ii}(0)$, и уравнение (47) сводится к следующему:

$$\frac{d\beta_{ik}}{dz} = -\frac{1}{2T} \bar{g}_{12}^- (|\alpha_{ii}|^2 \beta_{ki} + |\alpha_{kk}|^2 \beta_{ik}). \quad (59)$$

Решение (59) записывается в виде

$$\beta_{ik} = (|\alpha_{kk}|^2 + |\alpha_{ii}|^2)^{-1} \left\{ [\beta_{ik}(L) |\alpha_{kk}|^2 + \beta_{ki}(L) |\alpha_{ii}|^2] \times \right. \\ \left. \times \exp \left[\bar{g}_{12}^- \frac{1}{2T} (|\alpha_{ii}|^2 + |\alpha_{kk}|^2) (L - z) \right] + \beta_{ik}(L) - \beta_{ki}(L) \right\}. \quad (60)$$

Из этого решения видно, что с максимальным инкрементом $\bar{g}_{12}^- |\alpha_{ii}|^{\max}$ нарастает коэффициент β_{ii} , стоящий перед амплитудой наиболее интенсивной гармоники $\varphi_i \mathcal{E}_i$. При $(|\alpha_{ii}|_{\max}^2 - |\alpha_{jj}|^2) \bar{g}_{12}^- L \gg \gg 1$ дискриминация инкрементов даже при относительно малом предэкспоненциальном множителе $\beta_{ii}^{\max}(L)$ приводит к усилению такой составляющей в стоковом излучении, которая воспроизводит (с обращением волнового фронта) наиболее интенсивную составляющую в разложении поля \mathbf{E}^+ по ортогональным функциям φ_j и \mathcal{E}_j .

В результате при достаточно большой дискриминации инкрементов с помощью ВРМБ можно выделить наиболее интенсивный сигнал в разложении сложной волны накачки на сумму простых компонент $\varphi_i \mathcal{E}_i$, даже если интенсивность этого сигнала мала по сравнению с суммой интенсивностей остальных компонент. Возможность выделения среди совокупности простых компонент, образующих сложный сигнал накачки, одной наиболее мощной компоненты можно определить как свойство нелинейной селекции. Интересно, что свойство селекции сохраняется и в том случае, когда выделенная компонента имеет относительно широкий частотный спектр и ее интенсивность в единице частотного интервала меньше, чем у других компонент. Если же одна выделенная по мощности составляющая в разложении поля \mathbf{E}^+ отсутствует и параметр $T^{-1} \bar{g}_{12}^- |\alpha_{ii}|^2 L$, входящий в показатель экспоненты, мало отличается для нескольких наиболее интенсивных компонент $\alpha_{ii} \varphi_i \mathcal{E}_i$, обратная стокова волна воспроизводит с комплексным сопряжением пространственную модуляцию \mathcal{E}_i^* каждой из этих компонент, однако соответствующие осциллограммы $c_i(\eta)$ не воспроизводят функции $\varphi_i(\eta)$, а состоят уже из совокупности всех осциллограмм, принадлежащих выделенным по мощности компонентам.

При достаточно большой интенсивности встречной волны приближение заданного поля нарушается, и при произвольной матрице β_{ik} на границе $z=L$ матрицу α_{ik} нельзя считать диагональной (исключения составляют лишь некоторые специальные случаи, например, когда $\beta_{ik}(L) = \delta_{ik} \beta_{ii}(L)$, $\alpha_{ik}(L) = \delta_{ik} \alpha_{ii}(L)$ и обе матрицы при произвольном z являются диагональными).

Однако и при произвольных матрицах α и β удается найти нелинейное решение матричных уравнений (46) и (47). Для отыскания такого решения положим $\bar{g}_{12}^+ = \bar{g}_{12}^-$ и отнормируем координату z на $g_{12}^+ / 2T$, затем домножим (46) слева на α^+ и сложим с аналогичным выражением для $(d\alpha^+ / dz)\alpha$. Подобную же процедуру проделаем для матрицы β . Тогда, складывая оба полученных выражения, находим матрицу первых интегралов

$$\alpha^+ \alpha - \beta^+ \beta = \hat{\Lambda}, \quad (61)$$

где $\hat{\Lambda} = \text{const}(z)$. Аналогично получаем еще одну матрицу первых интегралов

$$\beta' \alpha - \alpha' \beta = 2D, \quad (62)$$

где $D = \text{const}(z)$.

Введем обозначения

$$S = (\beta' \alpha + \alpha' \beta)/2, \quad F = (\alpha' \alpha + \beta' \beta)/2. \quad (63)$$

Тогда, используя (61) и (62), перейдем от (46) и (47) к следующим уравнениям:

$$\partial F / \partial z = 2F^2 + 2S^* S + D^* D - \Lambda^2 / 2, \quad (64)$$

$$\partial S / \partial z = 2SF + 2F' S + D\Lambda + \Lambda' D. \quad (65)$$

Выделим в явном виде действительную и мнимую части этих матриц и составим из них новые матрицы более высокого порядка:

$$\Phi = \begin{vmatrix} \text{Re } F & \text{Im } F \\ -\text{Im } F & \text{Re } F \end{vmatrix}, \quad (66)$$

$$H = \begin{vmatrix} \text{Re } S & \text{Im } S \\ \text{Im } S & -\text{Re } S \end{vmatrix}. \quad (67)$$

Для этих матриц из (64) и (65) получим

$$\partial \Phi / \partial z = 2\Phi^2 + 2H^2 - R, \quad (68)$$

$$\partial H / \partial z = 2H\Phi + 2\Phi H + Q, \quad (69)$$

где

$$R = \begin{vmatrix} -\text{Re}(DD^* - \Lambda^2/2) & \text{Im}(DD^* - \Lambda^2/2) \\ \text{Im}(DD^* - \Lambda^2/2) & -\text{Re}(DD^* - \Lambda^2/2) \end{vmatrix}, \quad (70)$$

$$Q = \begin{vmatrix} \text{Re}(D\Lambda + \Lambda'D') & \text{Im}(D\Lambda + \Lambda'D') \\ \text{Im}(D\Lambda + \Lambda'D') & -\text{Re}(D\Lambda + \Lambda'D') \end{vmatrix}. \quad (71)$$

Складывая (68) и (69) и вводя обозначение $K = H + \Phi$ и $G = R - Q$, приходим к матричному уравнению Риккати:

$$\partial K / \partial z = 2K^2 - G. \quad (72)$$

Для его решения воспользуемся вспомогательным уравнением

$$\partial W / \partial z = -2KW \quad (73)$$

для новой матрицы W . Выражая из (73) K и $\partial K / \partial z$ и подставляя их в (72), находим

$$\partial^2 W / \partial z^2 = 2GW. \quad (74)$$

Решение этого уравнения в матричном виде

$$W = \exp(\sqrt{2} G_1 z) W_1 + \exp(-\sqrt{2} G_1 z) W_2, \quad (75)$$

где $W_{1,2} = \text{const}(z)$, $G_1 = \sqrt{G}$. Воспользовавшись (73), находим

$$K = -G_1 [\exp(\sqrt{2} G_1 z) W_1 - \exp(-\sqrt{2} G_1 z) W_2] \times \\ \times [\exp(\sqrt{2} G_1 z) W_1 + \exp(-\sqrt{2} G_1 z) W_2]^{-1} / \sqrt{2}. \quad (76)$$

Для определения значений H и Φ составим еще уравнение для $L = K/2 - \Phi$:

$$\partial L / \partial z = -4L^2 + 2G. \quad (77)$$

Решая его аналогичным образом, получим

$$L = G_1 [\exp(2\sqrt{2} G_1 z) U_1 - \exp(-2\sqrt{2} G_1 z) U_2] \times \\ \times [\exp(2\sqrt{2} G_1 z) U_1 + \exp(-2\sqrt{2} G_1 z) U_2]^{-1} / 2, \quad (78)$$

где $U_{1,2} = \text{const}(z)$. По известным K и L находим

$$\Phi = K/2 - L, \quad H = K/2 + L, \quad (79)$$

т. е. определяем F и S . По этим значениям отыскиваем

$$\beta' \alpha = S + D, \quad \alpha' \beta = S - D, \quad \beta^+ \beta = F - \Lambda/2, \quad \alpha^+ \alpha = F + \Lambda/2. \quad (80)$$

Для окончательного решения задачи на основании (80) составляются системы трансцендентных алгебраических уравнений, которые при известных значениях $c_j^+(0)$ и $c_j^-(0)$ позволяют рассчитать величины $c_j^-(0)$ и $c_j^+(0)$.

3.3. Четырехволновое преобразование встречных световых волн

В этом разделе мы рассмотрим взаимодействие встречных волн с участием низкочастотных коротковолновых $\Delta \epsilon_{i2}$ и высокочастотных длинноволновых $\Delta \epsilon_{2i}$ возмущений $\Delta \epsilon$. Остановимся на уравнениях (30)–(33), описывающих преобразование волны $c_2^- \mathcal{E}_2^*$ в волну с обращенным фронтом $c_2^+ \mathcal{E}_2$ в поле двух встречных комплексно-сопряженных волн $c_1^+ \mathcal{E}_1$ и $c_1^- \mathcal{E}_1^*$. Выпишем сначала решение этих уравнений в приближении заданных значений c_1^+ и c_1^- , предполагая, что подлежащей ОВФ является достаточно слабая волна $c_2^-(L) \mathcal{E}_2^*(r_1, L)$, заданная на границе $z=L$, а волна $c_2^+ \mathcal{E}_2$ на границе $z=0$ отсутствует. Тогда амплитудный коэффициент преобразования в обращенную волну $R_a = c_2^+(L) / c_2^-(L)$ не зависит от падающей волны c_2^- .

Для комбинационного преобразования при $\delta \Omega = 0$, исходя из (30), (31), получаем

$$c_2^+(L) = \\ = c_2^-(L) \frac{c_1^+ c_1^- \{1 - \exp[(S_1 - S_2)L]\}}{S_1 - S_2 \exp[(S_1 - S_2)L] - (i\delta k + \bar{g}_{12} |c_1^-|^2) \{1 - \exp[(S_1 - S_2)L]\}}, \\ S_{1,2} = \frac{1}{2} [\bar{g}_{12} (|c_1^+|^2 + |c_1^-|^2) + i\delta k] \pm \frac{1}{2} [(\bar{g}_{12} |c_1^+|^2)^2 + (\bar{g}_{12} |c_1^-|^2)^2 + \\ + 2\bar{g}_{12}^2 |c_1^-|^2 |c_1^+|^2 + 2\bar{g}_{12} |c_1^+|^2 i\delta k - 2\bar{g}_{12} |c_1^-|^2 i\delta k - (\delta k)^2]^{1/2},$$

где $\bar{g}_{12}^+ = \bar{g}_{12}^- = \bar{g}_{12}$. В отсутствие волновой расстройки и при $\delta k < < \min(\bar{g}_{12} |c_1^+|^2, L^{-1})$ решение уравнений (30), (31) упрощается. Выпишем его для произвольных значений $\delta\Omega$ ($\bar{g}_{12}(\delta\Omega) = \bar{g}_{12}(1 + i\delta\Omega/\gamma)^{-1}$):

$$R_a = c_1^+ c_1^- \left[1 - \exp\left(\bar{g}_{12}(\delta\Omega) \frac{L}{2} |c_1^+|^2 + \bar{g}_{12}^*(\delta\Omega) \frac{L}{2} |c_1^-|^2\right) \right] \times \\ \times \left\{ \frac{\bar{g}_{12}(\delta\Omega)}{\bar{g}_{12}^*(\delta\Omega)} |c_1^+|^2 + |c_1^-|^2 \exp\left[\bar{g}_{12}(\delta\Omega) \frac{L}{2} |c_1^+|^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{g}_{12}^*(\delta\Omega) \frac{L}{2} |c_1^-|^2\right] \right\}^{-1}. \quad (81)$$

Как видно из (81), для $\delta\Omega \neq 0$ существуют значения $|c_1^-|^2$ и $|c_1^+|^2$, при которых $R_a \rightarrow \infty$. Обращение коэффициента преобразования в бесконечность связано с тем, что при отстройке от резонанса фоновая волна $\Delta \epsilon$ имеет такую фазу, что возбуждается не только парой волн c_1^+ и c_2^- , но и парой c_2^+ и c_1^- . В этом случае процесс обращения становится неустойчивым и в поле встречных волн c_1^+ и c_1^- генерируются обе волны c_2^+ и c_2^- , даже если их значения на границах $z=0$ и $z=L$ были равны нулю.

При $\delta\Omega=0$ коэффициент обращения всегда конечен, но может существенно превышать единицу. Так, при $\bar{g}_{12} > 0$ максимальное значение $R_{\max} = e^{M/2}/4$ достигается, когда $|c_1^-|^2 = |c_1^+|^2 e^{-M/2}$, а при $\bar{g}_{12} < 0$, когда $|c_1^-|^2 = |c_1^+|^2 e^{M/2}$, $M = \bar{g}_{12}(|c_1^-|^2 + |c_1^+|^2)L$.

В случае двухквантового поглощения в отсутствие волновой расстройки значение R_a равно

$$R_a = \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \bar{g}_{21}(\delta\Omega) c_1^+ c_1^- dz \right], \quad \bar{g}_{21}(\delta\Omega) = \bar{g}_{21}(1 - i\delta\Omega/\gamma)^{-1}. \quad (82)$$

Легко видеть, что при конечных значениях амплитуд волн c_1^+ и c_1^- величина R_a остается конечной. Это связано с тем, что вслед-

ствие двухквантового поглощения $\frac{1}{2} \int_0^L \bar{g}_{21}(\delta\Omega) c_1^+ c_1^- dz \rightarrow \frac{\pi}{2}$ лишь

асимптотически при увеличении значений c_1^+ и c_1^- на границах среды.

Для выяснения динамики процессов в условиях насыщения найдем нелинейные решения уравнения (30), (31) и (32), (33) при точном резонансе ($\delta\Omega=0$) и в отсутствие волновой расстройки ($\delta k=0$). Если в уравнениях (30), (31) и (32), (33) перейти к амплитудам $|c_j^\pm|$ и фазам ψ_j^\pm , то нетрудно заметить, что при условии $|c_2^\pm(0)|=0$ значение разности фаз $\Phi = \psi_1^+ + \psi_1^- - \psi_2^+ - \psi_2^-$ устанавливается равным π . При этом для амплитуд $|c_j^\pm|$ получаются замкнутые уравнения, которые имеют следующие первые интегралы (в случае двухквантового поглощения предполагается, что $A_{1111} = A_{2222} = 1$): для уравнений (30), (31)

$$|c_1^+|^2 - |c_2^-|^2 = J_1, \quad |c_1^-|^2 - |c_2^+|^2 = J_2, \quad |c_1^+ c_1^-| - |c_2^+ c_2^-| = J_3, \quad (83)$$

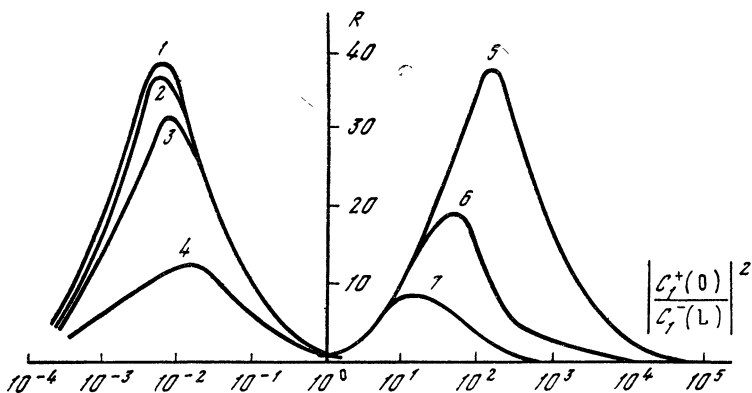
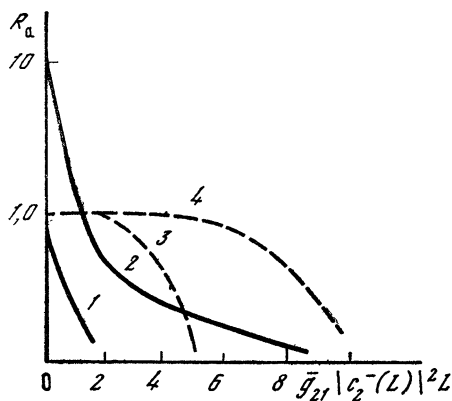


Рис. 2. Зависимость R от $|c_1^+(0)/c_1^-(L)|^2$

Кривые 1—4 — $\bar{g}_{12} |c_1^-(L)|^2 L = 10$ ($1 - c_2^-(L)/c_1^-(L) = 4,2 \cdot 10^{-4}$, $2 - 1,4 \cdot 10^{-2}$, $3 - 3,4 \cdot 10^{-2}$, $4 - 0,14$); кривые 5—7 — $\bar{g}_{12} |c_1^+(0)|^2 L = 10$ ($5 - c_2^-(L)/c_1^-(L) = 4,2 \cdot 10^{-4}$, $6 - 1,4 \cdot 10^{-2}$, $7 - 3,4 \cdot 10^{-2}$)

Рис. 3. Зависимость коэффициента R_a от мощности падающей волны $c_2^-(L)$ для $c_1^-(L) = c_1^+(0)$ (сплошные линии) и $c_1^-(L) = c_1^+(L)$ (пунктир) при различных значениях $M_{11}^+ = \bar{g}_{21} |c_1^+(0)|^2 L$

$i - M_{11}^+ = 1, 2, 3 - 10, 4 - 20$



для уравнений (32), (33)

$$|c_1^+|^2 + |c_1^-|^2 = J_1, \quad |c_2^+|^2 + |c_2^-|^2 = J_2, \quad |c_1^+ c_2^-| + |c_2^+ c_1^-| = J_3. \quad (84)$$

Используя их, получаем дифференциальные уравнения первого порядка, решение которых при отличных от нуля значениях $|c_1^+(0)|$, $|c_1^-(L)|$, $|c_2^-(L)|$ приводит к трансцендентному уравнению для $|c_2^+(0)|$. Для комбинационного преобразования это уравнение имеет вид

$$\frac{(b + \sqrt{b^2 - a^2}) \zeta(L) + a}{a \zeta(L) + b + \sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{(b + \sqrt{b^2 - a^2}) \zeta(0) + a}{a \zeta(0) + b + \sqrt{b^2 - a^2}} \times \exp\left(\frac{\bar{g}_{12} L}{2} \sqrt{b^2 - a^2}\right), \quad (85)$$

где $\zeta = c_2^-/c_1^+$. При $\bar{g}_{12} > 0$

$$a = -2 |c_1^+(L)|^2 |c_2^-(L)| [|c_1^+(L)|^2 - |c_2^-(L)|^2]^{-1},$$

$$b = |c_1^+(L)|^2 - |c_2^-(L)|^2 [|c_1^+(L)|^2 + |c_2^-(L)|^2] [|c_1^+(L)|^2 - |c_2^-(L)|^2]^{-1},$$

а для $\bar{g}_{12} < 0$

$$\begin{aligned} a &= -2 |c_1^+(0)| |c_2^-(0)| |c_1^-(0)|^2 [|c_1^+(0)|^2 - |c_2^-(0)|^2]^{-1}, \\ b &= |c_1^+(0)|^2 - |c_2^-(0)|^2 + |c_1^-(0)|^2 [|c_1^+(0)|^2 + \\ &\quad + |c_2^-(0)|^2] [|c_1^+(0)|^2 - |c_2^-(0)|^2]^{-1}. \end{aligned}$$

Для случая двухквантового поглощения

$$\frac{bR + a}{b + Ra} = \frac{a}{b} \exp\left(-\frac{\bar{g}_{21}L}{2} \sqrt{a^2 + b^2}\right), \quad (86)$$

где $a = -2 |c_1^-(0)| |c_1^+(0)|$, $b = |c_2^-(0)|^2 - |c_1^-(0)|^2$.

На рис. 2, 3 приведены значения коэффициентов отражения соответственно для комбинационного преобразования и двухквантового поглощения и различных значений мощности подлежащей ОВФ волны $c_2^-(L)$. Полученные решения в отсутствие волновой расстройки и при точном резонансе исчерпывают исследование стационарного режима соответствующих процессов четырехфотонного преобразования.

4. РОЛЬ ШУМОВ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВСТРЕЧНЫХ СВЕТОВЫХ ВОЛН

4.1. Шумовое излучение в поле встречных световых волн

Рассмотрим взаимодействие встречных световых волн с участием скалярных низкочастотных коротковолновых возмущений $\Delta \varepsilon_{12}$. Предположим, что на нелинейную среду падают только две встречные линейно-поляризованные монохроматические волны накачки $c_1^+ \mathcal{E}_1$ и $c_1^- \mathcal{E}_1^*$. Если пренебречь затравочными шумами, то в рассматриваемом нами приближении дважды укороченных уравнений волны другой пространственно-временной структуры возбуждаться не будут. Однако с учетом шумов картина изменится.

Остановимся в этой связи на вопросах возбуждения шумовых волн за счет усиления затравочного шумового излучения при его взаимодействии с волнами $c_1^+ \mathcal{E}_1$ и $c_1^- \mathcal{E}_1^*$. В приближении заданного поля этих волн на основании (15), (16) нетрудно получить уравнения, описывающие возбуждение шума. Линеаризуя уравнения (15), (16) при $g_{11} = g_{22} = g_{21} = 0$ и $g^{\alpha\beta\mu\nu} = g'_{12} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu}$, получим уравнения, описывающие при $g_0 > 0$ ($g_0 = ig'_{12}$) четырехволновое рассеяние накачек $c_1^+ \mathcal{E}_1$ и $c_1^- \mathcal{E}_1^*$ в стоксову E_m^- и антистоксову E_m^+ компоненты соответственно со средними частотами $\omega_+ - \Omega_0$ и $\omega_- + \Omega_0$, а при $g_0 < 0$ — в антистоксову E_m^- и стоксову E_m^+ компоненты с частотами $\omega_+ + \Omega_0$ и $\omega_- - \Omega_0$ (для простоты полагаем, что величины $v_+ = v_- = v$):

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_+\right) E_m^+ = -i \frac{k_+}{2\varepsilon_0} c_1^- \mathcal{E}_1^* \Delta \varepsilon_{12}, \quad (87)$$

$$\left(-\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}_-\right) E_m^- = i \frac{k_-}{2\varepsilon_0} c_1^+ \mathcal{E}_1 \Delta \varepsilon_{12}^*, \quad (88)$$

$$\hat{G}_{12}^{-1} \Delta \varepsilon_{12} = -2ig_0 (c_1^{-*} \varepsilon_1 E_m^+ \exp \{i[\omega_+ - (\omega_- + \Omega_0)]z/v\} + c_1^+ \varepsilon_1 E_m^{-*} \exp \{-i[\omega_+ - (\omega_- + \Omega_0)]z/v\}) + f(r_\perp, z, t). \quad (89)$$

Здесь в уравнение для $\Delta \varepsilon_{12}$ введен сторонний дельта-коррелированный источник $f(r_\perp, z, t)$. В интересующем нас случае равновесной среды его интенсивность определяется с помощью флюктуационно-диссипационной теоремы [18]. В уравнениях (87), (88) источники не введены, поскольку в оптически прозрачной среде ими можно пренебречь. Однако на границе такой среды необходимо учесть нулевые флюктуации полей $E_m^+(0, r_\perp)$ и $E_m^-(L, r_\perp)$.

В классическом подходе это можно корректно сделать, если из спектральных интенсивностей полей E_m^+ и E_m^- , определенных исходя из решений уравнений (87)–(89), вычесть спектральные интенсивности нулевых флюктуаций.

Таким образом, если параметр $\bar{g}_{12} = 2g_0 k / \gamma \varepsilon_0$, характеризующий эффективность нелинейного взаимодействия или длину среды L , устремить к нулю, то для спектральных интенсивностей полей E_m^+ и E_m^- получим ответ, также стремящийся к нулю.

Предположим, что $\omega_+ - \omega_- \gg \gamma$. В этом случае накачки $c_1^+ \varepsilon_1$ и $c_1^- \varepsilon_1^*$ между собой не взаимодействуют. Если эти волны имеют постоянную по сечению амплитуду и противоположные по знаку фазы, то после исключения $\Delta \varepsilon_{12}$ мы получим линейные уравнения. Для их решения можно воспользоваться стандартными методами.

Если оператор $\hat{G}_{12} = \int_{-\infty}^t dt' \{ \exp[-\gamma(t-t')] \times \dots \}$, то интенсивность

шума в единице телесного угла и единице спектрального интервала $dI_\Omega^\pm / d\theta_T (I_\Omega^\pm = \frac{v\varepsilon_0}{2\pi} |E_m^\pm|^2)$ будет равна (для простоты считаем, что расстройка групповых скоростей взаимодействующих волн пренебрежимо мала, т. е. характерная длина нелинейного взаимодействия много меньше обратной величины волновой расстройки $(2/v)(\omega_- - \omega_+ + \Omega_0)$):

$$\begin{aligned} \frac{dI_\Omega^\pm}{d\theta_T} &= \frac{k_\pm^2}{(2\pi)^3} \hbar \omega_+ \left\{ \left(\zeta + \frac{|c_1^-|^2}{|c_1^+|^2} \eta \right) \operatorname{sgn} \bar{g}_{12} (e^{M(\Omega)/2} - 1) - \right. \\ &\quad \left. - 4 \left[\frac{1}{2} + \bar{n}(\omega_+) \right] \left[e^{M(\Omega)/2} \cos \left(\frac{M(\Omega)}{2} \frac{\Omega}{\gamma} \right) - 1 \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{|c_1^-|^2}{|c_1^+|^2} e^{M(\Omega)} + 2e^{M(\Omega)/2} \cos \left[\frac{M(\Omega)}{2} \frac{\Omega}{\gamma} \right] + \frac{|c_1^+|^2}{|c_1^-|^2} \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$M(\Omega) = \frac{\bar{g}_{12}}{1 + \Omega^2/\gamma^2} (|c_1^+|^2 + |c_1^-|^2) L,$$

$$\zeta = \begin{cases} 1 + \bar{n}(\Omega_0) + \bar{n}(\omega_+), & \operatorname{Re} \bar{g}_{12} > 0, \\ \bar{n}(\Omega_0) - \bar{n}(\omega_+), & \operatorname{Re} \bar{g}_{12} < 0, \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} \bar{n}(\Omega_0) - \bar{n}(\omega_+), & \operatorname{Re} g > 0, \\ 1 + \bar{n}(\Omega_0) + \bar{n}(\omega_+), & \operatorname{Re} g < 0. \end{cases}$$

Интересно сравнить полученные значения с интенсивностью волн $E_2^+ = c_2^+ \mathcal{E}_2$ и $E_2^- = c_2^- \mathcal{E}_2^*$, которые возбуждаются в результате динамического взаимодействия, например, при отличном от нуля значении $E_2^-(L, r_\perp) = c_2^- \mathcal{E}_2^*$. Если предположить, что шумовое излучение вырезается линейным фильтром вблизи $\Omega - \Omega_0$ в полосе $\Delta\Omega$ и телесном угле $\Delta\theta_T$, то оказывается, что при $g_0 > 0$ величина интенсивной волны $c_2^+ \mathcal{E}_2$ будет больше интенсивности шума только в том случае, когда интенсивность входной волны $I_2(L) = \frac{v_{z0}}{2\pi} |c_2^-(L)|^2$ удовлетворяет условию

$$I_2(L) \gg I_{\min} = \frac{\hbar\omega}{(2\pi)^3} \left\{ 1 + \bar{n}(\Omega_0) + \bar{n}(\omega) + \frac{|c_1^-|^2}{|c_1^+|^2} [\bar{n}(\Omega_0) - \bar{n}(\omega)] \right\} \Delta\Omega \Delta\theta_T k^2. \quad (90)$$

Когда $|c_1^-|^2 / |c_1^+|^2 \ll 1$, условие (90) записывается в виде

$$I_2(L) \gg \frac{\hbar\omega}{(2\pi)^3} [1 + \bar{n}(\Omega_0) + \bar{n}(\omega)] \Delta\Omega \Delta\theta_T k^2. \quad (91)$$

В этом случае вклад собственных шумов среды и нулевых флуктуаций излучения в значение I_{\min} аддитивен.

Если теперь считать $g_0 < 0$, то условие, аналогичное (90), примет вид

$$I_2(L) \gg \frac{\hbar\omega}{(2\pi)^3} \left[(1 + \bar{n}(\Omega_0) + \bar{n}(\omega)) \left(1 + \frac{|c_1^-|^2}{|c_1^+|^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} + \bar{n}(\omega) \right) \right] \Delta\Omega \Delta\theta_T k^2. \quad (92)$$

Разумеется, постановка специального фильтра не обязательна, поскольку частотная полоса $\Delta\Omega$ и телесный угол (угол «видения») могут задаваться самой нелинейной средой.

Соотношения (91) и (92) означают, что при усилении слабых сигналов и отражении их в обратном направлении с ОВФ с использованием четырехволнового взаимодействия число квантов в падающей волне лимитируется снизу частотной полосой $\Delta\Omega$ и углом видения $\Delta\theta_T$ используемой системы обращения.

4.2. Шумы при обратном ВР излучения, пропущенного через предварительный усилитель

В предыдущем разделе было показано, что в поле двух встречных световых волн возможно возбуждение интенсивного шума. Этот шум ограничивает минимальную мощность сигнала, у которого можно обратить волновой фронт. Разумеется, абсолютную величину подобного шума можно уменьшить, уменьшая одну из

накачек s_1^+ или s_1^- . Однако при этом падает также коэффициент преобразования в полезную волну s_2^+ или s_2^- и ее относительная интенсивность на фоне шума остается прежней.

В то же время при исследовании возможностей ОВФ оптического излучения большой интерес представляет задача получения отраженной волны, отделенной от шумов устройства обращения. В связи с этим интересно рассмотреть другую возможность преобразования полезного сигнала с ОВФ, а именно ту, когда сигнал пропускается через предварительный усилитель, а затем обращает свой волновой фронт за счет собственного обратного ВР. Подобное усиление может быть достигнуто либо в обычных квантовых усилителях, либо в усилителях, основанных на параметрическом или комбинационном преобразованиях энергии накачки в полезный сигнал. Однако во всех усилителях подобного рода вместе с полезным сигналом нарастают шумы суперлюминесценции. Влияние этих шумов особенно заметно, когда мощность сигнала меньше или сравнима с мощностью суперлюминесценции. Если устройство ОВФ не способно отделить полезный сигнал от сопровождающих его шумов, то предельно допустимый уровень мощности сигнала лимитируется (снизу) шумами суперлюминесценции усилителя. Подобное ограничение может проявиться, например, когда ОВФ осуществляется с использованием вырожденного четырехфотонного взаимодействия волн в безынерционных кубических средах с электронной нелинейностью (стекло, вода и т. п.). Ясно, что указанное ограничение не позволяет использовать достаточно широкополосные усилители с большим углом видения. В то же время если устройство ОВФ способно отсеleccionировать полезный сигнал и в отраженном в обратном направлении излучении оно может существенно ослабить шумовую составляющую, то предельно допустимый уровень сигнала снижается. Одним из устройств, осуществляющих такую селекцию, является ВРМБ-зеркало. В данном разделе мы рассмотрим условия, при выполнении которых ВРМБ-зеркало может селективно отразить излучение с ОВФ.

Воспользуемся результатами разд. 3.2, в котором показано, что с помощью обратного ВР можно разделить один или несколько наиболее мощных сигналов в разложении сложной волны накачки на сумму простых компонент $\varphi_k \mathcal{E}_k$, даже если интенсивность этого сигнала мала по сравнению с суммарной интенсивностью остальных компонент. Если через \bar{N} обозначить характерное число наиболее мощных компонент в разложении (43), дискриминация между которыми незначительна, а $N_{\text{эф}}$ — число компонент, в которых сосредоточена основная доля энергии накачки ($\bar{N} \ll N_{\text{эф}}$), то нетрудно заметить, что селекция \bar{N} компонент возможна, если интенсивность всего излучения превышает интенсивность выделенных компонент не более чем в $\bar{N}/N_{\text{эф}}$ раз.

Например, в том случае, когда сигнал с $\bar{N}=1$ требуется отделить от некогерентного излучения с полосой $\Delta \omega$, число $N_{\text{эф}}$ на интервале времени γ^{-1} будет ограничено сверху значением $\Delta \omega / \gamma$ (предпола-

гается, что эта величина мала по сравнению с θ^2/θ_d^2 , где θ и $\theta_d = 1/k_+ \sqrt{S}$ — реальная и дифракционная расходимости некогерентного излучения). Отсюда следует, что полезный сигнал $\varphi_i^{\max} \mathcal{E}_i$ может быть отселектирован на фоне некогерентного излучения, если его интенсивность слабее интенсивности шума не более, чем в $\Delta\omega/\gamma$ раз. Так, например, если требуется отделить сигнал $\varphi_1 \mathcal{E}_1$ от некогерентного излучения суперлюминесценции, то в пределах, ограниченных условиями применимости полученных соотношений, минимальный уровень сигнала не зависит от ширины частотного спектра суперлюминесценции $\Delta\omega$ (с увеличением $\Delta\omega$ растет не только интенсивность некогерентного излучения, но и усиливаются селективные свойства ВРМБ-зеркала).

Интересно сравнить полученный результат с возможностями ОВФ широкополосного излучения при четырехфотонном взаимодействии. В последнем случае, как показано в предыдущем разделе, уровень шумов возрастает с увеличением полосы γ , величина которой должна быть больше ширины спектра $\Delta\omega_{+1}$ подлежащей ОВФ волны (речь идет о четырехфотонном процессе, когда временная структура подлежащей ОВФ волны заранее неизвестна и использование методов согласованного приема исключено). Если же $\Delta\omega_{+1} \gg \gamma$, то в четырехфотонных схемах уровень шума с ростом $\Delta\omega_{+1}$ не увеличивается, зато уменьшается интенсивность отраженного сигнала, что также ограничивает возможность его выделения на фоне собственных шумов устройства ОВФ. Аналогичный результат имеет место и при беспороговом ОВФ в условиях развитого ВР, возбуждаемого мощной лазерной волной. В этом случае независимое от накачки уширение спектра подлежащего ОВФ сигнала также снижает уровень интенсивности отраженного в обратном направлении излучения [49].

Селектирующие свойства ВРМБ-зеркала усиливаются при использовании вместо светопровода линзы и кюветы, расположенной в фокальной перетяжке выделенных \bar{N} -компонент и имеющей примерно такую же продольную длину. Если расходимость этих компонент θ_0 существенно меньше расходимости θ остальных волн $\varphi_k \mathcal{E}_k$, то интенсивность выделенных компонент в области, где расположена кювета, дополнительно возрастает в θ^2/θ_0^2 раз. Это приводит к тому, что допустимый верхний предел мощности некогерентного излучения, на фоне которого еще может быть отселектирован полезный сигнал, больше мощности этого сигнала уже в $\frac{\Delta\omega}{\gamma} \frac{\theta^2}{\theta_0^2}$ раз. Подобный предел накладывает уже принципиальные ограничения на возможность селекции полезного \bar{N} -компонентного сигнала, предварительно прошедшего через оптический квантовый усилитель. Действительно, рассмотрим выражение для мощности шумов суперлюминесценции

$$P_{\text{ш}} = \hbar\omega\Delta\omega [\bar{n}(\omega, T_0) + \bar{n}(\omega, -T_y) + 1] \frac{\theta_y^2}{\theta_d^2} (k-1)/8\pi^3, \quad (93)$$

где $\bar{n}(\omega, T) = [\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^{-1}$, ω — частота поля, совпадаю-

щая при резонансном усилении с частотой перехода, T_0 — температура теплового излучения, равная температуре окружающей среды, $T_y = \frac{\hbar\omega}{k_B} \ln \frac{N_1}{N_2}$ — отрицательная температура усилителя, определяемая населенностью нижнего N_1 и верхнего N_2 уровней рабочего перехода его активных молекул, k_B — постоянная Больцмана, θ_y — угол видения усилителя, $\Delta\omega$ — его полоса, θ_d — дифракционная расходимость, связанная с диаметром усилителя, k — коэффициент усиления. Учитывая, что мощность $P_{ш}$ может превысить мощность сигнала $P_0 = P_0^{вх} k$ не более чем в $\frac{\Delta\omega}{\gamma} \frac{\theta_y^2}{\theta_d^2}$ раз, находим, что ОВФ осуществимо, если только

$$P_0 \gg \frac{\theta_y^2}{\theta_d^2} \hbar\omega\Delta\omega \frac{\bar{N}}{N_{эф}} [\bar{n}(\omega, T_0) + \bar{n}(\omega, -T_y) + 1] / 8\pi^3. \quad (94)$$

Условие (94) выполняется, если только $\Delta\omega/\gamma \ll \theta_0/\theta_d$. Если учесть, что для суперлюминесценции $N_{эф} = \Delta\omega/\gamma$, то формулу (94) можно переписать в виде

$$N_0 \gg \gamma t \bar{N} [1 + \bar{n}(\omega, T_0) + \bar{n}(\omega, -T_y)] \theta_0^2 / \theta_d^2, \quad (95)$$

где $N_0 = \int \frac{P_0 dt}{\hbar\omega}$ — число квантов в полезном сигнале на входе

усилителя. При ОВФ некогерентного сигнала $E_0^+ = \sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_i \mathcal{E}_i$,

значение \bar{N} следует выбрать равным $\bar{N} \sim \Delta\omega_0^+/\gamma$, и правая часть (94) будет порядка $\Delta\omega_0^+ t \theta_0^2 / \theta_d^2$, что совпадает с числом степеней свободы в подлежащей ОВФ волне E_0^+ (предполагается, что $\bar{n} \ll 1$). Отсюда следует, что минимально необходимое число квантов в системе ОВФ, состоящей из предварительного усилителя и ВРМБ-зеркала, не зависит от частотной полосы усилителя и его угла видения, т. е. сочетание оптического усилителя и кюветы для ВР позволяет эффективно осуществлять ОВФ слабого оптического излучения с неизвестными заранее несущей частотой и углом прихода. Если подлежащий ОВФ сигнал является когерентным ($\bar{N}=1$), то при $\bar{n} \ll 1$ правая часть (95) минимальна и равна $\gamma t \theta_0^2 / \theta_d^2$. При длительности импульса $t \sim 1/\gamma$ находим, что число квантов в полезном сигнале лимитируется (в рамках условий применимости полученных выражений) характерным числом неоднородностей в поперечном сечении пучка θ_0^2 / θ_d^2 .

5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОМБИНАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

Экспериментальное исследование комбинационного взаимодействия встречных световых волн с участием скалярных низкочастотных коротковолновых возмущений $\Delta\varepsilon_{12}$ проводилось в условиях ВРМБ-преобразования стоксовой волны в обращенную

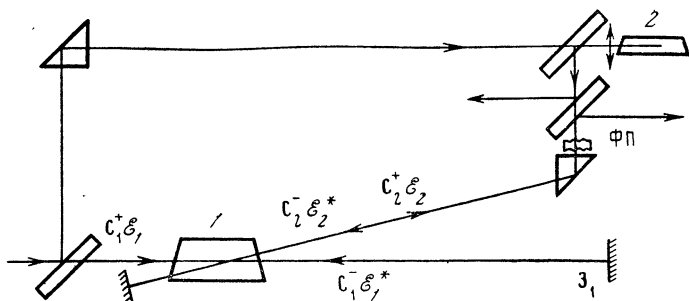


Рис. 4. Блок-схема экспериментальной установки

(антистоксову) компоненту в поле встречных волн накачек (рис. 4). Процесс ОВФ в этом случае происходил следующим образом. Волна накачки $c_1^+ \epsilon_1$ в кювете 1 рассеивалась в обращенную волну $c_2^- \epsilon_2^*$ на гиперзвуковой решетке, возбуждаемой накачкой $c_1^+ \epsilon_1$ и сигнальной волной $c_2^+ \epsilon_2$, имеющей по отношению к волне $c_1^+ \epsilon_1$ стоксов сдвиг, равный частоте гиперзвука. Накачкой $c_1^+ \epsilon_1$ служило излучение второй гармоники лазера на неодимовом стекле ($\lambda_1 = 0,53$ мкм, $\tau = 25$ нс, $d_1 = 3$ мм, $P_1 = 1 \div 10$ МВт). Встречная накачка $c_1^- \epsilon_1^*$ образовалась за счет отражения волны $c_1^+ \epsilon_1$ от зеркала Z_1 , в качестве которого использовалось либо плоское зеркало (в случае плоских волн накачки), либо ВРМБ-зеркало (линза, фокусирующая излучение в кювету с рассеивающей средой). Обе волны накачки пересекались в кювете 1 ($L = 5$ см) с ацетоном. Кроме того, ответвленная от накачки $c_1^+ \epsilon_1$ часть излучения фокусировалась в дополнительную кювету 2, также заполненную ацетоном, где возбуждалось ВРМБ. Стоксова волна, возбуждаемая в этой кювете и имеющая относительно волны накачки $c_1^+ \epsilon_1$ необходимый частотный сдвиг Ω_0 , заводилась в кювету 1 и служила подлежащей ОВФ волной $c_2^- \epsilon_2^*$. Для удобства регистрации эффекта ОВФ на пути волны $c_2^- \epsilon_2^*$ располагалась фазовая пластинка (ФП) (травленная в плавиковой кислоте стеклянная пластинка), увеличивающая расходимость пучка до $\theta = 1,2 \times 10^{-2}$. Экспериментально регистрировались распределение интенсивности в ближней зоне и угловой спектр обращенного (антистоксова) пучка, а также осциллограммы стоксова и антистоксова импульсов.

Эксперимент показал, что после прохождения через ФП излучение с ОВФ вновь становилось одномодовым и его угловой спектр повторял спектр исходного стоксова пучка. Эффективность процесса ОВФ зависела от волновой расстройки $\delta k = 4\pi \delta \nu$ (см $^{-1}$), где $\delta \nu = \nu_1 - \nu_2$ — разность ВРМБ-сдвига в кювете 1 и частичного сдвига при отражении волны $c_1^+ \epsilon_1$ от зеркала Z_1 , n — показатель преломления. При $\delta \nu = 0$ коэффициент преобразования R в обращенную волну был наибольшим. Однако при небольшом отличии частоты встречной накачки $c_1^- \epsilon_1^*$ от частоты подлежащей ОВФ волны $c_2^- \epsilon_2^*$ эффективность преобразования

сначала резко падала, а затем вновь возрастала. Такое изменение эффективности преобразования происходило в условиях, когда линейная расстройка $\delta k = 4\pi n \delta \nu$ была мала по сравнению с локальным инкрементом $g_{1,2} |c_1^+|^2$. Значительное уменьшение эффективности преобразования при $\delta \nu \approx 0,01 \text{ см}^{-1}$ связано с тем, что в этом случае отношение $\delta \omega / \gamma \approx 1$ и волновая расстройка (29) возрастала до величины, сравнимой со значением локального инкремента.

При плоских волнах накачки эффект ОВФ наблюдался, если волна $c_1^+ \mathcal{E}_1$ отражалась как плоским зеркалом, так и ВРМБ-зеркалами с различными частотными сдвигами. Однако если волну $c_1^+ \mathcal{E}_1$ пропустить через ФП, то в случае ее отражения обычным зеркалом эффект ОВФ пропадал (при достаточной малости масштаба поперечной модуляции накачки отраженный антистоксов сигнал вообще отсутствовал). Если же отражение осуществлялось ВРМБ-зеркалом так, что встречная накачка оказывалась комплексно-сопряженной к $c_1^+ \mathcal{E}_1$, ОВФ волны $c_2^- \mathcal{E}_2$ наблюдалось вполне отчетливо.

Таким образом, использование ВРМБ-зеркала позволяет осуществлять ОВФ при четырехволновых взаимодействиях в многомодовых пучках накачки. Этот результат представляет интерес при реализации такой схемы ОВФ в кубичной среде, когда внесение мелкомасштабной модуляции в пучок накачки подавляет эффект самофокусировки [20], что может повысить коэффициент отражения в обращенную волну.

Неоднородности в световые пучки могут вноситься не только ФП, но и самой средой, где происходит нелинейное взаимодействие. В эксперименте неоднородности показателя преломления создавались искусственно, путем нагрева кюветы 1. При этом конвекция жидкости приводила к сильным крупномасштабным искажениям в проходящем через нее пучке накачки. Если же аэтон нагрет до температуры кипения, то прохождение лазерного импульса вызывало, по-видимому в результате нагрева микровключений, его резкое вскипание во всем объеме. При этом наблюдалось мелкомасштабное рассеяние излучения накачки и увеличение расходимости пучка. Тем не менее при отражении накачки $c_1^+ \mathcal{E}_1$ ВРМБ-зеркалом в обоих случаях уверенно регистрировалось ОВФ стоксовой волны, хотя в ряде «вспышек» его качество незначительно ухудшалось. Таким образом, в данной схеме ОВФ может осуществляться не только с сильнонеоднородными пучками накачки, но и в оптически неоднородной среде.

Другие важные особенности исследуемого процесса — возможность управления параметрами излучения с ОВФ и получение коэффициента преобразования в обращенную волну, превышающего единицу. Так, например, формой и длительностью импульса, коэффициентом преобразования R можно управлять, изменяя соотношение интенсивностей волн накачек. В эксперименте импульсы накачек были задержаны один относительно другого, вследствие чего коэффициент преобразования изменялся во вре-

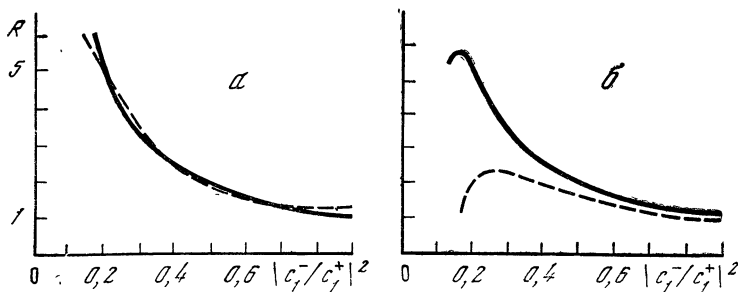


Рис. 5. Теоретические (сплошные линии) и экспериментальные (штриховые) кривые, характеризующие зависимость R от c_1^-/c_1^+ при фиксированном значении параметра $\bar{g}_{12} |c_1^+|^2 L$, равном в максимуме импульса 20 (а) и 13 (б)

мени и форма импульса обращенной волны существенно отличалась от падающей. Поскольку отношение $|c_1^-|/|c_1^+|$ менялось во времени, то это позволило измерять величину R ($|c_1^-|^2/|c_1^+|^2$) за один «выстрел» лазера. Измеренные экспериментальные зависимости R ($|c_1^-|^2/|c_1^+|^2$) для различных значений $\bar{g}_{12} |c_{1\max}^+|^2$ качественно хорошо согласуются с теоретическими графиками, построенными по формуле (81) для гауссовых импульсов накачки с соответствующими эксперименту длительностями и задержкой между ними. На рис. 5 в качестве примера приведена одна из этих зависимостей. Максимальный коэффициент преобразования, измеренный в эксперименте, составил $R=7$.

В заключение заметим, что при ОВФ в результате четырехфотонного взаимодействия возможно также управление другими параметрами обращенного излучения — поляризацией, длительностью и формой импульса, частотой несущей и т. п. Однако в экспериментальном плане эти особенности в значительной степени остаются еще малоисследованными (о некоторых аспектах этой проблемы см. [19]).

Авторы благодарны В. И. Таланову и И. А. Шерешевскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винецкий В. Л., Кухтарев Н. В., Одулов С. Г., Соскин М. С. — УФН, 1979, 129, № 1, с. 113—137.
2. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах/Под ред. В. И. Беспалова. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. 206 с.
3. Авербах В. С., Бетин А. А., Гапонов В. А. и др. — Изв. вузов. Радиофизика, 1978, 21, № 8, с. 1077.
4. Рабинович М. М., Розенблюм А. А. — Докл. АН СССР, 1971, 199, с. 575.
5. Фу К. Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин. М.: Наука, 1971. 256 с.
6. Кляцкин В. И., Татарский В. Н. — УФН, 1973, 110, с. 499.
7. Беспалов В. И., Бетин А. А., Пасманик Г. А. — Изв. вузов. Радиофизика, 1978, 21, с. 961.
8. Сидорович В. Г. — ЖТФ, 1976, 46, № 10, с. 2168.
9. Зельдович Б. Я., Шкунов В. В. — Квантовая электроника, 1978, 5, с. 36.
10. Найфе А. Х. Методы теории возмущений. М.: Мир, 1976.

11. Зельдович Б. Я., Поповичев В. В., Рагульский В. В., Файзуллоев Ф. С. — Письма в ЖЭТФ, 1972, 15, № 3, с. 160.
12. Зельдович Б. Я., Шкунов В. В. — Квантовая электроника, 1977, 4, с. 2353.
13. Бельдюгин И. М., Земсков Е. М. — Квантовая электроника, 1978, 5, № 9, с. 2055.
14. Кочемасов Г. Г., Николаев В. Д. — Квантовая электроника, 1979, 6, № 9, с. 1960.
15. Tang C. L. — J. Appl. Phys., 1966, 37, p. 2945.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. 702 с.
17. Беспалов В. И., Манишин В. Г., Пасманик Г. А. — ЖЭТФ, 1979, 77, № 5/11, с. 1756.
18. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1967. 307 с.
19. Ефимков В. Ф., Зубарев И. Г., Котов А. В. и др. — ЖЭТФ, 1979, 77, № 2/8, с. 526.
20. Пасманик Г. А. — ЖЭТФ, 1974, 66, № 2, с. 490.

УДК 621.371

ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ПОЛЕЙ В ФОКУСАХ И НА КАУСТИКАХ

Ю. А. КРАВЦОВ, Ю. И. ОРЛОВ

1. Оценки полей в областях неприменимости геометрической оптики. Необходимость оценивать напряженность электромагнитного поля в областях фокусировки возникает во многих физических и физико-технических исследованиях. Такие оценки особенно важны при решении вопроса о возможной величине тех или иных нелинейных эффектов, возникающих при концентрации поля: генерации гармоник, самовоздействии поля, возможности высокочастотного пробоя и т. д. Между тем существующие способы вычисления поля в фокальных областях¹ достаточно сложны и не всегда могут служить удобной основой для предварительных оценок и прикидок на начальных этапах исследования. В этих условиях могут оказаться полезными излагаемые ниже простые способы оценки полей в фокальных областях, опирающиеся на лучевые представления.

Разумеется, сама по себе геометрическая постановка вопроса об определении поля в фокальных областях лишена смысла: в приближении геометрической оптики амплитуда

$$A = A^0 [D(0)/D(t)]^{1/2} \quad (1)$$

¹ Имеются в виду немногочисленные точные решения, а также асимптотические методы, использующие специальные функции и интегральные представления поля (метод эталонных функций, метод канонического оператора и др.).

волнового поля $E = A \exp(ik_0\psi)$ на каустиках и в фокусах обращается в бесконечность. Здесь A^0 — начальное значение амплитуды на луче $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta, \tau)$; $D(\tau) = \partial(x, y, z)/\partial(\xi, \eta, \tau)$ — якобиан перехода от лучевых координат ξ, η, τ к декартовым, обращающийся в нуль на каустиках; τ — параметр вдоль луча; ξ, η — параметры, нумерующие лучи. Тем не менее разумные оценки поля на каустиках можно получить и на основе геометрикооптических представлений, если предварительно выделить области неприменимости геометрической оптики и воспользоваться дополнительными соображениями о сохранении потока энергии.

Предположим, что каустическая зона, т. е. область неприменимости геометрической оптики у каустики (рис. 1, область, обведенная штриховой линией), уже найдена (см. далее пп. 4, 5). Обозначим через $\Delta S_{\text{фок}}$ площадь лучевой трубки, входящей в область неприменимости, а через ΔS^0 — соответствующее начальное сечение лучевой трубки. Поле $E_{\text{фок}}$ в непосредственной окрестности каустики можно оценить, допустив, что начальный поток энергии $P^0 \approx n^0 |A^0|^2 \Delta S^0$ в лучевой трубке более или менее равномерно размазывается по каустической зоне:

$$n^0 |A^0|^2 \Delta S^0 \sim n |E_{\text{фок}}|^2 \Delta S_{\text{фок}}.$$

Отсюда получаем оценку

$$|E_{\text{фок}}| \sim |A^0| (n^0 \Delta S^0 / n \Delta S_{\text{фок}})^{1/2}. \quad (2)$$

К подобным результатам приводит и допущение о справедливости формулы (1) вплоть до границы каустической зоны

$$E_{\text{фок}} \sim A^0 [D(0)/D(\tau)]^{1/2} \Big|_{\text{гр. кауст. зоны}}. \quad (3)$$

Ниже проиллюстрируем эффективность оценок (2) и (3) на нескольких примерах, но предварительно введем понятие френелевского объема и сформулируем эвристические условия применимости геометрической оптики.

2. Френелевский объем. Введем понятие френелевского объема как области, ограниченной огибающей первых зон Френеля, «нанизанных» на луч. Для случая точечного источника в неоднородной среде такой объем показан на рис. 2. Уравнение границы френелевского объема имеет вид [1]

$$F(\mathbf{r}') \equiv |\psi_0 - \psi_{\mathbf{b}}| - \lambda/2 = 0, \quad (4)$$

где $\psi_0 - \psi_{\mathbf{b}}$ — разность эйконалов на опорном луче $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2$ и на ломаном виртуальном луче $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_2$. Если эйконал на луче $\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_b$ обозначить через $\psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$, то $\psi_0 = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, $\psi_{\mathbf{b}} = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') + \psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2)$, и тогда уравнение (4) можно записать иначе:

$$F(\mathbf{r}') = |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2)| - \lambda/2 = 0. \quad (5)$$

При фактическом нахождении френелевского объема можно воспользоваться малостью длины волны λ по сравнению со всеми характерными расстояниями. Это позволяет разложить эйконалы

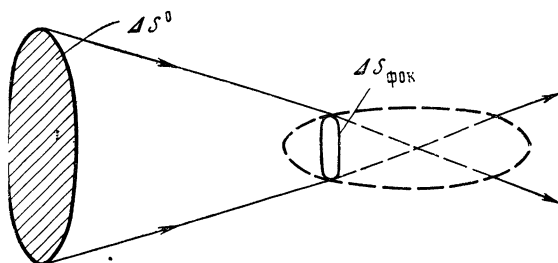


Рис. 1

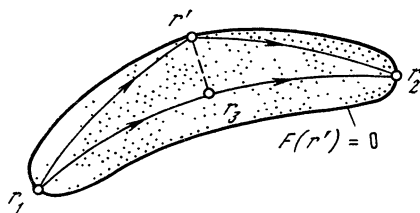


Рис. 2

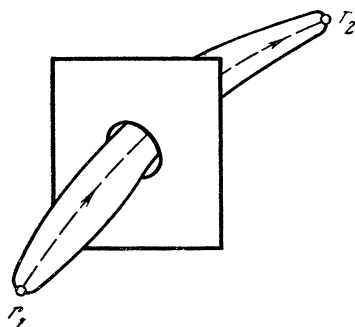


Рис. 3

в формуле (5) по отклонениям \mathbf{r}' от опорного луча. Пусть \mathbf{r}_3 — точка на опорном луче, ближайшая к \mathbf{r}' (см. рис. 2), а $\rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_3$. Ограничившись квадратичными членами разложения, из (5) получим

$$F(\mathbf{r}') \approx \frac{1}{2} |(\delta \nabla_3)^2 [\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)]| - \frac{\lambda}{2} = 0, \quad (6)$$

где ∇_3 — производная по \mathbf{r}_3 . Линейный член в (6) отсутствует в силу экстремальных свойств опорного луча. Если вторые производные в (6) обращаются в нуль, следует сохранить кубические члены и т. д.

В простейшем случае однородной среды с показателем преломления $n = \text{const}$ имеем $\psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = n |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$, и тогда (6) описывает эллипсоид вращения

$$n\rho^2 (1/R_1 + 1/R_2) = \lambda, \quad (7)$$

где $R_1 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|$, $R_2 = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|$. Поперечное сечение этого эллипсоида вращения представляет собой круг радиусом

$$a_{\text{фр}} = [\lambda R_1 R_2 / n (R_1 + R_2)]^{1/2}. \quad (8)$$

При удалении источника в бесконечность ($R_1 \rightarrow \infty$) из (8) получается френелевский радиус для плоской волны. Если обозначить $R_2 = z$, то

$$a_{\text{фр}} = \sqrt{\lambda z / n}. \quad (9)$$

Различные частные случаи построения френелевских объемов и их сечений, в том числе и для распространения импульсов в диспергирующих средах, разобраны в [1].

3. Эвристические условия применимости геометрической оптики. Френелевский объем выделяет область, в которой локализован луч, рассматриваемый как физический объект. В то время как математический образ луча — линия в пространстве — имеет бесконечно малую толщину, область локализации физического луча конечна: если мы хотим выделить данный луч при помощи отверстия в экране (рис. 3), то диаметр отверстия должен быть больше поперечника френелевского объема — в противном случае экран исказит поле, связанное с данным лучом.

Исходя из того, что френелевский объем определяет область пространства, которая формирует поле в заданной точке, можно сформулировать следующие эвристические критерии применимости геометрической оптики.

I. Параметры среды, а также параметры волны (амплитуда и градиент фазы) не должны заметно меняться в поперечном сечении френелевского объема.

II. Френелевские объемы лучей, проходящих в одну и ту же точку пространства, не должны существенно пересекаться друг с другом.

Согласно критерию I должны выполняться неравенства типа

$$a_{\text{фр}} |\nabla A| \ll |A|, \quad a_{\text{фр}} |\nabla n| \ll n, \quad (10)$$

ограничивающие скорость изменения различных параметров волны и среды, а критерий II исключает возможность двукратного (или многократного) учета вклада одних и тех же вторичных волн в результирующее поле.

4. Оценки ширины каустической зоны и амплитуды поля вблизи простой каустики. Когда точка наблюдения \mathbf{r} находится далеко от простой (неособой) каустики, френелевские объемы двух лучей, проходящих в точку \mathbf{r} , сильно разнесены в пространстве (рис. 4, а). Существенное пересечение френелевских объемов наступает тогда, когда один из лучей оказывается целиком внутри френелевского объема другого (рис. 4, б). Этому отвечает разность фаз $k_0 |\psi_1 - \psi_2| < \pi$, но если учесть еще дополнительный каустический сдвиг фазы $\delta S = -\pi/2$, то получим неравенство

$$k_0 |\psi_1 - \psi_2| < \pi/2, \quad \text{или} \quad |\psi_1 - \psi_2| < \lambda/4. \quad (11)$$

Простые геометрические построения показывают [2], что вблизи простой каустики

$$|\psi_1 - \psi_2| \approx \frac{4}{3} \beta^{1/2} |l_N|^{3/2}, \quad \beta = 2n_k^2 K_{\text{отн}}, \quad (12)$$

где l_N — расстояние (по нормали) от каустики, n_k — показатель преломления на каустике, а $|K_{\text{отн}}| = |K_{\pm} \pm K_k|$ — кривизна луча по отношению к каустике (знак «+» отвечает случаю, когда луч и каустика лежат по разные стороны от общей касательной).

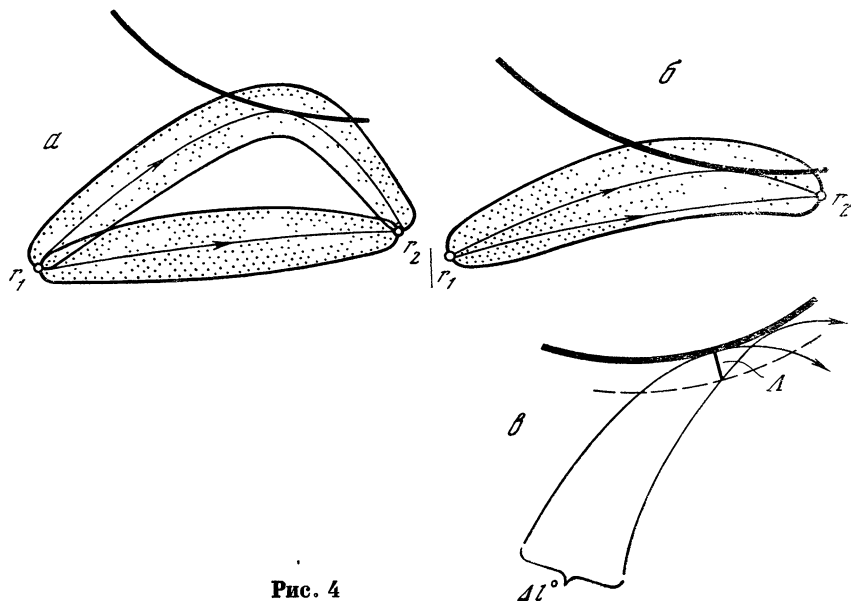


Рис. 4

Подставив (12) в (11), для ширины каустической зоны $\Lambda \equiv |L_N|$ получим

$$\Lambda \approx (3\pi/8k_0)^{2/3} \beta^{-1/3} = 1,11 k_0^{-2/3} \beta^{-1/3}. \quad (13)$$

Эта оценка лишь численным коэффициентом отличается от расстояния $\Lambda \approx 1,02k_0^{-2/3}\beta^{-1/3}$ между каустикой и первым максимумом функции Эйри, которая описывает поле вблизи простой каустики [2—4]; при этом формула (13) обобщает известное выражение из [3] для однородной среды с $n=1$ (в [3] $\beta = 2|K_x|$).

Если в двумерной задаче Δl^0 — ширина лучевой трубки на удалении от каустики (см. рис. 4, в), то по формуле (2) имеем

$$|E_{\text{фок}}| \sim |A^0| (n^0 \Delta l^0 / n_x \Lambda)^{1/2}. \quad (14)$$

Как показано в [1], такой же порядок величины $|E_{\text{фок}}|$ предсказывают и формулы каустической эйри-асимптотики для волнового поля [2—4].

5. Оценка поля в фокусе при наличии сферической аберрации. Если начальное поле в плоскости $z=0$ имеет квадратичную фазу, $u^0 = A^0 \exp(-ik_a \rho^2 / 2F)$, то за фокусом, кроме осевой каустики FF' , образуется каустический клюв (рис. 5). Элементарный расчет сечения френелевского объема плоскостью $z=0$ позволяет получить френелевский радиус $a_{\text{фр}} \approx (4F^3 \lambda)^{1/4}$.

Поперечный размер фокального пятна l_{\perp} можно оценить по формуле $l_{\perp} \sim \lambda F / b$ для идеальной линзы радиусом b , если заменить l эффективным радиусом $b_{\text{эф}} = a_{\text{фр}}$: $l_{\perp} \sim (\lambda^3 F / 4)^{1/4}$. Пола-

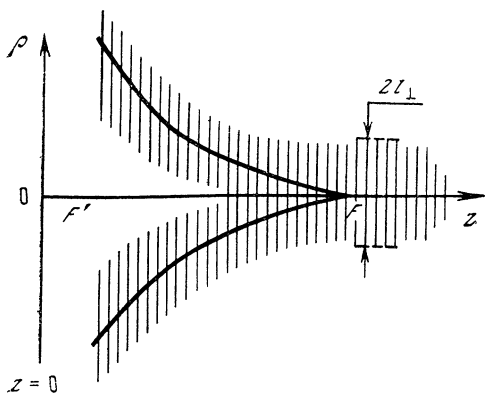


Рис. 5

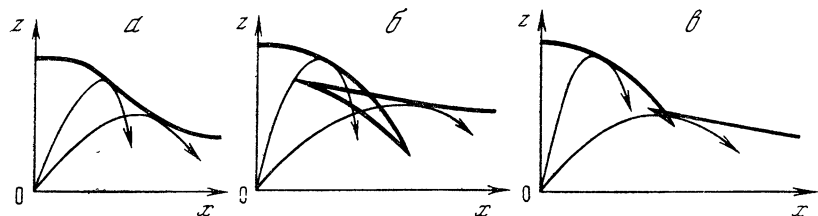


Рис. 6

тая в (2) $\Delta S^0 = \pi a_{\text{фр}}^2$ и $\Delta S = \pi l_{\perp}^2$, получаем оценку среднего поля в пятне:

$$|E_{\text{фок}}| \sim |A^0| (4F/\lambda)^{1/2}. \quad (15)$$

Это приближенное значение лишь в $\pi/\sqrt{2} \approx 2,2$ раза меньше точного значения поля в центре пятна. Дополнительные примеры аналогичных оценок приведены в [1].

6. Индексы фокусировки поля на каустиках. Вычисления показывают, что в случае простой каустики $\Delta l^0 \sim \sqrt{\Lambda}$, так что $E_{\text{фок}} \sim \Lambda^{-1/4} \sim k_0^{-1/6}$, или, если воспользоваться малым параметром геометрической оптики $\mu = 1/k_0 L$, $|E_{\text{фок}}| \approx |A^0| \mu^{-1/6}$ (здесь L — характерный масштаб задачи). В случае каустики общего вида

$$|E_{\text{фок}}| \sim |A^0| \mu^{-\sigma_{\text{ф}}}, \quad (16)$$

где $\sigma_{\text{ф}}$ — индекс фокусировки. Очевидно, величина $\sigma_{\text{ф}}$ тем больше, чем больше число или плотность лучей, фокусирующихся на каустике. Для простой каустики $\sigma_{\text{ф}}$ принимает значение $1/6$. В случае осесимметричных сферических aberrаций согласно (15) $\sigma_{\text{ф}} = 1/2$, а для двумерного кюва $\sigma_{\text{ф}} = 1/4$. Наибольшее значение $\sigma_{\text{ф}} = 1$ достигается в идеальном фокусе, а наименьшее ($\sigma_{\text{ф}} = 0$) соответствует отсутствию фокусировки. Значения $\sigma_{\text{ф}}$ рассчитаны в настоящее время для ряда типичных каустик и приведены, например, в [1, 5, 6].

Зная тип каустики, можно быстро оценивать порядок величины поля в ее особых точках. Например, в случае декаметровых радиоволн в ионосфере (масштаб неоднородности ионосферы $L \approx 100$ км, $\lambda = 20$ м) имеем $\mu = 1/kL = 3 \cdot 10^{-5}$. В окрестности простой каустики (рис. 6, а) поле усиливается по мощности примерно в $f = |E_{\text{фокал}}|^2 / |A^0|^2 \sim \mu^{-1/3} = 36$ раз; на клюве ($\sigma_{\text{ф}} = 1/4$, рис. 6, б) усиление составляет $f \approx 200$, а при стягивании каустической петли в точку ($\sigma_{\text{ф}} = 3/10$, рис. 6, в) усиление поднимается примерно до 500. Условия образования изображенных на рис. 6 каустик в плоскостной ионосфере обсуждались в работе [7].

7. Конкуренция дифракционных и нелинейных процессов в каустических и фокальных зонах. Описанные выше оценки поля полезны для определения областей, в которых могут развиваться существенно нелинейные процессы. В частности, эти оценки пригодны для выделения областей, в которых нелинейные процессы преобладают над дифракционными. Тем самым облегчается применение «поэтапного» метода расчета дифракции мощных волновых пучков, который предполагает раздельное рассмотрение этапа линейной дифракции и этапа нелинейных искажений волны вдоль лучевых трубок с последующей сшивкой решений, полученных на отдельных этапах [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. — В кн.: V Всесоюзная школа по дифракции и распространению радиоволн. Челябинск, 1979, с. 76.
2. Кравцов Ю. А., Грошев В. Я. — Изв. вузов. Радиофизика, 1968, 11, № 12, с. 1812.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
4. Кравцов Ю. А. — Изв. вузов. Радиофизика, 1964, 7, № 4, с. 664.
5. Арнольд В. И. — УМН, 1973, 28, № 5, с. 17.
6. Berry M. V. — Adv. Phys., 1976, 25, N 1, p. 1.
7. Орлов Ю. И. — Изв. вузов. Радиофизика, 1966, 9, № 3, с. 497.
8. Сутин А. М. — Акуст. журн., 1978, 24, № 4, с. 593.
9. Наугольных К. А., Островский Л. А., Сутин А. М. — Наст. сб., с. 166.

УДК 533.95 : 532.59 : 551.46

АДИАБАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН

А. Я. БАСОВИЧ, В. И. ТАЛАНОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена взаимодействию высокочастотных (ВЧ) и низкочастотных (НЧ) волн существенно разных пространственно-временных масштабов ($\Omega_i / \omega \ll 1$, $q/k \ll 1$), когда одна из волн (НЧ) модулирует параметры среды, определяющие распространение другой (ВЧ) волны, а та, в свою очередь, создает усред-

ненные радиационные напряжения в среде на частоте длинной волны.

Задачи о взаимодействии ВЧ- и НЧ-волн возникают в самых различных областях физики. Например, в изотропной плазме это взаимодействие ионно-звуковых и ленгмюровских волн [1—3], в магнитоактивной плазме — магнитозвуковых и различных ВЧ-волн (нижне-, верхнегибридных и др. [4, 5]); в океане — внутренних и поверхностных [6—14], гравитационных и капиллярных [15—17]; в твердом теле — акустических и оптических фононов и т. д.

В последнее время внимание к таким задачам возросло в связи с некоторыми интересными и практически важными эффектами, выявившимися в теории волн на воде и физике плазмы [18—22]. К их числу относятся, в частности, один из механизмов образования на поверхности океана так называемых «сликов», т. е. областей изменения поверхностного волнения, связанных с внутренними волнами, а также эффект сильной трансформации спектра ВЧ-волн низкочастотными, который при больших амплитудах НЧ-волн может привести к перекачке ВЧ-волн вверх по спектру в область затухания.

Говоря об адиабатическом взаимодействии НЧ- и ВЧ-волн, мы будем, как правило, подразумевать, что существует некоторая иерархия характерных времен описываемых процессов:

$$T_{вч} \ll T_{нч} \ll \tau_{вч} \ll \tau_{нч} \ll \tau_{пр}, \quad (1)$$

где $T_{вч}$, $T_{нч}$ — периоды ВЧ- и НЧ-процессов соответственно, $\tau_{вч}$ — характерное время изменения спектра (бунчировки) ВЧ-волн под действием НЧ-волн, $\tau_{нч} = \gamma L^{-1}$ — обратный декремент линейного затухания НЧ-волн из-за взаимодействия с ВЧ-волнами, $\tau_{пр}$ — времена изменения ВЧ- или НЧ-волн в результате каких-либо других, не рассматриваемых здесь процессов взаимодействия, например, модуляционной неустойчивости, рассеяния на частицах и т. п.

Первое из неравенств (1) позволяет использовать для ВЧ-волн ВКБ-приближение, за исключением, может быть, небольших пространственно-временных интервалов — каустик, когда адиабатический характер процесса нарушается и возникает необходимость согласования асимптотик ВЧ-процесса вблизи от них. В некоторых случаях (сильный НЧ-солитон) решение будет строиться без обращения к ВКБ-приближению. Мы увидим, что участки нарушения адиабатичности (точки поворота или блокировки) играют принципиальную роль в эффектах сильной трансформации ВЧ-спектра.

Для развиваемого далее подхода наиболее существенно третье неравенство (1), которое позволяет все рассмотрение провести в два этапа: первоначально определить трансформацию ВЧ-спектра в заданном поле НЧ-волны, а затем найти изменение параметров НЧ-волны. Наконец, последнее неравенство позволяет выделить

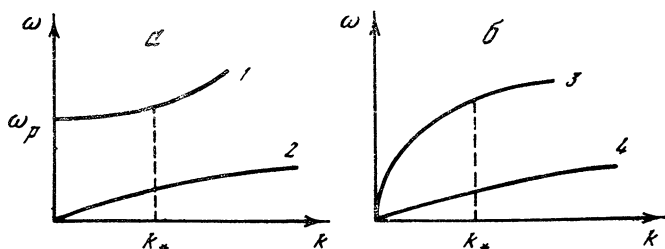


Рис. 1. Дисперсионные кривые ленгмюровских (1) и ионно-звуковых (2) волн в плазме (а) и поверхностных гравитационных (3) и внутренних волн (4) в стратифицированной жидкости (б)

рассматриваемый механизм взаимодействия ВЧ- и НЧ-волн на фоне остальных нелинейных процессов.

Эффективность любого распределенного взаимодействия волн зависит, как известно, от выполнения условий синхронизма. Для рассматриваемых здесь процессов взаимодействия ВЧ- и НЧ-волн в трехволновом приближении эти условия выглядят следующим образом:

$$k_1 - k_2 = q, \quad \omega_1 - \omega_2 = \Omega_i, \quad (2)$$

где ω , k — параметры ВЧ-, а Ω_i , q — НЧ-волны. При $\Omega_i \ll \omega$ второе из равенств (2) может быть записано в виде

$$V_g q = \Omega_i, \quad (3)$$

означающем равенство проекции групповой скорости ВЧ-волны V_g на направление распространения НЧ-волны ее фазовой скорости $C_i = (\Omega_i/q^2)q$. Учитывая, что НЧ-волны, как правило, недиспергирующие, условие (3) можно назвать групповым синхронизмом. В процессах адиабатического взаимодействия НЧ- волн и ВЧ- волн с широким спектром это условие играет принципиальную роль, определяя те участки спектра ВЧ-волн, которые могут подвергаться наибольшему изменению даже при относительно низком уровне НЧ-волн.

Групповой синхронизм наблюдается в самых различных случаях, даже при коллинеарном распространении ВЧ- и НЧ-волн. В таком синхронизме могут находиться ионно-звуковые и ленгмюровские волны в изотропной плазме (рис. 1, а), внутренние и поверхностные волны в стратифицированной жидкости (рис. 1, б), гравитационные и капиллярные поверхностные волны, волны разных типов в магнитоактивной плазме и т. д. При неколлинеарном взаимодействии число таких случаев значительно расширяется.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЧ-ВОЛН С ДЛИННЫМИ НЧ-ВОЛНАМИ

Взаимодействие длинной НЧ-волны с широким спектром ВЧ-волн может быть описано в рамках динамического уравнения для НЧ-волны и кинетического уравнения для числа квазичастиц

ВЧ-волн. Впервые такого рода подход применительно к НЧ-волнам малой амплитуды был развит в работе [1], где было показано, что изменение амплитуды НЧ-волны аналогично линейному затуханию волны Ландау на частицах с декрементом γ_L . С увеличением амплитуды НЧ-волны существенную роль начинают играть эффекты «размешивания» квазичастиц по квазиимпульсам (аналог нелинейного затухания Ландау). Именно этому случаю и будет уделено основное внимание.

Движение ВЧ волновых пакетов в поле НЧ-волны

Распространение пакетов ВЧ-волн в среде, параметры p и скорость V которой модулируются НЧ-волной, можно рассмотреть в рамках уравнений геометрической оптики

$$\mathbf{V}_g = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right)_{\mathbf{r}, t}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} \right)_{\mathbf{k}, t}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_{\mathbf{k}, \mathbf{r}}, \quad (4)$$

описывающих траектории движения пакетов — лучи ВЧ-поля с изменением вдоль них локальных значений волнового вектора \mathbf{k} и частоты ω . В этих уравнениях

$$\omega = \omega_0(\mathbf{k}, p(\mathbf{r}, t)) + \mathbf{kV}(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

— частота ВЧ-волны в лабораторной системе отсчета; $\omega_0(\mathbf{k}, p)$ — дисперсионная характеристика ВЧ-волны в неподвижной среде; V — скорость движения среды. Уравнения (4), (5) должны быть дополнены уравнением переноса плотности волнового действия [23].

В бегущей НЧ-волне параметры среды изменяются по закону

$$p = p(\mathbf{r} - \mathbf{C}_i t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r} - \mathbf{C}_i t). \quad (6)$$

Перейдем в систему отсчета C , движущуюся со скоростью НЧ-волны \mathbf{C}_i ,

$$\xi = \mathbf{r} - \mathbf{C}_i t, \quad t' = t.$$

Частота Ω ВЧ-волны в системе C ,

$$\Omega = \omega_0(\mathbf{k}, p(\xi)) + \mathbf{kV}(\xi) - \mathbf{kC}_i, \quad (7)$$

при постоянных параметрах НЧ-волны не зависит явно от времени. Уравнение (7) определяет изменение волнового вектора ВЧ-волны на лучах. Групповая скорость ВЧ-пакетов в системе C равна

$$\mathbf{V}_g|_{C_i} = \partial \Omega / \partial \mathbf{k} = \mathbf{V}_g^0 + \mathbf{V}(\xi) - \mathbf{C}_i,$$

где $\mathbf{V}_g^0 = \partial \omega_0 / \partial \mathbf{k}$. Вблизи точек группового синхронизма, где $\mathbf{V}_g^0 \mathbf{q} / q = \mathbf{C}_i$, даже малой модуляции скорости среды V или ее параметров $p = p_0 + \tilde{p}$ достаточно для возникновения точек поворота волновых пакетов (лучевых каустик): $\mathbf{V}_g|_{C_i} \cdot \mathbf{q} = 0$. В этих точках адиабатичность распространения ВЧ-волн нарушается. Характер и степень этих возмущений зависят в первую очередь от дисперсии ВЧ-волны.

Наиболее рельефную картину в этом плане представляет собой распространение гравитационно-капиллярных волн на поверхности неоднородного по скорости стационарного во времени потока несжимаемой жидкости [24—26]. Неоднородный поток можно рассматривать как частный случай НЧ-волны при $C_i \equiv 0$. Неоднородность потока на поверхности может быть связана с неровностями дна, внутренними стационарными движениями жидкости, внешними условиями. Дисперсионная характеристика поверхностных гравитационных волн на потоке, движущемся со скоростью U в лабораторной системе отсчета, запишется в виде

$$(\omega - kU)^2 = gk \text{ или } \omega - kU = \pm g(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}, \quad (8)$$

где k_x, k_y — компоненты волнового вектора.

На стационарном потоке уравнение (8) удобно проиллюстрировать картинками изочастот $\omega = \text{const} > 0$ на плоскости k_x, k_y , отвечающих различным значениям U (рис. 2). Стрелками на рис. 2 показано направление групповой скорости, отвечающее данному k . Индексом I обозначены ветви, соответствующие во втором уравнении (8) знаку (+), а II — знаку (−). В неподвижной жидкости существует только одна ветвь I' , соответствующая изотропному распространению ВЧ-волн. При движении жидкости (рис. 2, б) появляются новые ветви I'' и II , которые при $U \rightarrow 0$ удаляются на бесконечность. Ветви I' и II описывают прямые волны, для которых $kV_g > 0$, а ветвь I'' — обратные, с $kV_g < 0$. Волны, соответствующие ветви I'' , являются обратными вследствие сноса. В сопровождающей системе отсчета они, естественно, прямые. Различные ветви в сопровождающей системе отвечают различным частотам $\tilde{\omega} = \omega - kU$, причем на ветви II $\tilde{\omega} < 0$, и соответствующая волна в лабораторной системе отсчета должна рассматриваться как волна отрицательной энергии.

Рассмотрим эволюцию пакета на поверхности переменного потока, имеющего скорость $U = Ux_0$. Для простоты рассмотрим сначала волновой пакет, движущийся из области покоящейся жидкости прямо против течения $V_g < 0$ (рис. 3, а). Он достигает точки отражения (каустики), отвечающей касанию ветвей I' и I'' при $U = g/4\omega$ (см. рис. 2, в), и скатывается вниз по течению в виде пакета обратных волн I'' с $V_g > 0$. Остановка пакета получила название эффекта блокировки [9, 26]. В отраженном пакете гребни волн бегут против течения, в то время как их огибающая движется по течению. Волновое число при этом неограниченно растет с убыванием U . Это указывает на возможность трансформации спектра поверхностных волн на плавнонеоднородных течениях в область вязкой или нелинейной диссипации¹.

¹ С учетом капиллярности неограниченного нарастания волнового числа при $U \rightarrow 0$ не происходит, так как меняется вид изочастот в области больших k [26].

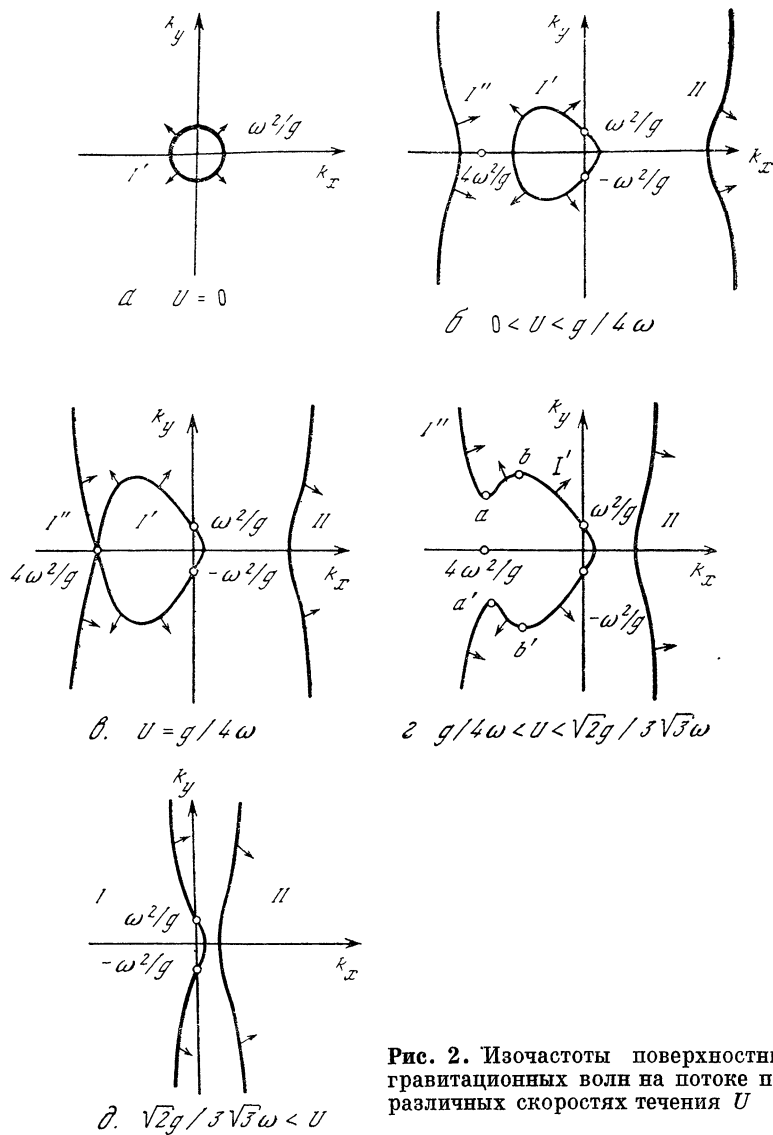


Рис. 2. Изочастоты поверхностных гравитационных волн на потоке при различных скоростях течения U

Образование лучевых каустик на неоднородном потоке более наглядно можно проследить при наклонном распространении пакетов гравитационных волн ($k_y = \text{const}$). Точки поворота лучей определяются теперь условием $V_{gx} = 0$ при $V_{gy} \neq 0$ (точки a, a' и b, b' на рис. 2, г). В зависимости от начальных условий на пути пакета могут возникать одна или две каустики. Например, пакет волн I' с $k_y > \omega^2/g$ и $V_{gx} > 0$, двигаясь по неоднородному потоку с $U'_x < 0$, сначала отражается от каустики в точке b , бежит против

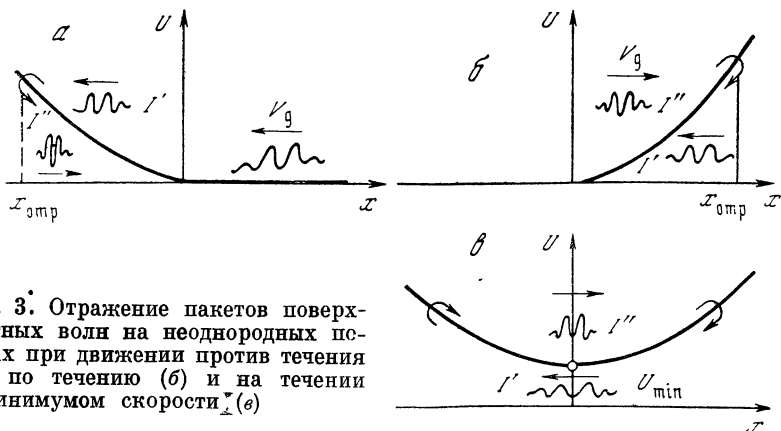


Рис. 3. Отражение пакетов поверхностных волн на неоднородных потоках при движении против течения (а), по течению (б) и на течении с минимумом скорости (в)

потока до точки a , а затем скатывается вниз в виде пакета обратных волн ветви I'' .

При распространении волнового пакета по течению с нарастающей скоростью $U_x' > 0$ эффект отражения не возникает, если первоначально возбуждены волны ветвей I' или II . Однако если при некотором значении U существует пакет волн типа I'' , то он достигнет точки поворота и отразится в виде пакета волн ветви I' (рис. 3, б). Если течение немонотонно и имеет минимум скорости $U_{\min} > 0$, то в окрестности минимума пакет может находиться в запертом состоянии (рис. 3, в).

Проведенное рассмотрение легко обобщается на случай, когда течение на поверхности жидкости создается бегущей волной параметра, например внутренней волной. В системе S при этом получим стационарное течение

$$U_c = -C_i + V(\xi),$$

к которому можно применить описанный выше подход заменой $U \rightarrow U_c$. В частности, точкам поворота будет отвечать условие $V_g + U_c = 0$, которое при малой амплитуде НЧ-волны ($|V| \ll C_i$) может быть выполнено лишь в окрестности точек группового синхронизма поверхностных и внутренних волн.

Аналогия движения ВЧ-пакетов в поле НЧ-волны с движением заряженных частиц

Чтобы изучить движение ВЧ-пакетов в поле длинной НЧ-волны в общем случае, вернемся к дисперсионному уравнению (7), которое для простоты возьмем одномерным ($k \parallel C_i \parallel V$):

$$\Omega = \omega_0(k, p(\xi)) + kV(\xi) - kC_i. \quad (9)$$

Из уравнений движения волновых пакетов в системе C

$$V_g = \frac{d\xi}{dt} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial k} \right)_{\xi, t}, \quad \frac{dk}{dt} = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right)_{k, t}$$

видно, что Ω играет роль гамильтониана квазичастицы, а ξ и k образуют пару канонически сопряженных переменных. Из (9) ясно, что при малых возмущениях параметров среды \tilde{p} и скорости среды V наибольшие изменения волнового числа пакета будут происходить в окрестности точек $k = k_*$, где $(\partial \Omega / \partial k)_{p=p_0, V=0} = \partial \omega_0 / \partial k - C_i = 0$, т. е. точек группового синхронизма. Движение пакетов с $k \approx k_*$ в небольшой окрестности этих точек можно описать, разложив $\Omega(k, p, V)$ в ряд по $\tilde{k} = k - k_*$, \tilde{p} и V и ограничившись лишь главными членами:

$$\Omega = \Omega^* + \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial p} \right)_{k=k_*} \tilde{p} + k_* V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k^2} \right)_{k=k_*} \tilde{k}^2 + V \tilde{k} + \dots,$$

где $\Omega^* = \omega_0(k_*, p_0) - k_* C_i$.

Если в данном разложении члены, содержащие \tilde{p} , V , \tilde{k}^2 , считать одного порядка малости, то слагаемое $V \tilde{k}$, имеющее порядок \tilde{k}^3 , как и все более высокого порядка, можно отбросить. Если изменение параметров среды подчиняется уравнению непрерывности, то величину \tilde{p} можно связать с V соотношением $\tilde{p} = (p_0 / C_i) V$. В дальнейшем удобно ввести обозначение глубины модуляции параметра $\beta(\xi) = \tilde{p} / p_0 = V / C_i$, совпадающее с числом Маха волны параметра. Для длинных НЧ-волн, рассматриваемых в данном параграфе, $\beta(\xi) \ll 1$.

Таким образом, в окрестности точки группового синхронизма

$$\Omega = \Omega^* + s \beta(\xi) + \tilde{k}^2 / 2m^*, \quad (10)$$

где величину $s = \left[\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial p} \right)_{k=k_*} p_0 + k_* C_i \right]$ можно рассматривать как эффективный «заряд» квазичастицы, $m^* = (\partial^2 \omega_0 / \partial k^2)_{k=k_*}^{-1}$ — как ее «массу», а $\beta(\xi)$ — как потенциал внешнего поля.

В дальнейшем мы ограничимся в основном рассмотрением двух примеров взаимодействия: ВЧ ленгмюровских с НЧ ионно-звуковыми волнами в плазме и ВЧ поверхностных волн с НЧ внутренними в стратифицированной жидкости.

Для ленгмюровских волн

$$\omega_0(k) = \omega_p(n) + \frac{3}{2} \frac{V_T^2}{\omega_p} k^2, \quad s = \omega_p(n_0) / 2 + k_* C_i \approx \omega_p(n_0) / 2, \\ m^* = \omega_p(n_0) / 3V_T > 0,$$

где $\omega_p(n)$ — плазменная частота, зависящая от концентрации плазмы n ; n_0 — невозмущенная концентрация; V_T — тепловая скорость электронов.

Для поверхностных волн

$$\omega_0(k) = \sqrt{gk}, \quad s = k_* C_i, \quad m^* = -C_i / 2k_* < 0.$$

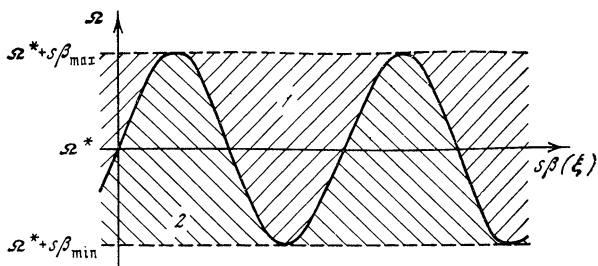


Рис. 4. Области локализации ВЧ волновых пакетов в поле периодической НЧ-волны при $m^* > 0$ (1) и $m^* < 0$ (2)

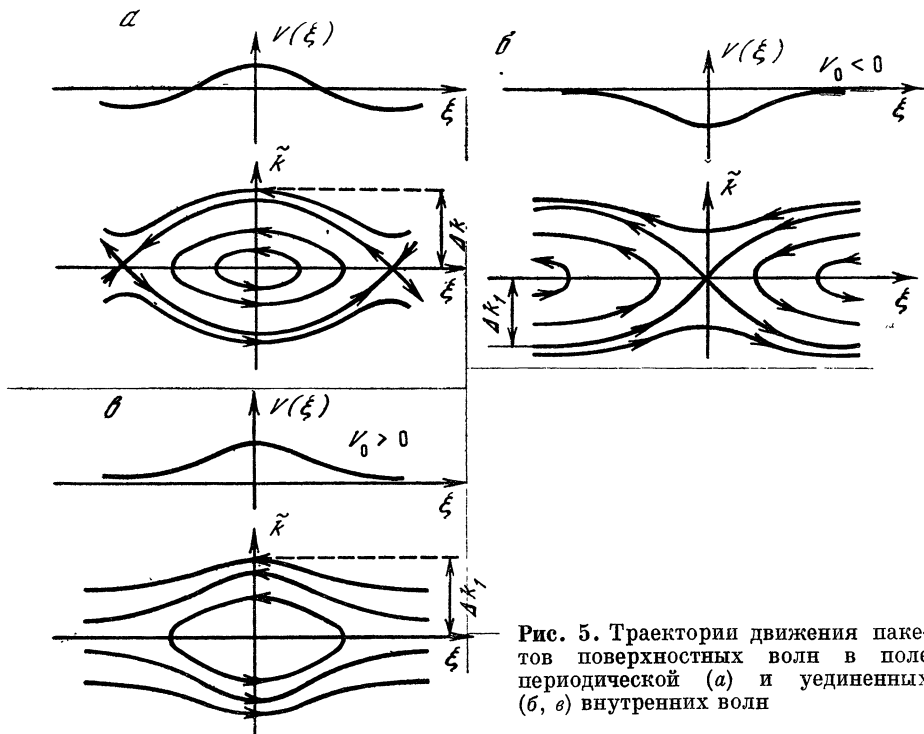


Рис. 5. Траектории движения пакетов поверхностных волн в поле периодической (а) и уединенных (б, в) внутренних волн

Оба случая различаются знаками «массы» квазичастиц. Ленгмюровские пакеты — плазмоны, имеющие $m^* > 0$, — движутся в области $\Omega - \Omega^* > s\beta(\xi)$, а гравитационные волны ($m^* < 0$) — в области $\Omega - \Omega^* < s\beta(\xi)$, как это схематически показано на рис. 4. При немонотонном, например, синусоидальном рельефе $\beta(\xi)$ наряду с «пролетными» возможны и «захваченные» квазичастицы, причем плазмоны локализуются около минимумов потенциала $\beta(\xi)$, а поверхностные волны — около максимумов.

Движение волновых пакетов в заданном поле НЧ-волны удобно изображать, как и в случае частиц, на фазовой плоскости, исполь-

зую интеграл движения (10). На рис. 5 приведены такие фазовые портреты для периодической ($\beta = \beta_0 \cos q\xi$) и уединенных ($\beta = \beta_0 \text{ch}^{-2}(\xi/\Delta)$) НЧ-волн разной полярности. Для построения выбран случай поверхностных волн ($m^* < 0$), так как при этом внутренние уединенные волны могут иметь разную полярность в зависимости от стратификации жидкости [27] ¹.

Фазовые траектории волновых пакетов в поле гармонической НЧ-волны имеют хорошо известный вид «кошачьих глаз» Кельвина. Замкнутые траектории внутри сепаратрисы отвечают захваченным ВЧ-волнам. Вне сепаратрисы находятся незахваченные волновые пакеты. Параметры траекторий на плоскости ξ, \tilde{k} определяются по аналогии с движением частиц. Интервал захвата Δk (рис. 5, а) равен

$$\Delta k = 2 \sqrt{sm^* \beta_0}, \quad (11)$$

а характерное время движения по замкнутым траекториям

$$\tau = \frac{TC_\xi}{2\pi} \sqrt{\frac{m^*}{s\beta_0}}, \quad (12)$$

где T — период НЧ-волны. Если НЧ-волна является уединенной, то возможно как отражение (рис. 5, б), так и захват пакетов (рис. 5, в) в зависимости от полярности ($\text{sign } \beta_0$) волны параметра. При этом для τ_1 и Δk_1 имеют место соотношения, аналогичные (11) и (12) [19].

Проведенное рассмотрение позволяет перейти к определению спектров ВЧ-волн в поле НЧ-волны и затем к решению самосоглазованной задачи адиабатического взаимодействия волн.

Изменение спектра ВЧ-волн и параметров НЧ-волн

Система связанных уравнений, описывающих взаимодействие длинной НЧ-волны со случайным полем коротких ВЧ-волн (рассматриваемых в приближении хаотических фаз) имеет вид

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \dot{k} \frac{\partial N_k}{\partial k} = S, \quad (13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (C_l + fV) \frac{\partial V}{\partial x} + l \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (14)$$

Уравнение (13) — кинетическое уравнение для ВЧ-волн [28]. Величина $N_k(x, k, t)$ — число квазичастиц (плотность волнового действия), определяемое для ленгмюровских волн как $N_k = |E_k(x, k, t)|^2 / 8\pi \omega_p$ [1], где $E_k(x, k, t)$ — спектральная амплитуда поля, а для поверхностных волн — как $N_k = W(x, k, t) /$

¹ В плазме ионно-звуковые солитоны имеют лишь положительную полярность.

$/\omega_0(x, k, t)$ [19]. Амплитудный спектр поверхностного волнения W определяется соотношением

$$W(x, k, t) = \frac{1}{2} \rho g \frac{1}{2\pi} \int B(r, x, t) e^{-ikr} dr,$$

$B(r, x, t) = \langle \eta(x-r/2, t) \eta(x+r/2, t) \rangle$ — функция корреляции возвышений взволнованной поверхности η . Интеграл столкновений S в уравнении (13) отвечает нелинейному взаимодействию спектральных компонент ВЧ-волн, а также взаимодействию их с частицами в случае плазмонов и действию ветра и вязкости в случае поверхностных волн. В дальнейшем, считая интенсивность ВЧ-волн и соответственно их взаимодействие достаточно малым и рассматривая участки спектра, где влияние прочих факторов невелико, положим $S=0$.

Уравнение (14) для НЧ-волн учитывает как их собственную нелинейность и дисперсию, так и силу, действующую со стороны ВЧ-волн, которая в плазменной задаче является стрикционной силой с высокочастотным потенциалом $\Phi = \int_k N_k dk$, а в задаче взаимодействия волн в стратифицированной жидкости — радиационным напряжением $\Phi = \int_k k N_k dk$.

Приведенное уравнение (14) есть неоднородное уравнение КДВ. Для ионно-звуковой волны параметры, входящие в (14), равны

$$C_l = c_s, \quad f = 1, \quad l = \frac{1}{2} c_s D^2, \quad \alpha = -s/\rho_0,$$

где c_s ($\times T_e/m_i$)^{1/2} — скорость распространения ионно-звуковых возмущений, D — радиус Дебая, $\rho_0 = n_0 m_i$ — невозмущенная плотность плазмы, m_i — масса ионов. Поскольку уравнение КДВ справедливо при $|V/C_l| \ll 1$ (рассмотрение проводится именно в этом приближении), то скорость НЧ-волны C_l мало отличается от C_l , так что можно считать $\beta = V/C_l$. В случае плазмы $\beta = V/c_s$, где V — скорость движения частиц в ионно-звуковой волне.

Уравнение (14) для внутренних волн получено в модели двухслойной стратификации жидкости (глубина жидкости равна $h_1 + h_2$, глубина залегания скачка плотности $\delta\rho = h_1$) и справедливо при длинах волн, много больших ($h_1 + h_2$). Параметры, входящие в (14), равны при этом

$$C_l = C_{\text{int}} = \left(\frac{\delta\rho g}{\rho} \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \right)^{1/2}, \quad f = -\frac{3}{2} \frac{h_1 - h_2}{h_2},$$

$$l = (C_{\text{int}}/6) h_1 h_2, \quad \alpha = -C_{\text{int}} h_2 / \rho h_1 (h_1 + h_2).$$

Переменная V есть скорость течения, создаваемого на поверхности внутренней волной. Учет нелинейных членов в уравнении для НЧ-волн позволяет рассмотреть взаимодействие ВЧ-волн как с линейными (гармоническими), так и с нелинейными НЧ-волнами (например, солитонами).

Система уравнений (13) и (14) рассматривалась впервые (без учета нелинейности НЧ-волн) в работе [1] применительно к плазме. Как отмечалось выше, в [1] изучалось затухание ионно-звуковой волны в газе плазмонов и был найден декремент затухания НЧ-волны γ_L . Впоследствии аналогичный подход развивался применительно к взаимодействию поверхностных и внутренних волн в жидкости [11, 12]. Однако в упомянутых работах не учитывался захват ВЧ-волн НЧ-волнами, что справедливо лишь при выполнении неравенства

$$\gamma_L \tau \gg 1. \quad (15)$$

Такой подход полностью аналогичен применяемому к задаче о затухании волны на частицах (затухание Ландау). Декремент γ_L определяется производной функции распределения плазмонов при значении волнового числа, равном резонансному: $\gamma_L \sim (\partial N_k / \partial k)_{k=k_*}$. При выполнении условия (15) за время затухания ионно-звуковой волны функция распределения плазмонов меняется мало.

Обратная ситуация возможна при

$$\gamma_L \tau \ll 1. \quad (16)$$

Это неравенство может выполняться при достаточно больших амплитудах НЧ-волн. Соответствующие оценки подтверждают такую возможность. В этом случае становятся существенными эффекты, связанные с трансформацией спектра квазичастиц. Задача взаимодействия ВЧ- и НЧ-волн становится аналогичной задаче о нелинейном затухании Ландау, рассмотренной для периодических волн в [29, 30], а для уединенных — в [31, 32]. При решении задачи первоначально надо определить движение волновых пакетов ВЧ-волны и соответственно трансформацию их спектра в присутствии сильной НЧ-волны, а затем изменение ее параметров. Отметим, что первая часть задачи (определение спектра) представляет самостоятельный интерес. Так, ее решение позволяет найти изменение спектра поверхностного волнения в поле внутренней волны и тем самым связать картину волн на поверхности с движениями в глубине моря. Для плазменных волн это решение позволяет оценить возможность трансформации длинноволновых составляющих спектра в коротковолновую область, где может быть существенно бесстолкновительное затухание.

Рассмотрим вначале задачу об изменении спектра ВЧ-волн под действием возникающей в момент времени $t=0$ интенсивной НЧ-волны. Считаем начальный спектр ВЧ-волн при $t < 0$ заданным и однородным по x . Такая идеализация применима, если время установления НЧ-волны мало по сравнению с характерным временем трансформации спектра τ . Из кинетического уравнения (13) следует сохранение величины $N_k(x, k, t)$ вдоль траекторий движения ВЧ волновых пакетов в пространстве (x, k) . Их движение, как показано выше, удобнее рассматривать в системе S . Для определения $N_k(\xi, \tilde{k}, t)$ при известном $N_k(\xi, \tilde{k}, 0)$ достаточно проинтегрировать

уравнения движения волновых пакетов и найти начальное положение пакета ξ_0, \tilde{k}_0 , приходящего в точку ξ с волновым числом \tilde{k} в момент времени t ,

$$N_k(\xi, \tilde{k}, t) = N_k(\xi_0(\xi, \tilde{k}, t), \tilde{k}_0(\xi, \tilde{k}, t), 0). \quad (17)$$

Так как предполагается, что начальный спектр не зависит от ξ , то достаточно определить $\tilde{k}_0(\xi, \tilde{k}, t)$. Соответствующие выражения найдены в случае движения частиц для периодических волн в [30] и уединенных в [31] (с фазовым портретом, отвечающим рис. 5, б). Случай, отвечающий фазовому портрету, показанному на рис. 5, в, исследуется аналогично [19]. Для построения спектров можно воспользоваться выражениями работы [19]. На рис. 6 приведены графики спектров поверхностного волнения в различные моменты времени в поле солитона внутренней волны. В качестве начального был выбран спектр слабой турбулентности $W_k = Ak^{-9/2}$ [33]. Графики построены в точках $\xi=0$ для солитона положительной полярности (рис. 6, а) и $\xi = \pm \Delta$ для солитона отрицательной полярности (рис. 6, б) при $|\beta_0| = 0,0083$. Спектральная плотность и волновое число нормированы: $W' = W/W_0(k_*)$, $k' = k/k_*$. В частности, выбранному значению β_0 при $C_{\text{int}} = 60$ см/с отвечает скорость на поверхности $|V_0| = 0,5$ см/с. Полагая для такой внутренней волны $\Delta \approx 100$ м, получим $\tau_1 \approx 20$ мин. При этом захватываются поверхностные волны с длиной порядка метра ($k_* = 6,82 \text{ м}^{-1}$). Для таких волн можно пренебречь действием вязкости ($\tau_v \sim 10^2$ мин) и слабого ветра за время изменения спектра волнения.

На рис. 6, а приведены графики спектров волнения в поле солитона при $\beta_0 > 0$ в моменты времени $t/\tau_1 = 1; 1,5; 2; 3$. Пунктирная линия соответствует невозмущенному спектру. С момента возникновения внутренней волны начинает расти спектральная плотность в области $k > k_*$ ($k' > 1$) в связи с приходом волновых пакетов из длинноволновой области. Спектральная плотность при $k < k_*$ ($k' < 1$) соответственно убывает. При $t \sim \tau_1$ изменение спектра уже значительно. Относительное изменение спектральной плотности к этому моменту времени в коротковолновой области порядка 15—20%. С течением времени изменения в спектре нарастают, причем при $t > \tau_1$ наибольший рост происходит в интервале волновых чисел, отвечающем захваченным волнам. Максимальные изменения в спектре достигаются при $t = \pi\tau_1$, когда волновые пакеты совершили половину «оборотов» по близким к центру траекториям. В дальнейшем с ростом t возникает сложный изрезанный спектр, что связано с неизохронностью движения волновых пакетов по замкнутым траекториям (см. рис. 5, в).

На рис. 6, б показан вид спектров в поле солитона при $\beta_0 < 0$ в те же, что и в предыдущем случае, моменты времени. Кривые ниже пунктирной линии отвечают точке $\xi = \Delta$ на переднем склоне, а выше — точке $\xi = -\Delta$ на заднем склоне НЧ-волны. Подавление спектра на переднем склоне связано с тем, что внутренняя волна

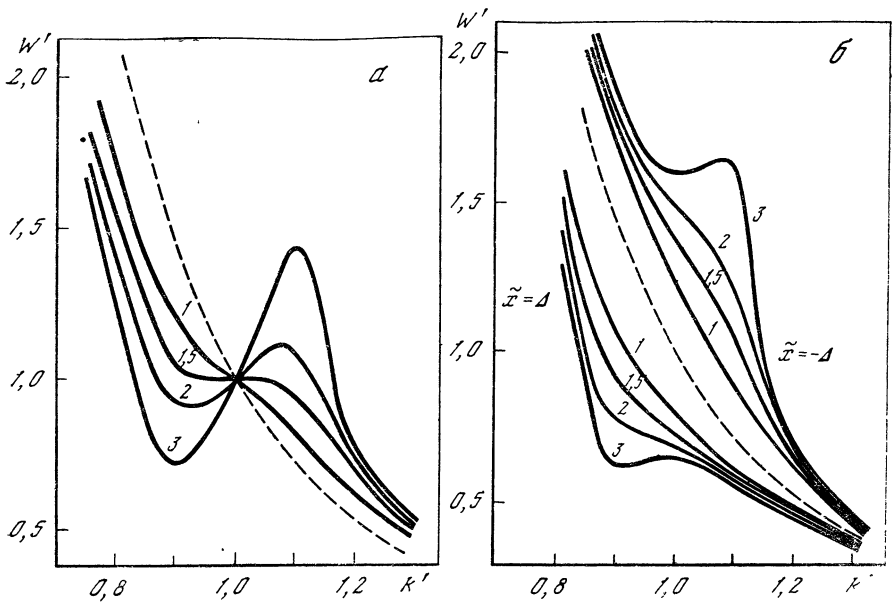


Рис. 6. Вид спектров волнения в моменты времени $t/\tau_0=1; 1,5; 2; 3$ в поле уединенной внутренней волны

a — при $V_0 > 0, \xi=0$; b — при $V_0 < 0, \xi=\pm \Delta$

«догоняет» короткие поверхностные волны и трансформирует их в более длинные. На заднем склоне идет обратный процесс, и спектральная плотность возрастает. С течением времени спектр асимптотически приближается к стационарному и спектральную плотность во всех точках пространства определяют волновые пакеты, пришедшие из удаленных от вершины уединенных волн областей, где $V=0$.

Аналогично проводится исследование трансформации спектра плазмонов в поле ионно-звуковой волны. Так, например, при движении ионно-звукового солитона ленгмюровские волны могут отражаться от возмущения плотности: на переднем склоне с увеличением частоты ω и волнового числа k , а на заднем — с уменьшением.

После определения изменений спектра ВЧ-волн в поле НЧ-волны можно перейти к отысканию адиабатического изменения ее параметров. Сделаем это на примере волн в плазме [21]. Рассмотрим вначале периодическую ионно-звуковую волну, амплитуда которой достаточно велика для выполнения условия (16), однако такова, что можно пренебречь собственной нелинейностью. Уравнение (14) при этом принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + c_s \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{s}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int N_k dk. \quad (18)$$

Его решение ищется в виде $V = V_0(t) \cos q\xi$, где $V_0(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда волны. Умножая уравнение (18) на V и интегрируя его на периоде ионно-звуковой волны, получим следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{2\pi/q} V^2 d\xi \right) - \frac{s}{\rho_0} \int_{2\pi/q} d\xi \int_k dk N_k \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0.$$

Данное уравнение с помощью перехода к интегрированию по траекториям движения ВЧ волновых пакетов во втором интеграле и с использованием уравнений движения преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt} \left[q \frac{\rho_0 V_0^2}{2\Omega_s} + \frac{q}{2\pi} \int_{2\pi/q} d\xi \int_k d\tilde{k} (N_k \tilde{k}) \right] = 0, \quad (19)$$

где Ω_s — частота ионно-звуковой волны.

Уравнение (19) выражает закон сохранения импульса в системе «волна—квазичастицы». Оно полностью аналогично соответствующему выражению в системе «волна—частицы» [34], что позволяет определить изменение $V_0(t)$, не прибегая к дополнительным расчетам. Качественно изменение амплитуды показано на рис. 7. Как и в случае с частицами, колебания амплитуды ионно-звуковой волны связаны с движением волновых пакетов по фазовым траекториям, а уменьшение размаха колебаний — с неизохронностью такого движения. «Размешивание» волновых пакетов по начальным фазам движения может привести к возникновению связанных состояний ВЧ- и НЧ-волн, аналогичных волнам БГК [35].

В случае, когда ионно-звуковая волна является солитоном,

$$V = V_0(t) \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{x - Ct}{\Delta(t)} \right) = V_0(t) \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\xi}{\Delta(t)} \right), \quad V_0^2(t) \Delta(t) = 6c_s D^2.$$

Уравнение, определяющее изменение амплитуды солитона, получается, как и уравнение (19), причем интегрирование по ξ производится в пределах $(-\infty, \infty)$. При больших временах $t \gg \tau_1$ (τ_1 — время взаимодействия ленгмюровского плазмона с ионно-звуковым солитоном) амплитуда солитона меняется по закону

$$V_0(t) = V_0(0) (1 + t/t_0)^{-2},$$

где $t_0^{-1} \sim -(\partial N_k / \partial k)_{k=k_*} \sqrt{V_0(0)}$ — характерное время изменения амплитуды солитона. Изменение амплитуды солитона происходит монотонно, так как отсутствуют плазмоны с замкнутыми траекториями движения.

Таким образом, адиабатическое взаимодействие коротких ВЧ-волн и длинных НЧ-волн достаточно большой амплитуды аналогично нелинейному затуханию волн Ландау на частицах, что позволяет воспользоваться известными результатами. Однако область применимости данного рассмотрения ограничена довольно малым уровнем амплитуд, так как с ростом амплитуды β_0 характерная

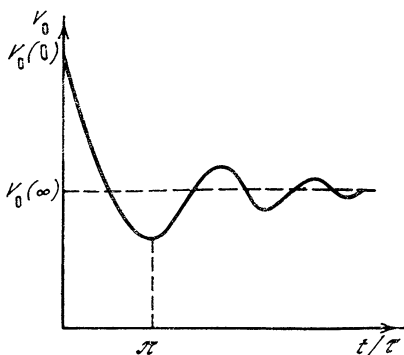


Рис. 7. Изменение во времени амплитуды синусоидальной НЧ-волны при взаимодействии с ВЧ-волнами

длина НЧ-солитона убывает и быстро растет интервал захвата $2\Delta k_1$. Нижняя его граница отодвигается в область малых k , и нарушается приближение геометрической оптики. При взаимодействии волн в стратифицированной жидкости данное ограничение несущественно, так как внутренние волны, как правило, слабы. Однако в плазме могут существовать ионно-звуковые волны значительной амплитуды. При этом будут образовываться интенсивные узкие ионно-звуковые солитоны. Взаимодействие таких НЧ-образований с ВЧ-волнами должно рассматриваться в рамках иного подхода.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЧ-ВОЛН И УЕДИНЕННЫХ НЧ-ВОЛН МАЛОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ

Задачу о взаимодействии узкого НЧ-солитона с ВЧ-волнами можно исследовать, ограничившись лишь требованием временной адиабатичности без использования приближения ВКБ. Уравнения, описывающие такое взаимодействие, имеют вид [36]

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \omega_p \left(1 + \frac{1}{2} \beta\right) E - \frac{1}{2m^*} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (c_s + V) \frac{\partial V}{\partial x} + l \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = - \frac{1}{2\pi\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \langle |E(x, t)|^2 \rangle, \quad (21)$$

где $\beta = V/C_i$, C_i — скорость солитона, $E(x, t)$ — электрическое поле плазменных волн. В случае турбулентного спектра ВЧ-волн скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по ансамблю реализаций. Как и ранее, для простоты рассматривается одномерный случай. При этом не учитывается нелинейность плазменных волн, их взаимодействие с частицами и распадные процессы. Следуя изложенной выше процедуре, взаимодействие будем рассматривать в два этапа: сначала определим изменение поля ленгмюровских волн под действием ионно-звукового солитона, затем — параметры солитона.

Изменение поля ВЧ-волн

Рассмотрим отражение гармонической волны от бегущего профиля плотности, создаваемого ионно-звуковым солитоном. Падающая на солитон волна (частоты ω в лабораторной системе отсчета) может «догонять» солитон или «убегать» от него в зависимости от того, больше или меньше ее групповая скорость величины C_i . Параметры среды в системе S стационарны в приближении заданного поля и зависят лишь от ξ , поэтому в этой системе частота Ω падающей волны равна частотам прошедшей и отраженной волн, и все они имеют одинаковые значения $|\tilde{k}| = |k - k_*|$ вдали от солитона. Как и в случае коротких ленгмюровских волн, солитон, догоняющий ленгмюровскую волну ($k < k_*$), трансформирует ее с увеличением k и ω . Если же ленгмюровская волна догоняет солитон ($k > k_*$), то она трансформируется в волну с меньшими k и ω . С помощью постановки $E = E_0(\xi) \exp[i(\Omega t - m^* C_i \xi)]$ и с учетом дисперсионного уравнения (10) уравнение (20) приводится к виду

$$\frac{d^2 E_0(\xi)}{d\xi^2} + \tilde{k}^2 \left[1 - \frac{\beta_0}{3D^2 \tilde{k}^2 \operatorname{ch}^2(\xi/\Delta)} \right] E_0(\xi) = 0, \quad (22)$$

где в качестве β поставлено $\beta = \beta_0 \operatorname{ch}^{-2}(\xi/\Delta)$. Полученное уравнение есть уравнение Эпштейна [37]. Можно найти решения уравнения (22), отвечающие вдали от солитона падающим, отраженным и прошедшим ленгмюровским волнам, и коэффициенты отражения R и прохождения T .

На рис. 8 приведен вид графика $|R|$ в функции волнового числа k . Модуль коэффициента отражения равен единице при $k = k_*$ и спадает с увеличением $|\tilde{k}|$. Границу характерного интервала волновых чисел, в котором происходит существенное отражение ленгмюровских волн определим величиной Δk по уровню $|R^2| = 1/2$. Она равна $\Delta k \approx 0,54 D^{-1} \sqrt{\beta_0}$. Величина Δk быстро растет с ростом β_0 и уже при достаточно малых β_0 достигает значения k_* , так что перекрывается область малых k . При больших амплитудах граница интервала трансформации достигает области, где существенно затухание Ландау. Однако при однократном отражении плазменных волн от ионно-звукового солитона значительное увеличение $|k|$ ленгмюровских волн происходит лишь для волн с малыми $|k|$ ¹. Если же отражение носит многократный характер, как, например, между двумя ионно-звуковыми солитонами, движущимися навстречу друг другу, то возможна монотонная перекачка энергии ленгмюровской турбулентности вверх по спектру.

Проведенное рассмотрение позволяет обрисовать картину трансформации спектра ленгмюровской турбулентности при возникно-

¹ Интересно, что взаимодействие с ионно-звуковыми солитонами может привести к трансформации не только плазменных волн, но и колебаний с $|k| = 0$, которые преобразуются в плазменную волну с волновым числом $k = 2k_*$.

влении в плазме ионно-звукового солитона. При появлении солитона ленгмюровские волны начинают отражаться от него на переднем и заднем склонах. Размеры области, в которой присутствуют отраженные волны, для каждой спектральной компоненты Ω

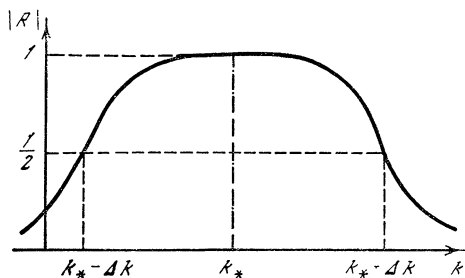


Рис. 8. Зависимость от k модуля коэффициента отражения ленгмюровских волн от ионно-звукового солитона

растут со временем как $L \sim |\partial\Omega/\partial\tilde{k}|t$, где $\partial\Omega/\partial\tilde{k}$ — групповая скорость плазменной волны в системе S . В пределах данной области при достаточно больших временах, таких, что $L \gg \tilde{k}^{-1}(\Omega)$, устанавливается поле, близкое к стационарному.

Изменение параметров НЧ-волн

Адиабатическое изменение параметров солитона легко определить, если считать, что энергия ленгмюровских волн сосредоточена в области малых волновых чисел $|k| \ll k_*$. Для определения изменения параметров солитона из уравнения (21) аналогично тому, как это делалось для солитонов малой амплитуды, получим соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{2} d\xi = \frac{1}{32\pi\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \langle |E(\xi, t)|^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial \xi},$$

из которого с учетом допущений о спектре ленгмюровских волн вытекает закон изменения амплитуды солитона

$$\beta_0(t) = \beta_0(0) (1 - t/t_1)^{2/3},$$

где $t_1 \sim (\mathcal{E}/n \times T_e)^{-1} \beta_0^{3/2}(0)$ — характерное время изменения амплитуды солитона, \mathcal{E} — плотность энергии ленгмюровских шумов.

Найденный закон изменения амплитуды сильных солитонов отличается от соответствующей формулы для слабых солитонов. Это объясняется тем, что с изменением параметров слабых солитонов меняется интервал захвата ВЧ-волн, в то время как сильные солитоны при рассматриваемом уровне амплитуд отражают все ВЧ-волны.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье при рассмотрении адиабатического взаимодействия волн для простоты исследовался лишь одномерный случай, что позволило описать взаимодействие волн в различных средах

однотипными уравнениями. При обобщении на неодномерный случай (когда волновые векторы ВЧ-волн не коллинеарны вектору скорости НЧ-волн) возникает ряд особенностей, связанных с дисперсионной характеристикой ВЧ-волн. Так, если для плазменных волн движение волновых пакетов под углом к направлению распространения ионно-звуковой волны аналогично одномерному случаю, то для поверхностных волн в поле внутренней волны возникают особенности при кельвиновском угле $\theta \approx 35^\circ$. При переходе через данное направление меняется знак эффективной массы m^* квазичастиц и соответственно характер их движения. Стремясь к максимальной наглядности, мы почти не обсуждали влияния ряда факторов на ВЧ-волны, в частности собственной их нелинейности, диссипации и действия ветра (для поверхностных волн) и взаимодействия с частицами (для плазменных волн). Оценки, определяющие область параметров, где такое рассмотрение справедливо, приведены в [19, 21, 36]. Данная область оказывается достаточно широкой. Однако в дальнейшем представляет интерес исследование задачи адиабатического взаимодействия с учетом источников ВЧ-волн (пучков частиц, ветра и т. д.), а также взаимодействия нелинейных НЧ- и ВЧ-образований, например, ионно-звуковых солитонов с ленгмюровскими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ведынов П. П., Рудаков Л. И. — Докл. АН СССР, 1964, 159, № 4, с. 767.
2. *Bakai A. S.* — Nucl. Fus., 1970, 10, N 1, p. 53.
3. *Zakharov V. E., Rubenchik A. M.* — ПМТФ, 1972, № 5, с. 84.
4. *Tagare G., Zhelyazkov J.* — Phys. Lett., 1977, 64A, N 1, p. 56.
5. *Shukla P. K., Yu. M. Y.* — Phys. Lett., 1976, 57A, N 1, p. 57.
6. *Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W.* — J. Fluid Mech., 1960, 8, N 4, p. 565.
7. *Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W.* — J. Fluid Mech., 1961, 10, N 4, p. 529.
8. *Gargett A. E., Hughes B. A.* — J. Fluid Mech., 1972, 52, N 1, p. 179.
9. *Филлипс О. М.* — Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана, 1973, 9, № 9, с. 954.
10. *Бреховский Л. М., Гончаров В. В., Куртенов В. М., Наугольных К. А.* — Океанология, 1975, 15, № 2, с. 205.
11. *Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н.* — Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1977, 13, № 5, с. 537.
12. *Петров В. В.* — Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана, 1978, 14, № 3, с. 342.
13. *Stewartson K.* — Mathematika (Gr. Brit), 1977, 24, N 1, p. 37.
14. *Воронович А. Г.* — Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана, 1976, 12, № 8, с. 850.
15. *Конторович В. М., Синицын Ю. А., Цукерник В. М.* — ПМТФ, 1973, № 1, с. 100.
16. *Benney D. J.* — Stud. appl. math., 1976, 55, N 2, p. 93.
17. *Benney D. J.* — Stud. appl. math., 1977, 56, N 1, p. 81.
18. *Hughes B. A.* — J. Geophys. Res., 1978, 83, N C1, p. 455.
19. *Басович А. Я.* — Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана, 1979, 15, № 6, с. 655.
20. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.* — Письма в ЖЭТФ, 1976, 24, № 1, с. 25.

21. Басович А. Я., Громов Е. М. — Физика плазмы, 1979, 5, № 4, с. 833.
22. Басович А. Я., Громов Е. М. — В кн.: Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по физике низкотемпературной плазмы. Киев, 1979, т. 1, с. 72.
23. Bretherton F. P., Garrett C. J. R. — Proc. Roy. Soc., 1968, A302, N 1471, p. 555.
24. Smith R. — Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1975, 78, N 3, p. 517.
25. Peregrine D. H. — Adv. Appl. Mech., 1976, 16, N 1, p. 9.
26. Басович А. Я., Таланов В. И. — Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана, 1977, 13, № 7, с. 766.
27. Тернер Д. С. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
28. Хасельман К. — В кн.: Нелинейная теория распространения волн. М.: Мир, 1970, с. 106.
29. Мазитов Р. К. — ПМТФ, 1965, № 1, с. 27.
30. O'Neil Th. — Phys. Fluid, 1965, 8, N 12, p. 2255.
31. Криоорученко С. М., Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. — ЖЭТФ, 1974, 67, № 6/12, с. 2092.
32. Карпман В. И. — ЖЭТФ, 1979, 77, № 4/10, с. 1382.
33. Захаров В. Е., Филоненко Н. Н. — Докл. АН СССР, 1966, 170, № 6, с. 1292.
34. Шапиро В. Д., Шевченко В. И. — Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 5/6, с. 767.
35. Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal M. D. — Phys. Rev., 1957, 108, N 3, p. 546.
36. Басович А. Я., Громов Е. М., Таланов В. И. — ЖЭТФ, 1980, 79, № 1/7, с. 123.
37. Epstein P. S. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1930, 16, N 10, p. 628.

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

К. А. НАУГОЛЬНЫХ, Л. А. ОСТРОВСКИЙ, А. М. СУТИН

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейную акустику можно причислить к тем важным разделам физики нелинейных волн, которые имеют давнюю историю и вместе с тем переживают сейчас новый период интенсивного развития. Причин этого несколько. Во-первых, с развитием общей теории нелинейных волн акустические задачи заняли в ней своеобразное место, ввиду того что в обычных акустических средах практически отсутствует дисперсия. Это означает, что мы часто имеем дело с принципиально негармоническими волнами (в отличие, скажем, от нелинейной оптики, где типичны квазигармонические поля). Одномерные задачи нелинейной акустики решаются давно [1—3]; позже начали рассматриваться сферические и цилиндрические разрывные волны (по-прежнему одномерные), а также (в рамках уравнения Бюргерса) волны с произвольным числом Рейнольдса, когда вязкость размывает разрывы [2—5]. Были развиты и приближенные методы, позволяющие построить нелинейную геометри-

ческую акустику для волн конечной амплитуды в неоднородной среде [6]. Эти направления продолжают развиваться и в настоящее время.

Вместе с тем до сравнительно недавнего времени отсутствовало описание акустических пучков конечной амплитуды, на распространение которых оказывают существенное влияние как нелинейные, так и дифракционные искажения профиля. Лишь после появления в 1969 г. известной работы Заболотской и Хохлова [7] началось продвижение в этой области.

Второй важный фактор — это широкие экспериментальные возможности нелинейной акустики. На фоне быстрого развития теории нелинейных волн особенно ясно выявилась недостаточность их экспериментального изучения, особенно в неоднородных ситуациях. И здесь акустические волны, длины которых достаточно малы при относительно небольших частотах и для которых нужные уровни нелинейности без труда достигаются в воздухе и воде, оказываются во многих случаях удобнее электромагнитных волн как объект физического эксперимента.

Наконец, исследования по нелинейной акустике приобретают все большее практическое значение. Это видно уже из того, что мощности используемых на практике излучателей, как тональных, так и импульсных, непрерывно растут, и нелинейные эффекты нельзя не учитывать при их расчете. Кроме того, можно высказать одно принципиальное соображение: в современной акустике все нелинейные функции — усиление, генерация, преобразование, обработка сложных сигналов — выполняются, как правило, радиотехническими устройствами, звук же «появляется» лишь на излучающем конце канала и «исчезает» сразу же на входе приемного конца. Однако свойства электроакустических преобразователей, осуществляющих эту трансформацию, зачастую накладывают существенные ограничения на частотный и угловой спектры излучаемых и принимаемых акустических сигналов. Поэтому представляется заманчивым осуществить часть указанных нелинейных операций прямо «на звуке», без преобразования акустического сигнала в электрический и обратно. Пока делаются лишь немногие серьезные попытки в этом направлении, однако по меньшей мере одна из них — создание нелинейной акустической антенны — увенчалась, как известно, успехом. Правда, коэффициент полезного действия такой антенны пока чрезвычайно мал, но этот недостаток компенсируется другими важными преимуществами. Малость же КПД обусловлена в значительной степени уже упомянутым отсутствием дисперсии среды, что приводит к нелинейному затуханию волн. Это лишь один из аргументов в пользу исследований по «дисперсионной» нелинейной акустике, направленных на поиск сред или систем, обладающих нужными дисперсионными свойствами по отношению к звуковым волнам. Такие исследования также ведутся в последнее время.

Высказанные выше соображения и определяют содержание этого небольшого обзора. В нем затронуты некоторые современные

направления нелинейной акустики: нелинейные волновые пучки и параметрические излучатели, вопросы дисперсионной нелинейной акустики, включающие нелинейные явления в жидкости с пузырьками газа и в акустических волноводах и резонаторах и, совсем кратко, генерация нелинейного акустического шума. Ясно, что подробное изложение всех этих вопросов вышло бы далеко за рамки небольшой статьи, поэтому здесь ограничимся лишь кратким рассказом о некоторых интересных, на наш взгляд, идеях и о соответствующих экспериментальных результатах.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗВУКОВЫЕ ПУЧКИ

Уже в начале 50-х годов, когда нелинейная акустика была преимущественно одномерной, в экспериментах с мощными излучателями отмечалось, что наблюдаемая форма волны не совпадает с рассчитанной из одномерной теории [8, 9]. Однако впервые существенные результаты в этом направлении были получены лишь спустя почти двадцать лет. В 1969 г. Заболотская и Хохлов [7] предложили известное упрощенное уравнение для нелинейных акустических пучков с узким угловым спектром, которое сейчас широко анализируется (см., например, [4, 10]). Однако и это уравнение еще крайне трудно для решения, и основные результаты здесь были получены с помощью численных решений [11, 12]. В эти же годы развивался несколько другой, приближенный, подход к решению задач о дифракции нелинейных пучков. Оказалось, что во многих важных случаях дифракционные и нелинейные искажения волны, будучи в целом одинаково существенными, проявляются в различных областях пространства (на разных этапах распространения волн). Если ввести безразмерный параметр N , характеризующий отношение параметров дифракции и нелинейности [13], и рассмотреть его изменение с расстоянием, то в данном классе задач волновой пучок можно разбить на области с $N \gg 1$ и $N \ll 1$, а также промежуточную область сшивки, где N меняется от больших до малых значений, или, наоборот, без существенных нелинейных или дифракционных искажений (за счет, например, сходимости или расходимости волнового пучка, наличия экрана и т. п.). Это позволяет дать весьма простое и наглядное описание всей эволюции нелинейного звукового пучка. Некоторые примеры такого поэтапного подхода упоминались в материалах 3-й школы [14]. В последнее время круг соответствующих задач был значительно расширен, а полученные приближенные решения сопоставлены с результатами экспериментов и численных расчетов. Именно на этом вопросе мы остановимся ниже.

Первым по времени рассмотрением (и одним из самых простых) был пример обычного достаточно мощного излучателя звука, удовлетворяющего условию

$$N_0 = \frac{2}{\pi \varepsilon M} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \gg 1, \quad (1)$$

где N_0 — значение параметра N вблизи излучателя, d — диаметр излучателя, λ — длина излучаемой волны, M — акустическое число Маха в волне вблизи излучателя, $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$ — параметр нелинейности среды. При этом в ближней зоне нелинейностью можно пренебречь, и происходит формирование обычной диаграммы направленности. Однако если вязкость среды достаточно мала, то в волновой зоне, несмотря на ослабление из-за сферической расходимости, на достаточно больших расстояниях в волне образуются разрывы и появляется нелинейное затухание. Процесс эволюции слабых сферических ударных волн хорошо известен [2—5], причем в асимптотике амплитуда такой волны (вначале синусоидальной) перестает зависеть от начальных условий. В данном случае это означает, что амплитуда становится одинаковой для всех углов, где первоначальная диаграмма дает достаточно сильное поле — получается изотропизация излучения и в тем более широком диапазоне углов, чем больше r [15].

Этот эффект наблюдали Блэксток с сотрудниками [16, 17] в экспериментах с мощным гидроакустическим излучателем диаметром 7,6 см на частоте 450 кГц. На рис. 1 приведены диаграммы направленности такого излучателя, измеренные на различных расстояниях.

Для излучателя, вблизи которого $N \approx 1$, нелинейные эффекты приводят к искажениям волны еще в прожекторной зоне (на стадии плоской волны). Здесь поэтапный метод не может быть строго обоснован, но он приводит к правильным качественным и отчасти количественным выводам [18]: в частности, получается хорошее согласие с экспериментом [19] (рис. 2).

Эта задача, однако, делается «чистой», если на прожекторном этапе излучателя с $N \ll 1$ поставить экран с отверстием сравнительно малого диаметра, так что волна за отверстием характеризуется уже большим числом N . Поэтому дальше происходит линейная дифракция волны, форма которой на отверстии определяется нелинейными искажениями в плоском пучке перед экраном [20].

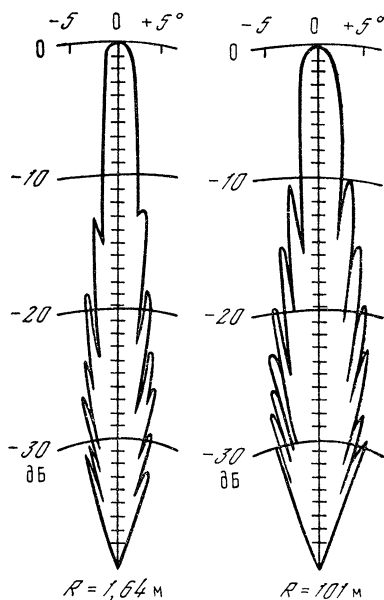


Рис. 1. Диаграммы направленности мощного гидроакустического излучателя, измеренные на различных расстояниях

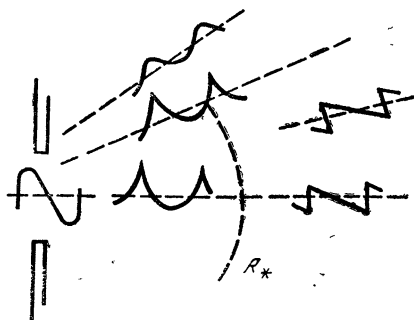
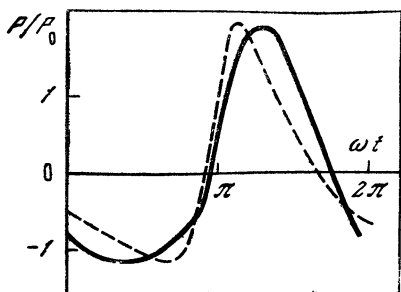


Рис. 2. Форма волны от квадратного гидроакустического излучателя со стороны 40 см, частотой 150 кГц и амплитудой давления 1 атм на расстоянии 8 м

Сплошная кривая — расчет по приближенной теории, штриховая — эксперимент [19]

Рис. 3. Форма волны под различными углами при дифракции нелинейно искаженной волны на круглом отверстии

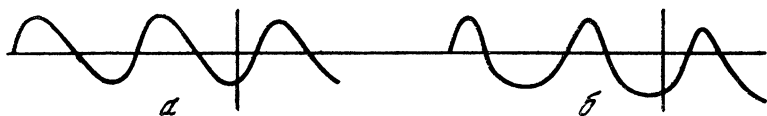


Рис. 4. Форма волны от мощного рупорного излучателя, наблюдаемая в экспериментах [21]

a — на раскрыве рупора; *б* — на оси излучателя в волновой зоне

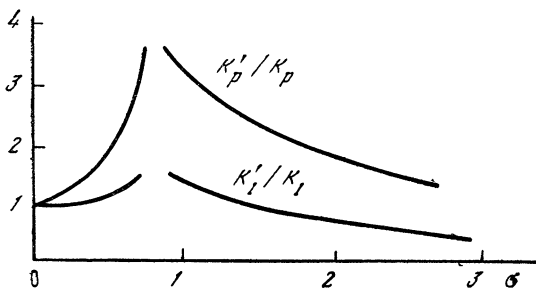


Рис. 5. Зависимость коэффициента усиления по давлению K'_p и интенсивности K'_I сферического концентратора от параметра σ (K_p , K_I — коэффициенты усиления без учета нелинейности)

Ясно, что форма волны за экраном получается различной в различных направлениях (рис. 3).

Аналогичным образом может быть рассмотрена задача о поле мощного рупорного излучателя для случая, когда волна в рупоре испытывает нелинейные искажения, так что она на раскрыве рупора существенно несинусоидальна. Согласно поэтапному методу поле в волновой зоне на оси должно быть пропорционально производной от профиля излучаемой волны. Это подтверждается результатами экспериментов Блэкстока и др. [21] с мощными рупорными излучателями с частотой 7,46 кГц, работающими в воздухе (рис. 4). Поэтапная теория здесь дает практически полное совпадение с экспериментом.

Еще один класс задач, в которых применим поэтапный подход, связан с наличием влияния нелинейных эффектов на свойства акустических фокусирующих систем (концентраторов). Нелинейные эффекты в сходящемся акустическом пучке вдали от фокальной области ($N \ll 1$) описываются в приближении нелинейной геометрической акустики, а линейная дифракция искаженной волны вблизи фокальной области ($N \gg 1$) — с помощью нестационарного интеграла Кирхгофа [22, 23]. Оказалось, что нелинейные эффекты приводят (при умеренных интенсивностях) к росту коэффициентов усиления концентратора за счет более эффективной фокусировки высокочастотных гармоник, возникающих в результате нелинейной деформации волны, и лишь при очень больших интенсивностях коэффициент усиления уменьшается за счет образования и нелинейного затухания разрывов. На рис. 5 изображена зависимость коэффициента усиления концентратора от параметра σ , характеризующего степень нелинейных искажений [22, 23],

$$\sigma = 2\pi \varepsilon M F \lambda^{-1} \ln (F \alpha^2 / 2\lambda), \quad (2)$$

где M — акустическое число Маха в волне у сферического излучателя с фокусным расстоянием F , α — угол сходимости пучка (здесь $\alpha \ll 1$).

Нелинейные эффекты могут заметно изменять характеристики ультразвуковых концентраторов, широко применяющихся, в частности, в биологии и медицине [24], и их влияние неоднократно наблюдалось в экспериментах [25—27].

Любопытно отметить, что во всех этих примерах линейной оказывается та область, где интенсивность волны максимальна (фокусы, ближняя зона излучателя); несмотря на это, дифракционные эффекты проявляются в этих областях сильнее, чем нелинейные, поскольку пучок здесь имеет минимальную ширину.

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗЛУЧАТЕЛИ

Как это часто бывает, наибольший практический интерес в нелинейной акустике вызвала одна чрезвычайно простая идея. В ее основе лежит так называемое «рассеяние звука на звуке», рассмотренное еще на рубеже 60-х годов Зверевым и Калачевым в нашей стране и Вестервелтом в США: в области пересечения двух ограниченных волновых пучков с разными частотами ω_1 и ω_2 появляются из-за нелинейности возмущения комбинационных частот $\omega_1 \pm \omega_2$. В результате область взаимодействия становится источником излучения на этих частотах. На этом и была основана идея «параметрического» излучателя (ПИ)¹, предложенного Вестервелтом [28]: излучается остронаправленный звуковой пучок, представляющий собой волну высокой частоты ω , модулированную сигналом низкой частоты Ω (в частности, первичная волна может

¹ Термин «параметрический» в данном случае неточен, но он настолько прочно вошел в обиход специалистов, что вряд ли есть смысл пытаться его менять.

состоять из двух близких по частоте гармонических компонент с частотами ω и $\omega + \Omega$, где $\Omega \ll \omega$. В результате возникает, в частности, волна низкой частоты Ω , излучаемая из области существования первичного пучка. Эта область и служит «бестелесной» антенной низкочастотного излучения. Поскольку ее размеры много больше габаритов высокочастотного преобразователя, то именно она определяет направленность излучения низкой частоты, а эта высокая направленность и является основным достоинством параметрического излучателя. Сюда надо добавить также широкополосность и отсутствие боковых лепестков диаграммы направленности [29, 30]. По имеющимся оценкам [31] число публикаций по ПИ в течение 1961—1976 гг. росло экспоненциально без признаков насыщения.

Теория ПИ строится, по существу, тоже на основе некоторого поэтапного подхода. В реальных случаях амплитуда вторичного низкочастотного поля всегда мала, и его можно искать методом возмущений из исходных уравнений нелинейной акустики. Эта методика приводит к неоднородному волновому уравнению для низкочастотного вторичного поля p_s :

$$\Delta p_s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_s = - \frac{\varepsilon}{\rho c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle p_i^2 \rangle, \quad (3)$$

где p_i — первичное поле (предполагается, что первичная волна распространяется в узком пучке), скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по периоду высокой частоты (время усреднения много больше $2\pi/\omega$, но меньше $2\pi/\Omega$), c — скорость звука, ρ — плотность.

Правая часть этого уравнения играет роль источника вторичных волн, который бежит со скоростью c , т. е. здесь можно говорить о бестелесной антенне бегущей волны. Из (3) следует выражение для вторичного низкочастотного поля:

$$p_s = \frac{-\varepsilon}{4\pi\rho c^4} \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle p_i^2(t - r/c) \rangle dV, \quad (4)$$

где dV — элемент объема первичной антенны, r — расстояние от элемента dV до точки наблюдения; интеграл берется по объему V , занятому первичным пучком.

Распределение источников в (4) может быть достаточно сложным. Это распределение, вообще говоря, включает как прожекторную, так и волновую зону для первичного пучка в зависимости от длины затухания L , которая и является характерной длиной антенны бегущей волны. Поэтому пространственную структуру источников удобно характеризовать параметром $N_F = L/R_\Phi$, где R_Φ — расстояние Фраунгофера в первичной волне, равное d^2/λ (d — характерный диаметр излучателя). Вместе с тем ПИ характеризуется еще коэффициентом преобразования частоты $\mu = \Omega/\omega$. В соответствии с этим на рис. 6 показаны области на плоскости параметров $\mu - N_F$, по которым классифицируются режимы работы параметрических излучателей [32].

В области 1, где $N_F \ll \mu$, эффективная длина антенны меньше дифракционной длины даже на низкой частоте (т. е. меньше величины μR_Φ). Такие «короткие» антенны не имеют выигрыша по сравнению с «телесными» преобразователями того же поперечного размера и в этом отношении не представляют интереса.

При режиме работы, отвечающем области 2, $\mu \ll N_F \ll 1$; именно этот случай при малоамплитудном затухании был рассмотрен Вестервелтом [28]. Здесь первичный пучок полностью

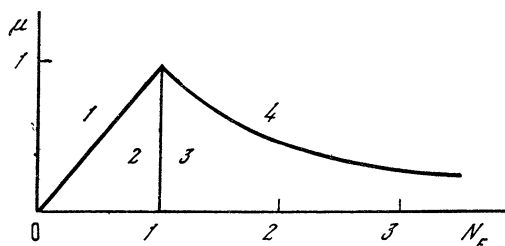


Рис. 6. Разбиение плоскости параметров на области

затухает в прожекторной области и интеграл (4) легко вычисляется. Поле на оси излучателя определяется выражением

$$P_s = \frac{\epsilon P_m^2 S}{16\pi R \alpha r c^4} \frac{\partial^2 E^2}{\partial t^2}, \quad (5)$$

где P_m — амплитуда первичной волны у излучателя площадью S , $E(t)$ — функция модуляции первичного пучка единичной амплитуды, α — коэффициент затухания первичной волны. Угловая ширина диаграммы направленности (по уровню 0,5 максимальной мощности) равна

$$2\theta_d = 4 (\alpha c \mu / \omega)^{1/2}. \quad (6)$$

Любопытно, что синусоидально модулированная по амплитуде первичная волна ($E(t) = 1 + m \cos \Omega t$) дает негармоническое излучение низкой частоты, а бигармоническая ($E = |\sin \Omega t / 2|$) дает на оси синусоидальную низкочастотную волну.

Режим работы, при котором параметры μ и N_F лежат в области 3, наиболее сложен для теории, поскольку здесь существенный вклад в излучение дают как прожекторная, так и сферическая части первичного пучка, а также область, переходная между ними. Вместе с тем в таком режиме работает большинство созданных до настоящего времени излучателей (табл. 1). Для этой области был получен ряд решений, основанных либо на раздельном учете прожекторного и волнового участков [35, 36], либо на приближенном решении уравнения Заболотского—Хохлова [37, 38], либо на численном исследовании этого уравнения [39].

Наконец, в области 4 (см. рис. 6), где $N_F \gg \mu$, излучение формируется в основном в волновой зоне первичного пучка и вторичное излучение не выходит за пределы угловой ширины первичного пучка. В этом смысле ПИ, работающий в данном режиме, эквива-

Таблица 1

Характеристики некоторых действующих параметрических излучателей

Назначение излучателя (название)	Размер	Мощность, Вт	Максимальный КПД	Первичная частота, кГц	Частотный диапазон, кГц	Ширина диаграммы для средней частоты, град	Область $\mu+N F$ на рис. 6	Литература
Для профилирования дна (FADS)	23×23 см	20	$3 \cdot 10^{-4}$	200	8—14	2,5	3	[28]
Для профилирования дна	0,9×0,9 м	5000	10^{-4}	65	0,5—14	2	3—4	[33]
Для профилирования дна (TOPS)	0,5×2 м	80000	10^{-2}	24	0,05—5	2	3—4	[33]
Для калибровки гидрофонов (НАИ-5)	1×1 см	20	10^{-5}	1000	2—200	30	4	[34]

лентен рупорному излучателю с углом раскрыва, равным углу расходимости первичного пучка. Соответствующая задача для нахождения вторичного излучения опять решается без труда, причем здесь диаграмма направленности вторичной волны равна квадрату диаграммы первичной, а поле на оси излучателя дается формулой [40]

$$P_s = \frac{\varepsilon P_m^2 R^2 \Phi}{4\rho c^3 R} E_1 \left(\frac{2\alpha R}{\mu} \right) \frac{\partial E^2}{\partial t}, \quad (7)$$

где E_1 — интегральная показательная функция.

Указанные выше замечательные свойства ПИ, увы, не даются даром: эффективность преобразования энергии первичного пучка в низкочастотное излучение оказывается удручающе малой. Об этом говорят уже известные соотношения Мэнли—Роу [41]: даже без учета диссипации отношение мощности, излучаемой на частоте ω , к мощности, отдаваемой на частоте Ω (т. е. коэффициент полезного действия), не может превышать величины Ω/ω . На деле ситуация гораздо хуже из-за затухания первичной волны и из-за перекачки энергии в высокие частоты. В случае малоамплитудного затухания КПД антенны пропорционален мощности первичной волны, и для его повышения необходимо увеличивать мощность.

Здесь, однако, вступает в силу новый фактор — нелинейные искажения первичной волны (перекачка энергии в высшие гармоники идет гораздо эффективнее, чем в низкочастотную волну), что приводит к образованию разрывов и последующему быстрому затуханию. Поэтому предельные возможности ПИ необходимо исследовать с учетом искажений формы и нелинейного затухания первичной волны. Длинной L здесь является величина порядка нескольких расстояний образования разрыва. В этом случае поле

Рис. 7. Форма волны в дальней зоне мощного параметрического излучателя с бигармоническим возбуждением при $\omega/2\pi=700$ кГц, $\Omega/2\pi=14$ кГц, $P_m=2$ атм

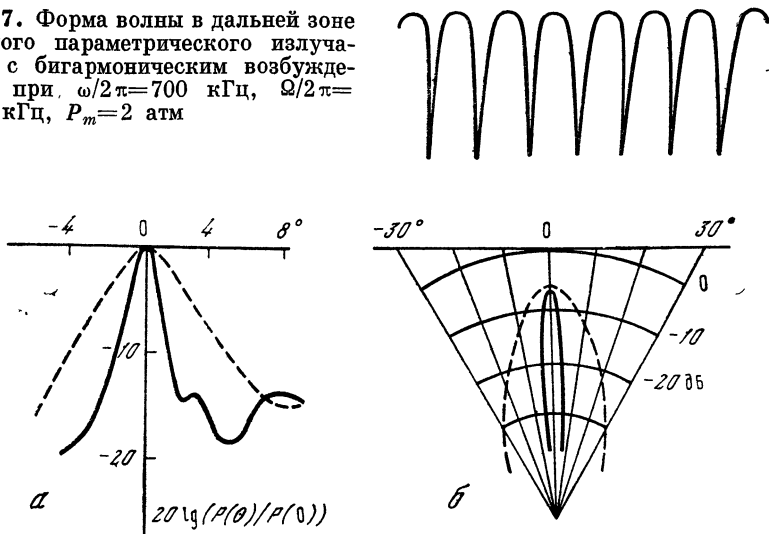


Рис. 8. Диаграммы направленности двух параметрических излучателей, испытанных в морских условиях (пунктирные кривые), и первичных пучков (сплошные линии)

а — излучатель, описанный в работе [45]: диаметр 92 см, $\omega/2\pi=105$ кГц, $\Omega/2\pi=5$ кГц; б — излучатель, указанный в табл. 1, вторая строка

на оси излучателя пропорционально $\partial^2 E/\partial t^2$ при режимах 1 и 2 [42] и $\partial E/\partial t$ при режиме 4 [43], т. е. теперь синусоидально модулированный пучок порождает синусоидальное излучение, а бигармонический пучок — резко несинусоидальную волну.

На рис. 7 приведена форма волны от излучателя, работающего в режиме 2 при высоких интенсивностях волны накачки, наблюдавшаяся в экспериментах [44] с излучателем диаметром 10 см. Что же касается КПД, то при режимах 1 и 4 он достигает своего максимально возможного значения, которое определяется равенством $\eta=b(\Omega/\omega)^2$, где параметр b зависит от закона модуляции: он равен 0,36 для бигармонической волны и 0,67 — для амплитудно-модулированной волны с глубиной модуляции 100%. Оптимальным для получения максимального поля на оси является режим, отвечающий границе между областями 3 и 4: здесь обеспечивается предельно узкая диаграмма направленности при КПД, близком к максимальному [36].

Итак, преобразование частоты вниз, скажем, на порядок, даже в лучшем случае понижает мощность более чем на два порядка. Тем не менее простота и технические достоинства ПИ не только стимулировали многочисленные экспериментальные исследования, но привели уже к разработке систем, используемых в прикладной акустике. На рис. 8 приведены диаграммы направленности некоторых ПИ, измеренные в морских условиях.

Параметрические излучатели нашли применение в эхолотах, используются для исследования поддонных слоев (здесь важна узкая направленность на низких частотах, для которых затухание в водонасыщенных морских осадках мало. В СССР созданы параметрические излучатели для калибровки акустических преобразователей [34].

Обсуждаются возможности применения ПИ для работы в условиях мелкого моря (из-за узости диаграммы направленности и отсутствия боковых лепестков уменьшается величина помехи, вызванной отражением от дна и поверхности [46]), а также в медицинской диагностике [47]. Предлагается использовать параметрические излучатели для контроля за состоянием воздуха над взлетно-посадочными полосами в аэропортах [48], для зондирования атмосферы.

4. ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

Параметрический излучатель, рассмотренный выше, — не единственный пример «виртуального» излучателя, в котором звук генерируется за счет того или иного механизма детектирования первичного модулированного поля. Другой пример — генерация звука за счет поглощения лазерного излучения — рассматривался на прошлой школе [49]. Наконец, к этой же категории относятся, по существу, шумы турбулентных потоков самого различного происхождения — турбулентных струй реактивных двигателей, турбулентных пограничных слоев, атмосферных потоков, возникающих во время бурь, и т. д. Исследование этих явлений стало особенно актуальным в последнее время в связи с ростом мощности самолетных и других двигателей.

Теория генерации звука турбулентностью была развита Лайтхиллом [50] еще в 1952 г. на основе уравнения (3), но только с правой частью более общего вида:

$$\frac{\partial^2 (\rho v_i v_k)}{\partial x_i \partial x_k},$$

где v_i — компоненты пульсаций скорости в турбулентном потоке. Решение этого уравнения, называемого уравнением Лайтхилла, можно записать в виде, аналогичном (4). Как видно, источники звука определяются не самими пульсациями давления, характеризующимися тензором плотности потока импульса, а их вторыми разностями, что указывает на квадрупольный характер излучения. Интегральная оценка поля приводит к известному результату, хорошо подтвержденному экспериментами для случая свободных струй:

$$I \sim \rho l^2 v^8 / c^5, \quad (8)$$

где l — размер турбулентного объема. Новые результаты в этой области связаны с важным классом задач об излучении звука турбулентным потоком в присутствии границ. Основной вклад в излучение в этом случае дает, по-видимому, не квадрупольное излучение турбулизованного пограничного слоя, а механизм транс-

формации энергии вихревого поля в звук, возникающий при взаимодействии турбулентного потока с жесткой границей [51]. Наглядно можно представить себе, что в этом случае источниками звука служат тангенциальные напряжения, возникающие на границе пограничного слоя.

Формально этот процесс можно описать как эффект возникновения продольной (звуковой) компоненты при отражении от жесткой границы поперечной волны, образующейся в вязком подслое под действием турбулентных пульсаций, которые появляются в области логарифмического профиля пограничного слоя. Соответствующая оценка приводит к следующей формуле для интенсивности звука, излучаемого единицей площади границы:

$$I/\delta^2 \approx (\rho c^3/r^2) \alpha^6 M^6. \quad (9)$$

Здесь δ — масштаб корреляции тангенциальных напряжений, α — степень турбулизации потока, M — число Маха для потока.

Приближенная оценка по этой формуле интенсивности шума, излучаемого турбулентным пограничным слоем, согласуется с экспериментальными данными Хэддла и Скучика [52].

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Как уже говорилось выше, отсутствие дисперсии в акустике существенно ограничивает возможности контролируемого преобразования спектра акустических волн. В литературе уже довольно давно обсуждаются возможности создания «искусственной» дисперсии. На одну из таких возможностей — введение в жидкость пузырьков газа — указывалось еще в 1967 г. [53]. Позже нелинейные эффекты в жидкости с пузырьками стали привлекать к себе все большее внимание акустиков, поскольку присутствие пузырьков даже в самых незначительных количествах, мало влияющих на плотность среды, сильно увеличивает ее нелинейность.

Описание распространения звука в двухфазной среде (жидкость—пузырьки газа) в общем случае включает довольно сложные уравнения состояния, учитывающие свойства системы пузырьков как резонансных нелинейных осцилляторов с затуханием. На практике обычно используются более или менее грубые модели. Рассмотрим наиболее простую форму уравнений, которая, однако, отражает основные особенности жидкости с пузырьками газа как нелинейной диспергирующей среды. Эти уравнения выводятся при следующих условиях: а) среда считается однородной, т. е. распределение пузырьков однородно по объему жидкости, а длина волны значительно больше расстояния между пузырьками и тем более размеров пузырьков; б) удельное содержание пузырьков в жидкости мало; в) амплитуда колебаний пузырьков много меньше их радиуса, так что в уравнениях колебаний пузырьков можно учитывать только квадратичную нелинейность; г) нелинейностью и диссипацией в жидкой фазе можно пренебречь.

Подставляя в уравнения акустики эффективную плотность смеси $\rho = \rho_{ж} (1 - z)$, где $\rho_{ж}$ — плотность жидкости, z — объемная концентрация газа в среде (здесь $z \ll 1$), получаем уравнение для акустического давления p в среде с пузырьками [54]:

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (10)$$

Здесь c_0 — скорость звука в жидкости без пузырьков.

Изменение объемной концентрации z' связано с изменением объема одного пузырька v соотношением

$$z' = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} v(R) n(R) dR, \quad (11)$$

где $n(R)$ — функция распределения пузырьков по размерам ($n(R) dR$ — количество пузырьков с радиусами от R до $R + dR$ в единице объема). Уравнение, описывающее изменение объема одного пузырька в квадратичном приближении, имеет вид [55]

$$\ddot{v} + \omega_0^2 v - 3\beta (\gamma + 1) \omega_0^2 v^2 - \beta (2\dot{v}v + \dot{v}^2) + \dot{v} = -\kappa p. \quad (12)$$

Здесь ω_0 — частота собственных пульсаций пузырька, ν — коэффициент поглощения, определяемый, вообще говоря, вязкостью, теплообменом с жидкостью и радиационными потерями, $\kappa = 4\pi R / \rho_0$, $\beta = (8\pi R^3)^{-1}$, γ — показатель адиабаты для газа в пузырьке.

Система (10)–(12) описывает распространение акустической волны в среде с пузырьками с учетом квадратичной нелинейности, вносимой колебаниями пузырьков.

В линейном приближении ($\beta = 0$) для гармонической волны частоты ω отсюда получается дисперсионное соотношение

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} + \int \frac{\rho_0 \kappa n(R) dR}{\xi^2 - 1 + i/Q}, \quad (13)$$

где $Q = \omega/\nu$ — добротность пузырька, $\xi = \omega_0/\omega$.

Рассмотрим сначала среду с пузырьками одинакового радиуса R_0 , тогда $n(R) = n_0 \delta(R - R_0)$ и интеграл (13) легко вычисляется. Соответствующая дисперсионная зависимость аналогична дисперсионной характеристике электромагнитной волны в диэлектрике, состоящем из идентичных осцилляторов (модель Лоренца).

Если характерная частота волны много меньше резонансной частоты пузырьков, то, учитывая малость дисперсии, можно получить уравнение Бюргерса—Кортевега—де Вриза (БКДВ) (см. также [56]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \zeta \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \quad (14)$$

где u — скорость частиц среды, $\tau = x - c_{\pi} t$ — бегущая координата, $c_{\pi} = c_0 (1 + 4\pi R n_0 c_0^2 / \omega_0^2)^{-1/2}$ — низкочастотная скорость звука в среде

с пузырьками, ϵ , η , ζ — эффективные коэффициенты нелинейности, поглощения и дисперсии, равные

$$\epsilon = \frac{z}{2} (\gamma + 1) \left(\frac{\rho_0 c_{II}^2}{\gamma P_0} \right)^2, \quad \zeta = \frac{4\pi R n_0 c_{II}^5}{\omega_{II}^6}, \quad \eta = \frac{2\pi n_0 \nu R c_{II}^4}{\omega_{II}^5}. \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что параметр нелинейности ϵ зависит от полной объемной концентрации пузырьков z . Из (15) следует, что для воды с пузырьками воздуха он определяется соотношением [57]

$$\epsilon = 3 \cdot 10^8 z / (1 + 1,6 \cdot 10^4 z)^2. \quad (16)$$

Это выражение достигает максимума при $z \approx 6,25 \cdot 10^{-5}$, при этом $\epsilon \approx 5 \cdot 10^3$. Поскольку в чистой воде $\epsilon \approx 3,5$, то видно, насколько сильно присутствие небольшого количества пузырьков может изменить нелинейность. Это подтверждается экспериментами по образованию ударных волн в воде с водородными пузырьками (рис. 9) [58]. Расстояние формирования ударной волны составляет несколько сантиметров, что хорошо согласуется с теоретическими оценками, тогда как в воде без пузырьков оно было бы равно почти 10 м.

При более высокочастотных начальных возмущениях или после образования достаточно резкого ударного фронта сказывается дисперсия, которая приводит к образованию осцилляций и акустических солитонов [56] (рис. 10).

Перейдем теперь к более сложному, но и более реальному на практике случаю, когда пузырьки характеризуются непрерывным распределением $n(R)$ по радиусам, а следовательно, и по резонансным частотам ω_0 . При высоких добротностях газовых пузырьков и их достаточно плавном распределении по размерам основное влияние оказывают те пузырьки, чьи резонансные частоты близки к частоте волны. Из дисперсионного соотношения (13) легко найти коэффициент затухания звука при $Q \gg 1$ [59]

$$\alpha = \text{Im } k = 724 R_{\omega}^2 n(R_{\omega}), \quad (17)$$

где R_{ω} — радиус пузырьков с резонансной частотой ω . Видно, что затухание на частоте ω пропорционально концентрации пузырьков с радиусом R_{ω} . Таким образом, спектры радиусов пузырьков можно измерить по затуханию звука в широкой полосе частот. Этим способом обычно и пользуются при диагностике пузырьков в лабораторных условиях [59] и в море [60]. В данном случае резонансные пузырьки почти не влияют на скорость звука, и дисперсия фазовой скорости сказывается значительно слабее затухания.

Вместе с тем одновременно с диссипацией в среде с резонансными пузырьками растет нелинейность. Из уравнения (12), описывающего поведение одиночного пузырька в звуковом поле, следует, что при его облучении синусоидальным полем частоты ω переизлучается волна как на частоте ω , так и на ее второй гармонике 2ω , а при облучении на двух частотах ω_1 и ω_2 происходит переизлучение на частотах ω_1 , ω_2 , $\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_1$, $2\omega_2$.

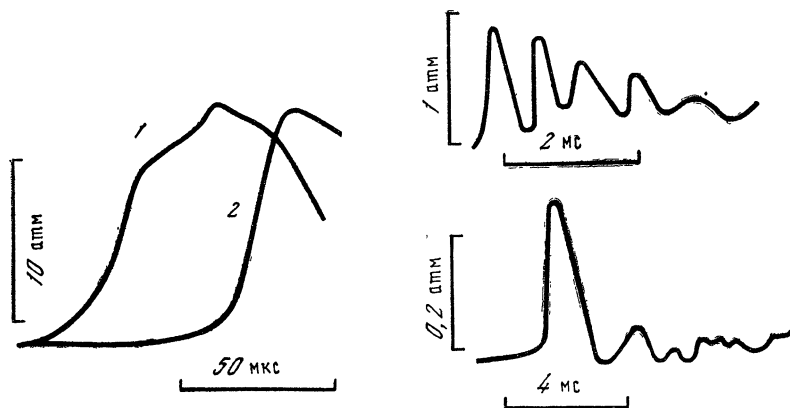


Рис. 9. Осциллограмма импульсов сжатия в глицерине с пузырьками воздуха на расстоянии 1 см (кривая 1) и 7 см (кривая 2) от излучателя [58]

Рис. 10. Акустические солитоны, сформировавшиеся при распространении импульсов сжатия различной начальной амплитуды в жидкости с пузырьками [56]

Здесь мы кратко остановимся только на процессе преобразования частоты вниз, который интересен для выяснения влияния пузырьков на свойства параметрических излучателей звука.

Вторичное поле на низкой частоте определяется соотношением (4) с измененным параметром нелинейности

$$\varepsilon \approx \pi^2 c_0^4 (3\gamma + 2) Qn (R_\omega) / \omega^4. \quad (18)$$

(Мы считаем, что $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$ и $\Omega / \omega \ll Q^{-1}$).

Таблица 2

Значения эффективного параметра нелинейности ε для морской среды, содержащей пузырьки газа

n , см ⁻⁴	f , кГц	Глубина, м	ε	n , см ⁻⁴	f , кГц	Глубина, м	ε
Тихий океан, залив Монтерей, ветер 4,4 м/с [60]				Атлантический океан, субтропики, ветер 11—13 м/с [61]			
0,2	20	10	250	3	32,5	1,5	540
10	50	10	320	0,1	43	8	6
120	100	10	240	2,7	65	1,5	30
800	140	10	416	0,06	87	8	1

В табл. 2 в качестве примера приведены значения эффективного параметра нелинейности, рассчитанные по значениям $n(R)$ для морской среды [60, 61]. Судя по этим оценкам, существенное возрастание параметра нелинейности из-за наличия пузырьков воз-

можно и в естественных условиях. Следует отметить, что, хотя одиночный пузырек излучает на частоте второй гармоники поле существенно большее, чем на разностной частоте, генерация второй гармоники в среде с пузырьками, непрерывно распределенными по размерам, идет значительно менее эффективно, чем генерация разностной частоты, поскольку пузырьки с резонансными частотами, лежащими по разные стороны от частоты волны, переизлучают вторую гармонику в противофазе.

Генерацию волны разностной частоты в среде с пузырьками мы наблюдали в лабораторных условиях. Использовался бигармонический сигнал с частотами 136 и 150 кГц, $P_1 = P_2 = 0,06$ атм, распространяющийся в воде через слой пузырьков длиной 10 см, которые создавались электролитическим способом. На рис. 11 показана зависимость амплитуды волны p_s на разностной частоте 14 кГц в зависимости от концентрации пузырьков. Теоретическая кривая рассчитана по модели Вестервелта, и хотя условия ее применимости не очень хорошо выполнены, налицо неплохое согласие с экспериментом. Отметим, что для чистой воды поле на частоте 14 кГц было бы в тысячу раз меньше.

Нелинейный метод оказывается весьма чувствительным для измерения параметров пузырьков в случае небольшой концентрации, когда затухание почти не чувствуется¹. Что же касается использования пузырьков для повышения эффективности ПИ, то здесь дело обстоит не так просто, поскольку вместе с нелинейностью растут потери. При работе ПИ в режимах 1, 2 (см. рис. 6) поле на оси излучателя пропорционально отношению ε/α . В рассматриваемом случае это отношение равно $5,3 \cdot 10^3 \lambda Q$. В среде без пузырьков для частот ниже 100 кГц это отношение больше. Таким образом, присутствие резонансных пузырьков не приводит к возрастанию поля на оси излучателя, работающего в таком режиме.

В работе [63] обсуждалось влияние одинаковых по размеру пузырьков на работу ПИ в этих же режимах. Оказалось, что наличие монорадиусных пузырьков также не может привести к значительному возрастанию поля на оси ПИ, работающих в таком режиме. Однако КПД излучателей в пузырьковой среде сильно возрастает за счет расширения диаграммы направленности.

Более перспективным в этом отношении представляется режим 4 (сферические пучки). На рис. 12 показана зависимость поля на оси излучателя от концентрации, рассчитанная для среды с непрерывным распределением пузырьков по радиусам, когда нелинейность определяется резонансными пузырьками.

В заключение заметим, что в среде с пузырьками возможны и более сложные нелинейные явления, связанные с воздействием акустического поля на распределение пузырьков. Одно из таких явлений — «самопросветление» акустических волн [64] — заклю-

¹ Заметим, что нелинейное рассеяние на разностной частоте позволяет зарегистрировать даже одиночные пузырьки [62].

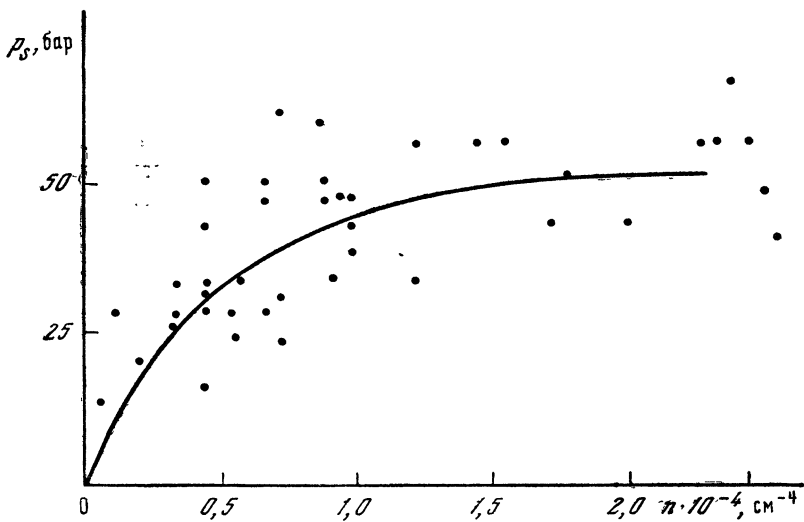


Рис. 11. Амплитуда волны на частоте 14 кГц на расстоянии 24 см от излучателя

Сплошная кривая — расчет, точки — эксперимент

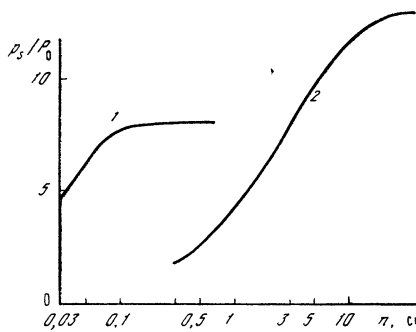


Рис. 12. Зависимость поля на оси параметрического излучателя со сферическими пучками от концентрации пузырьков, резонансных с волной

1 — излучатель диаметром 50 см, $\omega/2\pi = 20$ кГц; 2 — излучатель диаметром 20 см, $\omega/2\pi = 50$ кГц, P_0 — поле на оси в отсутствие пузырьков

чается в падении коэффициента затухания акустической волны с ростом ее интенсивности. Этот эффект обусловлен слиянием пузырьков за счет гидродинамических сил (силы Бьеркнеса) и выходом их из резонанса с акустической волной.

6. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ И РЕЗОНАТОРАХ

Другой путь повышения эффективности нелинейного взаимодействия акустических волн заключается в создании «геометрической» дисперсии, обусловленной наличием границ в акустических волноводах и резонаторах. Заметим, что уже в простом акустическом интерферометре, т. е. резонаторе, образованном двумя параллельными отражающими плоскостями, возникает обратная связь, которая приводит к накоплению нелинейных эффектов в ограниченной области и в случае жестких отражателей к резо-

нансной генерации высших гармоник и образованию ударных волн [65, 66]. В таких системах наблюдалась генерация и более низких частот [67]. Однако ввиду отсутствия дисперсии спектр колебаний в акустическом интерферометре был очень широк и практически неуправляем. Для создания заданной дисперсии было предложено использовать отражатели с частотно-зависимыми свойствами [68].

В последние годы были исследованы резонансные взаимодействия мод в акустических волноводах. Наличие многих мод, обладающих дисперсией, создает разнообразные возможности выполнения резонансных условий для тройки волн без нежелательных потерь энергии в высшие гармоники. Теоретический анализ таких взаимодействий [69] показал, что условия синхронизма могут выполняться при различных типах боковых границ волновода.

Остановимся на случае вырожденного параметрического усиления сигнала на частоте ω в результате взаимодействия с накачкой на частоте 2ω , когда условия синхронизма сводятся просто к равенству фазовых скоростей этих двух волн. В прямоугольном волноводе с твердыми или мягкими стенками это условие выполняется для любой пары мод с индексами $2m$, $2n$ и m , n , где индексы означают числа полуволн, укладываемых по сторонам поперечного сечения волновода. Учитывая, что каждую моду можно представить как суперпозицию наклонных плоских волн, переотражающихся от стенок волновода под соответствующим углом (концепция Бриллюэна), легко видеть, что такие пары мод состоят из плоских волн, распространяющихся под одними и теми же углами. Уже отсюда ясно, что в волноводах с жесткими стенками, где фаза волны при отражении не меняется, происходит накопление нелинейных эффектов вплоть до образования разрывов. В этом случае преобразование энергии вверх по спектру препятствует параметрическому усилению на заданной частоте. В волноводе с акустически мягкими стенками фаза волны давления при отражении меняется на π , что препятствует накоплению нелинейных эффектов. В таком волноводе, возможен и другой вариант выполнения синхронизма [70]:

$$a^2(4n_1^2 - n_2^2) = b^2(m_2^2 - 4m_1^2), \quad |2n_1 - n_2| = 1, \quad (19)$$

где a и b — размеры сечения волновода, соответствующие индексам m и n . Эти условия выполняются, например, при $a/b = \sqrt{3/5}$, $m_1 = n_1 = 1$, $m_2 = 1$, $n_2 = 3$. Физически это означает, что, хотя плоские волны, соответствующие модам m_1 , n_1 и m_2 , n_2 , распространяются под разными углами, резонансное взаимодействие между ними возможно, поскольку рассинхронизм из-за неколлинеарности волн компенсируется сдвигом фаз при отражении от свободной границы.

Именно такая система была реализована экспериментально первой в виде прямоугольного волновода с тонкими латунными стенками, заполненного водой или спиртом [71]; жесткие отражатели на концах превращали его в параметрический генератор звука (ПГЗ). При включении накачки на частоте 84 кГц (мода 1, 3)

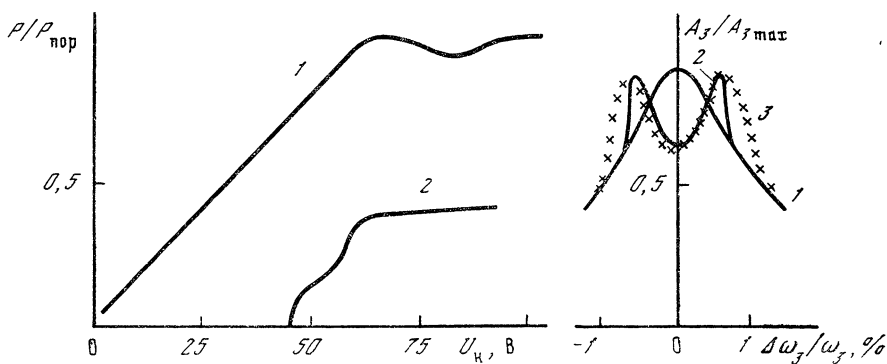


Рис. 13. Зависимость относительной амплитуды на частоте накачки (кривая 1) и генерируемого на частоте субгармоники сигнала (кривая 2) от напряжения на излучателе накачки

Рис. 14. Резонансная характеристика системы на частоте накачки

1 — ниже порога параметрической генерации, 2 — при генерации субгармоники, 3 — теория [70]

возникало самовозбуждение на частоте субгармоники (42 кГц) с пространственной структурой, соответствующей моде ($m=n=1$). При этом отбор энергии у накачки был настолько велик, что амплитуда накачки переставала расти с увеличением напряжения на излучателе накачки (рис. 13), а на резонансной кривой появлялся характерный провал (рис. 14).

Аналогичные эффекты были получены в твердотельных волноводах. Такой волновод имеет вид стержня, в котором возбуждаются продольные волны¹. В стержне со свободными торцами накопления нелинейных эффектов не происходит ввиду смены фазы при отражении от границы. Поскольку жесткую границу осуществить в данном случае трудно, проблема была решена с помощью кольцевых резонаторов, в зазор которых вставлялся пьезопреобразователь. В таких резонаторах нелинейная трансформация спектра оказалась весьма эффективной. Здесь снова наблюдалась параметрическая генерация, в том числе прямое преобразование ультразвуковой накачки (частота 30—180 кГц) в слышимый звук (частота 3—14 кГц), и тогда превышение порога параметрической генерации сопровождалось довольно громким звуком. В такой системе наблюдались гистерезисные явления (разные уровни накачки при возникновении и срыве параметрической генерации) [70], аналогично радиотехническим параметронам, где нелинейность значительно сильнее.

В недовозбужденном режиме такой резонатор может быть использован как узкополосный регенеративный параметрический усилитель, в котором коэффициент усиления достигал 24 дБ [73].

¹ Дисперсия в этом случае обусловлена конечностью диаметра стержня; как следует из теории, здесь возможно и существование упругих солитонов [72].

В кольцевой системе наблюдались также более сложные много-частотные режимы, начиная с эффекта самомодуляции накачки и кончая генерацией широкого, почти шумового спектра при возбуждении кольца на сравнительно низкой частоте, где дисперсия достаточно мала.

Следует заметить, что, хотя многие черты поведения твердотельных параметрических генераторов звука описываются в рамках столь же простой теории, как для резонаторов с жидкостью, ряд эффектов явно выходит за рамки такого описания. В частности, экспериментально измеренный порог параметрической генерации оказался почти на порядок ниже предсказанного из обычной пятиконстантной теории упругости; более того, этот порог менялся в зависимости от времени работы генератора и от времени, прошедшего после его выключения (причем время релаксации достигало часа!) [70, 74]. Спектр генерируемого сигнала был гораздо шире предсказанного. Эти аномальные эффекты, вероятно, связаны с микропластичностью, обусловленной движением дислокации в металле под действием акустического поля.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этом кратком обзоре мы, конечно, не могли, да и не стремились удовлетворить требованиям полноты. За его рамками остались такие интересные и активно изучаемые сейчас вопросы, как, например, распространение шумовых сигналов конечной амплитуды, особенности высокочастотной нелинейной акустики твердого тела, успехи нелинейной геометрической акустики и многое другое.

Однако можно думать, что даже то беглое рассмотрение нескольких избранных вопросов нелинейной акустики, которое было дано выше, позволяет судить о богатстве, практической важности и своеобразии ее задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 795 с.
2. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
3. Остроумов Г. А. Основы нелинейной акустики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. 132 с.
4. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
5. Наугольных К. А. — В кн.: Мощные ультразвуковые поля/Под ред. Л. Д. Розенберга. М.: Наука, 1968, с. 5.
6. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е. — Акуст. журн., 1976, 22, № 4, с. 487.
7. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. — Акуст. журн., 1969, 15, № 1, с. 40.
8. Allen C. H. Finite-amplitude distortion in a spherically diverging sound wave in air: Ph. D. thesis. Pennsylvania State Univ., 1950.
9. Буров В. А., Красильников В. А. — Докл. АН СССР, 1959, 124, N 3, с. 571.

10. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В. — Докл. АН СССР, 1975, 225, № 5, с. 1053.
11. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. — Акуст. журн., 1976, 22, № 4, с. 487.
12. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. — Акуст. журн., 1978, 24, № 1, с. 21.
13. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В. — Акуст. журн., 1973, 19, № 6, с. 871.
14. Островский Л. А. — Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 5/6, с. 661.
15. Островский Л. А., Фридман В. Е. — Акуст. журн., 1972, 18, № 4, с. 584.
16. Lockwood J. C., Muir T. D., Blackstok D. T. — J. Acoust. Soc. Amer., 1973, 53, N 4, p. 1148.
17. Shooter J. A., Muir T. G., Blackstok D. T. — J. Acoust. Soc. Amer., 1974, 55, N 1, p. 54.
18. Островский Л. А., Сутин А. М. — Акуст. журн., 1977, 23, № 1, с. 174.
19. Brouning D. G., Mellen R. H. — J. Acoust. Soc. Amer., 1968, 44, N 2, p. 644.
20. Островский Л. А., Сутин А. М. — Акуст. журн., 1976, 22, № 1, с. 93.
21. Theobald M. A., Webster D. A., Blackstok D. T. — In: Abstr. Pap. 7th Intern. Symp. Nonlinear Acoust. Blacksbouurg (U. S. A.), 1976, p. 218.
22. Островский Л. А., Сутин А. М. — Докл. АН СССР, 1975, 221, № 6, с. 1300.
23. Сутин А. М. — Акуст. журн., 1978, 24, № 4, с. 593.
24. Каневский И. Н. Фокусирование звуковых и ультразвуковых волн. М.: Наука, 1977. 336 с.
25. Хаминов Д. В. — Акуст. журн., 1957, 3, № 3, с. 294.
26. Smith C. W., Beyer R. T. — J. Acoust. Soc. Amer., 1969, 46, N 3, p. 806.
27. Борисов Ю. Я., Гынкина И. М. — Акуст. журн., 1973, 19, № 4, с. 616.
28. Westervelt P. J. — J. Acoust. Soc. Amer., 1963, 35, N 4, p. 535.
29. Мюир Т. Д. — В кн.: Акустика морских осадков. М.: Мир, 1977, с. 227.
30. Урик Р. Д. Основы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1978. 445 с.
31. Muir T. G. — In: Abstr. Pap. 7th Intern. Symp. Nonlinear Acoust. Blacksbouurg (U. S. A.), 1976, p. 104.
32. Hovak H., Vesterheim M. — В кн.: Труды VI Междунар. симпоз. по нелинейной акустике. М.: Изд-во МГУ, 1976, т. 1, с. 272.
33. Konrad W. L. Finite-amplitude wave effects in fluids: Proc. 1973 Symp. Copenhagen: L. Bjorno, 1974, p. 180.
34. Буханевич Н. Ф., Рыбачек М. С., Тимошенко В. И. — В кн.: Второе Всесоюзное научно-техническое совещание «Нелинейная гидроакустика-76». Таганрог, 1976, с. 66.
35. Fenlon F. H. — Acoust. Soc. Amer., 1974, 55, N 1, p. 35.
36. Дунина Т. А., Есинов И. Б., Козяев Е. Ф. — В кн.: Труды VI Междунар. симпоз. по нелинейной акустике. М.: Изд-во МГУ, 1976, т. 2, с. 298.
37. Новиков Б. К., Руденко О. В., Солуян С. И. — Акуст. журн., 1975, 13, № 4, с. 551.
38. Новиков Б. К., Рыбачек М. С., Тимошенко В. И. — Акуст. журн., 1977, 23, № 4, с. 621.
39. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Сухорукова А. К. — Акуст. журн., 1977, 23, № 4, с. 596.
40. Berktau H. O., Leachy D. Y. — J. Acoust. Soc. Amer., 1974, 55, N 3, p. 539.
41. Бломберген Н. Нелинейная оптика/ Пер. с англ. под ред. С. А. Ахманова, Р. В. Хохлова. М.: Мир, 1966. 424 с.
42. Сутин А. М. — Акуст. журн., 1978, 24, № 1, с. 104.
43. Гурбатов С. Н., Демин И. Ю., Сутин А. М. — Акуст. журн., 1979, 25, № 4, с. 515.
44. Moffett M. B., Willette J. G., Konrad W. L. — В кн.: Труды VI Междунар. симпоз. по нелинейной акустике. М.: Изд-во МГУ, 1976, т. 1, с. 308.
45. Есинов И. Б., Зеерева В. А., Калачев А. И., Наугольных К. А. — Акуст. журн., 1976, 22, № 4, с. 606.

46. *Clynch J. R., Muir T. G.* — In: Abstr. Pap. 7th Intern. Symp. Nonlinear Acoust. Blacksburg (U. S. A.), 1976, p. 133.
47. *Muir T. G.* — Naval Res. Rev., 1975, 28, N 5, p. 1.
48. *Muir T. G., Vestrheim M.* — In: Abstr. 8th Intern. Symp. Nonlinear Acoust. Paris, 1978, p. 33.
49. *Наугольных К. А.* — В кн.: Нелинейные волны/ Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979, с. 324.
50. *Lighthill M. J.* — Proc. Roy. Soc. London, 1952, A211, p. 564.
51. *Наугольных К. А., Рыбак С. А.* — Тр. Акуст. ин-та, 1971, 16, с. 129.
52. *Haddl G. P., Skudrzyk E. J.* — J. Acoust. Soc. Amer., 1969, 46, N 1/2, p. 130.
53. *Заболотская Е. А., Солюян С. И.* — Акуст. журн., 1967, 13, № 2, с. 296.
54. *Safar M. H.* — In: Proc. 1973 Symp. Copenhagen: L. Vjornio, 1974, p. 174.
55. *Заболотская Е. А., Солюян С. И.* — Акуст. журн., 1972, 18, № 3, с. 472.
56. *Кузнецов В. В., Нагоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* — Акуст. журн., 1977, 23, № 2, с. 273.
57. *Остроумов Г. А., Дружинин Г. А., Крячко В. М., Токман А. С.* — В кн.: Тезисы докл. VI Междунар. симпоз. по нелинейной акустике. М.: Изд-во МГУ, 1975, с. 166.
58. *Гребенкина Л. Г., Дружинин Г. А., Токман А. С.* — В кн.: Доклады IX Всесоюз. акустической конф. М., 1977. Секция Б, с. 43.
59. *Гаврилов Л. Р.* — В кн.: Физические основы ультразвуковой технологии / Под ред. Л. Д. Розенберга. М.: Наука, 1970, с. 395.
60. *Medwin H.* — J. Geophys. Res., 1977, 82, N 6, p. 971.
61. *Колобаев П. А.* — Океанология, 1975, 15, № 6, с. 1013.
62. *Зверев В. А., Кобелев Ю. А., Селивановский Д. А., Соколов А. Ю.* — ЖТФ, 1980, 50, № 4.
63. *Козлев Е. Ф., Наугольных К. А.* — Акуст. журн., 1980, 26, № 1, с. 91.
64. *Кобелев Ю. А., Островский Л. А., Сутин А. М.* — Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, № 7, с. 423.
65. *Островский Л. А.* — Акуст. журн., 1974, 20, № 1, с. 140.
66. *Канер В. В., Руденко О. В.* — Вестник МГУ. Физика и астрономия, 19, № 4, с. 78.
67. *Adler L., Breazeal M. A.* — J. Acoust. Soc. Amer., 1970, 48, N 5, p. 1077.
68. *Зарембо Л. К., Сердобольская О. Ю.* — Акуст. журн., 1974, 20, № 5, с. 726.
69. *Островский Л. А., Папилова И. А.* — Акуст. журн., 1973, 19, № 1, с. 67.
70. *Ostrovsky L. A., Soustova I. A., Sutin A.* — Acustica, 1978, 39, N 5, p. 298.
71. *Островский Л. А., Папилова И. А., Сутин А. М.* — Письма в ЖЭТФ, 1972, 15, № 8, с. 456.
72. *Островский Л. А., Сутин А. М.* — Прикл. математика и механика, 1977, 41, № 3, с. 531.
73. *Островский Л. А., Папилова И. А., Сутин А. М.* — ЖТФ, 1973, 43, № 10, с. 2213.
74. *Островский Л. А., Соустова И. А., Сутин А. М.* — В кн.: Доклады IX Всесоюз. акустической конф. М., 1977. Секция Б, с. 107.

УДК 550.345

ВОЛНЫ ЦУНАМИ

Е. Н. ПЕЛИНОВСКИЙ

«. . .Поднялась к небу волна высоты неизмеримой, закрыла грудью половину неба и, качая белым хребтом, согнулась, переломилась, упала на берег и страшной тяжестью своею покрыла трупы, здания, обломки, раздавила, задушила живых и, не удержавшись на берегу, хлынула назад, увлекая за собою все

схваченное — лодки, двери, мебель, женщин, детей . . . смыла весь берег и, отступая далеко в море, снова, уже обессиленная, ударилась о скалы, добывая тех, кто еще был жив. . .»¹.

Описанное в этом отрывке бедствие вызвано волнами цунами. Дословный перевод этого термина с японского языка означает «большая волна в гавани». Сейчас под волнами цунами принято понимать морские волны, вызванные подводными землетрясениями, падением в воду обломков скал и метеоритов, резким изменением метеорологических факторов, взрывами подводных вулканов и атомных бомб и т. п. Характерная длительность волн цунами составляет 10—100 мин, а длина 10—600 км. Это очень длинные (по сравнению с глубиной океана) волны, и в первом приближении они описываются известными уравнениями теории «мелкой воды», неоднократно приводившимися на Горьковских школах:

$$\begin{aligned} \partial\eta/\partial t + \operatorname{div}(hu) &= Q_1 \{ \dots \}, \\ \partial u/\partial t + g\nabla\eta &= Q_2 \{ \dots \}, \end{aligned} \quad (1)$$

где η — возвышение поверхности воды, u — горизонтальная скорость частиц воды, h — невозмущенная глубина океана, g — ускорение свободного падения и $Q_{1,2}$ — функционалы, определяющие нелинейные и дисперсионные свойства волн цунами, неровности дна океана, неоднородности поля плотности и т. п. Прежде чем обсуждать физико-математические аспекты проблемы цунами, приведем здесь необходимые сведения о волнах цунами, заимствованные из [1—22].

Высота волн цунами может быть очень велика. Наибольшая зарегистрированная высота заплеска цунами составила 524 м. Это случилось на Аляске 10 июля 1958 г., когда со склонов горы Фейрузер с высоты 900 м в бухту Литуя сошла лавина, содержащая 300 млн. м³ породы. При этом волны цунами накрыли островок Сенотаф, полностью смыв лес и почву [8, 9]. Указанное значение высоты заплеска является рекордным, более типичны высоты волн меньше 50 м [1, 2].

Подавляющее большинство цунами зарегистрировано в Тихом океане (примерно 1000), в Атлантическом и Индийском океанах цунами возникали не более 100 раз [13]. Большая часть цунами связана с сейсмичностью океанов. Как известно, каждый год в мире происходит примерно 10⁵ землетрясений, из них 150 опасных² [8, 9, 11]. Из ежегодно гибнущих в результате стихийных

¹ Горький М. Землетрясение в Калабрии и Сицилии. — Полн. собр. соч.: В 25-ти т. М.: Наука, 1971, т. 11, с. 244.

² В статистике мировых бедствий наибольший ущерб причиняют наводнения (40%), на втором месте — тропические циклоны (20%), однако по числу человеческих жертв циклоны являются наиболее губительными, а на третьем-четвергом — землетрясения, засуха (по 15%) [10].

бедствий 250 тыс. человек (средние цифры) на долю землетрясений и цунами приходится 10 тыс. [9]¹. За период 1947—1970 гг. от волн цунами погибло около 15 тыс. человек [7—9]. Согласно прогнозам потери от цунами до 2000 г. составят примерно 40 млн. долларов [9]. Список крупных зарубежных цунами за последние сто лет приведен в табл. 1. Вообще надо сказать, что последние годы оказались «урожайными» не только на цунами, но и на сухопутные землетрясения. В эти годы прошли такие землетрясения, как Гватемальское (1976) — 22 тыс. погибших [10], Румынское (1977) — 1541 жертва [10], Югославское (1979) — более сотни человек погибших и, наконец, крупнейшее землетрясение в Китае (1976) — 650 тыс. погибших [9].

Таблица 1
Крупные цунами за последние 100 лет

Дата	Район	Высота волны на берегу, м	Число жертв	Литература
26.VIII.1883 г.	Индонезия	45	36 тыс.	[1]
15.VI.1896 г.	Япония	24	27 тыс.	[1]
2.III.1933 г.	Япония	20	3 тыс.	[1]
22.V.1960 г.	Чили	25	10 тыс.	[2]
27.III.1964 г.	Аляска	30	119	[2]
16.VIII.1976 г.	Филиппины	5	8 тыс.	[14]
19.VIII.1977 г.	Индонезия	5,5	150	[15]
12.IX.1979 г.	Индонезия	10	100	[20]
6.XII.1979 г.	Колумбия	5	300	[20]

В СССР самое разрушительное цунами было 4 ноября 1952 г., когда волной цунами высотой порядка 10 м причинен ущерб г. Северо-Курильску на острове Парамушир. Эта катастрофа была столь необычной, что радист одного из судов, стоящих на рейде Северо-Курильска, передал в эфир: «Остров Парамушир погружается в воду океана» [8]. Хотя землетрясения в Курило-Камчатской зоне происходят довольно часто (так, 6 декабря 1978 г. вблизи острова Шикотан произошло крупнейшее землетрясение за последние 20 лет), фактически жертв от цунами после 1952 г. уже не было, и здесь решающую роль сыграла советская служба оповещения о цунами, созданная в 1959 г. [5].

Считается, что в далекой древности, около 35 веков назад, землетрясения и цунами были ответственны за гибель Атлантиды. По современным представлениям Атлантида находилась в Эгейском море (острова Тир и др.). Остров Тир — это вулканический остров, взрыв которого и привел к гибели Атлантиды, при этом мощные цунами уничтожили соседние острова [9]. Взрывы подводных вулканов до сих пор служат причиной возникновения

¹ Приходится, к сожалению, констатировать, что в результате технического прогресса к стихийным бедствиям можно отнести также автомобильные и авиационные катастрофы (соответственно 250 и 2,5 тыс. погибших в год) [7].

волн цунами. Самый страшный пример — взрыв вулкана Кракатау 26 августа 1883 г. Небольшой островок около Индонезии размерами 5×10 км взлетел на воздух почти на 25 м, а затем упал в Зондский пролив, образовав цунами высотой до 45 м (36 тыс. человек погибло) [11]. Эта катастрофа оценивается энергией 250 тыс. атомных бомб типа хиросимской (энергия одной бомбы составляет $8 \cdot 10^{13}$ Дж) [7, 11]. Последний раз взрыв вулкана наблюдался на острове Харимкатан (Курильская гряда) 8 января 1933 г. (волны цунами достигали 9 м высотой) [6] и на скалах Байонез (Япония) 20 сентября 1952 г., при этом взрыв вулкана привел к гибели НИС «Кюое-мару-5» [16].

Стоит отметить также возможность создания искусственных цунами при взрыве атомных и водородных бомб. В частности, во время американских испытаний вблизи атолла Бикини (1 марта 1954 г.) высота волны цунами на расстоянии 500 м от эпицентра достигла 54 м [6—9].

Специально о Горьковском (Нижегородском) цунами 1596 г. Отрывок из летописи: «Вверх и вниз по Волге всего на версту появились щели великие. Монастырь стоял на большой горе. И почала гора осыпаться с лесом. И начал быти шум великий и треск от лесу. И обвалилась та гора в Волге и учинились в Волге бугры великие» [17].

Такова краткая хронология цунами. Наиболее эффективной защитой от волн цунами является отвод людей и флота от побережья. В задачу созданных в ряде стран (Япония, США, СССР) специальных служб как раз и входит предупреждение населения о приближении волн цунами. Работа службы цунами основана сейчас на сейсмическом магнитудном принципе: если магнитуда¹ землетрясения с очагом под дном Тихого океана превышает некоторое пороговое значение, то считается вероятным возникновение волн цунами, и в зависимости от местных условий, возможности получения подтверждения о движении волн цунами объявляется состояние тревоги. Поскольку скорость сейсмических волн велика (несколько километров в секунду), то тревога должна быть объявлена очень быстро, что имеет немаловажное значение, так как волны цунами добегают до Курильских островов от зоны разлома (где как раз и происходят многочисленные землетрясения) за 10—60 мин. Пороговое значение магнитуды варьируется в диапазоне 6—7 для различных участков побережья. К сожа-

¹ Под магнитудой по Рихтеру понимают десятичный логарифм амплитуды наибольшей сейсмической волны (в микронах), записанной стандартным сейсмографом на расстоянии 100 км от эпицентра. По магнитуде M можно представить себе энергию, выделившуюся при землетрясении. Наиболее распространена следующая формула связи:

$$M = (1/1,8) \lg (E/E_0), \quad E_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Так, $M = 6$ соответствует $E \approx 10^{15}$ Дж, что примерно на порядок больше энергии хиросимской атомной бомбы. Именно землетрясения с $M > 6$ опасны с точки зрения возникновения волн цунами. При этом в цунами преобразуется не более 0,1 энергии, выделившейся при землетрясении.

лению, эффективность службы цунами как в СССР, так и за рубежом очень низка. Так, вероятность правильного предсказания волн цунами по уровню $M=6$ не превышает $1/20$, а по уровню $M=7,5$ не превышает $1/4$ [5, 8]. Из-за низкой эффективности велики потери (стоимость ложной тревоги превышает 100 тыс. руб.)¹ [5]. Еще более опасным представляется возникающее недоверие к службе цунами, что уже привело к трагедии в г. Хило (Гавайские острова) при Чилийском цунами 1960 г. Несмотря на объявленную тревогу, 15% жителей игнорировали требования службы цунами, в результате чего погибли 61 и серьезно ранены 282 человека [8].

Из сказанного ясна необходимость проведения научных исследований по проблеме цунами. Эти исследования ведутся по следующим направлениям.

1. Поиск признаков цунамигенности землетрясений по характеристикам сейсмических волн. Например, спектр объемных волн цунамигенных землетрясений сдвинут в длинноволновую сторону. В случае успеха можно будет предсказать возникновение волн цунами сразу после землетрясения.

2. Исследование других типов волн, скорость которых существенно превышает скорость морских волн. Эти волны могли бы являться предвестниками волн цунами. В частности, таковыми являются гидроакустические волны, называемые фазой T , и атмосферные гравитационные волны. Последние наблюдались во время Итурупского (1958), Чилийского (1960), Аляскинского и Нигатского (1964) землетрясений.

3. Измерение параметров волн цунами в открытом океане непосредственно вблизи очага. Если бы это удалось сделать, то возникновение волн цунами можно было бы предсказывать с достоверностью еще на значительном удалении волны от побережья. Основная трудность здесь в разработке методов регистрации волн цунами в открытом океане (создание автономных систем, выделение волн цунами на фоне других океанических процессов и т. п.). Обсуждается даже возможность регистрации волн цунами из космоса. Исследование волн цунами в открытом океане явилось предметом двух советско-американских экспедиций (1975 и 1978 гг.) [21, 22], во время которых отработывались методы регистрации крупномасштабных океанических процессов.

Даже если о возникновении волн цунами в очаге мы будем знать достоверно (когда это еще будет?), то необходимо еще связать характеристики волн цунами в открытом океане и на берегу. Определение размеров затопляемой зоны побережья важно как для оперативного (краткосрочного) прогноза цунами, когда требуется оценить конкретное землетрясение, так и для долгосрочного прогноза, необходимого для формирования экономиче-

¹ При средней экономике в 1 млн. руб. в случае оправдывающейся тревоги и годовой стоимости службы в 100—200 тыс. руб. [5].

ской политики в данном районе. Решение указанной задачи, очевидно, должно быть получено с помощью гидродинамических методов, и, следовательно, четвертой важной задачей является совершенствование методов гидродинамических расчетов.

По существу, на этом заканчивается популярное введение в проблему цунами, занявшее столь много места из-за непривычности проблемы для большинства слушателей Горьковских школ. Учитывая только «нелинейность» наших школ, более подробно остановимся на нелинейных и дисперсионных аспектах проблемы цунами.

Накопленный материал о волнах цунами, данные гидро- и электромоделирования, численные расчеты указывают на нелинейный и дисперсионный характер распространения волн цунами. Перечислим некоторые данные.

1. Затухание волн цунами в открытом океане происходит, как правило, быстрее, чем это следует из известного закона $H \sim r^{-1/2}$ для цилиндрических волн, вытекаемого из (1) при $Q=0$ (H — высота волны, r — расстояние от очага). На рис. 1 приведены данные об ослаблении волн цунами с расстоянием для двух цунамигенных землетрясений (Санрику, 2 марта 1933 г. и Токаси, 17 мая 1968 г.) [23], подтверждающие сказанное.

2. При моделировании процесса возбуждения волн цунами поршневыми подвижками дна (наиболее распространенная модель) известны случаи, когда последовательное движение нескольких поршней приводит к большим высотам волн, чем сумма высот от каждого последовательного толчка [4].

3. Результаты лабораторных и численных экспериментов свидетельствуют в пользу распада волны цунами на последовательность уединенных волн — солитонов [24—27]. Этот процесс иллюстрируется рис. 2, взятым из [25].

4. Изменение высоты волны с уменьшением глубины во многих случаях происходит быстрее, чем это следует из закона Грина $H \sim h^{-1/4}$, соответствующего постоянству потока энергии без учета отражения волновой энергии [24, 28—35]. Данные разных авторов представлены на рис. 3.

5. При вхождении волн цунами в устье рек (долины рек, как правило, способствуют проникновению волн цунами далеко в глубь побережья) часто образуются ударные волны (гидравлический прыжок или бор). Типичная запись такого процесса в устье реки Агано при Ниигатском землетрясении 16 июня 1964 г. приведена на рис. 4, взятом из [36].

В то же время используемые в практической работе методы расчета пока основаны на линейной теории мелкой воды и не могут объяснить приведенные выше факты. Наиболее подходящими для этой цели являются широко известные в теории нелинейных волн уравнения типа Буссинеска, Кортевега—де Вриза, Бюргера и их модификации. Действительно, если рассмотреть характеристики солитона (впервые солитон, как известно, наблю-

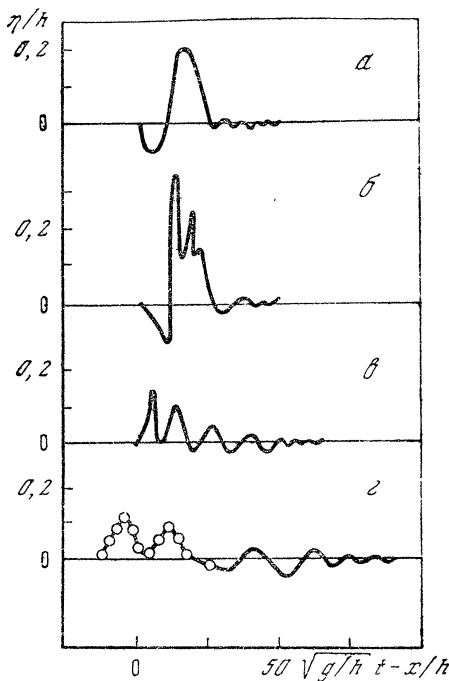
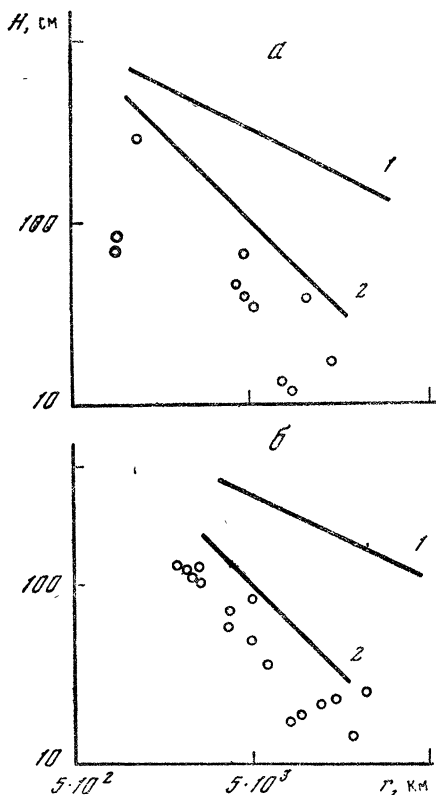


Рис. 1. Убывание максимальной высоты волны цунами с удалением от очагов для землетрясений Санрику, 2.III.1933 г. (а) и Токаси, 17.V.1968 г. (б) Сплошные линии — теоретические законы для линейных недисперсионных волн $H \sim r^{-1/2}$ (1) и дисперсионных волн $H \sim r^{-1}$ (2)

Рис. 2. Распад начального импульса на солитоны — эксперимент в гидрлотке глубиной $h=5$ см

Точки — результаты численного интегрирования уравнения Кортевега—де Вриза; а — $x=0$, б — $x=20h$, в — $x=200h$, г — $x=400h$

дался в 1844 г., а теоретически описан в 1871 г.), которые следуют из известного решения

$$\eta = H \operatorname{sch}^2 \sqrt{\frac{3H}{4h} \frac{x - \sqrt{g(h+H)}t}{h}}, \quad (2)$$

в частности, подсчитать длину солитона (на уровне $0,5H$) для реальных значений глубины океана и высоты волны (табл. 2), то оказывается, что такие параметры характерны для волн цунами (ср. с данными о реальных цунами¹, приведенными в табл. 3 [37]).

¹ Параметры волн цунами в очаге обычно восстанавливаются по данным о волнах цунами на берегу и сейсмическим данным о площади, где про-

Таблица 2

Длина солитона (в км) при различных глубинах океана и высотах волн H

H , м	h , м					H , м	h , м				
	10	50	100	1000	3000		10	50	100	1000	3000
1	0,063	0,70	2,0	6,3	330	5	0,028	0,32	0,9	28	147
2	0,045	0,50	1,4	45	232	10	—	0,22	0,63	20	104
3	0,036	0,40	1,1	36	190	20	—	0,16	0,45	14	73
4	0,032	0,35	1,0	32	164						

Таблица 3

Данные о реальных цунами

Землетрясение (дата)	M	$E \cdot 10^{-16}$, Дж	$S_0 \cdot 10^{-3}$, км ²	$l \cdot 10^{-2}$, км	H_0 , м
Канто (1.IX.1923 г.)	7,9	0,16	12	1,1	1,6
Аомари (9.III.1931 г.)	7,0	0,002	0,4	0,2	1,0
Санрику (3.III.1933 г.)	8,3	16	57	2,4	8
Ибараки (5.XI.1938 г.)	7,7	0,25	8,8	0,94	2,4
Фукусима (14.XI.1938 г.)	7,0	0,047	1,6	0,4	2,4
Фукусима (22.XI.1938 г.)	6,7	0,04	3,1	0,56	1,6
Тонанкай (7.XII.1944 г.)	8,0	8,4	14	1,18	11
Найкайдо (21.XII.1946 г.)	8,1	8,0	46	2,1	1,0
Токачи (4.III.1952 г.)	8,1	3	3,7	0,6	12,8
Камчатка (4.XI.1952 г.)	8,2	15	60	2,45	7,1
Бово (26.XI.1953 г.)	7,5	0,7	10	1	3,8
Чили (22.V.1960 г.)	8,5	75	138	3,7	10
Итуруп (13.X.1963 г.)	7,9	1,2	42	1,05	2,3
Ниигата (16.VI.1964 г.)	7,4	0,2	2,7	0,52	3,9

Обозначения: E — энергия цунами, S_0 — площадь начального возмущения. l — средний размер возмущения, H_0 — высота волны в очаге.

На основе указанных уравнений может быть изучен широкий класс явлений, связанных с распространением волн цунами [25, 27, 32—34, 36, 43—53]. Не будем, однако, обсуждать эти вопросы, поскольку используемая здесь техника сейчас широко применяется в физике нелинейных волн и частично излагалась на Горьковских школах [54—57]. Более подробно рассмотрим

является сейсмическая активность. Очевидно, что задача восстановления поля в очаге — обратная задача для волнового уравнения — еще не имеет удовлетворительного решения, это приводит к большому разбросу данных (ср. данные [37—39]). Приведенные здесь результаты вычислений Хатори [37] наиболее убедительны. Средний размер очага вычислен для оценки как корень квадратный из площади, хотя более предпочтительной является аппроксимация очага в виде эллипса. Теоретические модели генерации волн цунами сейсмическими источниками [40—42] еще не нашли своего убедительного подтверждения данными реальных цунами.

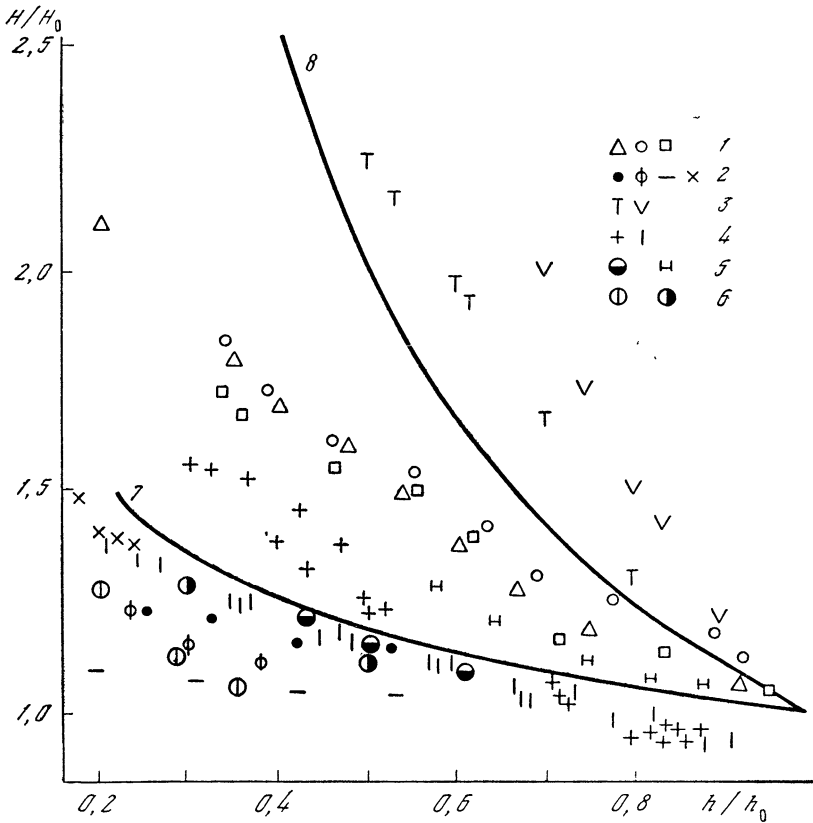


Рис. 3. Данные разных авторов об изменении высоты волны с уменьшением глубины

1 — данные [24], 2 — [28, 29], 3 — [30], 4 — [31], 5 — [32], 6 — [35]. Сплошные линии — теоретические зависимости: 7 — для линейных недисперсионных волн $H \sim h^{-1/4}$; 8 — для солитона в рамках обобщенного уравнения Кортевега—де Вриза $H \sim h^{-1}$

только одну важную в практическом отношении задачу наката волны цунами. Это интересно и в теоретическом отношении и, насколько известно, не имеет аналогов в других разделах физики.

Экспериментально процесс наката морских волн на берег изучается уже сравнительно давно. Сейчас принято выделять следующие характерные типы разрушения волн на мелководье [58]:

а) «расплескивающийся» бурун (spilling) — пузырьки и пена стекают по переднему склону волны, характерен при малых уклонах дна и высотах волн;

б) «ныряющий» бурун (plunging) — вершина волны обгоняет подножие и наклонена вниз, характерен при больших уклонах дна и высотах волн;

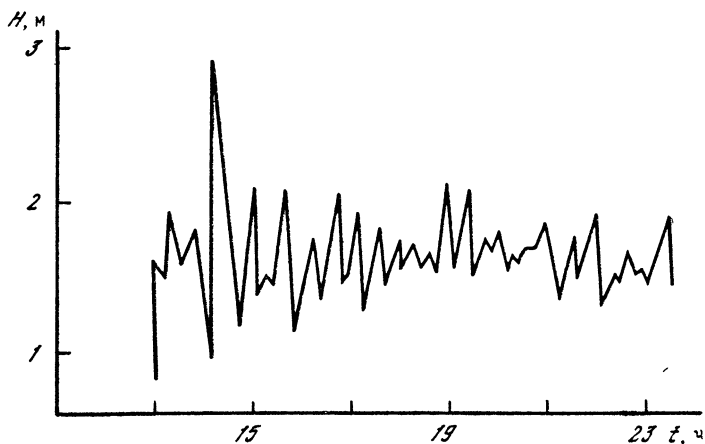


Рис. 4. Мареограмма цунами, вызванного Ниигатским землетрясением (16.VI.1964 г. в 13 ч 20 мин), полученная в устье реки Агаю

в) «коллапсирующий» бурун (collapsing) — волна разрушается вблизи подножия, характерен при еще больших значениях уклонов дна и высот волн;

г) «вздымающийся» бурун (surging) — волна практически без разрушения, характерен при больших уклонах дна и высотах волн.

Типы разрушений волн и вероятность их появления в зависимости от крутизны волны и уклона дна иллюстрируются рис. 5, взятым из [58]. Физически различие в типах разрушений можно пояснить следующим образом. Ясно, что при малых уклонах дна основное влияние на волновой процесс оказывают нелинейность и дисперсия, стабилизируя «солитонную» форму волны. Из-за уменьшения глубины высота волны растет, и этот процесс может быть описан в рамках обобщенного уравнения Кортевега—де Вриза [59—64]. Основным результатом здесь — высота волны растет с уменьшением глубины как h^{-1} (см. рис. 3), значительно быстрее, чем в линейной теории, из-за более сильного сокращения длины волны. Когда высота волны достигает критической ($H/h \approx 0,78$), верхушка волны становится неустойчивой и срывается с гребня. Очевидно, что эта верхушка не должна оказывать заметного влияния на эволюцию основной части волны и, следовательно, можно ожидать, что и после начала разрушения волна близка к солитону, амплитуда которого падает как $0,78h$. Теоретическое описание процесса, основанное, в сущности, на этих идеях [64, 65], как раз и охватывает стадию «расплескивающегося» буруна.

С увеличением угла откоса уменьшающаяся дисперсия (параметр дисперсии h^2/λ^2) не успевает компенсировать нелинейность (параметр нелинейности H/h), которая становится главенствующей. Очевидно, что при этом форма волны не может быть стацио-

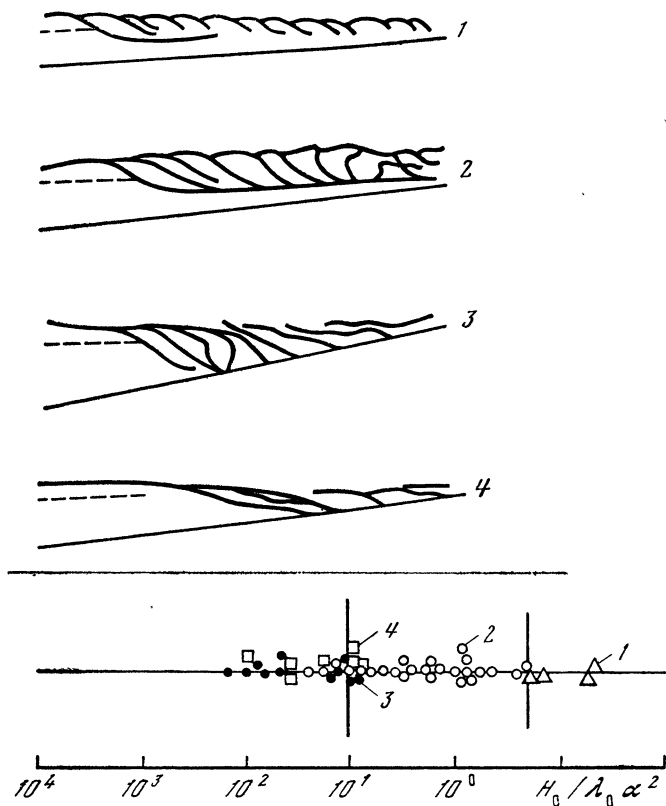


Рис. 5. Типы разрушений волн на мелководье

1 — «расплескивающийся» бурун, 2 — «ныряющий» бурун, 3 — «коллапсирующий» бурун, 4 — «вздымающийся» бурун (H_0/λ_0 — начальная крутизна волны, α — угол откоса)

нарной, верхушка волны обгоняет подножие и волна опрокидывается. Это типично нелинейный процесс в средах без дисперсии — образование ударной волны, и соответствует он стадиям «ныряющего» и «коллапсирующего» бурунов. Аналитическое описание движения римановой волны в неоднородной среде с учетом отражения, как известно, отсутствует. Поэтому здесь разрабатываются численные методы [66—68], выполнены отдельные модельные расчеты, показывающие немонотонность характера изменения высоты волны: ее первоначальное возрастание из-за уменьшения глубины и последующее убывание из-за диссипации на фронте ударной волны [68, 69].

И наконец, при еще больших углах откоса нелинейность важна только в узкой области вблизи береговой линии, однако из-за ее узости нелинейность не успевает привести к обрушению волны, и волна накатывается на берег, подтапливая его без обрушения. Это стадия «вздымающегося» буруна.

С точки зрения физика последняя стадия представляется наиболее простой, поскольку из-за отсутствия обрушения и дисперсии уравнения мелкой воды должны быть справедливы в любой момент времени, так что имеется математическая модель явления. Впервые это обстоятельство использовано в 1957 г. Карриером и Гринспэном [70], сумевшими найти решение этой задачи. Коротко ход их рассуждений выглядит следующим образом. Нелинейные уравнения мелкой воды

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [h(x) \mathbf{u}] + \frac{\partial}{\partial x} (\eta \mathbf{u}) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

в случае $h = \alpha x$ преобразованием Лежандра приводятся к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} = 0, \quad (4)$$

и искомые физические переменные связаны с новыми соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\sqrt{g \alpha l_0}}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \eta = \alpha l_0 \left[\frac{1}{4} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right)^2 \right], \\ x &= l_0 \left[\frac{1}{4} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{\sigma^2}{16} - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right)^2 \right], \\ t &= \sqrt{\frac{l_0}{\alpha g}} \left[\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где l_0 — произвольная константа. Легко видеть из (5), что $\sigma^2 = 16 (\alpha l_0)^{-1} (h + \eta)$, следовательно, уравнение (4) имеет смысл только на плоскости $\sigma \geq 0$, причем $\sigma = 0$ соответствует подвижной границе заплеска.

Частным решением (4) является

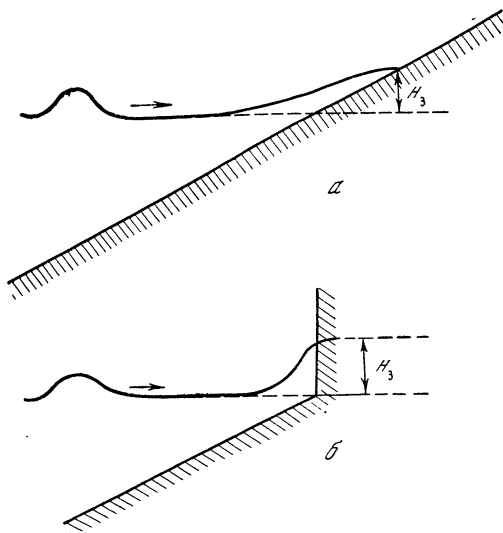
$$\Phi(\sigma, \lambda) = A J_0(\sigma) \cos \lambda, \quad (6)$$

где A — также произвольная константа. Рассмотрим сначала асимптотику решения при больших σ . Из (5) при $\sigma \rightarrow +\infty$ следует $x = -l_0 \sigma^2 / 16$, $t = \lambda \sqrt{l_0 / \alpha g} / 2$ (отсюда виден физический смысл σ и λ). Легко видеть, что при $\sigma \rightarrow +\infty$ решение (6) представляет собой стоячую гармоническую волну (как и в линейной теории). Поэтому, вводя высоту падающей волны H_0 и длину волны λ_0 в точке $x = x_0$, достаточно удаленной от уреза, можно выразить через них две константы A и l_0 , так что решение становится полностью определенным из граничных условий линейной теории. Величину заплеска можно получить из (5) и (6) при $\sigma = 0$:

$$x = -\frac{A l_0}{4} \left(\sin \lambda + \frac{A}{2} \cos^2 \lambda \right), \quad t = \sqrt{\frac{l_0}{\alpha g}} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{A}{2} \cos \lambda \right). \quad (7)$$

Эти формулы определяют положение границы затопления суши

Рис. 6. Геометрия задачи о накате волны цунами на берег в нелинейной (а) и линейной (б) постановке



в любой момент времени в параметрической форме. Для практических целей важно знать максимальную величину заплеска, которая теперь уже легко находится из (7) и равна

$$H_3 = \alpha x_3 = 2\pi H_0 (2h_0/\lambda_0)^{1/2}. \quad (8)$$

Таким образом, высота уровня, до которого доходит волна цунами, линейно зависит от высоты падающей волны и как корень квадратный от отношения расстояния до берега ($x_0 = h_0/\lambda$) к длине волны. В [70] рассчитаны также искажения формы волны вблизи уреза. Очевидно, что синусоидальная волна (далеко от уреза) не характерна для цунами. В то же время решение задачи для импульсных возмущений наталкивается на вполне понятные трудности обращения формул (5)¹. Это обстоятельство, по-видимому, и оттолкнуло исследователей от данного метода, так что работа [70] не нашла своего применения в практике расчетов волн цунами. На наш взгляд, однако, ситуация не представляется совсем безнадежной. Ведь для многих целей достаточно знать только максимальный заплеск волны цунами, не интересуясь ее формой. Для нахождения этой величины можно предложить следующую расчетную схему.

Достаточно далеко от берега волна является линейной, так что в этом случае удастся найти в явном виде функцию $\Phi(\sigma, \lambda)$ — фактически это суперпозиция решений (интеграл Фурье) с разными амплитудами и фазами. Заплеск определяется через

¹ И хотя имеются примеры такого решения в явном виде [70, 71], все же исходные постановки для импульсных возмущений в этих параметрах соответствуют редким в практике цунами случаям поршневой подвижки дна непосредственно на урезе.

$\Phi(0, \lambda)$. Тогда из (5) следует, что $x(\sigma, \lambda) = x(\lambda)$. Остается найти максимум этой функции, не заботясь о связи между λ и t . Поскольку обращать переменные не нужно, то вся процедура может быть легко реализована на ЭВМ. Существенно, что начальная форма волны цунами сказывается только на величине численного коэффициента в (8) — функциональные зависимости остаются неизменными. Более того, оказалось возможным ввести линейную модель наката волны цунами [72], суть которой сводится кратко к следующему. Если на урезе поставить вертикальную стенку и решить для такого бассейна линейную задачу, то высота волны на урезе в линейной задаче H_x равна заплеску волны на берег в нелинейной задаче $H_{нх}$ (рис. 6). Такое совпадение не является случайным, а объясняется уже упоминавшейся малой ролью нелинейности, которая не успевает существенно исказить профиль волны, и более важным являются шельфовые эффекты. В рамках линейной теории удастся сравнительно просто исследовать не только заплеск, но и форму волны. В частности, отражение от шельфа приводит к возникновению ондуляций, и импульс «обрастает» осцилляциями. В рамках линейной модели удастся параметризовать накат волны на берег, т. е. написать универсальные формулы, не зависящие от деталей формы начального возмущения, которая, как правило, неизвестна. Так, с точностью примерно 15% для импульсных возмущений численный коэффициент в (8) может быть принят равным пяти [72]. Аналогичная параметризация должна иметь место и в нелинейной модели.

Здесь перечислено только несколько «нелинейных» проблем, связанных с волнами цунами, в решении которых последнее время наблюдается наибольший прогресс.

Автор признателен С. Л. Соловьеву за обсуждение многих вопросов теории и практики цунами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев С. Л., Го Ч. Н. Каталог цунами на Западном побережье Тихого океана. М.: Наука, 1974. 340 с.
2. Соловьев С. Л., Го Ч. Н. Каталог цунами на Восточном побережье Тихого океана. М.: Наука, 1975. 204 с.
3. Соловьев С. Л. Основные данные о цунами на Тихоокеанском побережье СССР 1737—1976 гг. — В кн.: Изучение цунами в открытом океане. М.: Наука, 1978, с. 61—136.
4. Соловьев С. Л. Проблема цунами и ее значение для Камчатки и Курильских островов. — В кн.: Проблема цунами. М.: Наука, 1968, с. 7—50.
5. Соловьев С. Л. Методы предсказания цунами. — Вестн. АН СССР, 1972, 5, с. 72—81.
6. Паняев И. Д. Волны цунами. Л.: Гидрометеоздат, 1965. 108 с.
7. Михно Е. П. Ликвидация последствий аварий и стихийных бедствий. М.: Атомиздат, 1979. 287 с.
8. Святловский А. Е., Силкин В. И. Цунами не будет неожиданным. Л.: Гидрометеоздат, 1973. 125 с.
9. Болт Б. А., Хорн У. Л., Макдоналд Г. А., Скотт Р. Ф. Геологические стихии. М.: Мир, 1978. 439 с.

10. Стихийные бедствия. Изучение и методы борьбы. М.: Прогресс, 1978. 439 с.
11. *Гласс И. И.* Ударные волны и человек. М.: Мир, 1977. 191 с.
12. *Murty T.* Seismic sea waves — tsunami. Sidney: Canada, 1977. 337 p.
13. *Войт С. С.* Волны цунами. — В кн.: Физика океана. М.: Наука, 1973, т. 2, с. 229—254.
14. Tsunami Report, 1976, N 26, p. 4—5.
15. Tsunami News Letters, 1977, 10, N 3, p. 1—3.
16. *Сентивани Е.* Мир океана. Будапешт: Корвина, 1974. 96 с.
17. *Соловьев С. Л.* Цунами. — Техника — молодежи, 1978, 8, с. 38—43.
18. *Jida K., Cox D. C., Pararas-Carayannis G.* Preliminary catalog of tsunamis occurring in the Pacific ocean. — Hawaii Inst. Geophys. Univ. Rept., 1976, N 5. 234 p.
19. *Van Dorn W. G.* Tsunamis. — Contemp. Phys., 1968, 9, N 2, p. 145—164.
20. Tsunami News Letters, 1980, 13, N 1.
21. *Соловьев С. Л., Ланно С. С., Миллер Г.* Организация и проведение советско-американской экспедиции по изучению цунами в открытом океане. — Гидрофизическое исследование океана. Владивосток, 1977, с. 3—8. (Труды Сах. КНИИ; Вып. 54).
22. *Куликов Е. А., Павленко В. Г., Ланно С. С., Рабинович А. Б.* Вторая советско-американская экспедиция по изучению цунами в открытом океане. — Океанология, 1979, 19, № 2, с. 357—358.
23. *Хатори Т.* Метод определения магнитуды цунами. — Волны цунами. Южно-Сахалинск, 1973, с. 86—96. (Труды Сах. КНИИ; Вып. 32).
24. *Григораш З. К.* Опытное исследование уединенной волны в канале переменного сечения. — Тр. Мор. гидрофиз. ин-та, 1955, 5, с. 53—58.
25. *Hamrick J. L., Segur H.* The Korteweg — de Vries equation and water waves. Comparison with experiments. — J. Fluid Mech., 1974, 65, N 2, p. 289—311.
26. *Zabusky N. J., Galvin C. J.* Secondary waves as solitons. — Trans. Amer. Geophys. Union, 1968, 49, p. 209.
27. *Zabusky N. J., Galvin C. J.* Shallow-water waves, the Korteweg—de Vries equation and solitons. — J. Fluid Mech., 1971, 47, N 4, p. 811—824.
28. *Kononkova G. E., Reihrudel A. E.* Experimental study of solitary tsunami waves. — Bull. Roy. Soc. N. Z., 1976, 15, p. 213—220.
29. *Конюккова Г. Е., Рейхрудель А. Э., Нгуен Тхе Тьонг.* Изменение высот и разрушение одиночных волн на плоском береговом откосе. — Вестник МГУ. Сер. 3, Физика, астрономия, 1974, 2, с. 138—146.
30. *Camfield F. E., Street R. L.* Shoaling of solitary waves on small beach. — In: Waterways and Harbors Divices: Proc. Amer. Soc. Civil Eng., 1969, 95, N 1, p. 1—22.
31. *Jppen A. T., Kulin G.* The shoaling and breaking of the solitary waves. — In: Proc. V Conf. on coastal Eng., 1955, p. 27—47.
32. *Peregrine D. H.* Long waves on a beach. — J. Fluid Mech., 1967, 27, N 4, p. 815—827.
33. *Madsen O. C., Mei C. C.* Dispersive long waves of finite amplitude over an uneven bottom. — M. I. T. Hydrodynamics Lab. Techn. Rept., 1969, N 117. 101 p.
34. *Madsen O. C., Mei C. C.* The transformation of a solitary wave over an uneven bottom. — J. Fluid Mech., 1969, 39, N 4, p. 781—791.
35. *Kishi T., Saeki H.* The shoaling, breaking and run-up of the solitary wave on unpermeable rough slopes. — In: Proc. 10th Conf. on Coastal Eng., 1966, 1, p. 322.
36. *Накамура С.* О гидравлическом боре и применении результатов его изучения к проблеме возникновения и распространения цунами. — В кн.: Волны цунами. Южно-Сахалинск, 1973, с. 129—151. (Труды Сах. КНИИ; Вып. 32).
37. *Hatori T.* Vertical displacement in a tsunami source area and the topography of the sea bottom. — Bull. Earthquake Res. Inst., 1966, 44, p. 1449—1473.

38. *Watanabe H.* Studies on the tsunamis on the Sanriku coast of the north-eastern Honshu in Japan. — *Geophys. Mag. Tokyo*, 1964, 32, N 1, p. 1—65.
39. *Jida K.* A relation of earthquake energy to tsunami energy and the estimation of the vertical displacement in a tsunami source. — *J. Earth Sci. Nagoya Univ.*, 1963, 11, N 1, p. 49—67.
40. *Бернштейн В. А.* О механизме и математическом описании процесса возбуждения цунами. — В кн.: *Методы расчета возникновения цунами*. М.: Наука, 1978, с. 5—17.
41. *Гусьяков В. К.* Обзор работ по проблеме возбуждения волн цунами. — В кн.: *Методы расчета возникновения и распространения цунами*. М.: Наука, 1978, с. 18—29.
42. *Подъяпольский Г. С.* Возбуждение цунами землетрясением. — В кн.: *Методы расчета возникновения и распространения цунами*. М.: Наука, 1978, с. 30—87.
43. *Черкесов Л. В.* Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук. думка, 1976. 358 с.
44. *Shen M. C.* Some recent developments in asymptotic method for tsunami wave propagation. — *Bull. Roy. Soc. N. Z.*, 1976, 15, p. 19—28.
45. *Segur H.* The Korteweg—de Vries equation and water waves. — *J. Fluid Mech.*, 1973, 59, N 4, p. 721—737.
46. *Hamack J. L., Segur H.* The Korteweg—de Vries equation and water waves. Oscillatory waves. — *J. Fluid Mech.*, 1978, 84, N 2, p. 337—358.
47. *Hamack J. L., Segur H.* Modelling criteria for long water waves. — *J. Fluid Mech.*, 1978, 84, N 2, p. 359—373.
48. *Shuto N.* Shoaling and deformation of nonlinear long waves. — *Coast. Eng. Jap.*, 1973, 16, p. 1—12.
49. *Nagashima H.* Deformation of nonlinear shallow water. — *Sci. Pap. Inst. Phys. and Chem. Res.*, 1977, 71, N 2, p. 13—44.
50. *Hamack J. L.* A note on tsunamiic: their generation and propagation in an ocean of uniform depth. — *J. Fluid Mech.*, 1973, 60, N 4, p. 769—786.
51. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* Нелинейная эволюция волн типа цунами. — В кн.: *Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами*. М.: Наука, 1977, с. 52—60.
52. *Miles J. W.* On the Korteweg—de Vries equation for a gradually varying channel. — *J. Fluid Mech.*, 1979, 91, p. 181—190.
53. *Железняк М. И.* О численном моделировании трансформации поверхностных волн в жидкости переменной глубины. — В кн.: *Гидромеханика (Респ. межвед. сб.)*. Киев, 1980, с. 11—14.
54. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* Волны на поверхности жидкости. Препринт НИРФИ № 33, Горький, 1973. 37 с.
55. *Островский Л. А.* Приближенные методы в теории нелинейных волн. — *Изв. вузов. Радиофизика*, 1974, 17, № 4, с. 454—476.
56. *Островский Л. А.* Ударные волны и солитоны. — *Изв. вузов. Радиофизика*. 1976, 19, № 5/6, с. 661—690.
57. *Пелиновский Е. Н.* Распространение волн в статически-неоднородном океане. — В кн.: *Нелинейные волны*. М.: Наука, 1979, с. 331—355.
58. *Galvin C. J.* Breaker type classification a three laboratory beaches. — *J. Geophys. Res.*, 1968, 73, N 12, p. 3651—3660.
59. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* Трансформация волн на поверхности жидкости переменной глубины. — *Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана*, 1970, 6, № 9, с. 934—939.
60. *Grimshaw R.* The solitary waves in water of variable depth. — *J. Fluid Mech.*, 1970, 42, N 2, p. 639—656.
61. *Пелиновский Е. Н.* Об эволюции солитона в неоднородной среде. — *ПМТФ*, 1971, 6, с. 80—85.
62. *Johnson R. S.* Some numerical solutions of a variable-coefficient KdV, equation (with application to solitary wave development on a shelf). — *J. Fluid Mech.*, 1972, 54, N 1, p. 81—94.
63. *Miles J. W.* Note a solitary wave in slowly varying channel. — *J. Fluid Mech.*, 1977, 80, N 1, p. 149—152.

64. *Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г.* Изменение высоты одиночной волны большой амплитуды в береговой зоне. — *Океанология*, 1977, 17, № 1, с. 5—9.
65. *Divoky D., Le Mehaute B., Lin A.* Breaking waves on gentle slopes. — *J. Geophys. Res.*, 1970, 75, N 9, p. 1681—1692.
66. *Ляхтер В. М., Милитеев А. Н.* Расчет наката длинных гравитационных волн на откосе. — *Океанология*, 1973, 13, № 1, с. 89—94.
67. *Васильев О. Ф., Гладышев М. Т.* О расчете прерывных волн в открытых руслах. — *Изв. АН СССР. Механика жидкостей и газов*, 1966, 6, с. 184—186.
68. *Keller H. B., Levine D. A., Whitham G. B.* Motion of a bore over a sloping beach. — *J. Fluid Mech.*, 1960, 7, N 2, p. 302—316.
69. *Бернштейн В. А., Марамзин В. Я.* Расчет набегания цунами на берег в зависимости от наклона дна и его шероховатостей. — В кн.: *Волны цунами*. Южно-Сахалинск, 1972, с. 140—145. (Труды Сах. КНИИ; Вып. 29).
70. *Carrier G. F., Greenspan H. P.* Water waves of finite amplitude on a sloping beach. — *J. Fluid Mech.*, 1958, 4, N 1, p. 97—109.
71. *Spielvogel L. Q.* Runup of single waves on a sloping beach. — *J. Fluid Mech.*, 1976, 74, N 4, p. 685—694.
72. *Мазова Р. Х., Пелиновский Е. Н.* Линейная теория набегания волн на берег. — *Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана*, 1980, 16, № 12, с. 1017—1022.

УДК 551.466.63

СИНОПТИЧЕСКИЕ ОКЕАНСКИЕ ВИХРИ В СВЕТЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕДИЦИИ ПОЛИМОДЕ

М. Н. КОШЛЯКОВ, Ю. М. ГРАЧЕВ, В. Х. ЕНИКЕЕВ

В работе [1] была дана сводка экспериментальных результатов по исследованию синоптических океанических вихрей примерно на конец 1976 г. и изложены основы теории вихрей преимущественно в свете линейных моделей волн Россби. В настоящей статье мы не повторяем содержания [1] и отсылаем читателя, не знакомого с предметом, к этой работе.

Период времени, прошедший после написания [1], ознаменовался бурным развитием теоретических и экспериментальных исследований океанских вихрей. Среди экспериментальных исследований особенно выделяется советско-американский эксперимент ПОЛИМОДЕ.

Основные советские работы по ПОЛИМОДЕ были выполнены в период с июля 1977 по сентябрь 1978 г. в Саргассовом море (рис. 1, 2), в районе океана с глубиной 5400 м и почти горизонтальным дном. Костяк советских работ составляли измерения океанских течений на системе из девятнадцати заякоренных буйковых станций, расставленных в узлах гексагональной сетки с шагом в 39 морских миль (72 км) и центром на 29° с. ш., 70° з. д.

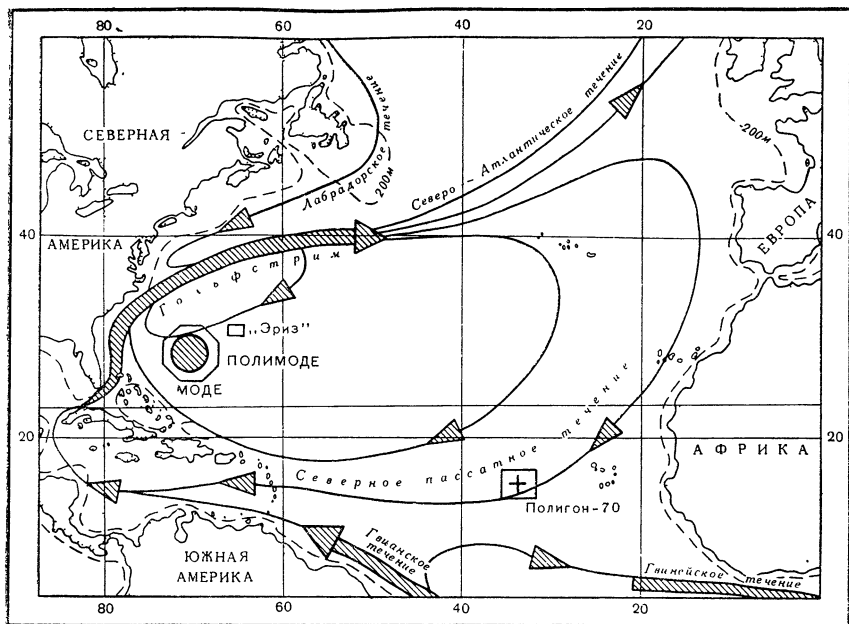


Рис. 1. Схема циркуляции вод в верхнем (толщиной порядка 1000 м) слое Северной Атлантики

Показаны места проведения главных экспедиций, исследовавших синоптические вихри открытого океана

Измерения выполняли на глубинах 100, 400, 700 и 1400 м, что, как видно из рис. 2, соответствует нижней части верхнего однородного слоя (в летний период — слою непосредственно под сезонным пикноклином), нижней части слоя квазиоднородной «воды Саргассова моря», середине главного пикноклина и глубинной воде соответственно. В целях анализа, результаты которого приводятся ниже, все временные ряды скорости были подвергнуты сглаживанию с эффективным периодом в 50 ч, что полностью подавляло инерционные и приливные колебания и практически оставляло нетронутой синоптическую компоненту поля скорости. Предварительный анализ синоптических течений по данным ПОЛИМОДЕ выявил важную роль нелинейных эффектов в формировании особенностей строения и изменчивости поля океанских вихрей [2]; в настоящей статье эти эффекты рассматриваются подробнее и полнее.

Приведенные в таблице средние характеристики поля скорости, так же как и другие его статистические характеристики, о которых речь пойдет ниже, были рассчитаны по всем девятнадцати точкам измерений и по всему более чем годовому периоду наблюдений. Направленное на всех горизонтах на юго-запад слабое течение очень неплохо согласуется с приведенными в [3]

Характеристики синоптических течений на различных горизонтах по данным ПОЛИМОДЕ

$h, \text{ м}$	$\bar{u}, \text{ см/с}$	$\bar{v}, \text{ см/с}$	$(\overline{u'^2})^{1/2}, \text{ см/с}$	$(\overline{v'^2})^{1/2}, \text{ см/с}$	$\bar{E}', \text{ см}^2/\text{с}^2$	$h, \text{ м}$	$\bar{u}, \text{ см/с}$	$\bar{v}, \text{ см/с}$	$(\overline{u'^2})^{1/2}, \text{ см/с}$	$(\overline{v'^2})^{1/2}, \text{ см/с}$	$\bar{E}', \text{ см}^2/\text{с}^2$
100	-0,1	-1,2	15,0	17,4	264	700	-2,1	-1,2	12,4	13,8	172
400	-2,7	-1,7	15,1	18,7	290	1400	-0,9	-0,9	8,9	9,3	84

Примечание: \bar{u}, \bar{v} — составляющие средней скорости, знак «минус» при них означает течения соответственно на запад и на юг; $(\overline{u'^2})^{1/2}, (\overline{v'^2})^{1/2}$ — среднеквадратичные значения составляющих синоптической компоненты скорости; \bar{E}' — средняя кинетическая энергия синоптических течений.

результатами расчетов (по данному полю плотности) крупномасштабных геострофических течений в этом районе океана. Кинетическая энергия синоптических течений в 50—100 раз превышает кинетическую энергию среднего течения. Предполагая, что на горизонте 1400 м преобладает баротропная (средняя по всей глубине океана) компонента синоптических течений [4], на основе данных таблицы заключаем, что бароклинная и баротропная компоненты течений на полигоне ПОЛИМОДЕ были развиты примерно в равной степени. На всех горизонтах меридиональная составляющая скорости синоптических течений преобладала над зональной.

В соответствии с современным взглядом на природу и свойства синоптических океанских вихрей (например, [5]) поле горизонтальной составляющей скорости синоптических течений на

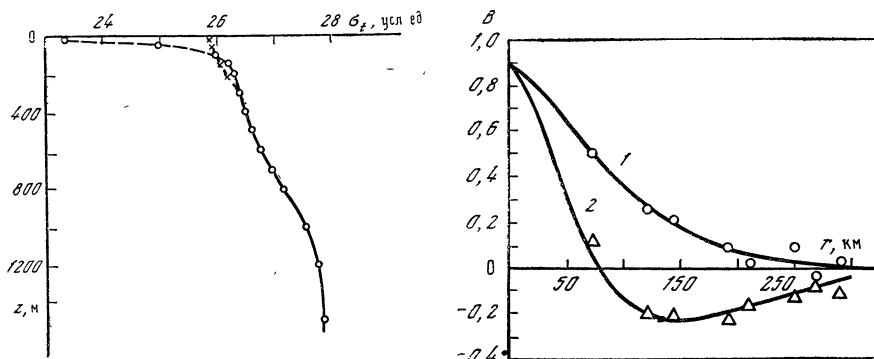


Рис. 2. Вертикальное распределение плотности воды в океане в районе эксперимента ПОЛИМОДЕ

$\sigma_t \equiv (\rho - 1) \cdot 10^3$, где ρ в $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$. Для верхнего слоя распределение плотности в зимнее время показано сплошной, а в летнее — штриховой кривыми

Рис. 3. Результаты расчета продольной (1) и поперечной (2) нормированных корреляционных функций горизонтальной компоненты скорости синоптических течений на глубине 700 м

Кривые — результат аналитической аппроксимации корреляционных функций

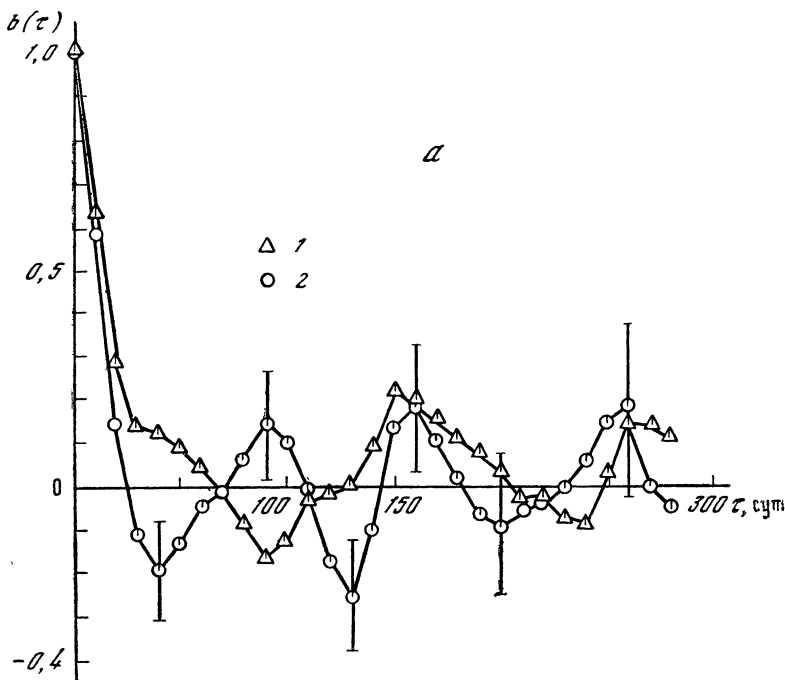


Рис. 4. Результаты расчета нормированных временных автокорреляционных функций для зональной (1) и меридиональной (2) составляющих скорости течения на глубинах 700 (а) и 1400 м (б)

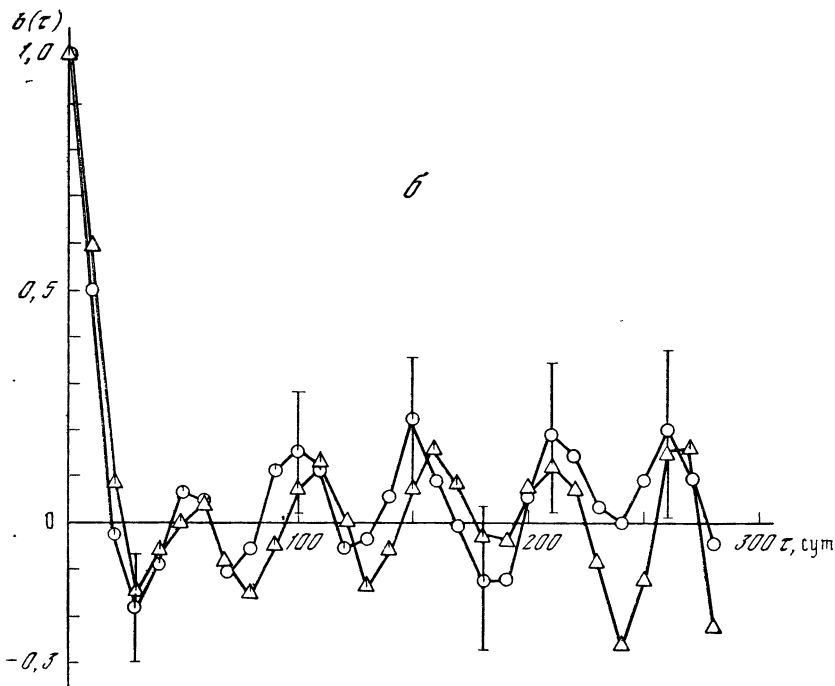
Для некоторых значений меридиональных функций показан 90%-ный доверительный интервал

любом горизонте в открытой части океана может быть в первом приближении интерпретировано как однородное, изотропное и соленоидальное (бездивергентное) случайное поле. Тогда могут быть введены продольная $B_{ll}(r)$ и поперечная $B_{mm}(r)$ корреляционные функции этого поля (r — сдвиг в горизонтальной плоскости), которые должны быть связаны соотношением $B_{mm}(r) = -d[rB_{ll}(r)]/dr$. На рис. 3 в качестве примера представлены (после нормировки на дисперсию σ_v поля скорости) результаты независимых расчетов функций B_{ll} и B_{mm} для горизонта 700 м, а также показана следующая аппроксимация этих функций:

$$B_{ll}(r) = \sigma_v (dr + 1) e^{-\alpha r}, \quad B_{mm}(r) = \sigma_v (-\alpha^2 r^2 + \alpha r + 1) e^{-\alpha r}$$

при $\alpha = 0,02 \text{ км}^{-1}$. Аппроксимирующие функции имеют значение 0,9 при $r=0$ вследствие предположения, что временные ряды синоптической компоненты скорости содержат в себе 10%-ный случайный шум [4]. Очень хорошее совпадение результатов наблюдений и аппроксимации ясно подтверждает соленоидальность поля скорости.

Пространственный (горизонтальный) спектр кинетической энергии, соответствующий приведенной выше аппроксимации



B_{11} и B_{m} , положительно определен во всем диапазоне волновых чисел k и имеет максимум при $k=\alpha$, что в рассматриваемом случае соответствует горизонтальному масштабу поля в 50 км. Масштаб Россби $R=(g\Delta\rho\rho_0^{-1}h)^{1/2}f^{-1}$, где g — ускорение силы тяжести, $\Delta\rho$ — перепад плотности воды через главный пикноклин, ρ_0 — средняя плотность, h — полная толщина пикноклина, f — параметр Кориолиса, в районе ПОЛИМОДЕ равен 45 км. Таким образом, наблюдения показывают преобладание синоптических возмущений масштаба Россби, что вполне согласуется с современными теоретическими концепциями [5], трактующими явление бароклинных синоптических вихрей открытого океана как результат взаимодействия волн Россби и крупномасштабной геострофической турбулентности. Сравнительно слабое заглубление B_m в отрицательную область (см. рис. 3) и практическое отсутствие отрицательных значений B_{11} позволяют предположить, что адекватная (турбулентная) форма движения в поле синоптических вихрей на глубине 700 м была весьма заметна.

Наиболее интересным свойством временных автокорреляционных функций, представленных на рис. 4, является резкое различие в ходе корреляционных кривых для горизонтов 700 и 1400 м: если для горизонта 1400 м корреляционные функции зональной и меридиональной составляющих скорости почти совпадают, согласованно фиксируя период колебаний в 50—55 сут, то для гори-

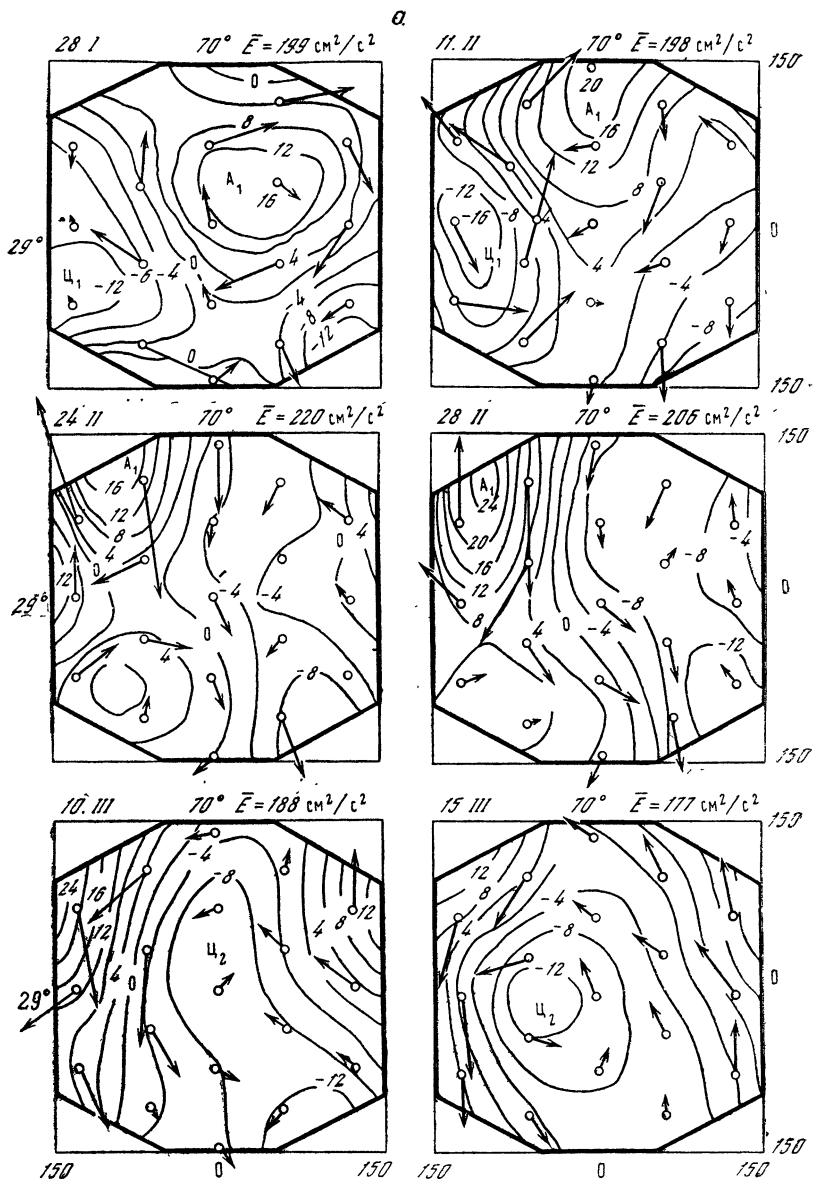


Рис. 5. Векторы скорости и соответствующие линии тока синоптических течений на глубине 700 м в период январь—май 1978 г. (а) и на горизонтах 100, 400, 700 и 1400 м 15 марта (б) и 28 апреля 1978 г. (в) в районе ПОЛИМОДЕ. Значения возмущения функций тона даны в $10^3 \text{ cm}^2 \cdot \text{c}^{-1}$; A_1 , ζ_1 и т. д. — отдельные антициклонические и циклонические вихри

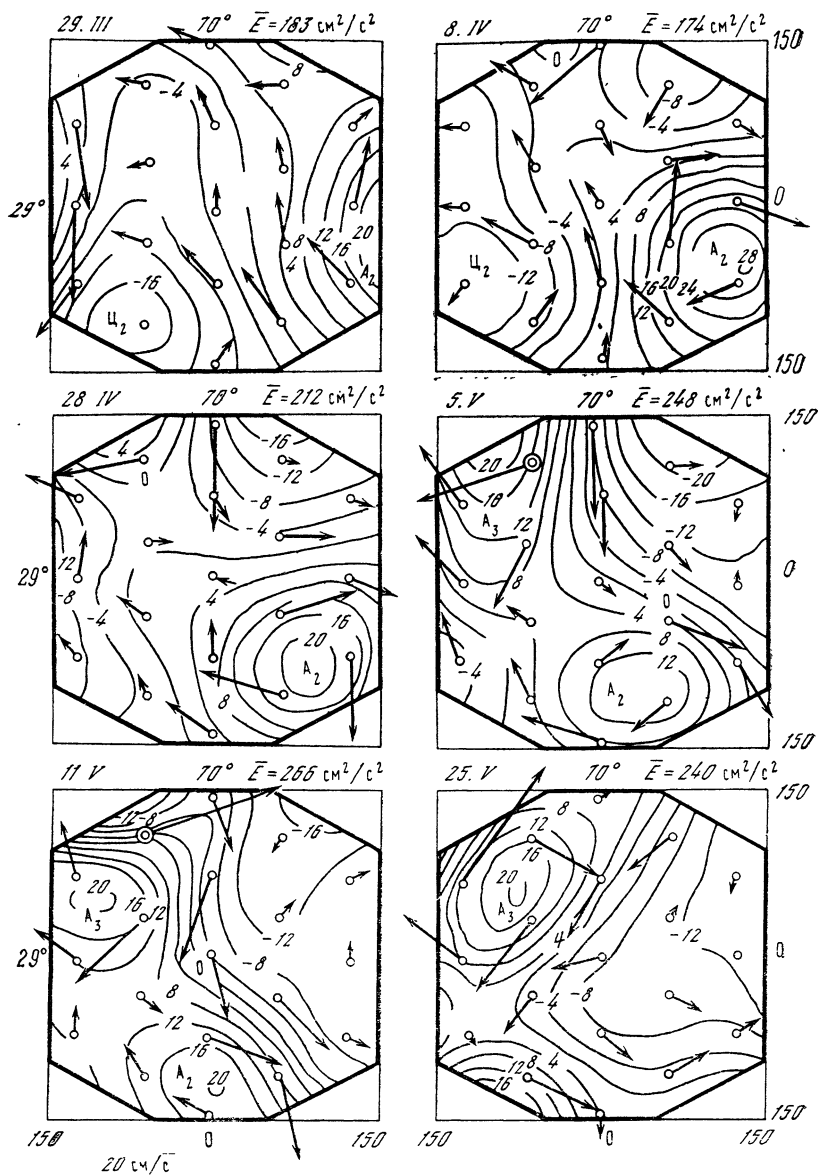


Рис. 5. (Продолжение)

зонта 700 м кривые резко расходятся, причем в диапазоне временных сдвигов от нуля до 60—70 сут описываемая пара кривых в определенной степени повторяет пару изображенных на рис. 3

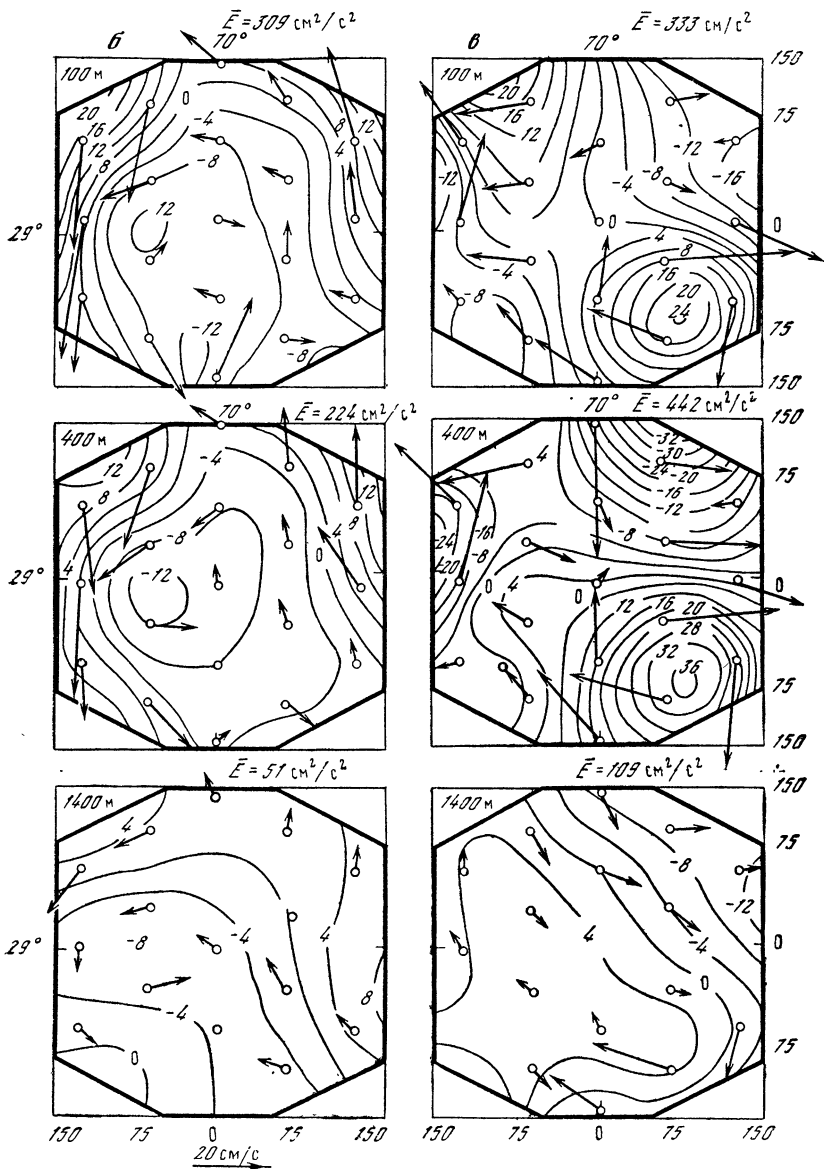


Рис. 5. (Окончание)

пространственных корреляционных функций в диапазоне пространственных сдвигов от нуля до 210—220 км. Аналогичное взаимное соответствие между парами временных и пространственных

корреляционных функций поля скорости получено и для горизонтов 400 и 100 м. Помня о существовании в исследуемом районе крупномасштабного юго-западного течения (см. таблицу), опять-таки приходим к предположению, что описанное выше качественное соответствие между временными и пространственными корреляционными функциями указывает на заметную долю адекватного переноса в перемещении синоптических возмущений на запад (см. ниже): действительно, для этого направления зональная составляющая скорости выступает как продольная, а меридиональная — как поперечная. В целом создается впечатление о некотором сложном адвективно-волновом движении синоптических возмущений при возрастающей с глубиной доле волновой формы движения.

Основным примененным нами методом синоптического анализа результатов измерений течений во время ПОЛИМОДЕ был расчет карт линий тока синоптических течений, некоторые из которых приведены на рис. 5. В основу расчета был положен метод оптимальной интерполяции однородного, изотропного и соленоидального двумерного векторного случайного поля [6—8]. При этом в применении к горизонту 700 м использовалась аналитическая аппроксимация пространственных корреляционных функций поля скорости, представленная на рис. 3, а для других горизонтов — аппроксимация, очень близкая к показанной на рис. 3 и также хорошо согласующаяся с экспериментальными данными. Относительный квадратичный уровень случайного шума на всех горизонтах принимался равным 10%. Расчет значений синоптического возмущения функции тока велся на узлы квадратной интерполяционной сетки с шагом 25 км. При этом при вычислении каждого отдельного значения функции тока учитывались исходные векторы скорости синоптических течений во всех 19 точках наблюдения.

Как показали результаты синоптического анализа данных измерений течений, за годовой период наблюдений через район буйковой расстановки прошло в направлении на запад более десятка циклонических и антициклонических центров, окаймлявшихся сильными струями синоптических течений. Вихри характеризовались масштабом Россби, скорость же их западного переноса колебалась от 2 до 4 км/сут, что в общем близко к оценке скорости, которая может быть получена для района ПОЛИМОДЕ на основе линейной модели бароклиных волн Россби, учитывающей крупномасштабное течение [1]. Однако отношение средней по глубине абсолютной скорости течения к скорости западного дрейфа вихрей было высоким ($20 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1/4} / \text{см} \cdot \text{с}^{-1} = 5$), что предполагает сильную нелинейность поля течений. И действительно, синоптический анализ выявил ряд весьма интересных нелинейных эффектов, к краткому описанию которых мы и переходим.

Наиболее важным эффектом, полученным в результате расчета синоптических карт течений, следует считать периодическое воз-

никновение в слое главного пикноклина и над ним обособленных сильных вихрей и струй, соседствовавших с областями очень слабых течений. Примеры такой резкой неравномерности в горизонтальном распределении энергии без труда находятся на рис. 5, а — это ситуации в середине последней декады февраля, середине марта, начале апреля, конце первой декады мая, конце мая¹. Так, 24 февраля плотность кинетической энергии, осредненной по всему барокливному слою океана (от 0 до 1000 м глубины), была в северо-западном углу полигона, занятом южной половиной сильного антициклона, в 6 раз больше, чем в остальной части области. Еще более резкий контраст наблюдался в том же слое 15 марта — удельная кинетическая энергия в западной и восточной частях области, занятых сильными квазимеридиональными струями, была в 8 раз выше, чем в центральной части области. При этом следует заметить, что сравнительно большая удаленность одной от другой соседних точек наблюдений (72 км) неизбежно «размазывает» сильные струи — на самом деле они еще более концентрированы, чем это видно из рис. 5.

Весьма интересным и своеобразным было распределение энергии синоптических течений по вертикали — как непосредственно карты течений (см. рис. 5, б, в), так и количественные оценки показывают, что описанные выше сильные вихри и струи были сосредоточены преимущественно в бароклинном слое океана (главный пикноклин и слой над ним), в то время как слабые течения в промежутках между ними были близки к баротропным. Так, например, 15 марта (рис. 5, б) в западной и восточной частях области, занятых сильными струями, средняя удельная кинетическая энергия в бароклинном слое океана была примерно в 6 раз выше, чем на глубине 1400 м; в то же время в центральной части области плотность кинетической энергии на всех четырех горизонтах была практически одинаковой. Сходная ситуация наблюдалась и для других моментов времени.

Период с конца января по конец февраля (см. рис. 5, а) представляет нам уникальный пример возникновения «на наших глазах» сильного квазиночного вихря из сравнительно симметричной «шахматной» структуры циклонов и антициклонов. Антициклон, занимавший в конце января позицию в восточной части области и переместившийся к концу февраля в ее северо-западный угол, по мере своего движения непрерывно увеличивал свою энергию, забирая ее из соседней области. К последним числам февраля общая кинетическая энергия этого вихря в слое от 0 до 1400 м достигла величины около $17 \cdot 10^8$. Теория двумерной геострофической турбулентности [5] подсказывала, что весь

¹ Следует подчеркнуть, что, как видно, например, из рис. 5, б, в, картины течений на глубинах 100, 400 и 700 м были, как правило, в большой степени подобны. Поэтому эволюция поля течений, представленная на рис. 5, а, может быть отнесена ко всему барокливному слою океана.

этот процесс являлся следствием работы инерционных сил внутри жидкости.

Описанные выше случаи существования обособленных сильных вихрей и струй чередовались с ситуациями более равномерного горизонтального распределения энергии (например, конец января, первые числа мая, см. рис. 5, *a*), что в целом создает впечатление взаимной «игры» нелинейных эффектов и дисперсии волн Россби, рассеиваемых квазиодиночными вихрями, при попеременном локальном преобладании то одного, то другого эффекта. Так, например, наблюдавшийся в конце февраля — двух первых декадах марта процесс возникновения вначале меридиональной струи, а затем циклонического центра умеренной силы в тылу перемещавшегося на запад сильного антициклона (см. рис. 5, *a*) очень напоминает картины порождения волн Россби одиночным вихрем, полученные в ряде теоретических работ [9—11]. Насколько можно судить по построенным нами синоптическим картам течений, характерный полный период перестройки поля скорости, связанный с упомянутым выше процессом взаимодействия нелинейного и дисперсионного эффектов, составлял полтора-два месяца, т. е. величину того же порядка, что и период локальных колебаний скорости, обусловленных западным дрейфом вихрей.

Чрезвычайно интересной была картина течений в апреле-мае 1978 г. (см. рис. 5, *a*, *e*). В начале этого периода прекрасно выраженный круговой антициклон вошел с востока в южную половину рассматриваемой нами области. По мере продвижения этого антициклона на запад происходило его постепенное ослабление с одновременным возникновением в его тылу и дальнейшим усилением струи, объединившей указанный антициклон с другим вихрем того же знака, продвинувшимся к началу мая в северо-западную часть области с севера. К началу второй декады мая эта струя достигла поразительной степени концентрации (см. рис. 5, *a*), после чего начал происходить обратный процесс ее ослабления и одновременного усиления антициклонического вихря в северо-западном углу полигона. Описанный процесс временного частичного слияния двух одноименных барических центров за счет возникновения струй течений, окаймляющих их совместно, а затем обратного распада струй вследствие «закручивания» их отдельных частей в новые центры просматривался во время ПОЛИМОДЕ неоднократно. Вряд ли приходится сомневаться, что описанные эффекты имеют преимущественно инерционную природу.

Теория двумерной геострофической турбулентности [5] утверждает, что каскадный перенос энергии от малых масштабов к большим должен в бароклинном случае приводить к формированию вихрей масштаба Россби — и это мы видим из эксперимента. С другой стороны, теория предсказывает существование потока энстрофии (квадрата потенциальной завихренности [1]) от больших масштабов к малым, что должно выражаться в появ-

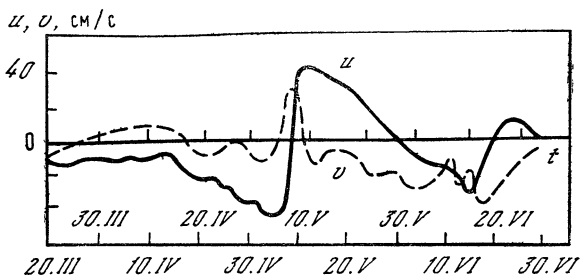


Рис. 6. Временной ход зональной u и меридиональной v составляющих скорости в марте—июле 1978 г. в точке, отмеченной двойным кружком на картах для 5 и 11 мая 1978 г. на рис. 5, a

Положительные значения компонент скорости соответствуют течениям на восток и север

лении в поле скорости резких сдвиговых ситуаций — фронтов скорости. То, что это действительно происходит, и к тому же в необыкновенно сильно выраженной степени, ясно из кривых на рис. 6, вид которых нельзя объяснить ничем иным, как прохождением через точку наблюдения очень резкого фронта скорости. Характер изменения скорости на глубинах 100 и 400 м был при этом примерно таким же, как на 700 м; на 1400 м скачок скорости почти отсутствовал. Сопоставление рис. 6 и 5, a показывает, что описанный фронт скорости сформировался внутри сильного антициклонического вихря и что происхождение фронта было сопряжено с «прыжком» этого вихря в южном направлении. Материалы ПОЛИМОДЕ содержат еще несколько примеров резких скачков во временном ходе скорости, но описанный выше случай является самым ярким.

Помимо описанных выше данных, материалы ПОЛИМОДЕ представляют еще ряд свидетельств сильной развитости адвективной (турбулентной) формы движения в поле вихрей ПОЛИМОДЕ. Прежде всего следует указать на факт формирования в верхнем слое океана (верхний однородный слой и сезонный термоклин) резких температурных фронтов, которые, как правило, располагались на окраинах сильных обособленных вихрей и перемещались вместе в последними [12]. Кроме того, в применении к некоторым конкретным вихрям (например, к двум антициклонам, один из которых располагался в северо-западной части области в конце февраля, а другой — в юго-восточной части области в апреле, см. рис. 5, a) удалось установить, что перемещение этих вихрей на запад сопровождалось соответствующим переносом аномалий температурно-соленостного соотношения в слое над главным пикноклином — факт, хотя и косвенно, но достаточно уверенно показывающий, что в верхнем слое океана указанные вихри не просто «скользили по воде», а переносили вместе с собой свою водную массу.

В целом результаты ПОЛИМОДЕ подтверждают общий взгляд на синоптические вихри открытого океана как на сложный

синтез волн Россби и крупномасштабной геострофической турбулентности [5]. Статистически равновесный режим в верхнем слое океана (примерно до глубины 1000 м), по-видимому, достигается за счет баланса между инерционными (нелинейными) эффектами, приводящими к возникновению обособленных сильных вихрей и струй, и излучением волн Россби квазидиночными вихрями при локальном преобладании то одного, то другого эффекта. Сильные вихри при перемещении переносят с собой свою воду в своих верхних частях; по-видимому, чем сильнее вихрь, тем мощнее верхний слой адвективного переноса. Сближение сильных вихрей сопровождается их интенсивным взаимодействием, которое может выражаться, например, в обмене энергией между вихрями разных знаков или в слиянии вихрей одного знака. На глубинах более 1000 м преобладает волновая форма движения.

Следует отметить, что результаты ПОЛИМОДЕ не подтвердили полученного в ряде численных экспериментов [5, 9] эффекта баротропизации сильных вихрей, приводящего затем к их росту до масштаба $L_\beta = (u\beta^{-1})^{1/2}$ (u — характерная скорость в поле вихрей, β — широтное изменение параметра Кориолиса) и возникновению в океане преимущественно зональных течений. По-видимому, это объясняется тем, что эффект распада сильных вихрей на волны Россби происходит быстрее их баротропизации.

Авторы благодарят члена-корреспондента АН СССР А. С. Мони́на за полезные обсуждения результатов эксперимента ПОЛИМОДЕ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Кошляков М. Н. — В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1978, с. 258—292.
2. Грачев Ю. М., Еникеев В. Х., Кошляков М. Н., Тихомирова Т. Г. — Докл. АН СССР, 1978, 243, с. 1040.
3. Кеонджян В. П. — Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана, 1972, 8, с. 1297.
4. Richman J. G., Wunsch C., Hogg G. — Rev. Geophys. Space Phys., 1977, 15, p. 385.
5. Rhines P. — In: The sea / Ed. E. D. Goldberg et al., N. Y.: John Wiley, 1977, 6, p. 189.
6. Гандин Л. С., Каган Р. Л. Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 360 с.
7. Гандин Л. С. — Труды ГГО, 1964, т. 165, с. 47.
8. Bretherton F. D., Davis R., Fandry C. — Deep-sea Res., 1976, 23, p. 559.
9. Rhines P. — J. Fluid Mech., 1975, 69, p. 417.
10. Жихарев Г. М., Сеидов Д. Г. — Океанология, 1979, 19, с. 558.
11. Иванов Ю. А., Мельников В. А., Новичкий А. Г. — Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана, 1979, 15, с. 418.
12. Кошляков М. Н., Борисенко Ю. Д., Бреговских А. Л. и др. — В кн.: Океанологические исследования. М.: Сов. радио, 1980, № 31, с. 3.

ЛИНЕЙНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КАК НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ

В. И. КЛЯЦКИН

Статистические задачи в настоящее время занимают важное место в различных областях физики. Если даже не говорить о задачах, традиционно относящихся к статистической физике, то имеется множество вопросов, в которых мы сталкиваемся с необходимостью учета флуктуационных эффектов. Причины, вызывающие флуктуации, совершенно различны в разных задачах (это могут быть тепловые шумы, неустойчивости, турбулентность и т. д.), однако методы их теоретического рассмотрения часто очень схожи. При этом в ряде случаев статистическую природу самих флуктуаций можно считать известной (либо из физических соображений, либо из модельной постановки задачи), а физические процессы можно описывать дифференциальными, интегральными или интегрально-дифференциальными уравнениями.

Современный аппарат теории случайных процессов приспособлен для анализа линейных уравнений (обыкновенных дифференциальных, в частных производных или интегральных) вида

$$\begin{aligned} \partial \psi_t(\mathbf{x}) / \partial t &= \hat{L}(\mathbf{x}, t) \psi_t(\mathbf{x}) + z(t) \hat{M}(\mathbf{x}, t) \psi_t(\mathbf{x}), \\ \psi_{t=0} &= \psi_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$S(t, t_0) = g(t, t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(t, \tau) z(\tau) S(\tau, t_0), \quad (2)$$

где \hat{L} , \hat{M} — детерминированные операторы по \mathbf{x} ; $g(t, t_0)$ — детерминированная функция, а $z(t)$ — случайная функция времени t с заданными статистическими свойствами, т. е. для нее известен характеристический функционал

$$\Phi[v(\tau)] = \left\langle \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau v(\tau) z(\tau) \right] \right\rangle, \quad (3)$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают операцию усреднения по ансамблю реализаций функций $z(t)$. Мы для простоты изложения ограничиваемся только случайными процессами $z(t)$. Обобщение на случайные поля не вызывает затруднений. Отметим, что и уравнение (1) можно записать в виде интегрального уравнения (2). Важным моментом при этом является вопрос о возможности сведения исходной нелинейной физической задачи к линейным задачам типа (1), (2).

Если стохастическая задача описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, то всегда путем рас-

ширения пространства (конечномерного, однако) можно перейти к эквивалентному ей описанию с помощью линейного уравнения в частных производных (уравнению Лиувилля). Так, для задачи, описываемой системой уравнений

$$dx/dt = f(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

для функций $\psi_t(x) = \delta(x(t) - x)$ получаем уравнение Лиувилля вида (1)

$$\frac{\partial \psi_t(x)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \psi_t(x), \quad \psi_0(x) = \delta(x - x_0). \quad (5)$$

Отметим, что уравнение Лиувилля содержит больше информации, чем исходное, и описывает плотность вероятностей для исходной динамической системы в фазовом пространстве.

В случае же произвольного нелинейного уравнения в частных производных также можно перейти к линейному уравнению (но уже в бесконечномерном пространстве), содержащему вариационные производные (уравнение Хопфа; см., например, [1], где такой переход демонстрируется для уравнения Навье—Стокса). Конечно, при конкретизации типа уравнений можно в ряде случаев упростить такой переход. Так, если исходное уравнение содержит пространственные производные только первого порядка, т. е. имеет вид

$$\frac{\partial S_t(x)}{\partial t} + H\left(S, \frac{\partial S}{\partial x}, x, t\right) = 0, \quad S_{t=0}(x) = S_0(x), \quad (6)$$

то можно ограничиться переходом к конечномерному пространству [2]. Для этого надо ввести функцию

$$\psi_t(S, p, u_{ik}) = \delta(S_t(x) - S) \delta\left(\frac{\partial S}{\partial x} - p\right) \delta\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_k} - u_{ik}\right). \quad (7)$$

Отметим, что класс задач, описываемый уравнением (6), которое называется уравнением Гамильтона—Якоби, очень важен в физике, так как он описывает геометрическое приближение для волн любой природы.

Если же уравнение (6) является квазилинейным уравнением, т. е. функция H имеет структуру

$$H(S, \partial S/\partial x, x, t) = A(S, x, t) + B(S, x, t) \partial S/\partial x, \quad (8)$$

то размерность расширенного пространства еще более сокращается. При этом не надо вводить в качестве новых переменных функции u_{ik} [3, 4].

Для обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых имеется не задача Коши, как в (4), а краевая задача (например, уравнение (4) с условием $Ax(0) + Bx(T) = v$, можно использовать теорию инвариантного погружения. При этом краевая задача сводится к квазилинейному уравнению (см., например, [5—7]) и, следовательно, также допускает переход к линейному уравнению типа (1).

Таким образом, любая задача может быть сведена к уравнениям типа (1), (2) (в бесконечно- или конечномерном фазовом пространстве).

Итак, мы перешли к линейному (дифференциальному или интегральному) стохастическому уравнению типа (1), (2). Теперь надо усреднить их по ансамблю реализаций случайного процесса $z(t)$. При усреднении таких уравнений по флуктуирующим параметрам мы обычно не получаем замкнутого уравнения для интересующей нас величины. И такое замыкание можно произвести путём дополнительного перехода к новому расширенному пространству, вообще говоря, бесконечномерному. Так, например, для уравнения (2), где $z(t)$ — гауссова случайная функция с параметрами $\langle z(t) \rangle = 0$, $\langle z(t) z(t') \rangle = B(t, t')$, для такого перехода надо рассмотреть уравнение

$$G(t, t_0) = g(t, t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(t, \tau) \eta(\tau) G(\tau, t_0) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(t, \tau) z(\tau) G(\tau, t_0),$$

где $\eta(\tau)$ — произвольная детерминированная функция. После усреднения уравнения получаем уже замкнутое уравнение [8]

$$\langle G(t, t_0) \rangle = g(t, t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(t, \tau) \eta(\tau) \langle G(\tau, t_0) \rangle + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 g(t, \tau) B(\tau, \tau_1) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau_1)} \langle G(\tau, t_0) \rangle \quad (9)$$

в вариационных производных, аналогичное уравнению Швингера в квантовой теории поля.

Необходимость перехода к новому расширенному пространству для получения замкнутых уравнений для средних величин совершенно аналогична проблеме перехода от исходного нелинейного детерминированного уравнения к линейному. Поэтому можно утверждать, что линейные стохастические задачи по своей сущности являются нелинейными задачами. При конкретизации статистической природы флуктуирующих параметров ситуация в ряде случаев упрощается. При этом необходимым условием является существование условия причинности, которое заключается в том, что решение задачи в момент времени t зависит от случайного процесса $z(\tau)$ лишь при $\tau \leq t$ и не зависит от него при $\tau > t$ [9]. Так, для уравнения (1) условие причинности выполняется всегда, а для уравнения (2) нет. Чтобы интегральное уравнение типа (2) обладало условием причинности, необходимо, чтобы функция $g(t, t_0)$ имела вид

$$g(t, t_0) = \tilde{g}(t, t_0) \theta(t - t_0). \quad (10)$$

Итак, пусть задача обладает условием причинности. Рассмотрим конкретно уравнение (1). Если случайная функция $z(t)$ является марковским процессом общего типа, то для получения замкнутого уравнения для средней величины $\psi_t(\mathbf{x})$ можно обойтись конечномерным расширением пространства, включив в качестве дополнительной переменной z . В этом случае можно получить замкнутое уравнение для функции [10]

$$\dot{\Psi}_t(\mathbf{x}, z) = \langle \dot{\psi}_t(\mathbf{x}) \delta(z(t) - z) \rangle. \quad (11)$$

Для частных случаев марковских процессов, таких, как телеграфный, обобщенный телеграфный, и марковских процессов с конечным числом состояний можно обойтись без какого-либо расширения пространства [10]. Результаты для случая, когда флуктуирующими параметрами являются гауссовские марковские процессы или функции от них, можно получить исходя из предельной теоремы о переходе суммы независимых телеграфных процессов с увеличением числа членов в гауссовско-марковский процесс [10].

Для процессов, перечисленных выше, также удается усреднить и интегральное уравнение типа (2), обладающее условием причинности. Если при этом функция $g(t, t_0) = g(t - t_0)$, то можно вычислить как массовую, так и вершинную функции и исследовать вопрос об условиях применимости таких традиционных приближений, как приближения Бурре и Крейчмана [11].

Указанное сокращение пространства переменных можно провести только для марковских процессов $z(t)$, и эта процедура не допускает обобщения на случайные поля.

Вернемся теперь к стохастическому линейному уравнению (1), обладающему условием причинности, для произвольного процесса $z(t)$. Имеется один асимптотический случай, называемый приближением δ -коррелированного процесса (поля), когда ситуация совсем упрощается [9]. В этом асимптотическом пределе статистические характеристики решений стохастических уравнений типа (1) сами удовлетворяют линейным уравнениям, а теорию можно рассматривать как теорию обобщенного броуновского движения. Так, например, для гауссового δ -коррелированного процесса $\langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\delta(t-t')$ усреднение уравнения (1) дает [9]

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_t(\mathbf{x}) \rangle = \hat{L}(\mathbf{x}, t) \langle \psi_t(\mathbf{x}) \rangle + \sigma^2 \hat{M}^2(\mathbf{x}, t) \langle \psi_t(\mathbf{x}) \rangle. \quad (12)$$

Если при этом операторы \hat{L} , \hat{M} линейные, как в (5), то уравнение (12) является уравнением диффузионного типа и называется уравнением Эйнштейна—Фоккера, а случайный процесс $x(t)$ при этом является марковским процессом. Для негауссовых процессов $z(t)$ или более общих операторов \hat{L} , \hat{M} получаются сложные уравнения. С физической точки зрения эта асимптотическая теория пригодна для тех ситуаций, когда рассматриваемая система уже испытала достаточное число независимых, случайных воздействий и можно удовлетвориться усредненным описанием ее поведения за время, большее по сравнению со временем единичного толчка.

Все сказанное выше относится к задачам, для которых выполняется условие динамической причинности. Ситуация, однако, даже для случая δ -коррелированных процессов коренным образом меняется, если мы имеем линейную краевую исходную задачу. В качестве конкретного примера рассмотрим подробнее задачу о распространении плоской волны в одномерной случайно-неоднородной среде, следуя [12, 13].

Пусть слой случайно-неоднородной среды занимает часть пространства $0 \leq x \leq L$ и справа на него падает плоская волна единичной интенсивности $\exp[-ik(x-L)]$, где $k = \kappa + i\gamma$ ($\gamma \ll \kappa$). Тогда решение задачи в области $L \leq x < \infty$ имеет вид

$$U(x) = \exp[-ik(x-L)] + R_L \exp[ik(x-L)], \quad (13)$$

где R_L — комплексный коэффициент отражения волны от слоя. В области же $x < 0$ решение имеет вид

$$U(x) = T \exp(-ikx), \quad (14)$$

где T — комплексный коэффициент прохождения волны. В области $0 \leq x \leq L$ волновое поле описывается уравнением

$$d^2U/dx^2 + k^2[1 + \varepsilon(x)] U = 0, \quad (15)$$

где $\varepsilon(x)$ — случайная функция, которую будем считать гауссовой δ -коррелированной функцией ($\langle \varepsilon(x) \rangle = 0$, $\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x') \rangle = 2\sigma^2\delta(x-x')$). В качестве краевых условий для (15) служат условия непрерывности поля и его производной на границе слоя¹. Задача заключается в нахождении статистических характеристик $|R_L|^2$, $|T|^2$ и интенсивности волны $I(x) = U(x)U^*(x)$.

Если ввести функции

$$\psi(x) = \frac{1 - R(x)}{1 + R(x)} = \frac{i}{k} \frac{U'(x)}{U(x)} \left(U'(x) = \frac{dU(x)}{dx} \right), \quad (16)$$

то для функции $R(x)$ получаем уравнение первого порядка

$$\frac{dR(x)}{dx} = 2i(\kappa + i\gamma)R(x) + i\frac{\varepsilon(x)}{2}(1 + R)^2, \quad R(0) = 0, \quad (17)$$

и комплексный коэффициент отражения волны от слоя R_L связан с решением уравнения (17) равенством

$$R_L = R(L).$$

Отметим, что величина R_L как функция параметра L , очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dR_L}{dL} = 2i(\kappa + i\gamma)R_L + i\frac{\varepsilon(L)}{2}(1 + R_L)^2, \quad R_0 = 0. \quad (18)$$

¹ Эти условия можно записать также в виде

$$U(0) + \frac{i}{k} U'(0) = 0, \quad U(L) + \frac{i}{k} U'(L) = 2.$$

Волновое поле $U(x)$ выражается через функцию $\psi(x)$ (или $R(x)$) с помощью формулы

$$U(x) = (1 + R_L) \exp \left[ik \int_x^L d\xi \psi(\xi) \right], \quad U(L) = 1 + R_L. \quad (19)$$

Следуя идеям теории инвариантного погружения, будем рассматривать волновое поле $U(x)$ как функцию двух параметров x, L , где $x \leq L$, т. е. $U(x) \equiv U(x, L)$. Тогда, дифференцируя (19) по L и используя уравнение (18), получаем уравнение

$$\frac{\partial U(x, L)}{\partial L} = (ix - \gamma)U + i \frac{x}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) U(x, L) \quad (20)$$

с начальным условием

$$U(x, L)|_{L \rightarrow x} = 1 + R_x, \quad (21)$$

где функция R_x описывается уравнением (18). Уравнения (18), (20) и являются уравнениями теории инвариантного погружения для данной задачи. Принципиальным отличием системы (18), (20) от исходной задачи (15) является то, что уравнения теории инвариантного погружения удовлетворяют условию причинности, но становятся нелинейными.

Если представить волновое поле $U(x, L)$ в виде

$$U(x, L) = a(x, L) \exp(-ixx) + b(x, L) \exp(ixx), \quad (22)$$

где $a(x, L)$ и $b(x, L)$ условно можно назвать амплитудами «встречных» волн в среде, то для них легко получить уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial L} &= ika + i \frac{x}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) a, \quad a(x, L)|_{L \rightarrow x} = \exp(ixx), \\ \frac{\partial b}{\partial L} &= ikb + i \frac{x}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) b, \quad b(x, L)|_{L \rightarrow x} = R_x \exp(-ixx). \end{aligned} \quad (23)$$

Введем их интенсивности $W_1(x, L) = |a|^2$, $W_2(x, L) = |b|^2$, которые, очевидно, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial W_k}{\partial L} = -2\gamma W_k + i \frac{x}{2} \varepsilon(L) (R_L - R_L^*) W_k(x, L) \quad (24)$$

с начальными условиями

$$W_1(x, x) = 1, \quad W_2(x, x) = |R_x|^2. \quad (25)$$

Теперь можно написать соответствующее уравнение Эйнштейна—Фоккера для совместной плотности вероятностей величин W_1, W_2 и $\rho = |R_L|^2$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_L^\dagger}{\partial L}(W_1, W_2, \rho) &= 2\gamma \left(\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 + 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \times \\ &\times P_L(W_1, W_2, \rho) + D \left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho) \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times P_L(W_1, W_2, \rho) + D \left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho) \right]^2 \times \\ & \times \rho P_L(W_1, W_2, \rho), \end{aligned} \quad (26)$$

где коэффициент диффузии $D = \kappa^2 \sigma^2 / 2$. Начальным условием для (26) является равенство

$$P_x(W_1, W_2, \rho) = \delta(W_1 - 1) \delta(W_2 - \rho) P_x(\rho),$$

где функция $P_x(\rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x(\rho)}{\partial x} &= 4\gamma \frac{\partial}{\partial \rho} \rho P_x(\rho) - 2D \frac{\partial}{\partial \rho} \rho (1 - \rho) P_x(\rho) + \\ &+ D \frac{\partial}{\partial \rho} \rho (1 - \rho)^2 \frac{\partial}{\partial \rho} P_x(\rho), \quad P_0(\rho) = \delta(\rho) \end{aligned} \quad (27)$$

и описывает плотность вероятностей для квадрата модуля коэффициента отражения. Отметим, что при выводе (26), (27) производится обычная для волновых задач процедура усреднения по быстро осциллирующим функциям, что справедливо, если интенсивность флюктуаций параметров среды σ^2 достаточно мала [4].

Рассмотрим теперь случай падения волны на слой среды, занимающей полуплоскость $x < 0$. Этот случай соответствует предельному переходу в (26), (27) при $L \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$ и $L - x \rightarrow -x$. В результате вместо (26), (27) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x(W_1, W_2, \rho)}{\partial x} &= -2\gamma \left(\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 + 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \times \\ &\times P_x(W_1, W_2, \rho) - D \left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho) \right] \times \\ &\times P_x(W_1, W_2, \rho) - D \left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho) \right]^2 \times \\ &\times \rho P_x(W_1, W_2, \rho) \quad (x < 0) \end{aligned} \quad (28)$$

с начальным условием

$$P_0(W_1, W_2, \rho) = \delta(W_1 - 1) \delta(W_2 - \rho) P_\infty(\rho),$$

где $P_\infty(\rho)$ — стационарное решение уравнения (27),

$$P_\infty(\rho) = \frac{2\beta}{(1-\rho)^2} \exp\left(-\frac{2\beta\rho}{1-\rho}\right), \quad \beta = \frac{2\gamma}{D}. \quad (29)$$

Если интересоваться только моментами интенсивностей встречных волн, то для функции

$$\Phi_x(\lambda_1, \lambda_2, \rho) = \iint dW_1 dW_2 W_1^{\lambda_1} W_2^{\lambda_2} P_x(W_1, W_2, \rho)$$

получаем более простое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} &= 2\gamma \left(\lambda_1 + \lambda_2 - 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \Phi_x + D \left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho) \right] \Phi_x - \\ &- D \left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho) \right]^2 \rho \Phi_x(\lambda_1, \lambda_2, \rho), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\Phi_0(\lambda_1, \lambda_2, \rho) = \rho^{\lambda_2} P_\infty(\rho).$$

Из уравнения (30) следуют уравнения для первых моментов величин W_1, W_2 :

$$\begin{aligned} d\langle W_1(x) \rangle / dx &= (2\gamma + D)\langle W_1 \rangle - D\langle W_1(x)\rho \rangle, \quad \langle W_1(0) \rangle = 1, \\ d\langle W_2(x) \rangle / dx &= (2\gamma + D)\langle W_2 \rangle - D\langle W_2(x)\rho \rangle, \quad \langle W_2(0) \rangle = \langle \rho \rangle, \end{aligned} \quad (31)$$

играющие роль уравнений переноса излучения. Из (31) находим, что поведение при $x \rightarrow 0$ функций $\langle W_1 \rangle, \langle W_2 \rangle$ описывается формулами

$$\begin{aligned} \langle W_1(x) \rangle &= 1 + [2\gamma + D(1 - \langle \rho \rangle)]x, \\ \langle W_2(x) \rangle &= \langle \rho \rangle - [2\gamma\langle \rho \rangle - D(1 - \langle \rho \rangle)]x, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\langle \rho \rangle = 1 + 2\beta e^{2\beta} \text{Ei}(-2\beta)$ ($\text{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция). Отсюда получаем предельные формулы для случая слабого ($\beta \ll 1$) и сильного ($\beta \gg 1$) затухания:

$$\begin{aligned} \langle W_1 \rangle &= 1 + 2\gamma x(1 - 2 \ln 2\beta) & (\beta \ll 1), \\ \langle W_1 \rangle &= 1 + 2\gamma x(1 + 1/\beta) & (\beta \gg 1), \\ \langle W_2 \rangle &= 1 + 2\beta \ln 2\beta - 2\gamma x(1 + 2 \ln 2\beta) & (\beta \ll 1), \\ \langle W_2 \rangle &= (1 + 2\gamma x)/2\beta & (\beta \gg 1). \end{aligned} \quad (33)$$

В случае $\beta \gg 1$ легко получить асимптотическое поведение и решения уравнения (30). При этом с точностью [до членов $\sim 1/\beta^2$

$$\begin{aligned} \langle W_1(x) \rangle &= \exp[2\gamma x(1 + 1/\beta)], \\ \langle W_2(x) \rangle &= \exp[2\gamma x(1 + 1/\beta)]/2\beta, \end{aligned} \quad (34)$$

и легко видеть, что в этом предельном случае отсутствует связь между интенсивностями встречных мод. В другом предельном случае

$$\gamma = 0, \quad P_\infty(\rho) \rightarrow \delta(\rho - 1), \quad P_x(W_1, W_2) = P_x(W_1)\delta(W_1 - W_2),$$

где функция $P_x(W_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P_x(W_1)}{\partial x} = -D \frac{\partial^2}{\partial W_1^2} W_1^2 P_x(W_1), \quad P_0(W_1) = \delta(W_1 - 1).$$

Это соответствует логарифмически-нормальному распределению для величин $W_k(x)$, моменты которых, начиная со второго, экспоненциально растут с ростом x . Отметим, что наличие конечного затухания γ (хотя и как угодно малого) должно обеспечить затухание моментов W_k при $x \rightarrow -\infty$, т. е. случай $\gamma = 0$ является существенно особым. В общем случае решение уравнения (30) может быть выражено через кулоновские сфероидальные функции [15] или решено численно [16].

Сопоставим теперь изложенную выше теорию с линейной теорией переноса. В линейной теории переноса при $L \rightarrow \infty$ исходят из феноменологических уравнений [17]

$$\begin{aligned} dW_1/dx &= 2\alpha W_1 + \delta(W_1 - W_2), & W_1(0) &= 1, \\ dW_2/dx &= -2\alpha W_2 + \delta(W_1 - W_2), & W_2(0) &= R, \end{aligned} \quad (35)$$

где неизвестная константа R определяется из условия отсутствия растущей экспоненты при $x \rightarrow -\infty$, а α , δ — феноменологические параметры, играющие роль коэффициентов затухания и диффузии. Решение (35) имеет вид

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \exp(\lambda x), & W_2(x) &= R \exp(\lambda x), \\ \lambda &= 2\sqrt{\alpha(\alpha + \delta)}, & R &= (2\alpha + \delta - \lambda)/\delta. \end{aligned} \quad (36)$$

Сравнение этого решения при $x \rightarrow 0$ с выражениями (32) показывает, что линейная теория для данной задачи в общем случае неприменима. Решения согласуются с параметрами $\alpha = \gamma$, $\delta = D$ лишь в асимптотическом случае $\beta \gg 1$.

На неприменимость линейной теории переноса в случае $\gamma = 0$ в слое конечной толщины также указывалось в работах [18, 19]. В заключение можно заметить, что статистическая теория для данной задачи должна ответить на два вопроса: указать условия применимости линейной феноменологической теории переноса (и дать статистический смысл феноменологическим параметрам) и определить, каким образом должна быть изменена теория переноса, когда линейная теория становится неприменимой. Изложенная выше теория отвечает на эти вопросы. Прежде всего она нелинейна относительно функций W_1 , W_2 , ρ и, следовательно, незамкнута (в статистическом смысле). Замыкание достигается путем расширения фазового пространства (включение дополнительной переменной ρ) (см. уравнение (30)), что обусловлено тем фактом, что линейная волновая задача (15) является краевой.

Подробное изложение всех затронутых выше вопросов содержится в монографии [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика. М.: Наука, 1967. Ч. 2. 720 с.
2. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. — Изв. вузов. Радиофизика, 1979, 22, № 10, с. 1283.
3. Малахов А. Н., Саичев А. И. — ЖЭТФ, 1974, 67, № 6, с. 2080.
4. Малахов А. Н., Саичев А. И. — Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 9, с. 1368.
5. Golberg M. A. — Appl. Math. and Comput., 1975, 1, N 1, p. 1.
6. Касты Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. М.: Мир, 1976. 224 с.
7. Кляцкин В. И. — Изв. вузов. Радиофизика, 1977, 20, № 8, с. 1165.
8. Кляцкин В. И. — Изв. вузов. Радиофизика, 1977, 20, № 11, с. 1698.
9. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975. 239 с.

10. *Кляцкин В. И.* — Изв. вузов. Радиофизика, 1979, 22, № 6, с. 716.
11. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И.* — Теор. и мат. физика, 1979, 41, № 3, с. 368.
12. *Кляцкин В. И.* — Изв. вузов. Радиофизика, 1979, 22, № 2, с. 180; № 5, с. 591.
13. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И.* — Изв. вузов. Радиофизика, 1980, 23, № 4, с. 432.
14. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.* — Изв. вузов. Радиофизика, 1977, 20, № 7, с. 1040.
15. *Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976, 320 с.
16. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
17. *Соболев В. В.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.: Гостехиздат, 1956. 391 с.
18. *Гельфгат В. И.* — Акуст. журнал, 1972, 18, № 1, с. 31.
19. *Kohler W., Papapicolaou G. C.* — J. Math. Phys., 1974, 15, N 12, p. 2186.
20. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородной среде. М.: Наука, 1980. 328 с.

УДК 538.574.4 : 534.222.2

ДИФфуЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ХАОТИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В. С. АБРАМОВИЧ, В. В. ТАМОЙКИН

1. В последнее время значительное внимание уделяется анализу классического резонансного трехволнового взаимодействия волн в диспергирующих неоднородных средах. При этом процесс нелинейного взаимодействия триплета волн сопровождается регулярным или случайным сбоем фаз, нарушаются условия фазового синхронизма, к которым крайне чувствительны резонансные взаимодействия волн, что приводит к ослаблению эффективности взаимодействия.

Наибольшее число работ посвящено умножению лазерных частот в нелинейных кристаллах с линейными неоднородностями. Интерес к этой проблеме в лазерной физике обусловлен тем, что эффект генерации световых гармоник позволяет наиболее просто экспериментально оценить воздействие неоднородностей на нелинейные свойства кристалла. Однако из-за трудностей теоретического анализа рассмотрение главного вопроса об эффективности преобразования основного излучения в гармоники ведется или в приближении заданного поля волны накачки [1—3], или в приближении заданной интенсивности накачки [4, 5], сводящих, по существу, рассматриваемые задачи к линейным. Аналогично исследуются параметрические неустойчивости в неоднородной плазме [6—8]. Лишь в недавних работах [9, 10] предпринимались попытки последовательного аналитического рассмотрения влия-

ния неоднородностей на процесс нелинейного взаимодействия путем выхода за пределы параметрического приближения. При чем в статье [10] развивается метод получения решений одномерных укороченных уравнений для квазистатического взаимодействия волн в слабонелинейной, слабонеоднородной среде на основе борновского приближения теории возмущений для рассеяния нелинейной волны второй гармоники на заданных неоднородностях параметрического удвоителя частоты. Тем самым предполагается, что влияние случайного или регулярного фазового рассинхронизма мало, что в свою очередь ограничивает область рассмотрения лишь начальной стадией генерации. В то же время очевидно, что вследствие случайного сбоя фаз взаимодействующих волн должна возникать стабилизация обратной перекачки энергии волн в триplete и устанавливаться стационарный режим взаимодействия. Таким образом, для нахождения установившегося предельного режима взаимодействия необходим учет эффектов многократного рассеяния резонансно взаимодействующих волн.

В настоящее время весьма плодотворным методом, позволяющим получать аналитические результаты с учетом эффектов многократного рассеяния волн в средах со случайными неоднородностями, является метод, основанный на разложении решений стохастических дифференциальных уравнений, описывающих данную динамическую систему по малому параметру, являющемуся отношением размера неоднородностей ко всем характерным пространственным масштабам задачи. Последнее приводит к приближению марковского случайного процесса, где соответствующее уравнение для плотности вероятности имеет вид уравнения Эйнштейна—Фоккера (УЭФ). В более общих случаях этот метод приводит к обобщенному уравнению типа Эйнштейна—Фоккера, в связи с чем он называется приближением диффузионного случайного процесса [11].

В последние годы диффузионное приближение успешно использовалось при изучении многократного рассеяния волн в одномерных неупорядоченных структурах. При этом нетривиальные результаты были получены при изучении статистики коэффициента отражения от протяженной рассеивающей линейной [12—15] и нелинейной [16] среды, распределения интенсивности электромагнитной волны внутри неоднородного слоя [12, 17] и т. п. Поэтому представляется целесообразным перенесение идей и методов марковского приближения для анализа нелинейного взаимодействия волн.

В настоящей работе в диффузионном приближении рассматриваются задачи о распадной параметрической неустойчивости и о нелинейной генерации второй гармоники в слабонелинейной среде с одномерными крупномасштабными случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости. При этом ограничимся анализом простейших случаев. Более детальное и последовательное изложение приводится в работах [8, 18].

2. Квазистатистический процесс взаимодействия триплета волн в нелинейной среде без потерь с линейными крупномасштабными неоднородностями описывается следующей системой укороченных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд волн [1]:

$$\begin{aligned} dA_{1,2}/dz &= -i\beta_{1,2}A_3A_{2,1}^* \exp[i\psi(z)], \\ dA_3/dz &= -i\beta_3A_1A_2 \exp[-i\psi(z)], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\beta_{1,2}$ — постоянные коэффициенты нелинейного взаимодействия, $\psi(z) = \int_0^z dz' \Delta k(z')$ — фазовый набег на случайных неоднородностях среды, возникающий при взаимодействии волн, для которых $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, а $\Delta k(z) = k_3(z) - k_1(z) - k_2(z)$ есть локальная волновая расстройка с характерным пространственным масштабом l ($k_i l \gg 1$, $i=1, 2, 3$).

Относительно характера флуктуаций линейных неоднородностей среды предположим, что волновая расстройка $\Delta k(z)$ является однородным гауссовым случайным процессом с нулевым средним ($\langle \Delta k \rangle = 0$) и функцией корреляции $\langle \Delta k(z) \Delta k(z') \rangle = B_{\Delta k}(z-z')$, где угловыми скобками обозначено статистическое усреднение по ансамблю реализаций случайной функции $\Delta k(z)$. Пусть размер неоднородности l мал по сравнению с масштабом нелинейного взаимодействия волн L в однородной нелинейной среде ($\Delta k=0$) и с масштабом многократного рассеяния волн L_p в линейной неоднородной среде ($\beta_i=0$):

$$l \ll L_{NL} \sim (\beta |A(0)|)^{-1}, \quad l \ll L_p \sim \langle \Delta k^2 \rangle^{-1}. \quad (2)$$

Последнее предположение эквивалентно замене реальной корреляционной функции $B_{\Delta k}$ на эффективную корреляционную функцию

$$B_{\Delta k}^{\text{эф}}(z-z') = 2D\delta(z-z'), \quad (3)$$

где $D = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz B_{\Delta k}(z) \sim L_p^{-1}$.

Далее, поскольку мы рассматриваем попутное взаимодействие волн, то граничные условия для уравнений (1) заданы в одной точке $A_i(0) = A_i^{(0)}$, и, следовательно, в динамической задаче выполнено условие причинности. А одноточечность задачи (1) и наличие при выполнении условий (2) δ -коррелированной (3) гауссовой статистики процесса $\Delta k(z)$ позволяют стандартными методами исследовать статистические свойства комплексных амплитуд взаимодействия волн $A_i(z)$.

3. В качестве простого примера, иллюстрирующего изложенное выше, рассмотрим статистическое описание параметрического деления частоты ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $A_1^{(0)} = A_2^{(0)} = A^{(0)}$) в заданном поле накачки $A_3 = \text{const}$. При этом из (1) легко получить стохастиче-

ское уравнение для комплексной амплитуды волны низкой частоты $A_1 = A_2 = A$ ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$):

$$A'' - i\Delta k(z) A' - \gamma^2 A = 0, \quad (4)$$

где $\gamma = \beta |A_3| = L_{NL}^{-1}$ — пространственный инкремент распадной неустойчивости в однородной среде. Заменой

$$A = A^{(0)} \exp\left(\gamma \int_0^z dz' e^{i\varphi(z')}\right)$$

уравнение (4) сводится к нелинейному уравнению первого порядка для случайной величины $\varphi(z)$:

$$\varphi' = \Delta k(z) - 2\gamma \sin \varphi, \quad \varphi(0) = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим статистические свойства нормированной интенсивности субгармоники $I(z) = |A(z)|^2 / |A^{(0)}|^2$, которая описывается уравнением

$$I' = 2\gamma I \cos \varphi, \quad I(0) = 1. \quad (6)$$

Теперь легко видеть, что двумерный процесс (I, φ) является марковским, и из (5), (6) стандартной процедурой можно получить УЭФ для функции распределения $W(I, \varphi, z)$:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = D \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + 2\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} W \sin \varphi - 2\gamma \cos \varphi \frac{\partial}{\partial I} IW, \quad (7)$$

$$W(I, \varphi; z=0) = \delta(I-1) \delta(\varphi),$$

Из диффузионного уравнения (7) следует, что величина $\mu = 2\gamma/D \sim L_p/L_{NL}$ является основным параметром задачи, характеризующим влияние хаотических неоднородностей на эффективность распадной неустойчивости. Очевидно, что при $\mu \gg 1$ неустойчивость развивается, как в однородной среде. В случае, если $\mu \ll 1$, наличие случайного рассинхронизма оказывает сильное влияние на процесс параметрического взаимодействия. В последнем нетрудно убедиться непосредственно, замыкая уравнения (7) относительно моментов интенсивности субгармоники:

$$\langle I^N(z) \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dI I^N W(I, \varphi; z).$$

В частности, в наиболее интересном случае $\mu \ll 1$ в достаточно протяженной среде $z \gg L_p$ из (7) получаем

$$\langle I^N \rangle \approx \exp\left[N(N+1)\mu \frac{z}{L_{NL}}\right]. \quad (8)$$

Отсюда следует важный с количественной точки зрения вывод о том, что по средней интенсивности инкремент распадной неустойчивости при $L_p \ll L_{NL}$ оказывается значительно меньшим (в L_{NL}/L_p

раз) инкремента в отсутствие флюктуаций фазового синхронизма взаимодействующих волн.

4. Для последовательного аналитического рассмотрения влияния неоднородностей на процесс нелинейного взаимодействия необходимо отказаться от приближения заданного поля волны накачки. При этом задача существенно усложняется, так как описывается нелинейными стохастическими уравнениями, которые при взаимодействии первой и второй гармоник $\omega_2 = 2\omega_1$ имеют вид

$$dA_1/dz = -i\beta_1 A_2 A_1^* \exp[i\psi(z)], \quad (9)$$

$$dA_2/dz = -i\beta_2 A_1^2 \exp[-i\psi(z)].$$

Предположим для простоты, что «на входе» в нелинейную неоднородную среду вторая гармоника отсутствует, $A_2(0) = 0$, а заданная начальная амплитуда основного излучения $A_1(0) = A_1^{(0)}$. Пусть далее выполнено в среднем условие фазового синхронизма, т. е. $\langle \Delta k(z) \rangle = 0$. Тогда $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ и для нормированной амплитуды второй гармоники $a = A_2/A_1^{(0)}$ с учетом соотношений Менли-Роу

$$|a|^2 + |A_1/A_1^{(0)}|^2 = 1 \quad (10)$$

из (9) несложно получить следующее нелинейное стохастическое уравнение:

$$d^2 a/d\zeta^2 + i\Delta(\zeta) da/d\zeta + (1 - |a|^2)a = 0, \quad (11)$$

$$a(0) = 0, \quad a'(0) = -i/\sqrt{2},$$

где введена безразмерная координата $\zeta = z/L_{NL}$; $L_{NL} = (\sqrt{2}\beta |A_1^{(0)}|)^{-1}$ — характерная длина нелинейного взаимодействия в однородной среде; $\Delta = \Delta k L_{NL}$ — нормированная расстройка фазовых скоростей. Оксюда уравнение, описывающее генерацию второй гармоники в приближении заданного поля, получается отбрасыванием [последнего члена в (11), а в приближении заданной интенсивности — отбрасыванием нелинейного члена $|a|^2 a$ в уравнении (11)]. Попробуем исследовать уравнение (11) самосогласованно, не делая каких-либо предположений о характере нелинейного члена.

В дальнейшем рассмотрим статистические характеристики интенсивности второй гармоники, поэтому от уравнения (11) целесообразно перейти к уравнению для случайной функции

$$I(\zeta) = |a(\zeta)|^2. \quad (12)$$

Для получения последнего введем функции $R = i(a^* a' - a a'^*)$, $\Gamma = a' a^*$, для которых совместно с определением (5) из уравнения (11) следует

$$I'' + \Delta R + 2[(1 - I)I - \Gamma] = 0, \quad (13a)$$

$$R' - \Delta I' = 0, \quad \Gamma' + (1 - I)I = 0, \quad (13b)$$

$$I(0) = I'(0) = R(0) = 0, \quad 2\Gamma(0) = 1. \quad (13b)$$

Интегрируя уравнения (13б) и подставляя полученные выражения в уравнение (13а), получаем окончательно замкнутое нелинейное интегро-дифференциальное стохастическое уравнение для случайной интенсивности $I(\zeta)$:

$$I'' + \Delta(\zeta) \int_0^{\zeta} d\zeta' \Delta(\zeta') I'(\zeta') - 3I^2 + 4I - 1 = 0, \quad (14)$$

$$I(0) = I'(0) = 0, \quad I''(0) = 1.$$

Уравнение (14) имеет стохастический интеграл

$$I'^2 + \left[\int_0^{\zeta} d\zeta' \Delta(\zeta') I'(\zeta') \right]^2 = 2I(I-1)^2, \quad (15)$$

из которого следует, что в каждой реализации интенсивность меняется не слишком быстро, так как согласно (15) $|I'| \leq (8/27)^{1/2}$ и

$$\left| \int_0^{\zeta} d\zeta' \Delta(\zeta') I'(\zeta') \right| \leq (8/27)^{1/2}.$$

Предположим, как и ранее, что $\Delta k(z)$ является однородной, нормальной случайной δ -коррелированной функцией (3). Тогда статистические характеристики $\Delta(\zeta)$ определяются коррелятором

$$B_{\Delta}^{\delta\delta}(\zeta - \zeta') = 2\mu^{-1}\delta(\zeta - \zeta'), \quad (16)$$

где по-прежнему $\mu = L_p/L_{NL}$.

Используя корреляционные свойства случайной функции $\Delta(\zeta)$, несложно определить и область изменения предельного коэффициента трансформации основного излучения в гармонику $\eta = \langle I(\zeta) \rangle$. Действительно, усредняя с помощью формулы Фуруцу—Новикова уравнение (14) по ансамблю реализаций $\Delta(\zeta)$, получаем

$$\langle I'' \rangle + \mu^{-1} \langle I' \rangle - 3 \langle I^2 \rangle + 4 \langle I \rangle - 1 = 0. \quad (17)$$

Предельный КПД определяется устойчивым состоянием равновесия уравнения (17) при $\zeta = \infty$. Выделяя в $I(\zeta)$ регулярную компоненту ($I = \langle I \rangle + \Delta I$, $\langle \Delta I \rangle = 0$), находим следующие состояния равновесия уравнения (17):

$$I_{1,2}^{(\infty)} = \frac{2}{3} \pm \left(\frac{1}{9} - \langle \Delta I^{(\infty)2} \rangle \right)^{1/2}, \quad (18)$$

одно из которых, $I^{(\infty)}$, как легко видеть, неустойчиво. Таким образом, уже простой анализ (17), (18) показывает, что случайный сбой фазового синхронизма приводит к срыву стопроцентной генерации второй гармоники, причем в достаточно протяженной рассеивающей среде происходит насыщение процесса нелинейного взаимодействия, КПД преобразования приближается к стационарному значению η_{∞} , пределы изменения которого определяются выражением (18):

$$1/3 \leq \eta_{\infty} \leq 2/3. \quad (19)$$

Заметим, что в приближении заданного поля волны накачки мог быть неограниченный рост преобразования, а приближение заданной интенсивности основного излучения ($|A_i|^2 = \text{const}$) приводит к предельному КПД $\eta_\infty = 1/4$, что противоречит (19).

Обратимся к более детальному исследованию статистики интенсивности $I(\zeta)$. Для этого, используя интеграл (15), запишем уравнение (14) в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} p' &= f(g) + \Delta(\zeta) [\varphi(g) - p^2]^{1/2}, \\ g' &= p, \quad p(0) = g(0) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь введены обозначения: $g = I$, $p = I'$, $f(g) = 3g^2 - 4g + 1$, $\varphi(g) = 2g(g-1)^2$. В силу одноточечности задача (20) удовлетворяет условию причинности и может быть проанализирована в диффузионном приближении. Действительно, используя корреляционные свойства (16) процесса $\Delta(\zeta)$, получаем УЭФ для совместной плотности вероятностей $W(g, p, \zeta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \tau} &= -\mu p \frac{\partial W}{\partial g} - \frac{\partial}{\partial p} [\mu f(g) - p] W + \frac{\partial^2}{\partial p^2} [\varphi(g) - p^2] W, \\ W(g, p; \tau = 0) &= 2\delta(g)\delta(p), \quad 0 \leq g \leq 1, \quad |p| \leq (8/27)^{1/2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\tau = \mu^{-1}\zeta = z/L_p$ — оптический путь в рассеивающей среде.

Получить решение краевой задачи (21) весьма затруднительно. Поэтому перейдем от уравнения (21) к уравнениям для моментов $q_{m,n}(\tau) = \langle p^m g^n \rangle$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$. Интегрируя (21), находим

$$\begin{aligned} q'_{m,n} &= -m^2 q_{m,n} + 2m(m-1)(q_{m-2,n+3} - 2q_{m-2,n+2} + q_{m-2,n+1}) + \\ &\quad + \mu n q_{m+1,n-1} + \mu m (3q_{m-1,n+2} - 4q_{m-1,n+1} + q_{m-1,n}), \\ q_{0,0}(0) &= 1, \quad q_{m,n}(0) = 0, \quad m+n \geq 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Система (22) представляет собой бесконечную систему зацепляющихся уравнений, причем интересующие нас моменты интенсивности определяются следующим образом:

$$\langle I^N(\tau) \rangle = q_{0,N}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Диффузионное уравнение (21), а вслед за ним и система (22) допускают стационарное решение $W(p, q; \tau = \infty) = W_\infty(p, q)$, $q_{m,n}(\tau = \infty) = q_{m,n}^{(\infty)}$ соответственно, причем нетривиальный анализ приводит к следующему результату:

$$q_{2M,N}^{(\infty)} = \frac{2^M [(2M-1)!!]^2 (M+N)!}{(3M+N+1)!}, \quad q_{2M+1,N}^{(\infty)} = 0. \quad (24)$$

Таким образом, предельные значения моментов интенсивности второй гармоники согласно (23) и (24) равны:

$$\langle I_\infty^N \rangle = 1/(N+1), \quad N = 1, 2, \dots \quad (25)$$

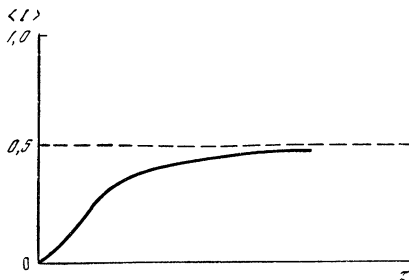


Рис. 1

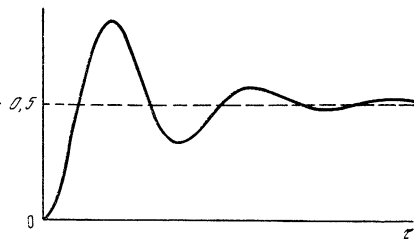


Рис. 2

В частности, из (25) получаем стационарное значение КПД нелинейного преобразования основного излучения во вторую гармонику:

$$\eta_{\infty} = \langle I_{\infty} \rangle = 1/2. \quad (26)$$

Знание всех моментов (25) позволяет определить стационарное вероятностное распределение интенсивности гармоники $w_{\infty}(g) = \int dp W_{\infty}(p, q)$, которое оказывается равномерным:

$$w_{\infty}(I) = \theta(I) - \theta(I - 1),$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Уравнения (22) позволяют также качественно описать динамику выхода процесса нелинейного взаимодействия на стационарный режим в двух предельных случаях $\mu \ll 1$ и $\mu \gg 1$. Действительно, пусть $\mu \ll 1$, тогда $L_{NL} \gg L_p$, и, следовательно, набег относительной разности фаз из-за случайных неоднородностей среды на длине нелинейного взаимодействия велик. В этом случае нелинейное взаимодействие гармоник существенно ослабляется и средняя интенсивность второй (а в силу соотношений Менли—Роу и первой) гармоники релаксационно стремится к стационарному значению (рис. 1). Последнее соответствует, по существу, приближению хаотических фаз, поскольку длина когерентности определяется L_p и сбой фаз происходит достаточно быстро. При этом характерная длина, на которой достигается предельное значение, $z^* \sim \mu^{-1} L_{NL}$. В другом предельном случае $\mu \gg 1$ имеем $L_{NL} \ll L_p$, набег разности фаз волн на нелинейной длине мал, и на начальной стадии достигается высокая эффективность преобразования основного излучения в гармонику. Однако по мере распространения волн в неоднородной нелинейной среде все большую роль начинает играть многократное рассеяние волн, приводящее к локальному развитию распадной неустойчивости второй гармоники. При этом случайный фазовый рассинхронизм играет роль затравочного возмущения [7]. Осцилляционный характер установления стационарного режима изображен на рис. 2. Период осцилляций $\Lambda \sim L_{NL}$, а характерная длина установления $z^* \sim \mu L_{NL}$.

5. Описанный в настоящей работе метод анализа процессов трехволнового взаимодействия в нелинейной случайно-неоднородной среде на основе диффузионного уравнения позволяет исследовать любые резонансные взаимодействия. Действительно, лишь задание начальных условий на границе нелинейной среды выделяет в рамках общего трехволнового взаимодействия, описываемого в неоднородной среде уравнениями (1), частные типы взаимодействий, соответствующие различным процессам: преобразованию частоты вверх (слияние), генерации разностных частот (распад), параметрическому усилению. При этом наличие случайного сбоя фаз волн для любого типа нелинейного взаимодействия приводит независимо от начальных условий к стационарному режиму взаимодействия. Конкретный тип взаимодействия определяет лишь характер установления предельного уровня трехчастотного нелинейного взаимодействия. Важной особенностью стационарного режима является независимость установившихся значений интенсивностей взаимодействующих волн от величины флюктуации волновой расстройки, которая определяет лишь длительность процессов установления.

В заключение отметим следующее. Известно, что при наличии регулярного рассинхронизма $\Delta k = k_m = \text{const}$ в однородной среде при $k_m L_{NL} \gg 1$ из-за возникновения сильных пространственных биений интенсивность второй гармоники не достигает больших значений: $I_{\max} \sim (k_m L_{NL})^{-2}$. Если же наряду с регулярным фазовым рассогласованием происходит случайный сбой фаз взаимодействующих волн ($\Delta k = k_m + \Delta \hat{k}$, $\langle \Delta \hat{k} \rangle = 0$), то, как показывает строгий анализ нелинейной задачи, многократное рассеяние волн приводит к существенному увеличению эффективности взаимодействия, к выходу его на стационарный режим с предельным КПД преобразования $\langle \eta_{\infty} \rangle = 1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. М.: Изд-во МГУ, 1971. 128 с.
2. Rosenbluth M. N. — Phys. Rev. Lett., 1972, 29, p. 565.
3. Тамойкин В. В., Файнштейн С. М. — ЖЭТФ, 1975, 68, № 3, с. 948.
4. Тагиев З. А., Чиркин А. С. — ЖЭТФ, 1977, 73, № 4, с. 1271.
5. Тагиев З. А., Чиркин А. С. — Квантовая электроника, 1977, 4, № 7, с. 1503.
6. Liu C. S., Rosenbluth M. N., White R. B. — Phys. Rev. Lett., 1973, 31, p. 697.
7. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. — В кн.: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1973, т. 7, с. 3.
8. Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. — Физика плазмы, 1980, 6, № 3.
9. Филоненко Н. Н., Мельник Л. П. — ЖЭТФ, 1975, 69, № 10, с. 1183.
10. Мельник Л. П., Филоненко Н. Н. — ЖЭТФ, 1976, 70, № 6, с. 458.
11. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975. 239 с.
12. Газарян Ю. Л. — ЖЭТФ, 1969, 56, № 6, с. 1856.
13. Parapolou G. — SIAM J. Appl. Math., 1971, 21, p. 13.
14. Ryzhov Yu. A. — Radio Sci., 1976, 11, p. 121.

15. *Абрамович Б. С., Дятлов А. И.* — Изв. вузов. Радиофизика, 1975, 18, № 8, с. 1122.
 16. *Абрамович Б. С., Саичев А. И.* — Изв. вузов. Радиофизика, 1979, 22, № 11, с. 1471.
 17. *Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н., Рыжов Ю. А.* — Изв. вузов. Радиофизика, 1979, 22, № 5, с. 566.
 18. *Абрамович Б. С., Тамойкин В. В.* — ЖЭТФ, 1980, 87, № 2, с. 458.

УДК 517.9

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ НАЛИЧИИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

А. М. ИЛЬИН

Простейшей моделью, описывающей нелинейные эффекты при распространении волн, является уравнение

$$u_t + [\varphi(u)]_x = 0. \quad (1)$$

Известно, что решение задачи Коши для этого уравнения с условием

$$u(x, t_0) = \psi(x) \in C^\infty \quad (2)$$

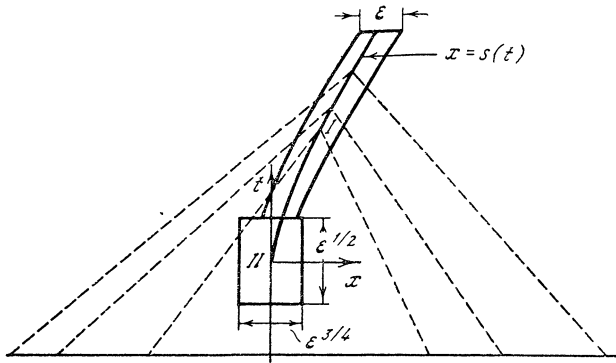
не является, вообще говоря, гладким. Пусть $\varphi''(u) > 0$, $\varphi(u) \in C^\infty$. Тогда волны с большей амплитудой имеют большую скорость. Если $\psi(u)$ — убывающая функция, то происходит «опрокидывание волн» [1, гл. II].

Учет вязкости приводит к уравнению Бюргерса

$$u_t + [\varphi(u)]_x = \varepsilon u_{xx}, \quad (3)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Решение задачи (2), (3) существует для всех $\varepsilon > 0$ и всех $t \geq t_0$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ оно стремится к обобщенному решению задачи (1), (2). Точке начала «опрокидывания волн» соответствует возникновение разрыва этого обобщенного решения, возникновение ударной волны [1, гл. II, гл. IV; 2 гл. IV; 3].

В настоящей работе будет показано, как при $\varepsilon \rightarrow 0$ происходит переход от решений уравнения (3) к решению уравнения (1) в случае, когда в предельной задаче возникает ударная волна. Точнее, будет построено приближенное решение задачи (2), (3) с точностью до произвольной степени ε . На этой задаче будет проиллюстрирован важный вариант метода многих масштабов, который носит название метода согласования асимптотических разложений (АР) или метода срачивания АР [4]. На рисунке показана ударная волна (линия разрыва решения задачи (1), (2)) на плоскости x, t . Без ограничения общности можно считать, что точка возникновения этой линии $x=s(t)$ совпадает с началом координат, что $t_0 = -1$ и $s'(0) = 0$. Пунктирными линиями на рисунке показаны характере-



ристики уравнения (1). На этих характеристиках решение $u_0(x, t)$ задачи (1), (2) постоянно, а на линии разрыва

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\varphi\{u_0[s(t) + 0, t]\} - \varphi\{u_0[s(t) - 0, t]\}}{u_0[s(t) + 0, t] - u_0[s(t) - 0, t]}$$

(см., например, [2, гл. IV]). Всюду в полосе $0 \leq t \leq T$ вне некоторой окрестности линии $x = s(t)$ AP решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (2), (3) имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, t). \quad (4)$$

Здесь $u_0(x, t)$ — упомянутое выше решение задачи (1), (2), а остальные $u_k(x, t)$ — решения простых линейных уравнений, которые легко выписываются. Все $u_k(x, t) \in C^\infty$ вне линии $x = s(t)$.

В окрестности линии $x = s(t)$ AP решения имеет другой вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\xi, t), \quad (5)$$

где $\xi = \varepsilon^{-1}[x - s(t)]$. Функции $v_k(\xi, t)$ удовлетворяют рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(v_0)_{\xi\xi} + \dot{s}(t)(v_0)_\xi - [\varphi(v_0)]_\xi = 0, \quad (6)$$

$$(v_k)_{\xi\xi} + \{[\dot{s}(t) - \varphi'(v_0)]v_k\}_\xi = (v_{k-1})_t + [g_k(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})]_\xi, \quad k \geq 1, \quad (7)$$

где легко выписать явный вид функций g_k . AP (5) описывает поведение решения $u(x, t, \varepsilon)$ вблизи фронта «размазанной» ударной волны (см. рисунок, область Γ).

Основной вопрос состоит в точном определении структуры решения в этой окрестности, т. е. в определении функций $v_k(\xi, t)$. Дело в том, что из уравнений (6), (7) они не определяются однозначно. Функция $v_0(\xi, t)$, график которой имеет вид сглаженной ступеньки, определяется с точностью до сдвига аргумента. Линей-

ное однородное уравнение (7) имеет одно быстро убывающее при $|\xi| \rightarrow \infty$ решение. С точностью до такого слагаемого определяются и все $v_k(\xi, t)$ при $k \geq 1$. Таким образом, в определении каждой из функций $v_k(\xi, t)$ присутствует неопределенная постоянная $c_k(t)$, зависящая от времени. Можно показать, что эти $c_k(t)$ удовлетворяют рекуррентной системе дифференциальных уравнений, но полностью их нельзя определить, не зная истории возникновения ударной волны. В том случае, когда линия разрыва $x=s(t)$ начинается с момента $t=t_0$ (начальная функция $\psi(x)$ имеет точку разрыва), задача была решена ранее [5, 6].

В том случае, который рассматривается здесь, для окончательного определения функций $v_k(\xi, t)$ надо более детально рассмотреть окрестность начала координат (см. рисунок, область II). Обозначим $g(y) = \varphi'(\psi(y))$. Введенные выше предположения относительно линии разрыва сводятся к тому, что $g(0) = g''(0) = 0$, $g'(0) = -1$, $g'''(0) \geq 0$. Предположим дополнительно, что $g'''(0) > 0$. Тогда функции $u_k(x, t)$ в выражении (4) имеют в окрестности нуля следующие АР:

$$u_0(x, t) = \psi(0) + |t|^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} u_{0,l}^{\pm}(\theta) |t|^{l/2},$$

$$u_k(x, t) = |t|^{1/2-2k} \sum_{l=0}^{\infty} u_{k,l}^{\pm}(\theta) |t|^{l/2}, \quad k \geq 1,$$
(8)

где $\theta = x|t|^{-3/2}$, а знаки «+» и «-» у функций $u_{k,l}^{\pm}$ означают АР при $t > 0$ и при $t < 0$ соответственно. Из этих формул видно, что $u_k(x, t)$ неограниченны при $k \geq 1$, причем порядок их особенности растет вместе с номером k . Так что АР (4) и (5) очевидно несправедливы в окрестности нуля (область II). В этой области вводятся новые независимые переменные $\zeta = x\varepsilon^{-3/4}$, $\tau = t\varepsilon^{-1/2}$, а АР решения имеет вид

$$\psi(0) + \varepsilon^{1/4} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} w_k(\zeta, \tau).$$
(9)

Для функций $w_k(\zeta, \tau)$ получается рекуррентная система уравнений

$$(w_0)_{\tau} + \beta^2 w_0(w_0)_{\zeta} - (w_0)_{\zeta\tau} = 0,$$

$$(w_k)_{\tau} + \beta^2 (w_0 w_k)_{\zeta} - (w_k)_{\zeta\tau} = [h_k(w_0, w_1, \dots, w_{k-1})]_{\zeta}, \quad k \geq 1,$$

где $\beta^2 = \varphi''[\psi(0)]$, а функции h_k легко выписываются. Функции рассматриваются на всей плоскости: $-\infty < \zeta < \infty$, $-\infty < \tau < \infty$, и для того чтобы их однозначно определить, надо связать их с внешним АР (4) при $t < 0$. Подставляя формулы (8) в ряд (4) и переходя к переменным ζ, τ , получаем ряд по степеням $\varepsilon^{1/4}$:

$$\psi(0) + \varepsilon^{1/4} |\tau|^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l/4} |\tau|^{l/2} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,l}^{\pm}(\theta) \tau^{-2k}.$$
(10)

Метод согласования АР состоит в том, чтобы при построении различных АР в разных областях (в нашем примере — это АР (4) и (9)) добиваться совпадения этих АР в промежуточных областях. Например, АР (9) должно быть справедливым не только в области II , но и в большей области, характерный размер которой по t равен ε^ν , где $\nu < 1/2$. Значит, асимптотика функций $w_k(\zeta, \tau)$ при $\tau \rightarrow -\infty$ должна быть согласована с асимптотикой функций $u_k(x, t)$ при $t \rightarrow -0$. Другими словами, в соответствии с (10) функции $w_k(\zeta, \tau)$ должны при $\tau \rightarrow -\infty$ разлагаться в асимптотические ряды

$$|\tau|^{(l+1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,l}^-(\theta) \tau^{-2k},$$

где $\theta = \zeta |\tau|^{-3/2} = x |t|^{-3/2}$. Такие решения действительно существуют и определяются однозначно. После построения функций $w_k(\zeta, \tau)$ можно исследовать их поведение при $\tau \rightarrow +\infty$. Эта асимптотика будет, кроме рядов

$$\tau^{(l+1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,l}^+(\theta) \tau^{-2k},$$

обусловленных АР (10), включать еще дополнительные слагаемые. Например, у функции $w_0(\zeta, \tau)$, при $\tau \rightarrow +\infty$ имеется дополнительное слагаемое вида $\tau^{1/2} V(\tau^{1/2} \zeta)$, где график $V(z)$ — это сглаженная ступенька. После перехода к переменным $t = \varepsilon^{1/2} \tau$ и $\xi = \varepsilon^{-1}(x - s(t)) = \varepsilon^{-1/2} \zeta + O(\tau^2)$ это слагаемое дает главный член $\varepsilon^{-1/2} t^{1/2} V(t^{1/2} \xi)$. Поэтому $\psi(0) + t^{1/2} V(t^{1/2} \xi)$ — это асимптотика в нуле для функции $v_0(\xi, t)$, которая является решением уравнения (6). Теперь уже функция $v_0(\xi, t)$ однозначно определяется для всех $t \geq 0$. Аналогично по асимптотике в нуле однозначно определяются и все функции $v_k(\xi, t)$. При этом опять между областями I и II имеется промежуточная зона, в которой справедливы как АР (5), так и АР (9). Окончательное определение всех функций $v_k(\xi, t)$ дает возможность построить асимптотическое приближенное решения $u(x, t, \varepsilon)$ в области I , т. е. в окрестности ударной волны, с точностью до произвольной степени ε .

ЛИТЕРАТУРА

1. Уизем Дж. Линеинные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 568 с.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
3. Олейник О. А. — УМН, 1957, 12, № 3, с. 3.
4. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
5. Ильин А. М., Нестерова Т. Н. — Докл. АН СССР, 1978, 240, № 1, с. 11.
6. Нестерова Т. Н. — В кн.: Дифференциальные уравнения с малым параметром. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980, с. 19.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
<i>С. М. Рытов</i> Академик Л. И. Мандельштам	8
<i>Я. Б. Зельдович</i> Горение: нелинейная температурная волна в веществе, выделяющем тепло	30
<i>А. С. Давыдов</i> Нелинейные колебательные явления в биологии	42
<i>А. Г. Литвак, Г. М. Фрайман</i> Взаимодействие сильных электромагнитных волн с плотной плазмой	61
<i>В. Б. Гильденбург</i> Неравновесный высокочастотный разряд в полях электромагнитных волн	87
<i>В. С. Летохов, В. Г. Миногин</i> Нелинейные движения атомов в световом поле	96
<i>Е. И. Якубович</i> О взаимодействии встречных волн в нелинейных средах	103
<i>В. И. Беспалов, А. А. Бетин, А. И. Дятлов, С. Н. Кулагина, В. Г. Манишин, А. З. Матвеев, Г. А. Пасманик, А. А. Шилов</i> Нелинейные взаимодействия световых волн сложной пространственно-временной структуры в кубичных средах	109
<i>Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов</i> Геометрооптические способы оценки полей в фокусах и на каустиках	141
<i>А. Я. Басович, В. И. Таланов</i> Адиабатическое взаимодействие волн	147
<i>К. А. Наугольных, Л. А. Островский, А. М. Сутин</i> Нелинейная акустика	166

<i>Е. Н. Пелиновский</i>	
Волны цунами	187
<i>М. Н. Кошляков, Ю. М. Грачев, В. Х. Еникеев</i>	
Синоптические океанские вихри в свете результатов экспедиции ПОЛИМОДЕ	203
<i>В. И. Кляцкин</i>	
Линейные статистические задачи как нелинейные задачи физики . . .	216
<i>Б. С. Абрамович, В. В. Тамойкин</i>	
Диффузионное приближение в теории нелинейного взаимодействия волн в хаотически-неоднородных средах	225
<i>А. М. Ильин</i>	
Структура ударной волны при наличии малой вязкости	234

Рытов С. М. Академик Л. И. Мандельштам. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Статья посвящена 100-летию со дня рождения Л. И. Мандельштама. Написанная одним из ближайших учеников Мандельштама статья раскрывает образ Леонида Исааковича как человека исключительных личных качеств, душевного благородства и обаяния. В ней содержатся краткие биографические сведения о Мандельштаме, рассказано о некоторых его научных достижениях, в частности о вкладе Мандельштама в теорию нелинейных колебаний и волн, о создании им радиофизической школы и др. Приводятся высказывания и воспоминания о Мандельштаме людей, близко знавших его, работавших с ним, учившихся у него.

Зельдович Я. Б. Горение: нелинейная температурная волна в веществе, выделяющем тепло. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Излагается решение нелинейной задачи о распространении температурной волны в выделяющем тепло веществе, являющееся промежуточной асимптотикой. Результат хорошо согласуется с численными экспериментами. Исследована устойчивость решения, описывающего распространение пламени с постоянной скоростью в покоящемся газе. Пламя оказалось устойчивым по отношению к одно-, двух- и трехмерным возмущениям.

Ил. 8, список лит. 23 назв.

Давыдов А. С. Нелинейные колебательные явления в биологии. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

На основе методов теории твердого тела рассматриваются возможные механизмы переноса энергии и электронов вдоль больших белковых молекул, обладающих квазипериодической структурой.

Показано, что энергия может переноситься вдоль одномерной квазипериодической молекулярной цепи экситонами и солитонами. Первые переносят только энергию внутримолекулярного возбуждения, причем в ходе движения они возбуждают фотоны и быстро тормозятся. Вторые переносят практически без потерь энергию, которую они получают при локальных внешних воздействиях, например при химических реакциях. Показана возможность существования солитонов в α -спиральных белковых молекулах. Таким образом, солитонная передача энергии вдоль белковых молекул может служить механизмом транспорта энергии в соответствующих биологических системах.

Рассмотрено движение избыточного электрона в одномерной молекулярной цепи. Показана возможность образования связи электрона с создаваемой им же деформацией цепи. Такой электрон не тормозится при движении вдоль белковой молекулы, что напоминает явление сверхпроводимости металлов. Установлена принципиальная возможность переноса электрона акустическим солитоном.

Список лит. 25 назв.

Литвак А. Г., Фрайман Г. М. Взаимодействие сильных электромагнитных волн с плотной плазмой. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Приведен обзор теоретических и экспериментальных работ по взаимодействию интенсивных электромагнитных волн с плотной плазмой. Рассмотрена динамика сильной одномерной и неоднородной ленгмювской турбулентности, возбуждаемой в плазме в результате развития модуляционной неустойчивости, анализируются макроскопические следствия сильной турбулентности, приводящей к аномальной бесстолкновительной диссипации излучения и к изменению характеристик проникновения электромагнитного поля в плазму. Рассмотрено влияние нелинейных эффектов деформации профиля плотности на резонансное поглощение излучения в неоднородной плазме.

Ил. 11, список лит. 46 назв.

УДК 533.525

Гильденбург В. В. Неравновесный высокочастотный разряд в полях электромагнитных волн. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Дан обзор работ по теории неравновесного высокочастотного разряда в волновых электромагнитных полях. Описаны самосогласованные стационарные распределения разрядной плазмы и поля, динамика развития разряда в сфокусированных квазиоптических пучках и основные типы его мелкомасштабной неустойчивости.

Ил. 1, список лит. 14 назв.

УДК 535.214

Летохов В. С., Миногин В. Г. Нелинейные движения атомов в световом поле. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Изложены основы теории движения атомов в резонансных световых полях. Обсуждаются применения светового давления для управления пространственным движением атомов.

Ил. 4, список лит. 11 назв.

УДК 621.372.22; 530.18

Якубович Е. И. О взаимодействии встречных волн в нелинейных средах. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Рассматривается интерференция встречных волн в нелинейных средах. Обсуждаются некоторые законы сохранения и явления, присущие нелинейной интерференции.

Список лит. 5 назв.

УДК 538.576.452.1

Беспалов В. И., Бетин А. А., Дятлов А. И. и др. Нелинейные взаимодействия световых волн сложной пространственно-временной структуры в кубических средах. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Развита теория нелинейного взаимодействия полей со сложной пространственно-временной структурой в инерционных кубических средах. На основании полученных уравнений исследованы различные особенности эффекта обращения волнового фронта (ОВФ). В отсутствие волновой расстройки проанализирована нелинейная динамика процесса ОВФ при четырехволновом взаимодействии в условиях двухквантового резонанса. Приведены результаты экспериментального исследования ОВФ при комбинационном взаимодействии встречных световых волн в жидкостях.

Ил. 5, табл. 1, список лит. 20 назв.

УДК 621.371

Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрооптические способы оценки полей в фокусах и на каустиках. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Сформулированы универсальные эвристические условия применимости геометрической оптики, опирающиеся на понятие френелевского объема луча. Френелевский объем определяется как часть пространства, ограниченная первыми зонами Френеля, «нанизанными» на луч, при этом предлагается чисто геометрический способ построения френелевских объемов при помощи виртуальных лучей.

Располагая критерием применимости геометрической оптики. Поле в этих областях удастся оценить при помощи закона сохранения энергии в лучевой трубке, предположив, что начальный поток энергии более или менее равномерно размазывается по каустической (фокальной) зоне. Такого рода оценки полезны при решении вопроса о возможной роли нелинейных эффектов в фокальных и каустических областях.

Ил. 6, список лит. 9 назв.

УДК 533.95 : 532.59 : 551.46

Басович А. Я., Таланов В. И. Адиабатическое взаимодействие волн. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Рассматривается взаимодействие высокочастотных и низкочастотных волн существенно разных пространственно-временных масштабов (плазменных и ионно-звуковых волн в изотропной плазме, поверхностных и внутренних волн в океане). Обсуждаются эффекты, возникающие при групповом синхронизме взаимодействующих волн: отражение и захват высокочастотных волн и трансформация их спектра в поле интенсивных низкочастотных волн, а также изменение параметров периодических и уединенных низкочастотных волн.

Ил. 8, список лит. 37 назв.

УДК 534.222

Наугольных К. А., Островский Л. А., Сутин А. М. Нелинейная акустика. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Дан обзор ряда вопросов нелинейной акустики, интересных как для практических приложений, так и с точки зрения общей теории нелинейных волн. Основное внимание уделяется физической интерпретации рассматриваемых явлений и соответствующим экспериментальным результатам. Обсуждаются параметрические излучатели звука, нелинейная дифракция ограниченных пучков, генерация звука турбулентностью, распространение нелинейных акустических волн в жидкости с пузырьками газа, нелинейные взаимодействия в акустических волноводах.

Табл. 2, ил. 14, список лит. 74 назв.

УДК 550.345

Пелиновский Е. Н. Волны цунами. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Дан краткий обзор проблемы цунами. Перечислены некоторые случаи крупных цунами, обсуждается место цунами среди других стихийных бедствий, описана работа службы цунами. Более подробно обсуждается роль нелинейных и дисперсионных эффектов при распространении волн цунами. Приводятся данные натурных измерений лабораторного и численного моделирования, свидетельствующие в пользу нелинейности волн цунами. Изучается проблема наката волн цунами на берег.

Табл. 3, ил. 6, список лит. 72 назв.

УДК 551.466.63

Кощляков М. Н., Грачев Ю. М., Еникеев В. Х. Синоптические океанские вихри в свете результатов экспедиции ПОЛИМОДЕ; — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Дан обзор последних результатов исследований синоптических вихрей в океане — одного из наиболее интересных океанографических открытий прошедшего десятилетия. Экспериментальные наблюдения синоптических вихрей во время экспедиции ПОЛИМОДЕ сравниваются с выводами теории, в том числе нелинейной.

Табл. 1, ил. 6, список лит. 12 назв.

УДК 530.1

Кляцкин В. И. Линейные статистические задачи как нелинейные задачи физики. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Излагается современное состояние теории стохастических уравнений. Подчеркивается аналогия проблемы усреднения в линейных стохастических уравнениях с задачей описания нелинейных детерминированных задач с помощью линейных уравнений (в бесконечномерных пространствах). Подробно рассматривается задача о падении плоской волны на слой одномерной поглощающей случайно-неоднородной среды и устанавливаются пределы применимости линейной теории переноса излучения.

Список лит. 20 назв.

УДК 538.574.4 : 534.222.2

Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. Диффузионное приближение в теории нелинейного взаимодействия волн в хаотически-неоднородных средах. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Исследуется влияние одномерных случайных неоднородностей нелинейной среды на трехволновое взаимодействие волн. В диффузионном приближении рассматривается процесс распадной параметрической неустойчивости и нелинейной генерации второй гармоники. На основе решения уравнения Эйнштейна—Фоккера для вероятностного распределения интенсивностей взаимодействующих волн показано, что случайный сбой фаз волн, нарушающий условия фазового синхронизма, приводит к ослаблению резонансного взаимодействия и к выходу его на стационарный режим, соответствующий предельному КПД параметрического удвоителя частоты 50%. Анализируется динамика выхода нелинейного взаимодействия на стационарный режим.

Ил. 2, список лит. 18 назв.

УДК 517.9

Ильин А. М. Структура ударной волны при наличии малой вязкости. — В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981.

Рассматривается начальная задача для нелинейного уравнения первого порядка при условии, что решение задачи имеет одну гладкую линию разрыва. Если учесть в уравнении диссипативный член с малым параметром ϵ , то решение новой задачи будет всюду гладким. Методом согласования асимптотических разложений строится равномерное приближение к этому решению с точностью до произвольной степени ϵ .

Ил. 1, список лит. 6 назв.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ:
распространение и взаимодействие

Утверждено к печати
Институтом прикладной физики АН СССР

Редактор издательства *Л. Е. Кононенко*
Художник *А. Г. Кобрин*
Художественный редактор *Т. И. Алексеева*
Технический редактор *Т. С. Жарикова*
Корректоры *Р. Э. Землянская, И. А. Талалай*

ИБ № 21141

Сдано в набор 05.09.80.
Подписано к печати 11.12.80.
Т-21139. Формат 60 × 90^{1/16}.
Бумага типографская № 1.
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая
Усл. печ. л. 15,25. Уч.-изд. л. 17
Тираж 2850 экз. Тип. зак. 1831
Цена 2 р. 10 к.

Издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90
Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12