

224
18-496

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Самоорганизация



ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

САМООРГАНИЗАЦИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1983

Нелинейные волны: Самоорганизация.— М.: Наука, 1983.

Сборник содержит обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на VI Всесоюзной школе по нелинейным волнам (Горький, март 1981 г.). Основная часть работ посвящена обсуждению процессов самоорганизации в распределенных нелинейных системах разнообразной природы — биологических, химических, экологических, гидродинамических и т. д. Приводятся также новые результаты по стохастизации в нелинейных системах и турбулентности.

Ответственные редакторы
академик
А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ,
доктор физико-математических наук
М. И. РАБИНОВИЧ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ Самоорганизация

Утверждено к печати Институтом прикладной физики АН СССР

Редактор *В. В. Фомин-Агеев*. Редактор издательства *В. Н. Некрасова*
Художественный редактор *Т. П. Поленова*
Технический редактор *Л. И. Курянова*
Корректоры *В. Г. Петрова, И. А. Талалай*

ИБ № 27062

Сдано в набор 22.07.82. Подписано к печати 21.01.83. Т-02712. Формат 60×90^{1/16}.

Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 18,4. Усл. кр.-отт. 16,5. Тираж 2600 экз. Тип. зак. 2163.

Цена 2 р. 20 к.

Издательство «Наука» 117864, ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90
2-я типография издательства «Наука» 121089, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящую книгу включены обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам VI Горьковской школы по нелинейным волнам (Ветлуга, март 1981 г.). Несмотря на то что программа этой школы, как и обычно, была довольно широкой, школа имела вполне определенную направленность и наибольший интерес участников вызвали проблемы, связанные с динамикой процессов возникновения порядка в сложных нелинейных системах и средах. По этой и близким проблемам были прочитаны многие программные лекции и именно обсуждению процессов возникновения и разрушения порядка были посвящены многие семинары и заключительная дискуссия. Таким образом, данная направленность тематики школы определилась не столько деятельностью программного оргкомитета, сколько подготовленностью и заинтересованностью участников в этих сравнительно новых для теории нелинейных колебаний и волн проблемах. Сложившаяся на школе атмосфера в какой-то степени отражает рождение на наших глазах нового раздела теории колебаний и волн (а может быть, и науки вообще!) — теории самоорганизации. В том виде, как она складывается сейчас, эта теория должна исследовать общие закономерности образования, устойчивости и разрушения временных и пространственных структур в сложных неравновесных системах различной природы.

Самопроизвольное, не связанное с действием внешних организующих полей регулярное поведение в сложной системе есть результат развития в ней определенного вида неустойчивостей. При этом процесс упорядочения, очевидно, связан с коллективным (кооперативным) поведением образующих систему подсистем. Именно благодаря «кооперативности» теорию самоорганизации часто называют синергетикой (от греческого «совместные действия»).

Чем сейчас владеет теория самоорганизации, каковы ее модели, образы, методы? Надо признать, что крупных успехов, а также не заимствованных из других областей методов здесь пока нет. Однако есть вполне обоснованный оптимизм, базирующийся на единстве механизмов возникновения порядка из беспорядка во многих исследованных уже ситуациях.

Модели теории самоорганизации — это модели нелинейных неравновесных систем, подверженных действию флуктуаций, особенно принципиальных в момент фазового перехода беспорядок —

порядок. Исследование простейших моделей позволяет понять и выделить основные механизмы организации порядка, в частности такие, как избирательная неустойчивость, вероятностный отбор состояний, конкуренция или синхронизация подсистем. Именно с оценкой упорядоченности поведения связаны понятия и образы теории самоорганизации — корреляционная неустойчивость, параметр порядка, взаимная координация подсистем, энтропия и т. д.

Естественно, что для возникновения кооперативных эффектов система должна содержать большое число элементов (подсистем), т. е. должна быть достаточно сложной. При этом чем разнообразнее связи в системе, тем проще, в определенном смысле, может возникнуть организованная структура — химические реакции, дополнительные поля (магнитное, тепловое и т. д.), и вообще дополнительные взаимодействия способствуют развитию избирательных неустойчивостей и установлению регулярных образований.

Относительно методов теории самоорганизации, по-видимому, не будет преувеличением сказать, что они должны быть созданы именно для анализа сложных систем. Для сравнительно простых систем это уже привычные методы теории нелинейных колебаний и волн, о которых на наших школах много говорилось. Впрочем, как самостоятельная область теория самоорганизации вряд ли оформилась бы, если бы интересовалась лишь возникновением порядка в таких сравнительно простых ситуациях, как, например, термоконвекция (ячейки Бенара).

Помимо теории самоорганизации *, на школе обсуждались традиционные у нас проблемы, связанные с теорией турбулентности, нелинейными явлениями в океане, нелинейной физикой плазмы, нелинейной оптикой, теорией солитонов и математическими методами для линейных волн. Все это нашло отражение в данной книге. Здесь отсутствуют лишь материалы лекций В. Е. Захарова «Теория ветрового волнения с позиций слабой турбулентности», А. С. Моница «История климата Земли», А. П. Питаевского «Разлет плазмы» и Я. Г. Синая «Случайные блуждания», так как они содержатся в недавно опубликованных монографиях и обзорных статьях.

Ввиду того что большинство статей, вошедших в сборник, так или иначе относится к проблемам самоорганизации, он открывается статьей Ю. А. Данилова и Б. Б. Кадомцева «Что такое синергетика?», по существу являющейся введением.

Организаторы школы пользуются случаем, чтобы поблагодарить лекторов за участие в работе школы и предоставление материалов в этот сборник.

*А. В. Гапонов-Грехов,
М. И. Рабинович*

* Обратим внимание читателей на то, что в 1981 г. ИПФ АН СССР выпустил сборник статей «Автоволновые процессы в системах с диффузией», где содержатся новые результаты по возникновению структур в различных средах.

ЧТО ТАКОЕ СИНЕРГЕТИКА?

Ю. А. ДАНИЛОВ, Б. Б. КАДОМЦЕВ

Ненужность строгих определений. Первая из знаменитых «Лекций по колебаниям» Л. И. Мандельштама [1, с. 11] начинается словами: «Совсем не легко дать определение того, что составляет предмет теории колебаний». И далее: «Было бы бесплодным педантизмом стараться «точно» определить, какими именно процессами занимается теория колебаний. Важно не это. Важно выделить руководящие идеи, основные общие закономерности. В теории колебаний эти закономерности очень специфичны, очень своеобразны, и их нужно не просто «знать», а они должны войти в плоть и кровь» (с. 13).

Сказанное в полной мере относится и к X-науке, если под X понимать пока не установившееся название еще не сложившегося окончательно научного направления, занимающегося исследованием процессов самоорганизации и образования, поддержания и распада структур в системах самой различной природы (физических, химических, биологических и т. д.).

Что означает «синергетика»? Синергетика — лишь одно из возможных, но далеко не единственное значение X. Термин «синергетика» происходит от греческого «синергеиа» — содействие, сотрудничество. Предложенный Г. Хакеном, этот термин акцентирует внимание на согласованности взаимодействия частей при образовании структуры как единого целого.

Большинство существующих ныне учебников, справочников и словарей обходят неологизм Хакена молчанием. Заглянув в энциклопедии последних изданий, мы с вероятностью, близкой к единице, обнаружим в них не синергетику, а «синергизм» (1. Совместное и однородное функционирование органов (например, мышц) и систем; 2. Комбинированное действие лекарственных веществ на организм, при котором суммарный эффект превышает действие, оказываемое каждым компонентом в отдельности). Фигура умолчания объясняется не только новизной термина «синергетика», но и тем, что X — наука, занимающаяся изучением процессов самоорганизации и возникновения, поддержания, устойчивости и распада структур самой различной природы, еще далека от завершения и единой общепринятой терминологии (в том числе и единого названия всей теории) пока не существует. Бурные темпы развития новой области, переживающей период «штурма и натиска», не оставляют времени на унифи-

кацию понятий и приведение в стройную систему всей суммы накопленных фактов. Кроме того, исследования в новой области ввиду ее специфики ведутся силами и средствами многих современных наук, каждая из которых обладает свойственными ей методами и сложившейся терминологией. Параллелизм и разноречивостью в терминологии и системах основных понятий в значительной мере обусловлены также различием в подходе и взглядах отдельных научных школ и направлений и в акцентировании ими различных аспектов сложного и многообразного процесса самоорганизации.

Синергетику Хакена легко описать: все, что о ней известно, содержится в множестве

$$\text{Synergetics} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

где x_i — i -й том выпускаемой издательством Шпрингера серии по синергетике [2—8]. Множество это конечно, но число элементов в нем быстро возрастает. Помимо томов серии, множество можно пополнить, включив в него и некоторые другие издания.

Синергетика и синергетики. Подобно тому, как кибернетике Винера предшествовала кибернетика Ампера, имевшая весьма косвенное отношение к «науке об управлении, получении, передаче и преобразовании информации в кибернетических системах» [9], синергетика Хакена имела своих «предшественниц» по названию: синергетику Ч. Шеррингтона, синергию С. Улама и синергетический подход Н. Забуского.

Ч. Шеррингтон называл синергетическим, или интегративным, согласованное воздействие нервной системы (спинного мозга) при управлении мышечными движениями.

С. Улам был непосредственным участником одного из первых численных экспериментов на ЭВМ первого поколения (ЭНИВАКе) — проверке гипотезы равномерного распределения энергии по степеням свободы. Эксперимент, проведенный над числовым аналогом системы кубических осцилляторов, привел к неожиданному результату, породившему знаменитую проблему Ферми — Пасты — Улама: проследив за эволюцией распределения энергии по степеням свободы на протяжении достаточно большого числа циклов, авторы не обнаружили ни малейшей тенденции к равномерному распределению. С. Улам, много работавший с ЭВМ, понял всю важность и пользу «синергии, т. е. непрерывного сотрудничества между машиной и ее оператором» [10], осуществляемого в современных машинах за счет вывода информации на дисплей.

Решение проблемы Ферми — Пасты — Улама было получено в начале 60-х годов М. Крускалом и Н. Забуским, доказавшим, что система Ферми — Пасты — Улама представляет собой разностный аналог уравнения Кортевега—де Вриза и что равномерному распределению энергии препятствует солитон (термин, предложенный Н. Забуским), переносящий энергию из одной группы мод в другую. Реалистически оценивая ограниченные возможности как аналитического, так и численного подхода к решению нелинейных

задач, Н. Забуский пришел к выводу о необходимости единого синтетического подхода. По его словам [11], «синергетический подход к нелинейным математическим и физическим задачам можно определить как совместное использование обычного анализа и численной машинной математики для получения решений разумно поставленных вопросов математического и физического содержания системы уравнений».

Если учесть сложность систем и состояний, изучаемых синергетикой Хакена, то станет ясно, что синергетический подход Забуского (и как составная часть его — синергия Улама) займет достойное место среди прочих средств и методов X -науки. Иначе говоря, уповать только на аналитику было бы чрезмерным оптимизмом.

Особенность синергетики как науки. В отличие от большинства новых наук, возникавших, как правило, на стыке двух ранее существовавших и характеризующихся проникновением методов одной науки в предмет другой, X -наука возникает, опираясь не на граничные, а на внутренние точки различных наук, с которыми она имеет ненулевые пересечения: в изучаемых X -наукой системах, режимах и состояниях физик, биолог, химик и математик видят свой материал, и каждый из них, применяя методы своей науки, обогащает общий запас идей и методов X -науки.

Эту особенность X -науки (если X — синергетика) подробно охарактеризовал Хакен: «Данная конференция, как и все предыдущие, показала, что между поведением совершенно различных систем, изучаемых различными науками, существуют поистине удивительные аналогии. С этой точки зрения данная конференция служит еще одним примером существования новой области науки — Синергетики. Разумеется, Синергетика существует не сама по себе, а связана с другими науками по крайней мере двояко. Во-первых, изучаемые Синергетикой системы относятся к компетенции различных наук. Во-вторых, другие науки привносят в Синергетику свои идеи. Ученый, пытающийся проникнуть в новую область, естественно, рассматривает ее как продолжение своей собственной области науки. Чтобы убедиться в справедливости последнего замечания, достаточно взглянуть на заглавия докладов, представленных на наши предыдущие конференции. Так, прочитанный мной доклад носит весьма характерное название «Лазер, как источник новых идей в синергетике». Математики, занимающиеся теорией бифуркаций, предпочли озаглавить доклад «Теория бифуркаций и ее приложения». Физики, изучающие фазовые переходы, представили доклад под названием «Неравновесные фазовые переходы», а специалисты по статистической механике сочли более уместным назвать тот же подход «неравновесной нелинейной статистической механикой». Другие усматривали в новой области дальнейшее развитие «термодинамики необратимых процессов», третьи нашли рассматриваемый круг явлений особенно подходящим для применения теории катастроф (сохранив за не поддающимися пока решению проблемами название

«обобщенных катастроф»). Некоторые математики склонны рассматривать весь круг проблем с точки зрения структурной устойчивости. Все перечисленные мной разделы науки весьма важны для понимания образования макроскопических структур образования в процессе самоорганизации, но каждый из них упускает из виду нечто одинаково существенное. Укажу лишь некоторые из пробелов. Мир — не лазер. В точках бифуркации решающее значение имеют флуктуации, т. е. стохастические процессы. Неравновесные фазовые переходы обладают некоторыми особенностями, отличными от обычных фазовых переходов, например чувствительны к конечным размерам образцов, форме грани и т. п. В равновесной статистической механике не существуют самоподдерживающиеся колебания. В равновесной термодинамике широко используются такие понятия, как энтропия, производство энтропии и т. д., неадекватные при рассмотрении неравновесных фазовых переходов. Теория катастроф основана на использовании некоторых потенциальных функций, не существующих для систем, находящихся в состояниях, далеких от теплового равновесия. В мои намерения, разумеется, не входит критика тех или иных областей науки. Я хочу лишь подчеркнуть то, что представляется особенно важным: в настоящее время назрела острая необходимость в создании особой науки, которая бы объединила все перечисленные мной аспекты. Для науки безразлично, будет ли она называться «Синергетикой». Важно, что она существует» [8, с. 15—16].

Итак, X-наука делает первые шаги, и существует сразу не в одном, а в нескольких вариантах, отличающихся не только названиями, но и степенью общности и акцентами в интересах.

Теория диссипативных структур. Бельгийская школа И. Пригожина развивает термодинамический подход к самоорганизации [12, 13]. Основное понятие синергетики Хакена (понятие структуры как состояния, возникающего в результате когерентного (согласованного) поведения большого числа частиц) бельгийская школа заменяет более специальным понятием диссипативной структуры. В открытых системах, обменивающихся с окружающей средой потоками вещества или энергии, однородное состояние равновесия может терять устойчивость и необратимо переходить в неоднородное стационарное состояние, устойчивое относительно малых возмущений. Такие стационарные состояния получили название диссипативных структур. Примером диссипативных структур могут служить колебания в модели Лефевра — Николиса — Пригожина (так называемом брюсселяторе).

Теория автоволновых процессов. Распространение понятий равновесной термодинамики на состояния, далекие от равновесия, и, в частности, принцип эволюции Гленсдорфа — Пригожина вызвали критику со стороны «синергетиков». Так, Ландауэр построил контрпример, показывающий, что никакая функция состояния, в том числе и энтропия, не может быть положена в основу критерия устойчивости состояния, как это сделано в принципе эволю-

ции Гленсдорфа—Пригожина [2]. Отечественная школа нелинейных колебаний и волн, основоположником которой по праву считается Л. И. Мандельштам [14], рассматривает общую теорию структур в неравновесных средах как естественное развитие и обобщение на распределенные системы идей и подхода классической теории нелинейных колебаний [15]. Еще в 30-х годах Л. И. Мандельштам сформулировал программу выработки «нелинейной культуры, включающей надежный математический аппарат и физические представления, адекватные новым задачам, выработать нелинейную интуицию, годную там, где оказывается непригодной интуиция, выработанная на линейных задачах» [16].

Разработанная почти полвека назад, эта программа становится особенно актуальной в наши дни существенной «делинеаризации» всей науки. Без наглядных и емких физических образов, адекватных используемому математическому аппарату, немыслимо успешное построение общей теории структур — теории существенно нелинейной. Вооружая физика концентрированным опытом предшественников, эти образы позволяют ему преодолевать трудности, перед которыми заведомо мог бы спастись исследователь, полагающийся только на свои силы. В этом отношении физические образы Л. И. Мандельштама представляют собой глубокую аналогию со структурным подходом Э. Нётер, научившей математиков за конкретными деталями задачи различать контуры общей схемы — математической структуры, задаваемой аксиоматически. Суть структурного подхода, сформулированного Н. Бурбаки, звучит как парафраза мандельштамовской программы создания нелинейной культуры: «Структуры» являются орудиями математика; каждый раз, когда он замечает, что между элементами, изучаемыми им, имеют место отношения, удовлетворяющие аксиомам структуры определенного типа, он сразу может воспользоваться всем арсеналом общих теорем, относящихся к структурам этого типа, тогда как раньше он должен был бы мучительно выковыривать сам средства, необходимые для того, чтобы штурмовать рассматриваемую проблему, причем их мощность зависела бы от его личного таланта, и они были бы отягчены часто излишне стеснительными предположениями, обусловленными особенностями изучаемой проблемы» [17].

Следуя Р. В. Хохлову, возникновение волн и структур, вызванное потерей устойчивости однородного равновесного состояния, иногда называют автоволновыми процессами (по аналогии с автоколебаниями) [15, 18]. На первый план здесь выступает волновой характер образования структур: независимость их характерных пространственных и временных размеров от начальных условий (выход на промежуточную асимптотику [19]), а в некоторых случаях — от краевых условий и геометрических размеров системы.

Синергетика и кибернетика. Задачу выяснить с общих позиций закономерности процессов самоорганизации и образования структур ставит перед собой не только X-наука. Важную роль в понимании многих существенных особенностей этих процессов

сыграл, например, кибернетический подход, противопоставляемый иногда как абстрагирующий «от конкретных материальных форм» и поэтому противопоставляемый синергетическому подходу, учитывающему «физические основы спонтанного формирования структур» [20]. В этой связи небезынтересно отметить, что создатели кибернетики и современной теории автоматов могут по праву считаться творцами или предтечами X-науки. Так, Винер и Розенблют рассмотрели задачу о радиально-несимметричном распределении концентрации в сфере [21]. А. Тьюринг в известной работе [22] предложил одну из основных базовых моделей структурообразования и морфогенеза, породившую огромную литературу: систему двух уравнений диффузии, дополненных членами, которые описывают реакции между «морфогенами». Тьюринг показал, что в такой реакционно-диффузионной системе может существовать неоднородное (периодическое в пространстве и стационарное во времени) распределение концентраций.

В русле тех же идей — изучения реакционно-диффузионных систем — мыслил найти решение проблемы самоорганизации и Дж. фон Нейман. По свидетельству А. Беркса, восстановившего по сохранившимся в архиве фон Неймана отрывочным записям структуру самовоспроизводящегося автомата, фон Нейман «предполагал построить непрерывную модель самовоспроизведения, основанную на нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных, описывающих диффузионные процессы в жидкости. В этой связи интересно отметить, что фон Нейман получил не только математическое образование, но и подготовку инженера-химика» [23].

Структура и хаос. Понятие структуры, основное для всех наук, занимающихся теми или иными аспектами процессов самоорганизации, при любой степени общности предполагает некую «жесткость» объекта — способность сохранять тождество самому себе при различных внешних и внутренних изменениях. Интуитивно понятие структуры противопоставляется понятию хаоса как состоянию, полностью лишенному всякой структуры. Однако, как показал более тщательный анализ, такое представление о хаосе столь же неверно, как представление о физическом вакууме в теории поля как о пустоте: хаос может быть различным, обладать разной степенью упорядоченности, разной структурой.

Одним из сенсационных открытий было обнаружение Лоренцом [2] сложного поведения сравнительно простой динамической системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с квадратичными нелинейностями. При определенных значениях параметров траектория системы вела себя столь запутанным образом, что внешний наблюдатель мог бы принять ее характеристики за случайные.

Природа странного аттрактора Лоренца была изучена совместными усилиями физиков и математиков. Как и в случае многих других моделей X-теории, выяснилось, что система Лоренца

описывает самые различные физические ситуации — от тепловой конвекции в атмосфере до взаимодействия бегущей электромагнитной волны с инверсно-заселенной двухуровневой средой (рабочим телом лазера), когда частота волны совпадает с частотой перехода [24]. Из экзотического объекта странный аттрактор Лоренца оказался довольно быстро низведенным до положения заурядных «нестранных» аттракторов — притягивающих особых точек и предельных циклов. От него стали уставать: легко ли обнаруживать странные аттракторы буквально на каждом шагу!

Но в запасе у странного аттрактора оказалась еще одна довольно необычная характеристика, оказавшаяся полезной при описании фигур и линий, обойденных некогда вниманием Евклида, — так называемая фрактальная размерность.

Фрактали. Мандельброт [25] обратил внимание на то, что довольно широко распространенное мнение о том, будто размерность является внутренней характеристикой тела, поверхности или кривой, неверно (в действительности, размерность объекта зависит от наблюдателя, точнее, от связи объекта с внешним миром).

Суть дела нетрудно уяснить из следующего наглядного примера. Представим себе, что мы рассматриваем клубок ниток. Если расстояние, отделяющее нас от клубка, достаточно велико, то клубок мы видим как точку, лишенную какой бы то ни было внутренней структуры, т. е. геометрический объект с евклидовой (интуитивно воспринимаемой) размерностью 0. Приблизив клубок на некоторое расстояние, мы будем видеть его как плоский диск, т. е. как геометрический объект размерности 2. Приблизившись к клубку еще на несколько шагов, мы увидим его в виде шарика, но не сможем различить отдельные нити — клубок станет геометрическим объектом размерности 3. При дальнейшем приближении к клубку мы увидим, что он состоит из нитей, т. е. евклидова размерность клубка станет равной 1. Наконец, если бы разрешающая способность наших глаз позволяла нам различать отдельные атомы, то, проникнув внутрь нити, мы увидели бы отдельные точки — клубок рассыпался бы на атомы, стал геометрическим объектом размерности.

Но если размерность зависит от конкретных условий, то ее можно выбирать по-разному. Математики накопили довольно большой запас различных определений размерности. Наиболее рациональный выбор определения размерности зависит от того, для чего мы хотим использовать это определение. (Ситуация с выбором размерности вполне аналогична ситуации с вопросом: «Сколько пальцев у меня на руках: $3 + 7$ или $2 + 8$?» До тех пор, пока мы не вздумали надеть перчатки, любой ответ можно считать одинаково правильным. Но стоит лишь натянуть перчатки, как ответ на вопрос становится однозначным: « $5 + 5$ ».)

Мандельброт предложил использовать в качестве меры «нерегулярности» (изрезанности, извилистости и т. п.) определение размерности, предложенное Безиковичем и Хаусдорфом. Фрак-

таль (неологизм Мандельброта [25]) — это геометрический объект с дробной размерностью Безиковича—Хаусдорфа. Странный аттрактор Лоренца — один из таких фракталей.

Размерность Безиковича—Хаусдорфа всегда не меньше евклидовой и совпадает с последней для регулярных геометрических объектов (для кривых, поверхностей и тел, изучаемых в современном учебнике евклидовой геометрии). Разность между размерностью Безиковича—Хаусдорфа и евклидовой — «избыток размерности» — может служить мерой отличия геометрических образов от регулярных. Например, плоская траектория броуновской частицы имеет размерность по Безиковичу—Хаусдорфу больше 1, но меньше 2: эта траектория уже не обычная гладкая кривая, но еще не плоская фигура. Размерность Безиковича—Хаусдорфа странного аттрактора Лоренца больше 2, но меньше 3: аттрактор Лоренца уже не гладкая поверхность, но еще не объемное тело.

О степени упорядоченности или неупорядоченности («хаотичности») движения можно судить и по тому, насколько равномерно размазан спектр, нет ли в нем заметно выраженных максимумов и минимумов. Эта характеристика лежит в основе так называемой топологической энтропии, служащей, как и ее статистический прототип, мерой хаотичности движений.

Существуют и другие характеристики, позволяющие судить об упорядоченности хаоса.

Структура структуры. Как ни парадоксально, новое направление, столь успешно справляющееся с задачей наведения порядка в мире хаоса, существенно меньше преуспело в наведении порядка среди структур.

В частности, при поиске и классификации структур почти не используется понятие симметрии, играющее важную роль во многих разделах точного и описательного естествознания.

Так же как и размерность, симметрия существенно зависит от того, какие операции разрешается производить над объектом. Например, строение тела человека и животных обладает билатеральной симметрией, но операция перестановки правого и левого физически не осуществима. Следовательно, если ограничиться только физически выполнимыми операциями, то билатеральной симметрии не будет. Симметрия — свойство негрубое: небольшая вариация объекта, как правило, уничтожает весь запас присущей ему симметрии.

Если определение симметрии выбрано, то оно позволяет установить между изучаемыми объектами отношение эквивалентности. Все объекты подразделяются на непересекающиеся классы. Все объекты, принадлежащие одному и тому же классу, могут быть переведены друг в друга надлежаще выбранной операцией симметрии, в то время как объекты, принадлежащие различным классам, ни одной операцией симметрии друг в друга переведены быть не могут.

Симметрию следует искать не только в физическом пространстве, где разыгрывается процесс структурообразования, но и в любых пространствах, содержащих «портрет» системы.

В работе [26] предпринята попытка сформулировать требования симметрии, которым должна удовлетворять биологическая система. По мысли автора, «существо дела здесь состоит в эволюционном приспособлении биологических систем организмов к физическим и геометрическим характеристикам внешнего мира, в котором они себя «проявляют». Биомеханика движений скелета, «константности» психологии восприятия, биохимические универсалии жизненных процессов, движения и потоки, связанные с морфогенезом, — все это реакции отдельных видов организмов на соответствующие инвариантности, свойственные геометрико-физико-химическим характеристикам внешней среды, которые организмы «сумели» идентифицировать и включить в свою филогению в процессе эволюции. Чем больше инвариантных, регулярных свойств своего внешнего мира смог распознать и «учесть» организм, тем больше хаоса удается ему устранить из внешней среды, что в конце концов обеспечивает его преимущества с точки зрения принятия решений, уменьшения фрустрации, доминирования и, по существу, выживания» [26, с. 183].

Классифицировать структуры можно и по степени их сложности. Однако и в этом направлении предприняты лишь первые шаги.

Аксиоматический подход. Сложность поведения даже простых моделей (термин «элементарных» применительно к этим моделям так же, как и в случае элементарных частиц, отражает скорее уровень наших знаний о них, чем их истинную сложность) навела исследователей на мысль обратиться к аксиоматическому методу с тем, чтобы, следуя Гильберту, отделить существенные особенности модели от несущественных, случайных и тем самым облегчить построение моделей, воспроизводящих нужный режим поведения.

С. Улам [27] и другие авторы рассмотрели отображения плоскости на себя, производимые по определенным правилам (аксиомам). Наиболее эффективным оказалось отображение, предложенное Конуэем [28, 29], — его знаменитая игра «Жизнь».

Играют на плоскости, разбитой на квадратные клетки одного и того же размера. Каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: либо быть занятой (например, фишкой), либо пустой. Начальное состояние (начальная расстановка фишек) может быть выбрана произвольно. Последующие состояния клеток зависят от занятости соседних клеток на предыдущем ходу. Соседними считаются восемь клеток, непосредственно примыкающих к данной (имеющих с ней либо общую сторону — примыкание справа, слева, сверху и снизу, либо общую вершину — примыкание по диагонали). Игра состоит из дискретной последовательности ходов. На каждом ходу ко всем клеткам доски применяются следующие три правила (аксиомы).

1. **Выживание.** Клетка остается занятой на следующем ходу, если на предыдущем были заняты две или три соседние с ней клетки.

2. **Гибель.** Клетка становится свободной на следующем ходу, если на предыдущем было занято более трех или менее двух соседних клеток (в первом случае клетка «погибает» из-за перенаселения, во втором — из-за чрезмерной изоляции).

3. **Рождение.** Свободная клетка становится занятой на следующем ходу, если на предыдущем были заняты три и только три соседние клетки.

Кажущаяся простота правил Конуэя обманчива: как и простые динамические системы, доска с расставленными на ней фишками может перейти в весьма сложные режимы, имитирующие процессы гибели (полное уничтожение всех расставленных в начальной позиции фишек), неограниченный рост, устойчивое стационарное состояние (система с определенной периодичностью в пространстве), периодические по времени осцилляции.

Подробный обзор современного состояния кибернетического моделирования биологии развития приведен в [30].

Поиски универсальной модели. Сложность поведения простых моделей и неисчерпаемое разнообразие моделируемых объектов наводят на мысль о поиске некоего универсального класса моделей, которые могли бы воспроизводить требуемый тип поведения любой системы.

Рассмотрим, например, систему уравнений химической кинетики, описывающую редкую ситуацию: досконально известный механизм m -стадийной реакции (m — число элементарных актов), в которой принимает участие n веществ. Алгоритм выписывания динамической системы по схеме реакции однозначно определен [31]. В таких системах «химического типа» удалось установить существование довольно сложных режимов (например, каталитический триггер или каталитический осциллятор). В то же время известно, что далеко не всякую динамическую систему с полиномиальной правой частью можно интерпретировать как описывающую некую гипотетическую химическую реакцию: некоторые концентрации в случае произвольно заданной системы могут становиться отрицательными. Возникает вопрос: всякую ли динамическую систему с полиномиальной правой частью можно промоделировать системой типа химической кинетики? Ответ (положительный) был получен М. Д. Корзухиным [18], доказавшим теорему об асимптотической воспроизводимости любого режима, осуществимого в системах с полиномиальной правой частью, системами типа химической кинетики (быть может, с большим числом «резервуарных» переменных, концентрации которых в ходе реакции считаются неизменными).

Вместо заключения. Мы умышленно не остановились в лекции ни на «универмаге моделей», ни на перечислении существующих методов решения уравнений и задач определенных типов, считая, что и то и другое слушатели сумеют почерпнуть из других лек-

ций. Свою задачу мы видели в том, чтобы, не впадая в излишний педантизм, очертить контуры возникающего нового направления, обратить внимание на основные идеи и понятия.

Свою лекцию мы бы хотели закончить словами Л. И. Мандельштама: «В сложной области нелинейных колебаний еще в большей мере, чем это уже имеет место сейчас, выкристаллизуются свои специфические общие понятия, положения и методы, которые войдут в обиход физика, сделаются привычными и наглядными, позволят ему разбираться в сложной совокупности явлений и дадут мощное эвристическое оружие для новых исследований.

Физик, интересующийся современными проблемами колебаний, должен, по моему мнению, уже теперь участвовать в продвижении по этому пути. Он должен овладеть уже существующими математическими методами и приемами, лежащими в основе этих проблем, и научиться их применять» [32].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 503 с.
2. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
3. Synergetics. A Workshop / Ed. by H. Haken. 3rd ed. B. etc., 1977. 277 p.
4. Synergetics far from equilibrium / Ed. by A. Pacault, C. Vidal. B. etc., 1978.
5. Structural stability in physics / Ed. by W. Güttinger, H. Eikenmeier. B. etc., 1978. 311 p.
6. Pattern formation by dynamic systems and pattern recognition / Ed. by H. Haken. B. etc., 1979. 305 p.
7. Dynamic of synergetic systems / Ed. by H. Haken. B. etc., 1980. 271 p.
8. Chaos and order in nature / Ed. by H. Haken. B. etc., 1981.
9. Словарь по кибернетике. Киев: Гл. ред. Укр. сов. энцикл., 1979. 621 с.
10. Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964. 161 с.
11. Nonlinear partial differential equations. N. Y.: Acad. press, 1967, p. 223.
12. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1977. 512 с.
13. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.
14. Гапонов-Грегов А. В., Рабинович М. И. Л. И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн.— УФН, 1979, 128, № 4, с. 579—624.
15. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах.— УФН, 1979, 128, № 4, с. 625—666.
16. Академик Л. И. Мандельштам: К 100-летию со дня рождения.— М.: Наука, 1979, с. 107.
17. Бурбаки Н. Архитектура математики.— В кн.: Математическое просвещение. М.: Физматгиз, 1959, вып. 5, с. 106—107.
18. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974. 178 с.
19. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность и промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 207 с.
20. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. М.: Мир, 1979, с. 13—14.
21. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биологии. М.: Наука, 1975. 343 с.
22. Turing A. M. The chemical basis of morphogenesis.— Phil. Trans. Roy. Soc. London B, 1952, 237, p. 37—72.

23. *Нейман Дж. фон.* Теория самовоспроизводящихся автоматов. М.: Мир, 1971. 382 с.
24. *Рабинович М. И.* Стохастические автоколебания и турбулентность.— УФН, 1978, 125, № 1, с. 123—168.
25. *Mandelbrot B. B.* Fractals. San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1977. 365 p.
26. *Хоффман У.* Система аксиом математической биологии.— В кн.: Кибернетический сборник. М.: Мир, 1975, вып. 12, с. 184—207.
27. Математические проблемы в биологии: Сб. статей. М.: Мир, 1962, с. 258.
28. *Гарднер М.* Математические досуги. М.: Мир, 1972, с. 458.
29. *Эйген М., Винклер Р.* Игра жизнь. М.: Наука, 1979, с. 53.
30. *Аладьев В. З.* Кибернетическое моделирование биологии развития.— В кн.: Параллельная обработка информации и параллельные алгоритмы. Таллин: Валгус, 1981, с. 211—280.
31. *Вольперт А. И., Худяев С. И.* Анализ в классе разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975. 394 с.
32. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний: Предисловие к первому изданию. М.: Физматгиз, 1959, с. 11—12.

УДК 536.75

АВТОВОЛНЫ В БИОФИЗИКЕ

А. М. ЖАБОТИНСКИЙ

Механические и электромагнитные волны обычно распространяются в почти консервативных средах, где энергия, которую несет волна, практически не меняется, когда волна пробегает путь, равный ее длине. В пассивной среде энергия волны сохраняется или слабо рассеивается, в активной среде энергия волны может расти. Если среда ограничена непроницаемыми стенками, то длина волны жестко связана с линейными размерами системы.

В противоположность этому в биологических и химических активных средах обнаружены стационарные периодические волны, характеристики которых не зависели от начальных и краевых условий и линейных размеров системы. Последние определяли только возможность возникновения того или иного волнового режима. Они получили название автоволн по аналогии с автоколебаниями в сосредоточенных системах [1—3].

Автоволны возникают как естественное следствие свойств активных сред, типичных для биологии и химии. Здесь в каждой точке пространства запасена скрытая энергия и набегающая волна служит сигналом к ее высвобождению, которое в свою очередь поддерживает волну. Энергия, переносимая волной, ничтожна по сравнению с выделяющейся на участке, равном длине волны. Простейшим примером из химии является волна пламени, бегущая по запальному шнуру или сухой степи. В биологии элементарные автоволны — это нервные импульсы, волны эпидемий и экологических нашествий.

Автоволны возникают в средах, динамика которых может быть описана квазилинейными параболическими уравнениями

$$\partial u / \partial t = f(\bar{u}) + D \Delta \bar{u}, \quad (1)$$

D — обычно диагональная матрица.

Большинство интересных эффектов, полученных к настоящему времени, может быть описано простейшим вариантом

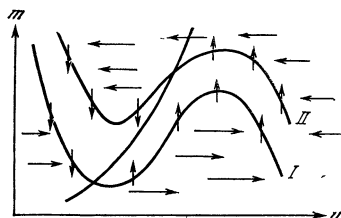
$$u_t = \frac{1}{\tau_1} f(u, m) + D_u \Delta u, \quad m_t = \frac{1}{\tau_2} g(u, m), \quad (2)$$

где $\tau_2/\tau_1 = \varepsilon \ll 1$.

Соответствующая точечная система представляет собой релаксационный автогенератор (рис. 1) с двумя характерными масштабами времени: длительностью процессов переключения ($\tau \approx \tau_1$) и периодом автоколебаний ($T \approx \tau_2$). В зависимости от значений параметров система может генерировать автоколебания — режим

Рис. 1. Фазовая плоскость обобщенной модели Ван дер Поля

I, *II* — режимы ждущего генератора одиночных импульсов и автогенератора соответственно



II или одиночные импульсы — режим *I* (см. рис. 1). Система 2), в частности, является минимальной моделью нервного волокна (модель Бонгоффера — Ван дер Поля) [4].

НЕРВНОЕ ВОЛОКНО

Самой важной и хорошо изученной одномерной ждущей системой является нервное волокно [5]. Оно с большой точностью описывается эмпирическими уравнениями Ходжкина—Хаксли [6]

$$CE_t = g_i n_i^{p_i} (E - E_i) + GE_{xx}, \quad \dot{n}_i = (n_i - n_i^0(E))/\tau_i(E), \quad i = 1, 2, \dots, g. \quad (3)$$

Здесь E — трансмембранная разность потенциалов; n_i — безразмерные величины, характеризующие плотность открытых ионных каналов; g_i — максимальные удельные проводимости мембраны для соответствующих ионов; E_i — равновесные потенциалы. Нелинейные функции $n_i^0(E)$ и $\tau_i(E)$ определяются с помощью прямого эксперимента. В оригинальной системе Ходжкина—Хаксли $g = 3$. В более детальных моделях число компонент трансмембранной ионной проводимости доходит до 10 [7].

В ряде случаев модели типа (3) можно свести к модели (2), используя большую разницу в величинах τ_i [8].

В нормальном состоянии мембрана нервного волокна находится в режиме *I* (см. рис. 1). В ответ на однократное внешнее возмущение по волокну с постоянной скоростью распространяется простейшая автоволна — одиночный нервный импульс (рис. 2, а) $E^*(x - Vt)$.

В модели (2) одиночному импульсу соответствует особая траектория в фазовом пространстве системы

$$-\dot{\varphi}_\xi = \frac{1}{\tau_1} f(u, m) + D_{uu} u_{\xi\xi}, \quad m_\xi = \frac{1}{\tau_2} g(u, m), \quad \xi = x - Vt, \quad (4)$$

замыкающаяся на единственную особую точку этой системы. Разные методы определения скоростей одиночного импульса изложены в работе [3].

Если от внешнего стимулятора периодически и не слишком часто возбуждать нервное волокно, то можно наблюдать периодическое распространение импульсов с постоянной скоростью

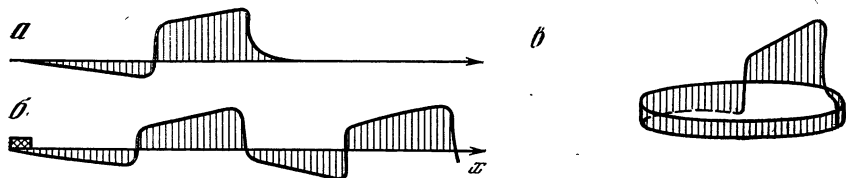


Рис. 2. Бегущие автоволны в одномерной системе (4)

a — одиночный импульс; b — периодические бегущие волны в системе с периодическими граничными условиями или с пейсмейкером; a — бегущий импульс в кольце

(рис. 2, б). С уменьшением периода внешнего возбуждения ($T_{\text{вн}}$) скорость импульсов падает (рис. 3, a). При $T_{\text{вн}} < T_{\text{кр}}$ периодическое распространение с постоянной скоростью невозможно. Последнее связано с наличием в системе рефрактерности. Из рис. 3, б видно, что если изображающая точка не дошла до положения B к моменту подачи следующего внешнего импульса, то возбуждения не произойдет. Время прохождения изображающей точкой участка AB называется периодом рефрактерности. При возбуждении с участка BC скорость движения по горизонтали (т. е. крутизна фронта импульса) резко уменьшена, этим объясняется падение скорости движения импульса при возбуждении в интервале MN (см. рис. 3, a).

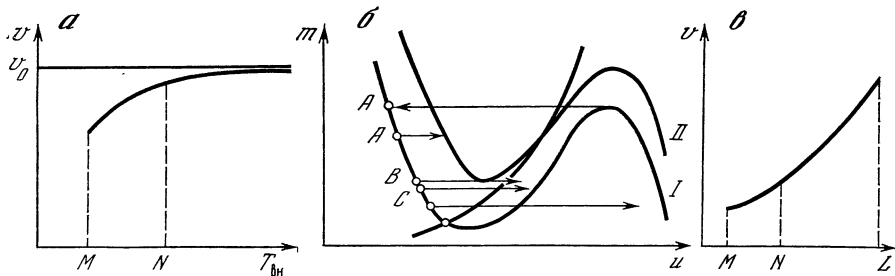


Рис. 3. Рефрактерность в системе (4)

a — зависимость скорости бегущих волн от их периода; b — фазовая плоскость точечной системы (I — точка в состоянии покоя, II — возбуждение за счет диффузионной связи); c — зависимость скорости бегущего импульса от длины кольца

ПЕЙСМЕЙКЕРЫ

В природе роль периодического стимулятора часто играют термо-, механо- и другие рецепторы. В ряде случаев рецептором является слегка измененное окончание нервного волокна, находящееся в автоколебательном режиме *II* (см. рис. 1). При этом частота автоколебаний обычно пропорциональна логарифму интенсивности внешнего воздействия [9].

Другой важный случай — сердце. Здесь мембрана миокарда также находится в ждущем состоянии, а мембрана клеток водителя ритма (синусного узла) работает в автоколебательном режиме. Таким образом, в возбудимых биологических средах часто встречаются водители ритма (пейсмейкеры), т. е. области, где за счет изменения параметра режим становится автоколебательным.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПЕРИСТАЛЬТИЧЕСКИХ ВОЛН

Весьма своеобразную автоволновую систему представляет собой пищеварительный тракт. Каждый участок кишечника содержит автоколебательные элементы. При этом существует монотонный градиент периода автоколебаний, увеличивающегося в направлении от начала системы к ее выходу. Это обеспечивает движение волны возбуждения и связанной с ней волны сокращения в нужном направлении. Однако, несмотря на такую надежную организацию, иногда наблюдаются извращения движения волны, вызывающие динамическую непроходимость кишечника [10].

ИМПУЛЬС В КОЛЬЦЕ

Автоколебания могут происходить в активной среде, каждая точка которой находится в ждущем режиме. Простейший пример — циркуляция импульса по нервному волокну, замкнутому в кольцо (см. рис. 2, *в*) [10]. Пока импульс бежит по кольцу с постоянной скоростью, существует простое соотношение между скоростью распространения, длиной кольца и периодом автоколебаний: $L = vT$. Наличие рефрактерности приводит к падению скорости с уменьшением длины кольца и является причиной существования критической длины ($L_{кр}$), ниже которой распространение с постоянной скоростью невозможно (см. рис. 3, *в*).

СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУМЕРНОЙ СРЕДЕ И СЕРДЕЧНЫЕ АРИТМИИ

Винер и Розенблют показали, что в двумерной активной среде волна возбуждения может циркулировать вокруг отверстия, причем фронт волны образует эвольвенту (развертку) отверстия (рис. 4, *а*) [11]. Балаховский обнаружил, что циркуляция возможна в непрерывной среде без отверстия, причем роль препятствия играет собственный рефрактерный хвост импульса [12].

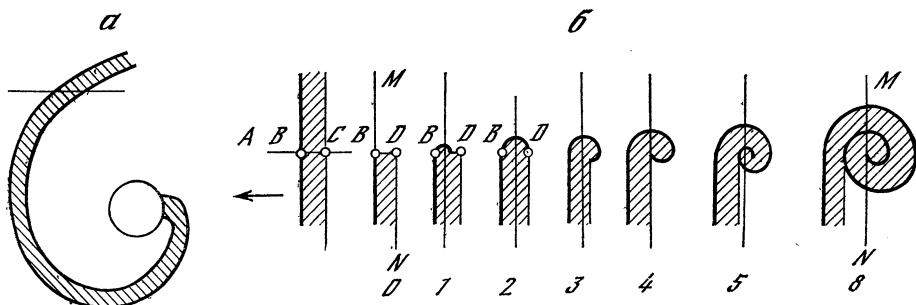


Рис. 4. Спиральная волна (ревербератор)

а — волна, циркулирующая вокруг отверстия в среде; б — образование ревербератора из разрыва фронта бегущей волны

Формирование спиральной волны (ревербератора) из разрыва фронта плоской волны показано на рис. 4, б.

Ткань миокарда может рассматриваться как двумерная среда. Такое описание особенно пригодно для предсердий, имеющих тонкие стенки. По-видимому, флаттер предсердий является следствием циркуляции волны возбуждения вокруг входных отверстий полых вен. В модельных опытах на предсердиях была обнаружена циркуляция спиральной волны на непрерывной среде [13]. Спиральные волны (ревербераторы) являются причиной ряда весьма опасных сердечных аритмий. Автоволновой теории аритмий была посвящена лекция В. И. Кринского на прошлой школе [14].

СПИРАЛЬНАЯ ВОЛНА (РЕВЕРБЕРАТОР) — АВТОВОЛНОВАЯ СТРУКТУРА

Спиральная волна является устойчивым решением системы (2), имеющим вид

$$u = u(\xi) + 0(r, \varphi, t), \quad m = m(\xi) + 0(r, \varphi, t), \quad (5)$$

$$\xi = \varphi + \chi(r) - \omega t,$$

где r и φ — полярные координаты.

При $r \rightarrow \infty$, $\chi(r) \rightarrow kr$, (6)

т. е. вдали от центра, ревербератор имеет форму спирали Архимеда.

Ревербератор образуется в результате разрыва фронта бегущей волны, и его центр всегда находится в окрестности места исходного разрыва. Для возможности возникновения ревербератора линейные размеры (L) среды должны превышать критическую величину (L^*), которая приблизительно равна длине волны ревербератора (λ). Если $L \gg L^*$, то период колебаний и длина волны ревербератора зависят только от локальных свойств среды и не зависят от линейных размеров среды, начальных и

граничных условий. Грубая оценка очевидна

$$T \approx \tau_2, \quad \lambda \approx \sqrt{\tau_2^2 D_u / \tau_1}.$$

Исследование характеристик ревербератора приведено в работах [15—17]. Таким образом, ревербератор — это стационарная локализованная автоволновая структура, являющаяся аналогом автоколебаний в сосредоточенных системах в смысле независимости от начальных и краевых условий. Простейшие автоволны такой независимостью не обладают. Одиночная автоволна (импульс) стационарна лишь в неограниченной среде, а длина волны в кольце жестко связана с размерами кольца.

МОРФОГЕНЕТИЧЕСКИЕ АВТОВОЛНЫ

Проблема морфогенеза, т. е. формообразования, в процессе индивидуального развития живых организмов — это главный вопрос в современной биологии. Одним из основных механизмов морфогенеза является установление пространственно упорядоченного распределения концентраций регулирующих веществ (морфогенов). В свою очередь локальное значение концентраций морфогена определяет ход отдельных клеток и тем самым форму многоклеточного организма [18].

Замечательную картину морфогенеза, в которой решающую роль играют бегущие концентрические и спиральные волны, можно наблюдать в колонии коллективных амёб *Dictyostelium discoideum* [10, 18, 19].

При наличии достаточного питания эти амёбы живут в виде одноклеточных организмов. При голодании они сползаются вместе и образуют многоклеточное плодовое тело, в дальнейшем дающее споры, способные пережить неблагоприятные условия.

Сползание клеток в плотную кучу, дающую начало плодovому телу, управляется бегущими автоволнами. При голодании отдельные клетки начинают периодически (с периодом 3—5 мин) вырабатывать циклический аденозин-монофосфат (цАМФ), который частично выбрасывается в межклеточную среду. Самые голодные клетки имеют самый короткий период автоколебаний. Ждущие клетки способны генерировать одиночные импульсы цАМФ в ответ на внешнюю аппликацию цАМФ. Таким образом, качественно динамика синтеза цАМФ соответствует механизму, показанному на рис. 1. При этом сдвиг от режима I к режиму II связан с голоданием. Наиболее голодные клетки образуют пейсмейкерные центры, из которых распространяются концентрические периодические бегущие волны цАМФ. Эти волны приводят в действие механизм хемотаксиса, который происходит в направлении, противоположном движению волны цАМФ. Так, сначала в системе происходит синхронизация некоторой области самым быстрым водителем ритма, а затем сползание всех клеток из этой области в окрестность пейсмейкера. В этой системе наблюдаются

также спиральные волны. В последнем случае хемотаксис происходит в направлении центра спирали. Далее образовавшаяся плотная масса клеток трансформируется в плодовое тело.

В этом случае бегущие волны морфогена с очень крутым передним фронтом обеспечивают весьма эффективный механизм хемотаксиса. А устойчивые источники волн (пейсмекеры и ревербераторы) являются стационарными центрами притяжения, механизм образования которых обеспечивает оптимальные размеры и количество плодовых тел.

СТАЦИОНАРНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Сейчас общепринято, что большинство морфогенетических полей имеют в своей основе не бегущие волны, а стационарные градиенты концентраций морфогенов. Очень многие животные (кишечнополостные, черви, членистоногие) имеют почти периодическое строение туловища. Можно думать, что это строение определяется периодическим самоподдерживающимся распределением концентрации морфогена. В пионерской работе Тьюринга [2, 18] было показано, что в распределенной химической системе устойчивость однородного стационарного состояния может нарушаться именно за счет диффузии, причем появляется устойчивое стационарное пространственно-периодическое распределение концентраций. В самом простом, но достаточно общем случае для возникновения неустойчивости Тьюринга система должна содержать два регулирующих вещества с неравными коэффициентами диффузии. Кроме того, в окрестности однородного стационарного состояния одно из веществ должно участвовать в автокаталитической реакции. С теоретической точки зрения бифуркация Тьюринга — это самый простой пример возникновения чисто диффузионной неустойчивости.

Роль механизма Тьюринга в морфогенетических процессах экспериментально еще не установлена, но в химических и биофизических модельных системах наблюдались стационарные профили, по-видимому, близкие к структурам Тьюринга [3].

Структуры Тьюринга могут играть важную роль в функционировании коры головного мозга. Действительно, обобщенное описание, использующее плотности возбужденных (u) и заторможенных (m) нейронов, приводит к уравнениям того же вида [3]:

$$u_t = f(u, m) + D_u \Delta u, \quad m_t = q(u, m) + D_m \Delta m, \quad (7)$$

а картина областей возбуждения и торможения в коре бодрствующего мозга представляет собой сложную мозаику.

Напротив, если в коре преобладают процессы одного типа, в основном возбуждение (или торможение), то обнаруживаются структуры, в основе которых лежат бегущие волны [9, 10], как в простых возбудимых средах.

АКТИВНАЯ ХИМИЧЕСКАЯ СРЕДА

Химическая среда представляет собой тонкий слой раствора, где идет реакция, схема которой показана на рис. 5. Здесь автокаталитическая реакция окисления ферроина (Fe^{2+}) броматом тормозится ионом бромида — продуктом реакции восстановления ферриина (Fe^{3+}) броммаленовой кислотой (ВМА). Динамика точечной системы может быть в основном описана моделью, показанной на рис. 1. В этой системе, очень удобной для эксперимента, были осуществлены все обсуждаемые автоволновые режимы: одиночные и периодические бегущие автоволны, спиральные волны и стационарные периодические распределения концентраций [2].

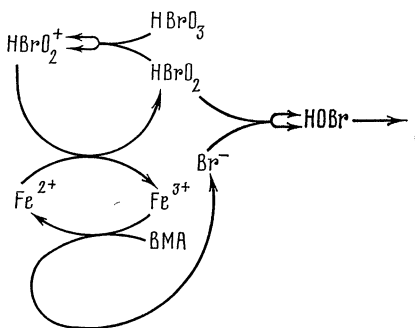


Рис. 5. Упрощенная схема автоколебательной химической реакции. Стрелками показано предпочтительное направление отдельных стадий

ВЕДУЩИЕ ЦЕНТРЫ

Новым феноменом, открытым в химической среде, был ведущий центр. Обнаружено, что в исходно-однородной среде самопроизвольно появляются точечные источники, в которых период автоколебаний меньше, чем в остальной системе. Эти источники вели себя как обычные пейсмейкеры, и первоначально думали, что это и есть пейсмейкеры, образующиеся на гетерогенных загрязнениях, например пылинках. Но оказалось, что плотность этих источников закономерно зависит от химических параметров среды и не зависит от степени механической очистки раствора. Прямым экспериментом показано, что источники образуются в однородной по параметрам среде за счет «точечных» возмущений динамических переменных.

Простейший механизм образования ведущего центра легко понять, если сравнить его с пейсмейкером. Последний образуется за счет изменения (например, увеличения) параметра, обеспечивающего уменьшение периода автоколебаний. Превратим этот параметр в динамическую переменную, способную изменяться. Например, один из вариантов [20]

$$u_t = f(u, m) + D_u u_{xx}, \quad m_t = q(u, m, p), \quad p_t = \alpha u - \beta p. \quad (8)$$

Пусть возбуждение приводит к увеличению переменной p . Тогда довольно легко подобрать условия, обеспечивающие закрепление повышенного уровня «параметрической» переменной в точке исходного возбуждения по сравнению с остальным пространством. Дело в том, что волновые режимы внутри источника автоволн и вне его различны. Вне ведущего центра с расстояния, примерно

равного длины волны, устанавливается режим бегущих волн. В то же время в самом ведущем центре выполняется условие отсутствия потоков.

$$du/dx = dt/dx = dp/dx = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ряде ключевых биологических систем, связанных с управлением, передачей и переработкой информации, автоволны играют решающую роль. Нарушение работы таких систем часто связано с возникновением паразитных автоволновых режимов, например, при некоторых сердечных аритмиях, эпилепсии и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhabotinsky A. M., Zaikin A. N.* Autowave processes in a distributed chemical system.— *J. Theor. Biol.*, 1973, 40, p. 45—68.
2. *Жаботинский А. М.* Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974. 179 с.
3. *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах.— *УФН*, 1979, 129, № 4, с. 625—666.
4. *Fitz Hugh R.* Computation of impulse initiation and saltatory conduction.— *Biophys. J.*, 1962, 2, N 1, p. 11—21.
5. *Волькенштейн М. В.* Общая биофизика. М.: Наука, 1978. 592 с.
6. *Hodgkin A., Huxley A.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve.— *J. Physiol.*, 1952, 117, p. 500—525.
7. *Adrian R., Peachy L.* Reconstruction of the action potential of frog surtorius muscle.— *J. Physiol.*, 1973, 235, N 1, p. 103—131.
8. *Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е.* Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978. 308 с.
9. *Ож С.* Основы нейрофизиологии. М.: Мир, 1969. 448 с.
10. *Winfree A.* Geometry of biological time. N. Y., Heidelberg, Berlin: Springer, 1980. 530 с.
11. *Wiener N., Rosenblueth A.* The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in a network connected excitable elements, specifically in cardiac muscle.— *Arch. Inst. cardiol. Méx.*, 1946, 16, p. 205—246.
12. *Балаховский И. С.* Некоторые режимы движения возбуждения в идеальной возбудимой ткани.— *Биофизика*, 1965, 10, № 6, с. 1063—1067.
13. *Allessie M. A., Bonke F. I. M., Schopman F. J. C.* Circus movement in rabbit atrial muscle as a mechanism of tachycardia. I.— *Circul. Res.*, 1973, 33, p. 54—63.
14. *Кринский В. И., Яхно В. Г.* Спиральные волны возбуждения в сердечной мышце.— В кн.: Нелинейные волны: Стохастичность и турбулентность. Горький: ИПФ АН СССР, 1981, с. 201—223.
15. *Greenberg S. M.* Periodic solutions to reaction-diffusion equation.— *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, 30, p. 199—217.
16. *Перцов А. М., Панфилов А. В.* Спиральные волны в активных средах. Ревербератор в модели Фитц Хью-Нагумо.— В кн.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: ИПФ АН СССР, 1981, с. 77—84.
17. *Михайлов А. С., Кринский В. И.* Аналитическая оценка размеров ревербератора.— *Биофизика*, 1982, 27 (5), с. 967—971.
18. *Гудвин Б.* Аналитическая физиология клеток и развивающихся организмов. М.: Мир, 1979. 288 с.

19. Tomchik K. J., Devreotic P. N. Adenosine 3',5'-monophosphate waves in *Dictyostelium discoideum*: A demonstration by isotope dilution.— *fluorography*.— *Science*, 1984, 212, N 4493, p. 443—446.
20. Zaikin A. N., Kawczynski A. L. Spatial effects in active chemical systems. I. Model of leading center.— *J. Non. Equilib. Thermodyn.*, 1977, 2, p. 39—48.

УДК 536.391.1:519.272

ДИНАМИКА ПРОЦЕССОВ САМОСБОРКИ

М. Л. ТАЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно современным представлениям, возникновению жизни на нашей планете предшествовал длительный период постепенного образования и накопления простейших органических соединений с последующим появлением процессов полимеризации и сополимеризации. Продолжаясь в течение сотен миллионов лет, эти химические процессы привели к возникновению специальных последовательностей сополимеров, оказывающих влияние на образование связей между случайно сталкивающимися мономерами и цепями сополимеров. Появление этих предшественников полипептидных и нуклеиновых цепей оказалось первым шагом на пути к образованию биологической информации, получившим название самосборки, т. е. процесса возникновения из молекулярных компонент биологически важных структур.

Экспериментально процессы самосборки обнаружены в 30-х годах нашего века, и в настоящее время они широко изучаются физическими и биохимическими методами [1]. Абстрагируясь от конкретных деталей, динамическую модель процессов самосборки предложил А. М. Леонтович [2] в связи с моделированием самосборки вирусов. Основная особенность этой модели заключается в точном описании строения всех компонент, образующихся при самосборке. Задание совокупности элементов и связей между ними в каждой компоненте необходимо для адекватного описания биологически важных структур, так как именно последовательность линейно связанных аминокислот в полипептидных цепях определяет пространственное расположение и функциональные свойства белков, а последовательности нуклеотидов в нуклеиновых кислотах кодируют наследственную информацию.

При использовании кинетического подхода в моделях самосборки изучается изменение во времени концентраций различных компонент, т. е. рассматривается динамическая система. Тем самым методы теории колебаний как науки о наиболее общих закономерностях процессов в динамических системах проникают в область исследования проблемы происхождения жизни, в течение тысячелетий, занимающую людей, и открывают новые возможности

для изучения механизмов, обуславливающих процессы развития и самоорганизации в системах различной природы.

В данной статье сначала описана модель самосборки отрезков и результаты ее исследования [2, 3]. Затем показано, что аналогичные результаты имеют место и для модели самосборки линейных цепей [4], представляющей собой обобщение модели самосборки отрезков и адекватно описывающей процессы сополимеризации при некоторых предположениях.

Подчеркнем, что исследование моделей самосборки опирается на кинетический подход и сводится к анализу систем нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику информационных характеристик процессов, обусловленных коллективными взаимодействиями. Поэтому обнаруженные особенности таких систем могут оказаться полезными для изучения широкого класса физических систем.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в замкнутом объеме имеется достаточно много копий n различных элементов $1, 2, \dots, n$. Перемещаясь и сталкиваясь между собой, все копии элементов могут объединяться в компоненты из двух, трех и более элементов, способных взаимодействовать друг с другом. Две компоненты будем считать неразличимыми, если они содержат одни и те же элементы и связи между этими элементами. Процессы самосборки различаются совокупностями компонент, которые могут появиться, и допустимыми взаимодействиями компонент. Так, в процессе самосборки отрезков все возможные компоненты представляют собой последовательно связанные в порядке их нумерации копии элементов. Совокупность последовательно связанных элементов $i, i + 1, \dots, j, 1 \leq i \leq j \leq n$ называется отрезком и обозначается $[i, j]$ [2]. При этом подразумевается, что $[i, i]$ — отрезок, состоящий из одного элемента $i, 1 \leq i \leq n$. Допустимыми взаимодействиями в модели самосборки отрезков [2] считаются объединения отрезков $[i, k]$ и $[k + 1, j]$ в отрезок $[i, j], 1 \leq i \leq k < j \leq n$. Такое взаимодействие рассматривается как результат случайного столкновения отрезков $[i, k], [k + 1, j]$ и образования связи между элементами k и $k + 1$.

Развивая классический подход Л. Больцмана [5] для изучения динамики процессов самосборки, в [2] состояние процесса самосборки в момент t определяется совокупностью концентраций всех компонент. Число столкновений компонент в момент t считается равным произведению их концентраций. Доля объединений столкнувшихся компонент характеризуется интенсивностями образования связей. Поэтому состояние процесса самосборки отрезков есть $x(t) = \{x_{ij}(t): 1 \leq i \leq j \leq n\}$, где $x_{ij}(t)$ — концентрация отрезков $[i, j]$ в момент t . Тогда при известных интенсивностях p_{ikj} образования связи между элементами k и $k + 1$, столкнувшихся отрезков $[i, k]$ и $[k + 1, j], 1 \leq i \leq k < j \leq n$, концент-

рации $x_{ij}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{x}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} x_{ik} p_{ikj} x_{k+1, j} - \left(\sum_{k=j+1}^n x_{ij} p_{ijk} x_{j+1, k} + \sum_{k=1}^{i-1} x_{k, i-1} p_{k, i-1, j} x_{ij} \right),$$

$$x_{ij}(0) = r_{ij}, \quad r_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \quad (1)$$

В [2] найдены первые интегралы

$$\sum_{l=1}^i \sum_{k=i}^n x_{lk}(t) = a_i, \quad \sum_{l=1}^i \sum_{k=i}^n r_{lk} = a_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2)$$

системы уравнений (1) и ее изящное решение

$$x_{ij}(t) = \left(\frac{t}{1+t} \right)^{j-i} (1+t)^{\delta_{i1} + \delta_{jn} - 2}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \quad (3)$$

если $x_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $p_{ikj} \equiv 1$. Левые части (2) выражают общую концентрацию элемента i во всех отрезках в момент t . Поэтому (2) есть следствие постоянства числа копий, участвующих в самосборке. Возникают вопросы: чем обусловлена простота решения (3) нелинейной системы уравнений (1) и в какой степени этот результат может быть обобщен для процессов самосборки с другими компонентами и взаимодействиями между ними?

3. САМОСБОРКА ОТРЕЗКОВ

Прежде всего расширим класс допустимых взаимодействий процессов самосборки отрезков. Пусть наряду с образованием связи между столкнувшимися отрезками могут происходить разрывы связей отрезков с распадением отрезка на два. Обозначим q_{ikj} интенсивность спонтанного разрыва связи между элементами k и $k+1$ отрезка $[i, j]$, $1 \leq i \leq k < j \leq n$, т. е. интенсивность распада отрезка $[i, j]$ на отрезки $[i, k]$ и $[k+1, j]$. Тогда

$$\dot{x}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} (x_{ik} p_{ikj} x_{k+1, j} - x_{ij} q_{ikj}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{i-1} (x_{kj} q_{k, i-1, j} - x_{k, i-1} p_{k, i-1, j} x_{ij}) +$$

$$+ \sum_{k=j+1}^n (x_{ik} q_{ijk} - x_{ij} p_{ijk} x_{j+1, k}), \quad x_{ij}(0) = r_{ij}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \quad (4)$$

Система уравнений (4) также имеет первые интегралы (2), так как в процессе самосборки элементы не исчезают и не появляются вновь.

Рассмотрим функции

$$y_{ij}(t) = \sum_{l=1}^i \sum_{k=j}^n x_{lk}(t), \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \quad (5)$$

выражающие общие концентрации связанных элементов $i, i+1, \dots, j$ во всех отрезках системы самосборки в момент t .

Из (5) следует, что функции

$$y_{ij}^s(t) = y_{ij}(t) - y_{i-1,j}(t), \quad y_{ij}^f(t) = y_{ij}(t) - y_{i,j+1}(t), \quad (6)$$

$$y_{0j}(t) \equiv y_{i,n+1}(t) \equiv 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

представляют собой общие концентрации связанных элементов $i, i+1, \dots, j$ соответственно в начале и в конце всех отрезков. Поэтому

$$x_{ij}(t) \doteq y_{ij}^s(t) - y_{i,j+1}^s(t) = y_{ij}^f(t) - y_{i-1,j}^f(t), \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \quad (7)$$

т. е. состояние $x(t)$ процесса самосборки отрезков однозначно определяется состоянием $y(t) = \{y_{ij}(t): 1 \leq i \leq j \leq n\}$. Будем называть $y(t)$ состоянием связей, а $y_{ij}(t)$ — концентрациями связей процесса самосборки отрезков.

Описание процесса самосборки концентрациями связей существенно упрощается, если интенсивности образования и разрыва связей зависят только от непосредственно взаимодействующих элементов и не зависят от остальных элементов столкнувшихся отрезков, т. е.

$$p_{ikj} = p_k, \quad q_{ikj} = q_k, \quad 1 \leq i \leq k < j \leq n. \quad (8)$$

В [3] доказано, что при условии (8) концентрации связей удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{y}_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} (y_{ik}^f p_k y_{k+1,j}^s - y_{ij} q_k), \quad y_{ij}(0) = \sum_{l=1}^i \sum_{k=j}^n r_{lk}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \quad (9)$$

Учитывая (6), правые части уравнений (9) имеют простой смысл: суммируются все возможные способы образования и разрыва последовательно связанных элементов $i, i+1, \dots, j$. Из (9) получаем $\dot{y}_{ii} = 0$, $y_{ii} = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$y_{i,i+1} = -\frac{1}{p_i} \frac{d}{dt} \ln g_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (10)$$

$$g_i = \frac{[y_{i,i+1}(0) - \lambda_{i2}] \exp(-\lambda_{i1} p_i t) - [y_{i,i+1}(0) - \lambda_{i1}] \exp(-\lambda_{i2} p_i t)}{\lambda_{i1} - \lambda_{i2}},$$

где $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ — корни уравнения $p_i(a_i - \lambda_i)(a_{i+1} - \lambda_i) = q_i \lambda_i$ и представление в квадратурах всех концентраций связи с $j > i+1$:

$$y_{ij}(t) = \left[y_{ij}(0) + \int_0^t z_{ij}(\tau) \varphi_{ij}(\tau) d\tau \right] / z_{ij}(t),$$

$$z_{ij}(t) = g_i(t) g_{j-1}(t) \exp \left[a_i p_i t + a_j p_{j-1} t + \sum_{k=i}^{j-1} q_k t \right], \quad (11)$$

$$\varphi_{ij}(t) = p_i y_{i+1,j}(a_i - y_{i,i+1}) + p_{j-1} y_{i,j-1}(a_j - y_{j-1,j}) +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{j-2} y_{ik}^f p_k y_{k+1,j}^s.$$

Это означает, что при условии (8) система уравнений (4) интегрируема в квадратурах, так как итеративно по $l = 1, 2, \dots, n-1$ находятся концентрации связей $y_{i, i+l}$, $i = 1, \dots, n-l$ и с помощью (6), (7) — концентрации $x_{ij}(t)$, $1 \leq i < j \leq n$.

Кроме того, в фазовом пространстве системы уравнений (9) имеется инвариантное многообразие состояний $y(t)$, удовлетворяющих

$$y_{ij}(t) = a_i \prod_{k=i}^{j-1} \frac{y_{k, k+1}(t)}{a_k}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (12)$$

Условие (12) выполняется при $t = 0$, если $y_{ij}(0) = a_i \delta_{ij}$. Поэтому все концентрации связей выражаются через концентрации парных связей $y_{i, i+1}$, если в начальный момент в системе нет связанных элементов. Можно сказать, что многообразие (12) выделяет множество состояний хаоса процесса самосборки отрезков, причем свойство системы находиться в состоянии хаоса инвариантно во времени. Одновременно обнаружена причина вида решения (3) системы (1) и результат обобщен для процессов самосборки отрезков с разрывами.

4. САМОСБОРКА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим процессы самосборки с более широким классом допустимых компонент. Пусть элементы могут объединяться между собой в произвольном порядке в сколь угодно длинные линейные цепи. Подобно отрезкам, каждая линейная цепь может быть задана совокупностью всех входящих в нее элементов и связей между ними, если указать номер элемента, расположенного в каждом месте цепи. Для этого элементы $1, 2, \dots, n$, участвующие в самосборке линейных цепей, будем обозначать греческими буквами с индексами $\beta_i, \beta_{i+1}, \gamma_j$, используя индекс для указания места элемента в цепи. Здесь $\beta_i, \beta_{i+1}, \gamma_j$ принимают значения $1, 2, \dots, n$. По аналогии с методом перекрывающихся интервалов, использующимся при биохимическом анализе последовательности аминокислот в пептидных цепях, будем приписывать произвольный номер одному из мест цепи. Тогда $(\beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_j)$ обозначает линейную цепь, состоящую из последовательно связанных элементов $\beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_j$, причем $\beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_j$ — номера элементов $1, 2, \dots, n$, индекс i — произвольное целое число, $l = j - i + 1$ — число элементов в цепи.

Предположим, что все связи элементов направленные¹ и в процессе самосборки линейных цепей могут происходить образования и разрывы связей между элементами так, что цепь $(\beta_i, \dots, \beta_j)$ может появиться после столкновения цепей $(\beta_i, \dots, \beta_k), (\beta_{k+1}, \dots, \beta_j)$ с образованием связи между элементами

¹ Это условие обеспечивает различие цепей, состоящих из одних и тех же последовательно связанных элементов, но соединенных противоположно ориентированными связями.

β_k и β_{k+1} или после разрыва связи элементов β_{i-1} , β_i и β_j , β_{j+1} в цепях $(\beta_{i-m}, \dots, \beta_{i-1}, \beta_i, \dots, \beta_j)$ и $(\beta_i, \dots, \beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{j+m})$ соответственно. Обозначим $p(\beta_i, \dots, \beta_k; \beta_{k+1}, \dots, \beta_j)$ интенсивность образования связи элементов β_k и β_{k+1} столкновении цепей $(\beta_i, \dots, \beta_k)$ и $(\beta_{k+1}, \dots, \beta_j)$, а $q(\beta_i, \dots, \beta_k; \beta_{k+1}, \dots, \beta_j)$ — интенсивность спонтанного разрыва связи этих элементов цепи $(\beta_i, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_j)$ с распадением ее на цепи $(\beta_i, \dots, \beta_k)$ и $(\beta_{k+1}, \dots, \beta_j)$ $i \leq k < j$.

Считая число столкновений цепей равным произведению их концентраций, состояние процесса самосборки линейных цепей в момент t определяется $x(t) = \{x_t(\beta_i, \dots, \beta_j): \beta_i, \dots, \beta_j = 1, \dots, n, i \leq j\}$, где $x_t(\beta_i, \dots, \beta_j)$ — концентрация цепи $(\beta_i, \dots, \beta_j)$. Так же, как при описании процесса самосборки отрезков, введем концентрации связей элементов $y_t(\beta_i, \dots, \beta_j)$ во всех цепях в момент t

$$y_t(\beta_i, \dots, \beta_j) = \sum x_t(\gamma_{i-1}, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i, \dots, \gamma_j, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_{j+m}), \quad (13)$$

где $\gamma_k = \beta_k$, $k = i, \dots, j$ и суммирование производится по всем $l, m \geq 0$ и $\gamma_{i-l}, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_{j+m} = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$y_t^f(\beta_i, \dots, \beta_j) = y_t(\beta_i, \dots, \beta_j) - \sum_{\beta_{j+1}=1}^n y_t(\beta_i, \dots, \beta_j, \beta_{j+1}), \quad (14)$$

$$y_t^s(\beta_i, \dots, \beta_j) = y_t(\beta_i, \dots, \beta_j) - \sum_{\beta_{i-1}=1}^n y_t(\beta_{i-1}, \beta_i, \dots, \beta_j)$$

представляют собой общие концентрации связанных элементов β_i, \dots, β_j соответственно в конце и в начале линейных цепей в момент t и

$$\begin{aligned} x_t(\beta_i, \dots, \beta_j) &= y_t^f(\beta_i, \dots, \beta_j) - \sum_{\beta_{i-1}=1}^n y_t^f(\beta_{i-1}, \beta_i, \dots, \beta_j) = \\ &= y_t^s(\beta_i, \dots, \beta_j) - \sum_{\beta_{j+1}=1}^n y_t^s(\beta_i, \dots, \beta_j, \beta_{j+1}), \end{aligned} \quad (15)$$

т. е. концентрации цепей однозначно определяются концентрациями связей.

Пусть при всех $i \leq k < j$, $\beta_i, \dots, \beta_j = 1, 2, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} p(\beta_i, \dots, \beta_k; \beta_{k+1}, \dots, \beta_j) &= p(\beta_k, \beta_{k+1}), \\ q(\beta_i, \dots, \beta_k; \beta_{k+1}, \dots, \beta_j) &= q(\beta_k, \beta_{k+1}). \end{aligned} \quad (16)$$

Условие (16) означает независимость интенсивностей образования и разрыва связей элементов β_k, β_{k+1} от того, с какими элементами они связаны, т. е. от того, в каких цепях находятся элементы β_k и β_{k+1} . Отметим что условие (16) выражает один из постулатов Флори [6], широко использующихся для расчета процессов полимеризации [7—9].

При выполнении условия (16) концентрации связей удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_t(\beta_i, \dots, \beta_j) &= \sum_{k=i}^{j-1} [-y_t(\beta_i, \dots, \beta_j) q(\beta_k, \beta_{k+1}) + \\ &+ y_t^f(\beta_i, \dots, \beta_k) p(\beta_k, \beta_{k+1}) y_i^s(\beta_{k+1}, \dots, \beta_j)], \\ y_0(\beta_i, \dots, \beta_j) &= R(\beta_i, \dots, \beta_j) \geq 0, \quad \beta_i, \dots, \beta_j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (17)$$

Система уравнений (17) аналогична (9). Из нее следует, что $y_t(\beta_i) = a(\beta_i)$, т. е. снова имеется n первых интегралов, выражающих сохранение числа копий элементов во всех цепях системы самосборки. Концентрации парных связей $y_t(\beta_i, \beta_{i+1})$ являются решением системы n^2 нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_t(\beta_i, \beta_{i+1}) &= -y_t(\beta_i, \beta_{i+1}) q(\beta_i, \beta_{i+1}) + \\ &+ \left[a(\beta_i) - \sum_{\gamma=1}^n y_t(\beta_i, \gamma) \right] p(\beta_i, \beta_{i+1}) \left[a(\beta_{i+1}) - \sum_{\gamma=1}^n y_t(\gamma, \beta_{i+1}) \right], \\ y_0(\beta_i, \beta_{i+1}) &= R(\beta_i, \beta_{i+1}) \geq 0, \quad \beta_i, \beta_{i+1} = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (18)$$

а все остальные концентрации связей представляются в квадратурах через концентрации парных связей [4]. Этот результат обобщает интегрируемость в квадратурах процесса самосборки отрезков.

Инвариантное многообразие состояний хаоса в фазовом пространстве системы самосборки линейных цепей, удовлетворяющих условию (16), имеет вид

$$\begin{aligned} y_t(\beta_i, \dots, \beta_j) &= a(\beta_i) \prod_{k=i}^{j-1} \frac{y_t(\beta_k, \beta_{k+1})}{a(\beta_k)}, \\ \beta_i, \dots, \beta_j &= 1, 2, \dots, n, \quad i < j. \end{aligned} \quad (19)$$

Состояние системы самосборки находится на этом многообразии в любой момент времени, если при $t = 0$ в системе самосборки нет связанных элементов. Таким образом, в этом практически важном случае полное описание состояния процесса самосборки линейных цепей при всех $t > 0$ определяется решением системы уравнений (18).

Полученный результат означает возможность полного описания процесса самосборки линейных цепей, используя лишь концентрации парных связей $y_t(\beta, \gamma)$, $\beta, \gamma = 1, 2, \dots, n$. Это дает, в частности, обоснование расчета параметров процессов сополимеризации линейных полимеров с помощью статистического подхода при выполнении условий (16), если в начальный момент система находится в состоянии хаоса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поглазов Б. Ф.* Закономерности сборки элементарных биологических структур. М.: Наука, 1977. 47 с.
2. *Леонтович А. М.* Одна задача о самосборке отрезков.— Пробл. передачи информ., 1975, 11, № 4, с. 97—105.
3. *Тай М. Л.* Стохастическая модель самосборки отрезков с разрывами.— Там же, 1979, 15, № 1, с. 74—83.
4. *Тай М. Л.* Исследование стохастических моделей самосборки линейных цепей.— Там же, № 4, с. 40—52.
5. *Больцман Л.* Лекции по теории газов. М.: Гостехиздат, 1956. 500 с.
6. *Flory P. U.* Molecular size distribution in linear condensation on polymers.— J. Amer. Chem. Soc., 1936, 58, p. 1877—1885.
7. *Френкель С. Я.* Введение в статистическую теорию полимеризации. М.; Л.: Наука, 1965. 267 с.
8. *Розенберг Б. А., Иржак В. И., Ениколюпан Н. С.* Межцепной обмен в полимерах. М.: Химия, 1975, 237 с.
9. *Кучанов С. И.* Методы кинетических расчетов в химии полимеров. М.: Химия, 1978. 367 с.

УДК 574.91+518.1+577.4

ВОЛНЫ В ЭКОЛОГИИ

Ю. М. СВИРЁЖЕВ, А. А. ГИГАУРИ, В. Н. РАЗЖЕВАЙКИН

ВВЕДЕНИЕ

В теории горения хорошо известны волны, распространяющиеся в активной среде, т. е. движение фронта горения по горючему материалу. Математические модели этого явления рассмотрены в недавно вышедшей книге Я. Б. Зельдовича и др. [1].

Кроме того, уравнение Ходжкина—Хаксли и его различные модификации породили обширную литературу, посвященную волнам в биологических активных средах: нервных волокнах, нейронных сетях, клеточных системах [2].

Интересно заметить, что исторически первыми работами по нелинейным волнам в системах с диффузией были работы Колмогорова, Петровского, Пискунова [3] и Фишера [4], в которых рассматривалось распространение «генетической» волны, т. е. изменение концентрации гена в пространственно-распределенной популяции под действием разнонаправленного давления естественного отбора. Затем это направление интенсивно развивалось в математической генетике [4—6]; в математической экологии же проблема нелинейных волн начала изучаться лишь в последние годы [7—9]. Развитию этого направления препятствуют большие трудности в математическом исследовании. Многие экологические процессы по своей картине очень напоминают нелинейные волны. Пожалуй, самым характерным примером может служить распространение популяции насекомых-вредителей леса или распространение популяции сельскохозяйственных вредителей по полю, занятому культурой.

1. МОДЕЛЬ КОЛМОГорова — ПЕТРОВСКОГО — ПИСКУНОВА (КПП) И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ СООБЩЕНИЯ

Сначала необходимо сказать несколько слов о классической модели КПП. Рассмотрим динамику биологической популяции на бесконечном одномерном ареале $-\infty < x < \infty$. Пусть ее локальная динамика описывается уравнением

$$\Delta N / \Delta t = F(N), \quad (1.1)$$

где $F(N)$ — непрерывная и нужное число раз дифференцируемая функция, причем $F(0) = F(k) = 0$, $k > 0$ — так называемая «емкость» среды, и $F'(0) = \alpha > 0$. Кроме того, $F'(n) < \alpha$ для $0 < n \leq k$.

Предположим, что особи популяции могут мигрировать по ареалу, причем у них нет какого-либо преимущественного направления, а средняя квадратичная оценка расстояния, на которое они могут переместиться за единицу времени, равна ρ . Эта величина есть не что иное, как радиус индивидуальной активности — понятие, впервые введенное Н. В. Тимофеевым-Ресовским [10], и ее можно измерить экспериментально. Например, для популяций нормальных *Drosophila funebris* она равна 14 м за поколение, или 0,75 м за сутки. Не останавливаясь на достаточно тонких экспериментах по оценке характера локальных распределений плотности популяций, можно в конце концов прийти к выводу об адекватности описания такого типа распространения популяции по ареалу уравнением диффузии вида

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + F(N), \quad (1.2)$$

где $N(x, t)$ — плотность популяции в точке x в момент t , а коэффициент диффузии D связан с радиусом индивидуальной активности ρ соотношением $\rho = 2\sqrt{D}$.

Классический результат Колмогорова, Петровского, Пискунова состоит в том, что у уравнения (1.2) доказано существование решения вида бегущей волны $N(x + \lambda t)$, распространяющейся со скоростью λ , причем при $t \rightarrow \infty$ $\lambda \rightarrow \lambda_0 = 2\sqrt{\alpha D}$, а форма волны стремится к функции $N_0(x)$, являющейся решением уравнения

$$\lambda_0 \frac{dN_0}{dx} = D \frac{d^2 N_0}{dx^2} + F(N_0) \quad (1.3)$$

с граничными условиями $N_0(-\infty) = 0$, $N_0(\infty) = k$. Доказано, что имеет место сходимости к этому решению для достаточно широкого класса «реальных» начальных распределений $N(x, 0)$, например для ступенчатой $N(x, 0)$, равной k при $0 \leq x < \infty$ и нулю при $-\infty < x < 0$.

Если теперь в качестве $F(N)$ выбрать логистический закон роста $F(N) = \alpha N(1 - N/k)$, где α — мальтузианский параметр популяции, то скорость распространения популяционной волны

по ареалу $\lambda_0 = \rho\sqrt{\alpha}$. Любопытно, что она не зависит от емкости среды k .

Рассмотрим ту же самую популяцию мух-дрозофил. Известно, что за 50 дней численность мух на локальном ареале возросла со 100 до 5000 особей и далее не увеличивалась. Оценивая мальтузианский параметр μ с помощью логистической модели, получим $\alpha = 0,16$ особи за сутки. Тогда $\lambda_0 = 0,3$ м/сут. Наблюдения показали, что после того, как популяция на локальном ареале достигла численности 3000 особей, началось ее распространение за границы этого ареала. Примерно через 55 сут после начала этого процесса соответствующая плотность популяции наблюдалась уже в 22 метрах от границы локального ареала. Отсюда можно сделать вывод, что реальная популяционная волна двигалась со средней скоростью $0,4$ м/сут. Учитывая весьма невысокую точность наблюдений, можно сказать, что получено почти идеальное совпадение. По-видимому, здесь мы имеем дело с популяционной волной Колмогорова—Петровского—Пискунова.

Когда мы рассматриваем логистический закон роста популяции, всегда предполагаем, что при малых плотностях популяция растет экспоненциально. Однако для многих видов животных, могущих мигрировать достаточно свободно и просторно заселяющих свой ареал, это предположение не совсем правильно. Дело в том, что при малых плотностях размножение скорее определяется вероятностью встречи брачных партнеров.

Поэтому естественно считать мальтузианский параметр популяции α функцией от N , причем $\alpha(0) = 0$. При возрастании N величина $\alpha(N)$ также монотонно возрастает и при $N \rightarrow \infty$ $\alpha(N) \rightarrow \alpha_0$. Влияние же внутривидовой конкуренции заключается в мультипликативном эффекте функции $\varphi(N)$, монотонно убывающей с ростом N , причем $\varphi(N^*) = 0$ для некоторого $N^* > 0$. По определению $N^* = k$, т. е. емкости среды. Тогда

$$\Delta N/\Delta t = \alpha(N)N\varphi(N). \quad (1.4)$$

Наиболее характерный вид для $\alpha(N)$ и $\varphi(N)$ следующий:

$$\alpha(N) = \alpha_0 N/(\beta + N), \quad \varphi(N) = 1 - (N/k).$$

Рассмотрим относительную численность популяции $n = N/k$. Тогда уравнение динамики численности примет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + f(n), \quad f(n) = \frac{\alpha_0 n^2 (1-n)}{\gamma + n}, \quad \gamma = \beta/k. \quad (1.5)$$

Легко видеть, что $f(0) = f(1) = 0$, но $f'(0) = 0$, т. е. эта задача уже отличается от классической КПП-задачи. Будем называть ее «задачей для популяции с гиперболическим законом роста». Объясним, почему выбрано такое название. Дело в том, что при малых n имеем $\Delta n/\Delta t \simeq \alpha_0 n^2/\gamma$ и $n(t) \simeq n_0 \gamma/(\gamma - n_0 \alpha_0 t)$, т. е. локальная численность популяции на первых порах растет гиперболически, а не экспоненциально.

2. ВОЛНЫ В ПОПУЛЯЦИИ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ РОСТА

Выясним вопрос о возможности решений типа бегущей волны в задаче (1.5). Переходя к переменной $\xi = x + \lambda t$, вместо (1.5) получим

$$dn/d\xi = p, \quad dp/d\xi = vp - F(n), \quad v = \lambda/D, \quad F(n) = f(n)/D \quad (2.1)$$

с граничными условиями $n(-\infty) = 0$, $n(+\infty) = 1$. В плоскости с координатами p , n система (2.1) имеет две особые точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$. Кроме того, существуют две особые точки $(\pm\infty, 0)$.

Анализ уравнений в окрестности этих точек показал, что точка $(0, 0)$ — сложное состояние равновесия типа седло—узел, точка $(0, 1)$ — простое седло, а особые точки бесконечности — сложные седла.

Система (2.1) топологически близка к грубой системе с $F(n) = an(n - \varepsilon)(1 - n)$, исследованной Канелем [11, 12]. В последней имеются три простых состояния равновесия: два седла и узел.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ одно из седел и узел сливаются в седло—узел. Следовательно, наша система представляет собой систему первой степени негрубости. Поэтому сепаратриса, выходящая из точки $(0, 0)$, не может входить в седло $(0, 1)$. Единственными траекториями, которые выходят из точки $(0, 0)$ и могут входить в $(0, 1)$, будут траектории узла.

Опуская довольно сложное и тонкое исследование, можно сказать, что имеется множество скоростей v , ограниченное снизу, каждой из которых соответствует единственная траектория, выходящая из точки $(0, 0)$ и приходящая в точку $(0, 1)$. На рис. 1, а, б приведены фазовые портреты значений $v > v_{\min}$ и $v < v_{\min}$. Из рисунков видно, что при $v < v_{\min}$ сепаратриса, выходящая из точки $(0, 0)$ под углом δ ($\operatorname{tg} \delta = v$), должна пересечь ось n левее точки $n = 1$. К сожалению, нам не удалось получить точного аналитического выражения для v_{\min} , однако можно получить оценку снизу для скоростей, которым будут соответствовать волновые решения.

Поделив одно уравнение в (2.1) на другое, получим

$$dp/dn = v - \frac{F(n)}{p} \quad (2.2)$$

или $p dp/dn = vp - F(n)$. Интегрируя полученное выражение, имеем

$$p^2(n) = 2v \int_0^n p \, dn - 2 \int_0^n F(n) \, dn. \quad (2.3)$$

Пусть нужная нам траектория существует, тогда

$$v = \frac{\int_0^1 F(n) \, dn}{\int_0^1 p \, dn}. \quad (2.4)$$

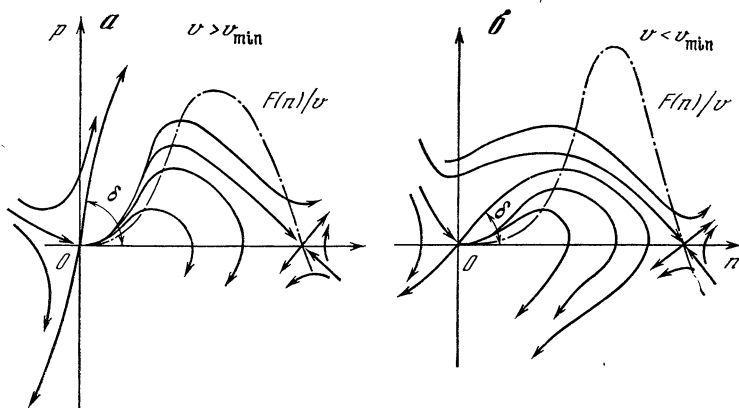


Рис. 1

С другой стороны, в этом случае из (2.2) получаем $dp/dn < v$ для всех $0 < n \leq 1$ и $p < vn$. Тогда из (2.4) сразу имеем

$$v > \sqrt{2 \int_0^1 F dn}. \quad (2.5)$$

Конечно, эта оценка весьма грубая, можно было бы получить и более точную, но для наших целей ее вполне достаточно. Если теперь подставить вместо $F(n)$ ее конкретное выражение, то

$$v > \sqrt{\alpha_0 [1/3 - \gamma - 2\gamma^2 + 2\gamma^2(1 - \gamma) \ln(1 + \gamma/\gamma)]}.$$

В большинстве практически важных случаев $\gamma \ll 1$. Поэтому (возвращаясь к старым обозначениям) можно написать

$$\lambda > \sqrt{\alpha_0 D [1/3 - \gamma - 2\gamma^2 \ln \gamma]}. \quad (2.6)$$

Если сравнить эту оценку с минимальной скоростью распространения КПП-волны в мальтузианской популяции с параметром α_0 ($\lambda_{\min} = 2\sqrt{\alpha_0 D}$), то видно, что характер зависимости скоростей от α и D в обоих случаях одинаков. Однако в гиперболической популяции скорость уменьшается с ростом γ , т. е. с увеличением «порога», за которым популяцию уже можно считать мальтузианской.

Численные эксперименты показали, что устойчивой является волна с v_{\min} .

Подводя итоги, можно сказать, что формально КПП-волны и волны в популяции с гиперболическим законом роста имеют много общего: в обоих случаях существуют минимальные скорости волн. Кроме того, существуют волны и с другими, большими скоростями. Однако, сравнивая фазовые картины, можно видеть, что эти две системы принципиально отличаются. Система с гиперболическим законом роста скорее более близка к канелевской [11, 12], но в последней имеется лишь одна фиксированная ско-

рость волны, а в гиперболической — целый континуум, ограниченный снизу. В этом смысле ее поведение более похоже на поведение КПП-системы.

В заключение необходимо заметить, что здесь еще имеется много неясных вопросов.

К сожалению, гиперболическая система в известном смысле негрубая, а негрубую систему всегда труднее исследовать, чем, например, грубые канелевскую и КПП-системы.

3. ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ РЕСУРС—ПОТРЕБИТЕЛЬ

До сих пор мы рассматривали изолированные популяции, но в реальных экосистемах популяции взаимодействуют друг с другом либо по типу «хищник—жертва», либо конкурируя за ресурсы. Теперь рассмотрим двухуровневые экосистемы, в которых вид, занимающий нижний трофический уровень, неподвижен, а вид, находящийся на верхнем, случайно мигрирует в пространстве. В качестве примеров могут быть рассмотрены взаимодействие лесных насекомых-вредителей со своим ресурсом, водная экосистема, состоящая из зоопланктона и фитопланктона, кольца грибниц, расплзающиеся по лесной подстилке, и т. д. Динамику такой системы на бесконечном одномерном ареале можно описать уравнениями

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + F_N(N, R), \quad \frac{\partial R}{\partial t} = F_R(N, R), \quad (3.1)$$

где $F_N = kv(R)N - mN$, $F_R = \alpha_0 R (1 - R/R^*) - v(R)N$. Здесь N и R — плотности вида-потребителя и вида-ресурса; m — коэффициент естественной смертности потребителя; α_0 — мальтузианский параметр вида-ресурса; k — КПД переработки ресурса; R^* — емкость среды для вида-ресурса в отсутствие потребителя; $v(R)$ — «трофическая функция», т. е. скорость потребления ресурса единицей биомассы потребителя. Наиболее распространенная параметризация этой функции имеет вид [13]

$$v(R) = \frac{AR^\mu}{k^\mu + R^\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

Рассмотрим ситуацию невозобновимого ресурса, т. е. $\alpha_0 = 0$, и будем искать решение (3.1) в виде волны, распространяющейся справа налево со скоростью λ [7].

Введем новую переменную $u(x, t) = \int_0^t N dt$. Тогда, почленно интегрируя первое уравнение (3.1) и используя второе, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad (3.3)$$

где $F(u) = N_0 + kR_0 - kR(u, R_0) - mu$, а $N_0 = N(x, 0) = \text{const}$ и $R_0 = R(x, 0) = \text{const}$ — начальные плотности потребителя и ресурса соответственно. Что же касается функции

$R(u, R_0)$, то она находится следующим образом. Интегрируя второе уравнение (3.1), получим

$$\varphi(R, R_0) = \int_{R_0(x)}^R \frac{dR}{v(R)} = - \int_0^t N dt = -u,$$

откуда, имея конкретный вид трофической функции $v(R)$, можно найти R как $R(u, R_0)$.

Сделаем одно важное предположение, справедливость которого обоснуем несколько позже. Обычно $N_0(x)$ — финитные функции, так что $N_0(x) \equiv 0$ либо $N_0 \ll kR_0$ почти для всех x . Тогда в выражении для $F(u)$ можно положить $N_0 = 0$, и, следовательно, $F(0) = 0$. Кроме того, существует еще одно значение $u_{\max} = (k/m)(R - R_0)$ такое, что $F(u_{\max}) = 0$. Поскольку $v(R) > 0$ для $R > 0$, то из монотонности $\varphi(R, R_0)$ по R следует, что это значение единственно. Вычисляя значение F'_u , получим

$$F'_u = -m - kR'_u(u, R_0)$$

или, учитывая $R'_u = -(\partial\varphi/\partial u)/(\partial\varphi/\partial R)$ (как производная неявной функции $\Phi(R, u) = \varphi(-R_1R_0) + u = 0$),

$$F'_u = kv(R) - u.$$

Было показано, что $R = R_0$ при $u = 0$, следовательно, $F'_u(0) = kv(R_0) - m = a$. Будем считать начальную плотность ресурса такой, что всегда $a > 0$. Так как $v(R)$ монотонно возрастает по R и при $u = 0$ $R < R_0$, то $F'_u(u) < a$ при $u > 0$.

Следовательно, мы показали, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет условиям задачи КПП и существует единственное устойчивое решение вида $u(x, t) = u(x + \lambda t)$, т. е. волна, распространяющаяся со скоростью

$$\lambda_{\min} = 2 \sqrt{[kv(R_0) - m] D}.$$

Форма волны задается выражением

$$\tilde{N}(x) = d\tilde{u}(x)/dx,$$

где $\tilde{u}(x)$ есть решение задачи

$$\lambda_{\min} \frac{d\tilde{u}}{dx} = D \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} + F(\tilde{u}), \quad \tilde{u}(-\infty) = 0, \quad \tilde{u}(+\infty) = u_{\max}. \quad (3.4)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $v(R) = \sigma R$, т. е. вольтерровский тип трофической функции. Такая ситуация имеет место, когда ресурс жестко лимитирован и трофическая цепь напряжена. Тогда $R = R_0 \exp(-\sigma u)$ и $F(u) = kR_0[1 - \exp(-\sigma u)] - mu$. Скорость распространения волны в этом случае равна $\lambda_{\min} = \rho \sqrt{k\sigma R_0 - m}$ ($D = \rho^2/4$). Для нахождения предельной формы волны необходимо решить краевую задачу (3.4)

с соответствующей функцией $F(\tilde{u})$. На рис. 2 изображены волны численности $\tilde{N}(x)$ для $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, распространяющиеся справа налево. Эти волны имеют крутой передний фронт и растянутый задний. Для конкретной оценки скорости распространения волны выберем значения $k=0,2$, $m=0,3$, $\rho=1$, $R_0=20$ и временной масштаб в одни сутки. Тогда $\lambda_{\min}=0,32, 0,71, 0,95$ м/сут для значений $\sigma=0,1, 0,2$ и $0,3$ соответственно.

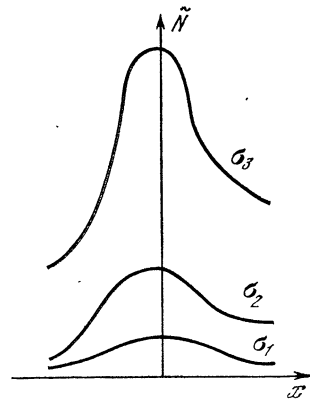


Рис. 2

Перейдем к оценке справедливости принятой выше гипотезы, т. е. оценим, насколько велико влияние отброшенного члена $N_0(x)$ на картину распространяющейся волны для решений уравнения

$$\partial u / \partial t = (\rho^2 / 4) \Delta u + F(u) + N_0(x), \quad (3.5)$$

где $F(0) = F(u_{\text{кр}}) = 0$, $F'(0) = a > 0$, $F'(u_{\text{кр}}) = -\delta \leq 0$. Поскольку $u \equiv u_{\text{кр}}$ является решением уравнения (3.5) с $N_0(x) \equiv 0$, то для $w = u - u_{\text{кр}}$ получаем

$$\partial w / \partial t = \partial^2 w / \partial x^2 - \delta w + N_0(x) + O(|w|). \quad (3.6)$$

Считая возмущения w малыми, пренебрегаем остаточным членом в уравнении (3.6). Тогда его решения могут быть представлены в виде

$$w(x, t) = \exp(-\delta t) \int_0^t \int_{\Omega} \frac{N_0(\xi)}{(\rho \sqrt{\pi \tau})^\nu} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{\rho^2 \tau}\right] d\tau d\xi, \quad (3.7)$$

где $\Omega \in R^\nu$ — носитель функции $N_0(x)$, т. е. множество тех x , в которых она отлична от нуля. Для определенности считаем ее расположенной вблизи начала координат.

Предположим, что волна распространилась далеко за пределы источника. Будет ли он теперь оказывать на нее какое-либо существенное влияние? Установим характер решения $w(x, t)$ в тех точках, которые волна только что миновала. Считаем, таким образом, $|x| \gg |\xi|$. Оценим внутренний интеграл в (3.7). Для этого сделаем замену $\sigma = 1/\tau$. Обозначим $c_1(\xi) = N_0(\xi)/(\rho \sqrt{\pi})^\nu$, $p = (\nu/2) - 2$, $d = |x|^2/\rho^2$, $\sigma_1 = 1/t$. Для интеграла получаем

$$I(\xi) = c_1(\xi) \int_{\sigma_1}^{\xi} \sigma^p e^{-d\sigma} d\sigma \sim e^{-d\sigma_1} \sum_{j=0}^{\infty} d_j d^{-1-j}, \quad d_0 = -\sigma_1^p$$

(по Лапласу при $d \rightarrow \infty$). Тогда

$$I(\xi) \simeq -c_1(\xi) \sigma_1^p e^{-d\sigma_1}.$$

Выполняя интегрирование по Ω , имеем

$$w(x, t) \simeq ce^{-\delta t} \frac{1}{t^p} \exp\left(-\frac{x^2}{\rho^2 t}\right), \quad (3.8)$$

где $c \simeq (\rho \sqrt{\pi})^{-\nu} \int_{\Omega} N_0(x) dx$.

Пусть теперь точка наблюдения перемещается со скоростью распространяющейся волны $\lambda_{\min} = \rho\sqrt{a}$, так что $x/t = \lambda_{\min}$.

Подставляя это соотношение в (3.8), получим

$$w(\lambda_{\min}t, t) \simeq \frac{c}{t^p} \exp[-(a + \delta)t]$$

или, если следить за координатой x ,

$$\begin{aligned} w\left(x, \frac{x}{\lambda_{\min}}\right) &\simeq \frac{c\lambda_{\min}^p}{x^p} e^{-ax}, \quad a = \left(\frac{\lambda_{\min}^2}{\rho} + \gamma\right) / \lambda_{\min} = \\ &= \frac{\lambda_{\min}}{\rho} + \frac{\delta}{\lambda_{\min}}, \quad z = \frac{x}{\lambda_{\min}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таким образом, возмущение, обусловленное отброшенным членом $N_0(x)$, догоняющее волну в точках, удаленных от места начального возникновения процесса, экспоненциально мало. Поэтому на достаточно больших расстояниях от места вспышки, т. е. от области, где $N_0(x) \neq 0$, наша гипотеза вполне справедлива и волна численности потребителя представляет собой КПП-волну.

4. ВТОРОЙ СПОСОБ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ ВОЛНЫ

Скорость волны можно оценить еще и из следующих соображений [8]. Предположим, что ресурс имеется в изобилии, т. е. динамика потребителя описывается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + [kv(R) - m]N, \quad v(t) = \frac{AR^\mu}{K^\mu + R^\mu}, \\ \mu &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

При $R \rightarrow \infty$ $v(R) \rightarrow A$, следовательно, $kv(R) - m \simeq kA - m = b = \text{const}$.

Если начальное распределение $N_0(x)$ имело вид δ -функции, сосредоточенной на правой границе, то для $N(x, t)$ имеем (фундаментальное решение)

$$N(x, t) = \frac{\exp(-|x|^2/4Dt + bt)}{(2\sqrt{D\pi t})^\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

Проследим за скоростью перемещения точек x , в которых $N = c$. Тогда

$$-|x|^2/4Dt + bt = \nu \ln(c^\nu 2^\nu \sqrt{D\pi t}).$$

При больших t правая часть существенно меньше члена bt , следовательно, $|x|^2/4Dt \simeq bt$, откуда $|x|/t \simeq 2\sqrt{Db}$. Таким образом, скорость перемещения точек волнового фронта v (т. е. скорость волны) равна

$$v = 2\sqrt{bD} = 2\sqrt{(kA - m)D},$$

т. е. $v = \lambda_{\min}$. Аналогичный результат можно получить и не предполагая, что $v(R) = A$, т. е. для конечных значений $v(R)$. Тогда $v \simeq 2\sqrt{(kv(R_0) - m)D}$ и снова $v = \lambda_{\min}$.

5. ОЦЕНКА СКОРОСТИ ВОЛНЫ В «МЕРТВОЙ» ЗОНЕ

«Мертвой» зоной будем называть области ареала, в которых $R_0(x) \equiv 0$. Волна выедания, т. е. волна $R(x, t)$, перемещаясь справа налево с постоянной скоростью λ_{\min} , набегаёт на мертвую зону и затем резко убывает у ее границы. Незначительная часть особой вида-потребителя преодолевает эту зону и начнет интенсивно размножаться в области, богатой ресурсом. Далее появляется новая волна, которая распространяется в прежнем направлении с прежней скоростью, но с некоторым отставанием по времени от волны, распространяющейся в однородной среде. Из различных соображений следует, что эта задержка пропорциональна ширине мертвой зоны, поэтому волна выедания перемещается в этой зоне с некоторой постоянной скоростью, несколько меньшей, чем исходная.

Пусть левая граница мертвой зоны находится в точке 0, правая — в $x = l$, где l — ее ширина, которую считаем достаточно большой. Полагаем, что вне этой зоны имеется изобилие ресурса. Тогда задача становится линейной и мы можем следить за динамикой одной незначительной «порции» потребителя. Возьмем в качестве начального условия функцию $\delta(x)$, т. е. единичный импульс, сосредоточенный на правой границе.

Тогда внутри мертвой зоны поведение потребителя будет описываться функцией

$$E(x, t) = \frac{\exp(-x^2/4Dt - mt)}{2\sqrt{D\pi t}}.$$

Дойдя до левой границы, численность потребителя начнет экспоненциально возрастать с показателем $[b = kA - m$. Кроме того, там будет наблюдаться его прирост и за счет диффузии. Возьмем в качестве t_1 тот первый момент времени, когда обе скорости прироста сравняются. Далее, пренебрегая диффузионным притоком, считаем, что рост чисто экспоненциальный. Характерное время t_2 , прошедшее после момента t_1 , соответствует достижению потребителем некоторой наперед заданной величины $c > 0$. Общее время прохождения мертвой зоны $t = t_1 + t_2$. При $x = l$ имеем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E \left[-\frac{1}{2t} + \frac{l^2}{4Dt^2} - m \right].$$

Отсюда для t_1 имеем

$$-\frac{1}{2t_1} + \frac{l^2}{4Dt_1^2} - m = b, \quad t_1 \simeq \frac{b}{2\sqrt{kAD}}.$$

Для t_2 получаем $E(l_1 t_1) l^{bt_2} = c$, откуда $-l^2/4Dt_1^2 - mt_1 + bt_2 \simeq 0$ и $t_2 \simeq t_1(kA + m)/b$. И окончательно $t = t_1 + t_2 = l\sqrt{kA}/\sqrt{Db}$. Для скорости же прохождения мертвой зоны получим следующее априорное значение:

$$v_{м.з} = \frac{l}{t} = \sqrt{D} \left(\sqrt{kA} - \frac{m}{\sqrt{kA}} \right).$$

6. МАШИННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С СИСТЕМОЙ «РЕСУРС—ПОТРЕБИТЕЛЬ» (ВОЗОБНОВИМЫЙ РЕСУРС)

К сожалению, нам не удалось получить сколь-либо интересных аналитических результатов для системы «ресурс—потребитель» с возобновимым ресурсом, т. е. когда $\alpha_0 \neq 0$. Поэтому при ее исследовании мы пошли по пути машинного эксперимента.

Система (3.1) с граничными условиями

$$N(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial N}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

и начальными данными

$$R(x, 0) = R^*, \quad x \in [0, L],$$

$N(x, 0) = N_0$ на отрезке $[a, b]$ и $N(x, 0) = 0$ вне этого отрезка решалась численно на отрезке $[0, L]$ с использованием неявной разностной схемы. Шаг по x и t выбирался равным от нуля до единицы. Трофическая функция бралась в виде

$$v(R) = 8R^2/(1 - R^2).$$

Все остальные параметры системы полагались равными единице, кроме $k = 0,2$. Результаты экспериментов приведены в таблице.

Эксперимент 1. Пусть $R^* = 20$, $L = 20$, $a = 19$, $b = 20$, $N_0 = 6,4$ и ресурс невозобновим, т. е. $\alpha_0 = 0$. На рис. 3, *a, б* изображены волны ресурса (см. рис. 3, *a*) и потребителя (см. рис. 3, *б*) для моментов времени $t = 0,5; 3,5; 8; 10$. Из этих данных можно определить скорость волны численности (λ) в эти моменты и ширину фронта (l). Видно, что с убыванием ресурса убывает амплитуда N_{\max} волны выедания, а также скорость ее распространения. Ширина фронта при этом увеличивается. Теоретически предсказываемое значение $\lambda_{\min} \simeq 1,55$. По-видимому, здесь дело в том, что на этих расстояниях еще сильно влияние возмущения $N_0(x)$. Более подробные расчеты показали, что затем (для $t \sim 30$) скорость начинает возрастать, стремясь к λ_{\min} снизу.

Эксперимент 2. Здесь ресурс возобновим, т. е. $\alpha_0 = 1$, $L = 40$, $R^* = 20$, $N_0 = 3,6$. На рис. 4, *a, б* изображены волны

t	R_{\max}	N_{\max}	λ	l
Эксперимент 1 ($\alpha_0 = 0$)				
3,5	20	1,2	1,47	9,5
8	19,99	1,15	1,38	11
10	19,8	1,15	1,35	11
Эксперимент 2 ($\alpha_0 = 1$)				
11	20	1,8	1,33	12
21	19,99	1,88	1,4	11
27	7,63	2,26	1,4	—
Эксперимент 3 ($\alpha_0 = 1$)				
6,5	10	1,8	1,3	11,5
10,5	9,73	0,86	1,62	7
Эксперимент 4 ($\alpha_0 = 1$)				
6,5	20	1,79	1,3	11
8	19,99	0,99	2	12,5
12	18,4	1,94	1	9,5
Эксперимент 5 ($\alpha_0 = 0$)				
2,5	20	1,16	1,52	7,5
6,5	20	0,015	0,015	
10	20	0,13	1,27	11,5
20	5,68	1,24	0,94	4,5

ресурса (см. рис. 4, а) и потребителя (см. рис. 4, б) для $t = 0,5; 11; 21; 27$. Видно, что с убыванием ресурса увеличиваются амплитуда и скорость волны, а ширина фронта уменьшается.

Эксперимент 3. Здесь $\alpha_0 = 1, L = 20, N_0 = 7, R^* = 10$ на отрезке $[0, 10]$ и $R^* = 20$ на отрезке $[10, 20]$. На рис. 5, а, б изображены волны ресурса (см. рис. 5, а) и потребителя (см. рис. 5, б) для $t = 6,5$ и $10,5$. Видно, что с убыванием ресурса амплитуда убывает, но скорость увеличивается. Ширина фронта убывает.

Эксперимент 4. Пусть $\alpha_0 = 1, L = 20, N_0 = 7, R^* = 10$ на отрезке $[8, 10]$ и $R^* = 20$ вне этого отрезка, т. е. ресурс имеет на ареале «яму». Здесь амплитуда первой волны выедания убывает с убыванием ресурса, но затем эта зависимость нарушается. Скорость после прохождения ямы сначала увеличивается, а затем уменьшается. Ширина фронта зависит от амплитуды волны.

Эксперимент 5. Пусть $L = 20, \alpha_0 = 0, R^* = 0$ на отрезке $9 < x < 16$ и $R^* = 20$ вне этого отрезка, $N_0(x)$ выбирается такая же, как и в предыдущих экспериментах. Результаты эксперимента приведены на рис. 7, а, б и в таблице. Видно, что амплитуда первой волны выедания ничтожно мала при прохождении мертвой зоны ($N_{\max} = 0,015$), а затем со временем восстанавливается. Участки, помеченные крестиками, соответствуют

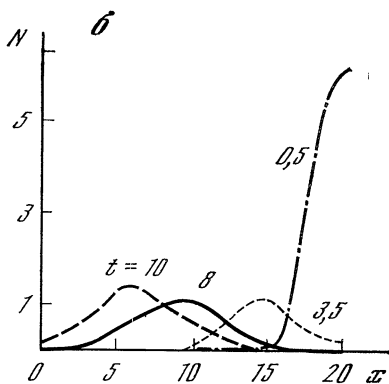
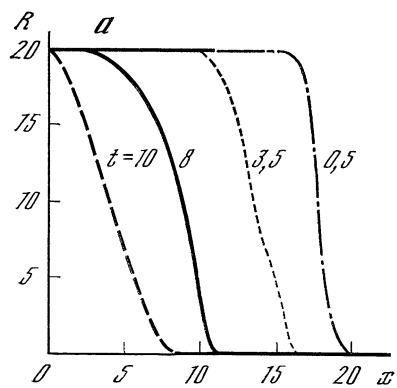


Рис. 3

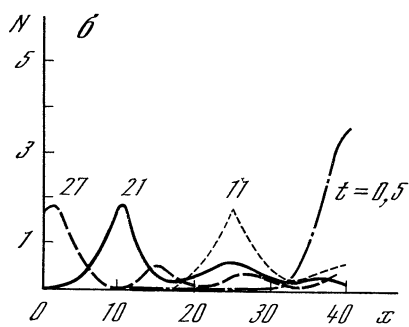
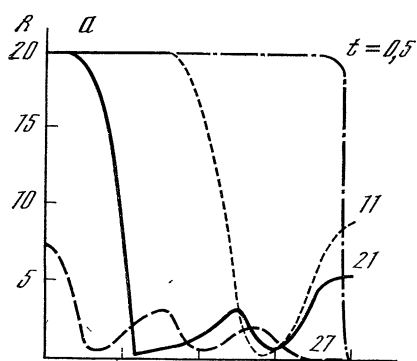


Рис. 4

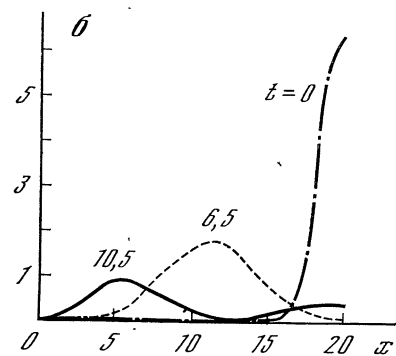
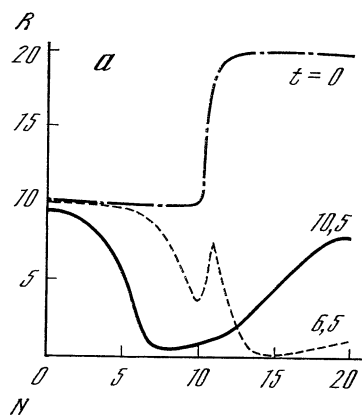


Рис. 5

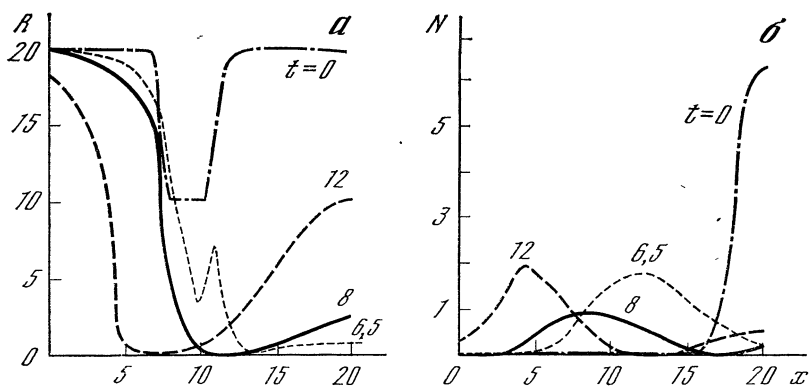


Рис. 6

совпадению распределений для различных моментов времени. Экспериментально скорость волны в мертвой зоне определялась по формуле $\lambda_{м.з} = \lambda / (\Delta x / l + 1)$, где λ — скорость волны в однородной среде; l — ширина зоны; Δx — отставание волны из-за задержки в мертвой зоне. Ширина фронта волны, как и в предыдущем эксперименте, зависит от ее амплитуды.

Сопоставляя результаты экспериментов, приходим к следующим выводам.

1. Амплитуда волны выедания зависит от ресурса и не зависит от величины вспышки, что согласуется с теоретическими соображениями.

2. Ширина фронта явно зависит от амплитуды волны, при увеличении одной убывает другая.

3. Скорость волны выедания также зависит от ресурса (в однородной среде), при наличии же ям и мертвых зон движение

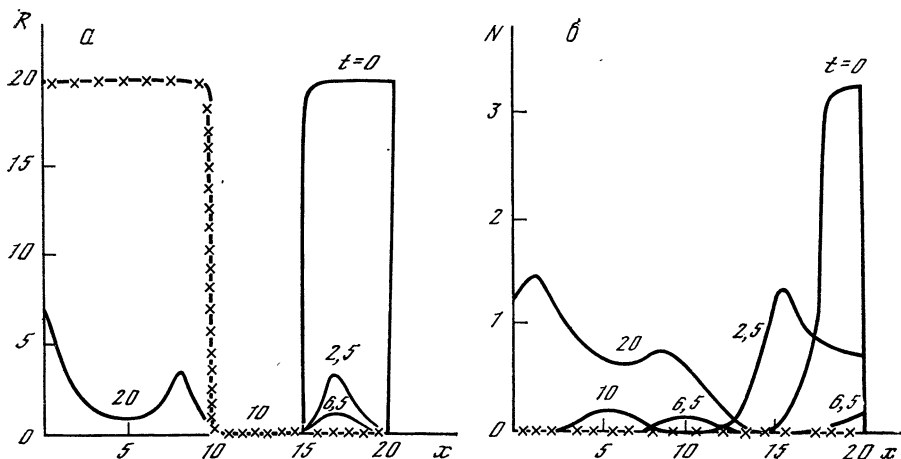


Рис. 7

волны замедляется, но после их прохождения скорость снова становится прежней.

4. Картина волны сильно зависит от мальтузианского параметра α_0 . При невозобновимом ресурсе, т. е. когда $\alpha_0 = 0$, идет одна волна выедания, в то время как при $\alpha_0 = 1$; т. е. когда ресурс возобновляется, за первой волной идут другие (меньшей амплитуды). Что же касается формы волнового фронта, то можно сказать, что во всех случаях форма волны потребителя имеет крутой передний и растянутый задний фронты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе, носящей весьма предварительный характер, мы попытались привлечь внимание исследователей к феноменам нелинейных волн в популяционных и экологических системах. Думается, что в этом направлении можно получить много интересных результатов, которые будут иметь не только теоретическое, но и большое прикладное значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
2. Иваницкий Г. Р., Крицкий В. И., Сельков Е. Е. Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978. 310 с.
3. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенного с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической задаче.— Бюл. МГУ. Сер. А, 1937, 1, вып. 6, с. 3—28.
4. Fisker R. A. The wave of advantageous genes.— Ann. Eugenics, 1937, 7, p. 355—368.
5. Fife P. C. Mathematical aspects of reacting and diffusing systems. Berlin, Vermach: Springer, 1979, 28: 285 p.
6. Свирижев Ю. М., Пасеков В. П. Математическая генетика. М.: Наука, 1982. 500 с.
7. Гигаури А. А., Свирижев Ю. М. Распространение волны в системе «ресурс — потребитель».— ДАН СССР, 1981, 258, № 5, с. 1274—1276.
8. Разжевайкин В. Н. Модель пространственно распределенной экосистемы типа «ресурс — потребитель».— В кн.: Математические модели в экологии и генетике. М.: Наука, 1981, с. 36—51.
9. Kennedy C. R., Aris R. Travelling waves in a simple population model involving growth and death.— Bull. Math. Biol., 1980, 42, p. 397—429.
10. Свирижев Ю. М., Тимофеев-Ресовский Н. В. О противоположных давлениях отбора на генотип и на признак у мутации, сцепленной с полом.— В кн.: Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1967, вып. 18, с. 155—170.
11. Канель Я. И. О поведении решений задачи Коши при неограниченном возрастании времени для квазилинейных уравнений, встречающихся в теории горения.— ДАН СССР, 1960, 132, № 2, с. 268—271.
12. Канель Я. И. О стабилизации решения уравнений теории горения при финитных начальных функциях.— Машиностр. сб., 1964, 65, № 3, с. 398—413.
13. Свирижев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

СТИМУЛИРОВАННАЯ ДИФФУЗИЯ И КООПЕРАТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В. И. ТАЛАНОВ

Идея этой работы возникла у автора на лекциях «синергетического» цикла школы и изложена вкратце на заключительной дискуссии. Оживленный интерес, проявленный к ней слушателями, побудил автора предпринять попытку более глубокого обоснования нового подхода, чему и посвящена данная публикация. Развиваемые в ней представления о стимулированной диффузии кратко изложены в [1].

Речь пойдет о возможности феноменологического описания кооперативных эффектов в нелинейных распределенных кинетических системах с диффузией. Сюда относятся сложные системы из самых различных областей естествознания, экономики, социологии, состоящие из большого числа однотипных элементов, поведение которых характеризуется как собственной (внутренней) динамикой, так и взаимодействием друг с другом и со средой. Такие системы в определенных условиях обнаруживают кооперативные свойства, которые могут быть проанализированы на основе простых, но достаточно универсальных математических моделей. Наглядное представление о принципах построения таких моделей дает теоретическая биология в части исследования кинетики физико-химических и социально-биологических процессов на разных уровнях жизни [2, 3].

Наиболее распространенный подход к изучению динамики сложных систем заключается в принципе «от индивидуума к коллективу». Математически он выражается в том, что сначала строится и изучается «точечная» модель поведения некоторой системы на основе нелинейных эволюционных уравнений типа

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = F_i(m_1, \dots, m_n, \mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где m_i — динамические переменные системы; \mathbf{r} — координата элемента, являющаяся в данном случае просто параметром; t — время. Функции F_i строятся, как правило, по типу, характерному для кинетики химических реакций, т. е. содержат мультипликативные нелинейности.

Обобщение на распределенные системы осуществляется путем введения в рассмотрение диффузионных процессов переноса. В итоге приходят к эволюционным уравнениям параболического типа

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = F_i(m_1, \dots, m_n, \mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \sum_j D_{ij} \nabla m_j, \quad (2)$$

где D_{ij} — коэффициенты линейной (собственной и взаимной) диффузии компонент.

Когда же речь идет о системах с сильно выраженным пространственным взаимодействием, обычно рассматриваются конкретные примеры, такие, как колебания в распределенном лазере или образование структур при конвекции жидкости (ячейки Бенара). Однако, как будет показано ниже, в определенных предположениях и такие системы могут изучаться на основе диффузионных уравнений более общего, чем (2), типа.

В основу развиваемого подхода необходимо положить какие-то достаточно общие принципы. Наиболее универсальными в этом отношении являются законы сохранения. Математическим выражением их служат уравнения непрерывности (уравнения баланса для нужным образом выбранных динамических переменных задачи — интенсивных параметров: плотности, концентрации, удельного количества тепла и т. п.)

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_i = F_i(m_1, \dots, m_n, \mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Это уравнение составляет основу системного анализа [4]. Вектор \mathbf{J}_i дает поток соответствующей компоненты m_i , правые части описывают изменение динамических переменных в процессе локального взаимодействия.

Для замыкания системы (3) надо связать потоки \mathbf{J}_i с динамическими переменными и поставить граничные условия, отражающие взаимодействие с внешней средой. Вообще говоря, замыкание системы (3) достигается решением конкретной задачи (уравнений электродинамики, гидродинамики и т. п.), представленным в форме нелокальных (по \mathbf{r} и t) и нелинейных функционалов. На первый взгляд это делает общий подход бесперспективным. Однако можно указать большой класс систем, в которых пространственное взаимодействие элементов ограничивается малыми (по сравнению с характерным размером L структурной неоднородности) расстояниями r_d . Примером может служить взаимодействие зарядов в плазмоподобных средах, ограниченное радиусом дебаевского экранирования, или взаимодействие особей в популяциях друг с другом и с окружающей средой, ограниченное радиусом их индивидуальной активности. Если при этом скорости изменения динамических переменных m_i достаточно малы, то можно допустить, что в первом приближении потоки \mathbf{J}_i связаны с динамическими переменными m_i нелинейными соотношениями

$$\mathbf{J}_i = \sum_j \chi_{ij}(m_1, \dots, m_n) \nabla m_j, \quad (4)$$

выражающими принцип пространственно-временной локальности и играющими роль материальных уравнений, которыми необходимо дополнить (3).

Конечно, расчет коэффициентов в (4) требует рассмотрения конкретных моделей, но он все-таки существенно проще полного строгого решения задачи.

Для систем, близких к термодинамическому равновесию, соотношения (4) приводятся к линейным

$$\mathbf{J}_i^L = - \sum D_{ij} \nabla m_j, \quad (5)$$

при этом уравнения (3) отождествляются с (2). При учете пространственного взаимодействия элементов наряду с линейными \mathbf{J}_i^L возникают и нелинейные потоки компонент. Как будет показано на конкретном примере, при учете парных взаимодействий нелинейная часть (4) может быть представлена в виде

$$\mathbf{J}_i^{NL} = \sum_{j,k=1}^n \chi_{ijk} m_k \nabla m_j, \quad (6)$$

где χ_{ijk} — тензор третьего ранга. Такая запись эквивалентна введению в рассмотрение нелинейных коэффициентов диффузии

$$D_{ij}^{NL} = - \sum_{k=1}^n \chi_{ijk} m_k. \quad (7)$$

Выражение (6) возникает, в частности, при описании термоэлектрических и термодиффузионных явлений [5].

Практически интересным случаем соотношения (4) является

$$\mathbf{J}_i^{NL} = m_i \sum_{j=1}^n S_{ij} \nabla m_j, \quad (8)$$

связывающее нелинейные потоки с дрейфовыми скоростями компонент $Y_i = \sum S_{ij} \nabla m_j$, возникшими в результате их взаимодействия. Такое представление возможно, если подвижность компонент ограничена силами трения, пропорциональными скорости компонент. При этом уравнения (2) заменяются более общей системой

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = F_i(m_1, \dots, m_n, \mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \sum_{j=1}^n D_{ij} \nabla m_j - \operatorname{div} m_i \sum_{j=1}^n S_{ij} \nabla m_j, \quad (9)$$

описывающей наряду с линейной и нелинейную диффузию компонент.

Прежде чем переходить к анализу следствий, вытекающих из представления о нелинейной диффузии, проиллюстрируем возможность замыкания уравнений (3) на простом модельном примере двухкомпонентной системы (m_1, m_2) , в которой взаимодействие компонент осуществляется короткодействующими центральными силами с энергией связи

$$W_{12} = \iint m_1(\mathbf{r}_1) m_2(\mathbf{r}_2) G_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) dV_1 dV_2, \quad (10)$$

где функция Грина $G_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ типа потенциала Дебая с радиусом действия r_d . Будем считать, что компоненты погружены в некоторую среду, находящуюся при температуре T .

Для плавных распределений компонент ($r_d \ll L$) энергия взаимодействия (10) принимает локальный характер:

$$W_{12} = K_{12} \int m_1 m_2 dV + O(r_d/L)^2, \quad (11)$$

где $K_{12} = \int_V G_{12}(|\mathbf{r}|) dV$.

Взаимодействие внутри каждой из подсистем ($i = 1, 2$) можно описывать энергией

$$W_{ii} = \frac{1}{2} K_{ii} \int m_i^2 dV + O(r_d/L)^2, \quad (12)$$

где $K_{ii} = \int_V G_{ii}(|\mathbf{r}|) dV$.

Определенная таким образом энергия взаимодействия эквивалентна изменению удельного химического потенциала компонент на величину

$$\mu_k - \mu_{k0} = \sum_{j=1}^2 K_{kj} m_j. \quad (13)$$

Здесь μ_{k0} — химический потенциал компонент в отсутствие взаимодействия элементов.

Массовые потоки связаны с градиентами химических потенциалов феноменологическими соотношениями

$$\mathbf{J}_i = \sum_k L_{ik} \nabla(-\mu_k/T). \quad (14)$$

Если принять модель слабых растворов [6] $\mu_{k0} = \mu_{k0}(m_k)$, $\partial\mu_{k0}/\partial m_k = T/m_k$ и ввести линейные коэффициенты диффузии соотношениями $D_{ik} = L_{ik}/m_k$, то потоки (14) можно записать в виде

$$\mathbf{J}_i = - \sum_k D_{ik} \nabla m_k - \sum_{k,j} \frac{D_{ik}}{T} K_{kj} m_k \nabla m_j, \quad (15)$$

где второй член совпадает с (6) $\left(\chi_{ijk} = -\frac{D_{ik}}{T} K_{kj}\right)$ и описывает нелинейную диффузию. В частности, если отсутствует взаимная линейная диффузия $D_{ik} = D_{ii} \delta_{ik}$, то нелинейное слагаемое в (15) приводится к виду (8) с $S_{ij} = -D_{ii} K_{ij}/T$. К тем же выводам можно было прийти, исходя из представления о силах взаимодействия, пропорциональных градиентам концентрации компонент, и связывая подвижности компонент с коэффициентами диффузии соотношениями Эйнштейна.

Нелинейная диффузия, представленная потоками (6) или (8), допускает в сопоставлении с линейной простую и наглядную интерпретацию. Рассмотрим диффузию примесных частиц в резервуаре, находящемся при температуре $T \neq 0$. Линейная диффузия примесных частиц будет происходить в результате броуновского движения под действием случайных толчков частиц основной среды. Используя аналогию со спонтанными переходами

квантовых систем в поле нулевых колебаний вакуума или тепловых колебаний решетки, такую диффузию примеси в поле случайных колебаний среды можно назвать спонтанной. Продолжая аналогию, нелинейной диффузии примеси можно приписать смысл стимулированной, или вынужденной, так как связанный с ней поток J_i^{NL} зависит не только от градиентов компонент, но и от их «интенсивностей». В частном случае (8) он просто пропорционален m_i и величине воздействующего градиента. В отсутствие внешних воздействий спонтанная диффузия стремится вернуть систему к однородному состоянию, стимулированная, напротив, связана с потоками, нарушающими это состояние.

В наиболее простом случае (8) коэффициенты S_{ij} при $i \neq j$ можно назвать коэффициентами взаимной стимулированной диффузии (взаимной стимуляции), а S_{ii} — коэффициентами собственной стимулированной диффузии (автостимуляции).

В отличие от коэффициентов линейной диффузии, подчиняющихся ряду термодинамических ограничений, связанных, в частности, с флюктуационно-диссипативной теоремой, коэффициенты стимулированной диффузии в известной степени более произвольны и определяются конкретной системой. Так, в физических системах с парным взаимодействием элементов, как ясно из приведенного выше примера, их знаки зависят от знаков энергии взаимодействия. В открытых системах стимулированные потоки могут быть связаны с работой внешних источников, что еще больше увеличивает произвол в коэффициентах. В нефизических системах на выбор коэффициентов могут оказывать влияние факторы, не связанные непосредственно со структурой рассматриваемой системы. Все это расширяет возможности описания на основе представлений о стимулированной диффузии различных процессов в химии, биологии, экологии, экономике и т. п. В общем случае уравнения типа (3) можно рассматривать не в координатном, а в некотором обобщенном пространстве, сохранив представление о спонтанной и вынужденной диффузиях по элементам этого пространства. Заметим, что в однокомпонентном варианте уравнения (3) принимают вид известных параболических уравнений с нелинейным коэффициентом диффузии, изучаемых, например, в теории горения [7].

Уравнения (9) как в общем виде, так и применительно к конкретным задачам требуют детального изучения. Однако ясно, что стимулированная диффузия компонент вносит принципиально новые элементы в поведение системы.

Проиллюстрируем это на простейшем примере возникновения пространственной дифференциации (кооперации) в двухкомпонентной системе с взаимной стимулированной диффузией. Чтобы нагляднее подчеркнуть специфику стимулированной диффузии, оставим в (9) сначала только третье слагаемое:

$$\begin{aligned} \partial m_1 / \partial t + \operatorname{div} S_{12} m_1 \nabla m_2 &= 0, \\ \partial m_2 / \partial t + \operatorname{div} S_{21} m_2 \nabla m_1 &= 0, \quad S_{12}, S_{21} = \text{const.} \end{aligned} \quad (16)$$

Система (16) имеет стационарное, однородное в пространстве решение $m_1 = m_{10}$, $m_2 = m_{20}$. Линеаризуя ее около этого решения, для возмущений \tilde{m}_{12} получим систему

$$\partial \tilde{m}_1 / \partial t + S_{12} m_{10} \Delta \tilde{m}_2 = 0, \quad \partial \tilde{m}_2 / \partial t + S_{21} m_{20} \Delta \tilde{m}_1 = 0, \quad (17)$$

из которой легко находится дисперсионное уравнение (для полей вида $\exp [i(\omega t - \mathbf{k}r)]$)

$$(i\omega)^2 = S_{12} S_{21} m_{10} m_{20} k^4. \quad (18)$$

При коэффициентах стимуляции разных знаков ($S_{12} > 0$, $S_{21} < 0$) это уравнение определяет чисто действительную частоту ω , а уравнения (17) заменой $t = \tau / |S_{12} S_{21} m_{10} m_{20}|^{1/2}$, $u_1 = \tilde{m}_1 / |S_{12} m_{10}|^{1/2}$, $u_2 = \tilde{m}_2 / |S_{21} m_{20}|^{1/2}$, $\psi = u_1 - i u_2$ приводятся к уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \Delta \psi. \quad (19)$$

Таким образом, при $S_{12} S_{21} < 0$ малые колебания компонент m_{12} будут носить чисто волновой характер.

Другой тип поведения получится при $S_{12} S_{21} > 0$, что соответствует коэффициентам взаимной стимуляции одного знака. Характеристическое уравнение (18) такой системы определяет два мнимых корня ω , один из которых соответствует неустойчивости. Интересно отметить, что эта неустойчивость, которую в отличие от известной диффузионной [8] можно назвать стимулированной, возникает согласно (18) как при $S_{12} > 0$ и $S_{21} > 0$, так и при $S_{12} < 0$ и $S_{21} < 0$. Первый случай соответствует взаимному «притяжению» компонент, когда направленный поток в некоторую область пространства одной из компонент приводит к появлению направленного туда же потока второй компоненты. Это может вызвать неограниченный (в рамках данной модели) рост пространственной концентрации обеих компонент (эффект кооперации). В известном смысле более интересным представляется другой случай ($S_{12} < 0$, $S_{21} < 0$), соответствующий взаимному «отталкиванию» компонент. Нетрудно убедиться, что в этом случае неустойчивой моде соответствует противофазное распределение в пространстве возмущений компонент \tilde{m}_1 , \tilde{m}_2 , в то время как в первом случае оно было синфазным. Это значит, что при $S_{12} < 0$ и $S_{21} < 0$ будет происходить пространственная дифференциация компонент. На нелинейной стадии этот процесс может продолжаться до полного расслоения компонент.

Если учесть теперь и линейную («спонтанную») диффузию компонент, выписав в правых частях уравнений (16) члены вида $D_{12} \Delta m_{12}$, то нетрудно убедиться, что стимулированная неустойчивость будет носить пороговый характер. Считая для простоты, что $D_1 = D_2 = D$ и $S_{12} = S_{21} = S$ (симметрия взаимодействующих компонент), вместо (18) получим характеристическое уравнение

$$(i\omega + k^2 D)^2 = S^2 m_{10} m_{20} k^4, \quad (20)$$

из которого следует, что стимулированная неустойчивость возникает, начиная лишь с некоторого уровня компонент

$$m_{10}m_{20} > D^2/S^2. \quad (21)$$

Отсюда, в частности, следует, что при медленном росте средней интенсивности компонент системы за счет внутренних или внешних ресурсов¹ (рост численности популяции, рост экономического потенциала, рост биомассы клеток и т. п.) тенденция к дифференциации возникает не сразу, а с определенного уровня развития системы. Этот вывод может быть обобщен и на многокомпонентные системы. Можно построить, в частности, схемы последовательной или разветвленно-последовательной стимуляции компонент, в которых дифференциация будет охватывать все новые компоненты по мере их роста.

Таким образом, в системах со стимулированной диффузией, эволюционирующих в сторону роста своих компонент, начиная с определенного уровня возникает опасность неустойчивого поведения, которое на линейной стадии уже не демпфируется спонтанными диффузионными потоками.

На нелинейной стадии стимулированная неустойчивость может быть ограничена пространственной дифференциацией компонент, однако при положительных коэффициентах взаимной стимуляции такого ограничения может не наступить. Для иллюстрации рассмотрим автомодельную стадию взаимной стимулированной диффузии в симметричной двухкомпонентной системе ($S_{12} = S_{21} = S > 0, D_{12} = 0$) при равных локальных интенсивностях компонент ($m_1 = m_2 = m(\mathbf{r}, t)$). В этом случае уравнения (16) сводятся к одному²

$$\partial m / \partial t + 1/2 S \Delta m^2 = 0, \quad (22)$$

которое автомодельной подстановкой

$$m = \frac{1}{a^p} f\left(\frac{\mathbf{r}}{a}\right) \quad (23)$$

(p — размерность пространства)

приводится к виду

$$1/2 S \Delta f^2(\rho) + M [f - (\rho \nabla f)] = 0, \quad (24)$$

$$\text{где } \rho = \mathbf{r}/a(t), \quad a' a^{p+1} = M = \text{const}. \quad (25)$$

Решением (25) является зависимость

$$a = a_0 (1 - t/t_0)^{1/(p+2)}, \quad (26)$$

¹ В уравнениях (9) этот процесс легко отразить выбором подходящих функций F_i .

² Уравнение типа (22) с $S < 0$ и дополнительным членом в правой части αm^l (α, l — константы), приводящим к локальной неустойчивости, рассматривалось в [7].

показывающая, что развитие неустойчивости носит взрывной характер и в системе за конечное время t_0 образуется сингулярность (явление коллапса)³. Структура коллапсирующих неоднородностей должна быть определена из решения уравнения (24).

В заключение остановимся на связи стимулированной диффузии с принципами термодинамики. Для простоты ограничимся рассмотрением однокомпонентной системы в термостате с температурой T , описываемой уравнениями

$$\partial m / \partial t = -\operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (27)$$

$$\mathbf{J} = -D \nabla m + S m \nabla m = m D \nabla (-\mu / T), \quad (28)$$

$$\text{где } \mu = T \ln m + K m \quad (29)$$

— удельный химический потенциал.

Внутренняя энергия системы, связанная с взаимодействием ее элементов, равна

$$W_i = \int_V w dV = 1/2 \int_V K m^2 dV, \quad (30)$$

а ее энтропия $H = \int_V h dV$, определяемая (для единицы объема) соотношением

$$dw = T dh + \mu dm, \quad (31)$$

может быть записана в виде

$$H_i = - \int_V m \ln \frac{m}{e} dV. \quad (32)$$

Свободная энергия системы $F = W_i - T H_i$ будет изменяться, как легко убедиться, со скоростью

$$\frac{dF}{dt} = - \oint_S \mu \mathbf{J} ds + \int_V (\nabla \mu \mathbf{J}) dV = \frac{dF_e}{dt} + \frac{dF_i}{dt}, \quad (33)$$

где первый член dF_e/dt дает поток свободной энергии через поверхность, окружающую данный объем, а второй dF_i/dt — изменение свободной энергии за счет работы диссипативных сил внутри системы. Второй член равен $-\frac{D}{T} \int_V m (\nabla \mu)^2 dV$ и всегда отрицателен.

Это значит, что замкнутая система, описываемая уравнениями (27), (28), всегда, в том числе и в области неустойчивости, эволюционирует в сторону уменьшения свободной энергии. Если учесть, что

$$dF_i = dW_i - T dH_i = -T dH^{\text{п}}, \quad (34)$$

³ Следует помнить, что все рассмотрение годится лишь на масштабах L , больших радиуса взаимодействия r_d .

где dH^u — изменение полной энтропии подсистемы и термостата, то в согласии со вторым началом термодинамики имеем

$$dH^u > 0. \quad (35)$$

Изменения отдельных слагаемых в (34) равны

$$\frac{dW_i}{dt} = -T \frac{S}{D} \int_V (Sm - D) (\nabla m)^2 dV, \quad (36)$$

$$\frac{dH_i}{dt} = - \int_V (Sm - D) \frac{(\nabla m)^2}{m} dV. \quad (37)$$

Эти выражения могут иметь произвольные, хотя и взаимозависимые знаки. В частности, при развитии стимулированной неустойчивости, когда согласно (21) $Sm > D$, будет происходить убывание внутренней энтропии H_i , которая при $\int_V m dV = M = \text{const}$ имеет максимум в случае однородного распределения $m = M/V$. Поскольку изменение полной энтропии согласно (35) всегда положительно, то возникновение пространственной структуры в замкнутой системе с необходимостью должно сопровождаться уменьшением внутренней энергии, что легко усмотреть из (36). В открытых системах энергия, естественно, может восполняться за счет притока извне.

Полученные выводы распространяются и на многокомпонентные системы, описываемые системой (9), путем естественного обобщения формул (30) и (32)

$$W_i = 1/2 \sum_{j,k} K_{jk} m_j m_k dV, \quad (38)$$

$$H_i = - \sum_k \int_V m_k \ln \frac{m_k}{e} dV, \quad (39)$$

где $K_{jk} = -TS_{jk}/D_{jj}$. В частности, любые перестройки структуры таких систем, идущие в силу стимулированной неустойчивости с понижением энтропии, должны сопровождаться затратами энергии внутренних или внешних источников.

Проведенное рассмотрение наглядно иллюстрирует ряд качественно новых особенностей, вносимых в поведение распределенных кинетических систем стимулированной диффузией. Вместе с тем это явление требует дальнейшего углубленного изучения. В частности, должны быть исследованы системы, описываемые уравнениями типа (9), при различных схемах взаимной стимуляции компонент (циклической, параллельной, разветвленной и т. п.; при различных, в том числе неавтономных, функциях локального взаимодействия F_i ; при наличии флуктуаций, при различных соотношениях между коэффициентами стимуляции). Важной задачей является конкретизация принципа стимулированной диффузии применительно к проблемам физики, химии, биологии, экологии, теории эволюции, экономики. Возможно, что этот принцип

позволит по-новому подойти к решению таких традиционно трудных проблем, как самоорганизация и дифференциация биологических структур, устойчивость и структура популяций, соотношение случайности и целесообразности в ходе биологической эволюции и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Таланов В. И.* Стимулированная диффузия, дифференциация и кооперация компонент в распределенных кинетических системах.— ДАН СССР, 1981, 258, № 3, с. 604—607.
2. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975. 344 с.
3. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 480 с.
4. *Пэнтл. Р.* Методы системного анализа окружающей среды. М.: Мир, 1979. 216 с.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 796 с., § 58, 59; *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 332 с., § 25; *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с., § 11, 12.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976. Ч. 1. 584 с., § 87.
7. *Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитриенко Н. В.* и др. Горение нелинейной среды в виде сложных структур.— ДАН СССР, 1977, 237, с. 1330—1333.
8. *Turing A. M.* The chemical basic of morphogenesis.— Phil. Trans. Roy. Soc., 1952, B, 237, p. 37—48.

УДК 532 536+530 182

КОГЕРЕНТНЫЕ СТРУКТУРЫ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

М. И. РАБИНОВИЧ, М. М. СУЩИК

ВВЕДЕНИЕ

Чрезвычайно важная и интересная проблема возникновения и самоподдержания когерентных структур, общая для гидродинамики, физики плазмы, экологии, биохимии и т. д., настолько сложна, что к настоящему времени здесь не достигнуто ещё сколько-нибудь значительных результатов. Пока еще отсутствует формальный аппарат и нет базовых колебательных моделей, которые бы позволили до конца описать процесс установления упорядоченного поведения на фоне неупорядоченных движений. Поэтому в данных лекциях мы ограничимся обсуждением лишь той части проблемы, которая касается гидродинамики и имеет необходимую экспериментальную основу, а именно когерентные структуры в турбулентных течениях. Дадим определение: когерентными структурами (КС) в турбулентных течениях называем долгоживущие упорядоченные крупномасштабные образования на фоне мелко-масштабной турбулентности, которые обладают высокой степенью универсальности для данного типа течения. Выделим еще один вид когерентных образований — образования, неупорядоченный

ансамбль которых и есть собственно турбулентность. Примером крупномасштабных структур являются вихри в турбулентном следе за цилиндром; пример структур, образующих турбулентность, — подковообразные вихри в пограничном слое, о которых речь пойдет несколько позже.

Подобно вообще всяким колебаниям или волнам, КС могут возбуждаться внешними по отношению к течению источниками — вынужденные КС либо возникать в результате развития собственной неустойчивости турбулентного течения. Однако и в том и в другом случае когерентные структуры можно рассматривать как детерминированные объекты, которые могут эволюционизировать, взаимодействовать друг с другом и т. д. Их существенная роль в турбулентных течениях отмечалась и ранее [1], к настоящему же времени имеются основательные экспериментальные подтверждения влияния КС на тепло- и массоперенос, шумообразование, сопротивление при обтекании и т. д. [2].

Именно наличие КС в турбулентных течениях делает попытку управления турбулентностью небезнадежной.

В этой статье рассмотрим основные явления, связанные с КС; обсудим возможные механизмы этих явлений; попытаемся построить простейшие модели двумерных КС, связанные с их представлением в виде квазистационарных волн или дискретных вихрей. Как увидим, эти модели неплохо объясняют (или, по крайней мере, интерпретируют) многие известные эффекты и предсказывают новые.

1. КОГЕРЕНТНЫЕ СТРУКТУРЫ В ОСНОВНЫХ ТИПАХ ТЕЧЕНИЙ

Простейший способ диагностики КС в турбулентных течениях — это визуализация¹. На рис. 1—4 представлены примеры наблюдаемых таким образом КС в слое смещения (см. рис. 1, *a—e*) [3], затопленной струе (см. рис. 2) [4], пограничном слое (см. рис. 3) [5] и следе за телом (см. рис. 4) [6]. На рисунках видно устойчивое существование крупномасштабных регулярных образований при столь больших числах Рейнольдса ($Re \sim 10^6$). Казалось бы, мелкомасштабная турбулентность должна их размывать и либо они не должны возникать вовсе, либо их возникновение должно быть настолько случайным процессом, что эти образования в каждой реализации разные и какая-либо повторяемость отсутствует. Какие механизмы ответственны за возникновение КС и, самое важное, за их устойчивость в турбулентном потоке? Прежде чем перейти к обсуждению этих проблем, рассмотрим общую картину эволюции КС в различных течениях, каковой она представляется экспериментатору. При этом совершим беглое знакомство с экспериментами, которое позволит сделать следующие важные заключения.

¹ Диагностика КС — очень важная и интересная проблема, однако она требует весьма подробного изложения, поэтому мы ограничимся лишь ссылками на соответствующую литературу [3—14].

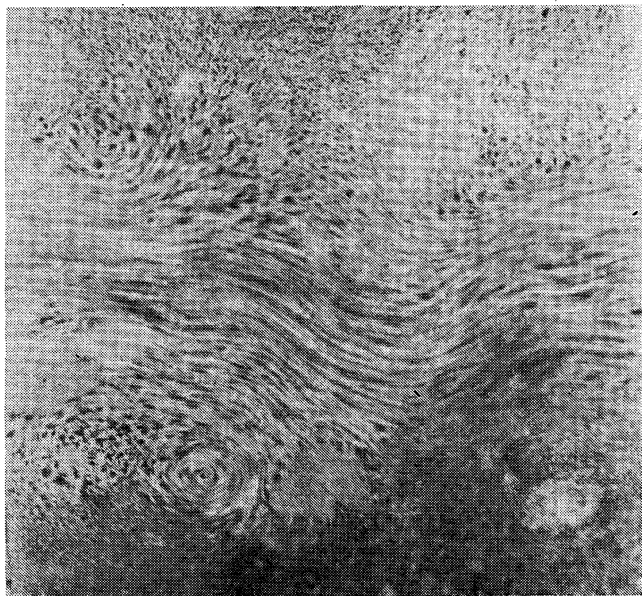
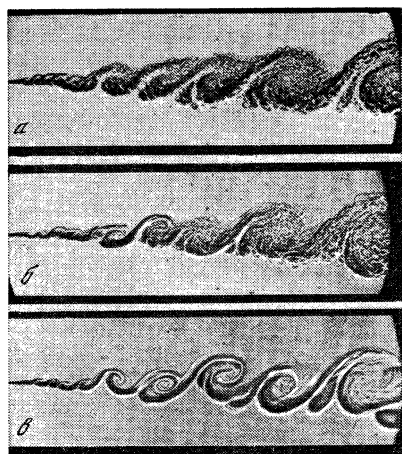


Рис. 1. КС в слое смешения при $Re_x = 1,2 \cdot 10^5$ (а), $6 \cdot 10^4$ (б) и $3 \cdot 10^4$ [3] (в)

Рис. 2. КС в затопленной цилиндрической струе при $Re_d = 3,2 \cdot 10^4$ [4]

Рис. 3. Пример крупномасштабных образований в пограничном слое при $Re_\theta = 17500$ [5]

Рис. 4. КС в следе за цилиндром при $Re_d = 3,3 \cdot 10^4$ на расстояниях $x = 460 d$ (d — диаметр цилиндра) [6]

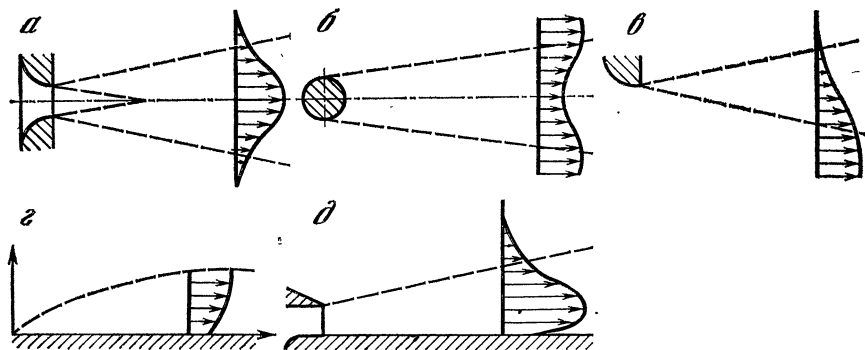
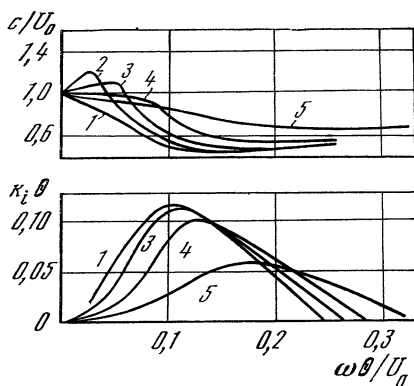


Рис. 5. Профили средней скорости в простейших сдвиговых течениях

a — струя; *b* — след; *c* — слой смещения; *e* — пограничный слой; *d* — пристеночная струя

Рис. 6. Зависимость инкремента ($-k_i$) и фазовой скорости (c) возмущений в цилиндрической струе радиуса r_0 с профилем средней скорости $U(r)/U_0 = 1/2 \{1 + \text{th}[b(r_0/r - r/r_0)]\}$ при $r_0/\theta = \infty$ (1), 50 (2), 25 (3), 12,5 (4) и 6,25 (5)

$$(\theta = \int_0^\infty [U(r)/U(0)][1 - U(r)/U(0)] dr) \quad [18]$$



1. Мелкомасштабная турбулентность может быть как внешней (турбулентность набегающего потока или оторвавшегося турбулентного пограничного слоя), так и собственной — развиваться в потоке за счет энергии среднего течения одновременно с когерентными структурами.

2. Во многих случаях турбулентность является перемежающейся с более или менее четко выраженной границей между турбулизированной и нетурбулизированной жидкостями.

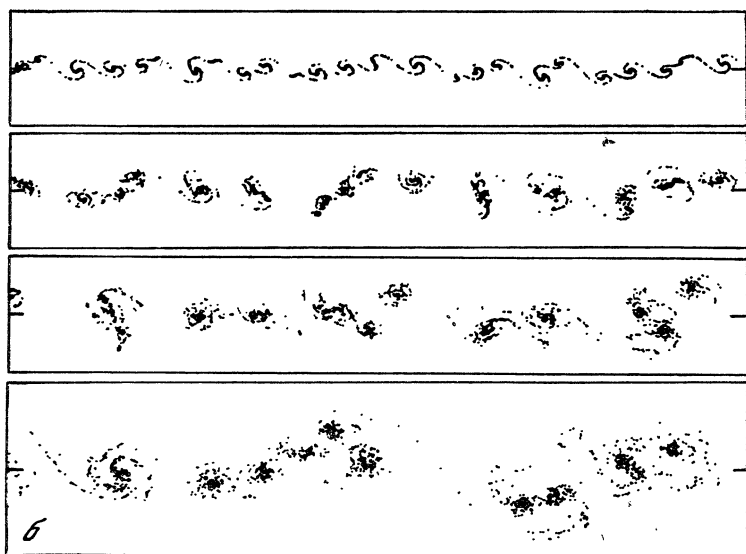
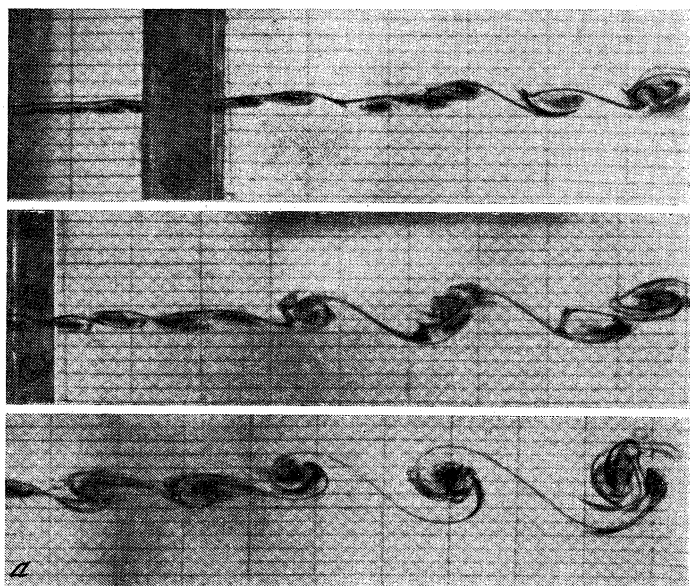
3. Одним из типичных механизмов образования КС является сворачивание сдвиговых слоев.

4. Влияние мелкомасштабной турбулентности на сдвиговое течение сейчас видно лишь в общих чертах. Предстоит выяснить, в каких ситуациях мелкомасштабная турбулентность принципиальна для образования и поддержания КС, а в каких она не сказывается на качественной картине явлений. (Действительно, есть много примеров, когда слияние крупных вихрей, сворачивание сдвигового слоя, возникновение трехмерных возмущений и т. д. в турбулентных и ламинарных течениях происходит качественно одинаково.)

5. Коллективные образования из КС (например, дорожки) и сами КС характеризуются существенным разбросом параметров. С чем связан этот статистический разброс — с действием внешних

по отношению к КС случайных воздействий либо с собственной сложной динамикой коллективных движений КС? Сейчас нет экспериментальных данных, которые позволили бы однозначно ответить на этот вопрос. Итак, рассмотрим эксперименты.

1.1. КС в слоях смещения и затопленных струях — течениях с перегибом профиля средней скорости (см. рис. 5, а, в) — возникают, как правило, в результате неустойчивости свободного



турбулентного течения. На начальном этапе развития КС мелкомасштабная турбулентность, как показывают эксперименты [15—21], лишь увеличивает эффективную толщину слоя сдвига (см. рис. 5, *a—d*) и приводит к появлению турбулентной вязкости. В момент зарождения когерентные структуры имеют вид волн, закон дисперсии которых представлен на рис. 6. Инкремент этих волн зависит от ширины сдвигового слоя. Поскольку вниз по по-

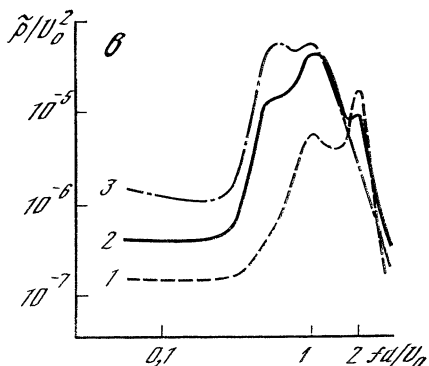


Рис. 7. Последовательность снимков сдвигового течения жидкости с красителем, иллюстрирующая процессы слияния вихрей [21] (*a*), численное моделирование эволюции сдвигового слоя и слияния вихрей (моменты времени соответствуют значениям, при которых толщины сдвигового слоя относятся как $0,64 : 1 : \sqrt{2} : 2$) [22] (*b*) и спектр пульсаций давления в струе ($Re_d = 2,1 \cdot 10^4$) на различных расстояниях x от среза сопла ($1-3 - x/d = 0,5, 1$ и $1,5$ соответственно) [16] (*e*)

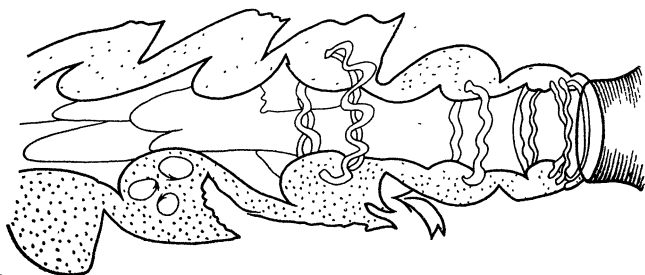


Рис. 8. Качественная картина эволюции вихревых центров и распределения мелкомасштабной турбулентности в КС турбулентных струй при $Re_d \approx 10^4 \div 10^5$ [16]

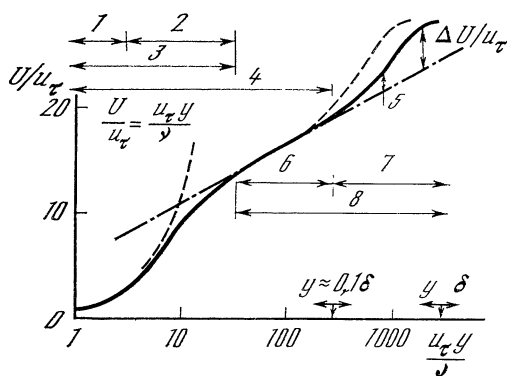


Рис. 9. Структура турбулентного пограничного слоя [24]
1 — линейный подслой; 2 — буферный слой; 3 — вязкий подслой; 4 — внутренний слой; 5 — компонента следа; 6 — область логарифмического закона; 7 — внешний слой; 8 — область закона дефекта скорости

току сдвиговой слой расширяется, максимум инкремента смещается по частоте или по числу Струхала $St_l = fl/U_0$, где f — частота; U_0 — средняя скорость течения; l — характерный пространственный масштаб (толщина слоя смещения δ или диаметр сопла d для струи). Сдвиг этот происходит, очевидно, в сторону длинноволновых возмущений, и в конце стадии линейной неустойчивости максимальной амплитудой обладают возмущения, соответствующие $\lambda = c/f \gtrsim 4\delta$ [19, 20] (по толщине сдвигового слоя). Это очень длинные волны.

Когерентные структуры, образовавшиеся на нелинейной стадии развития возмущений, при движении вниз по потоку сближаются друг с другом и затем сливаются. Чаще всего наблюдаются парные слияния — в спектре скорости возникает дополнительный максимум на частоте субгармоники (см. рис. 7). Возникшие в результате слияния КС в свою очередь снова сливаются и т. д. Экспериментально в слаботурбулентных сдвиговых течениях наблюдалось до трех-четырех слияний [21].

Подобно тому как в ламинарных сдвиговых течениях вначале наибольшим инкрементом обладают двумерные возмущения и лишь на нелинейной стадии развиваются трехмерные, в турбулентных сдвиговых слоях и струях трехмерные возмущения развиваются тоже на фоне уже существующих двумерных КБ (рис. 8) [16, 23].

1.2. Структура турбулентного пограничного слоя без градиента среднего давления в схематичной форме представлена на рис. 9 [24]. Примаыкающий к стенке линейный подслой 1 имеет масштаб $0 < y^+ \equiv u_\tau y/\nu \lesssim 3$ (здесь ν — кинематическая вязкость, $u_\tau = (\tau/\rho)^{1/2}$ — динамическая скорость или скорость трения, зависящая от касательных напряжений τ на стенке и плотности ρ). В этом подслое пульсационные скорости (и, следовательно, рейнольдсовы напряжения (см. далее)) стремятся к нулю, а полное касательное напряжение $\tau = \nu\rho (\partial U/\partial y)$ постоянно. В соседнем буферном слое 2 ($3 < y^+ < 40$) вязкие и рейнольдсовы напряжения уже одного порядка. Выше этих областей, которые вместе образуют вязкий подслой 3, расположена область логарифмического распределения скорости 6 ($40\nu/u_\tau \lesssim y \lesssim 600\nu/u_\tau \approx 0,2\delta$, δ — толщина пограничного слоя). Здесь вязкие напряжения практически не влияют на профиль скорости, который оказывается универсальным, — $U/u_\tau = (1/K) \ln y^+ + C$, где $K = 0,4 \div 0,41$, $C = 5 \div 5,2$ определяются из экспериментальных данных. Этот профиль получается из анализа размерностей и, конечно, справедлив лишь в среднем, а локально в пространстве и во времени могут быть заметные отклонения, связанные с тонкой структурой пограничного слоя. Вязкий подслой и область логарифмического изменения скорости вместе образуют внутренний слой 4 ($0 \lesssim y/\delta \lesssim 0,1 \div 0,2$), в котором и происходит основное изменение средней скорости — от нуля на стенке до $0,7U_0$ на краю слоя. Характерной особенностью внешнего слоя 7 ($0,2 \lesssim y/\delta \lesssim 0,99$) является наличие перемежаемости — области турбулизованной и нетурбу-

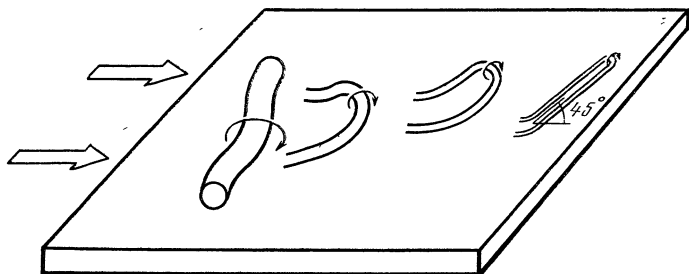


Рис. 10. Образование подковообразных вихрей в турбулентном пограничном слое на плоской пластине при $Re_\theta = \theta U_\infty / \nu = 10^4 \div 10^5$ [5]

лизованной жидкости чередуются. Это и есть проявление свойств крупномасштабных образований во внешней части пограничного слоя.

Элементарные объекты, образующие микроструктуру пограничного слоя, — это (по крайней мере при $5 \cdot 10^2 \lesssim Re_\theta \lesssim 10^5$) вытянутые подковообразные вихри (рис. 10) [5]. Они простираются практически через весь пограничный слой и расположены преимущественно под углами 40 — 45° к обтекаемой поверхности. В вязком подслое они переходят в горизонтальную пару вихрей, параллельную потоку. Происхождение этих подковообразных вихрей, по-видимому, такое же, как и в ламинарном или переходном пограничном слое и связано с неустойчивостью, подобной неустойчивости Гертлера—Тейлора [12, 25] для поперечных вихрей в течениях с криволинейными линиями тока. Поле скорости в подковообразных вихрях и их окрестности является хорошо коррелированным, т. е. это когерентные образования.

Как можно заключить из анализа последних экспериментов [5], турбулентность в пограничном слое — это стохастический ансамбль подков и осколков, оставшихся от их разрушающих взаимодействий друг с другом. Более мелких энергонесущих масштабов, чем масштаб этих подков в пограничном слое, фактически нет. Крупномасштабные образования в пограничном слое — результат объединения нескольких подков. Соответствующий механизм пока не ясен, однако, судя по всему, такие образования не просто случайная суперпозиция подков, а результат их довольно сложного взаимодействия, обеспечивающего высокую когерентность поля скорости во всем «объединении» [12]. При больших числах Рейнольдса такие объединения возникают сравнительно редко, но с точки зрения управления пограничным слоем с помощью внешних воздействий их роль в турбулентных погранслоях существенна [2]. Параметры этих крупномасштабных структур зависят лишь от толщины погранслоя (в отличие от параметров подков, которые определяются u_τ и ν). Их размеры вдоль направления течения примерно равны $(2,5 \div 5)\delta$, а существенные искажения КС наблюдаются после прохождения ими расстояний около 10δ (см., например, [11]).

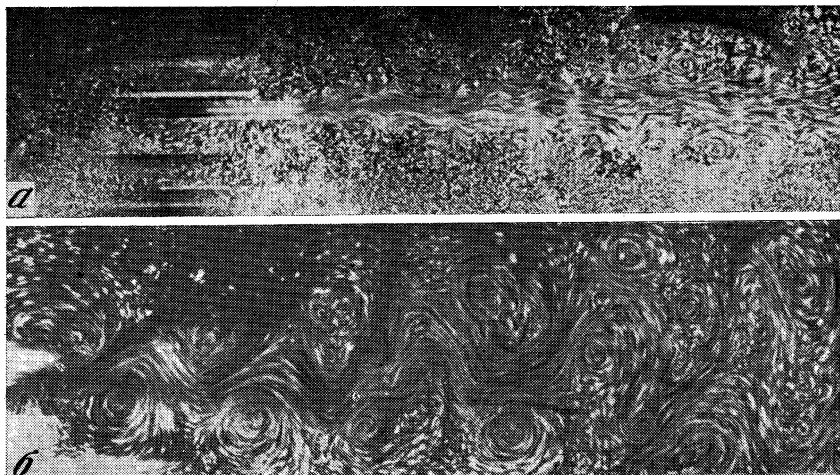


Рис. 11. Следы за цилиндром при $Re_d = 1730$ (а) и $5,5 \cdot 10^3$ (б) [6]

1.3. Когерентные структуры в турбулентных следах за телом известны очень давно — это турбулентные вихри, которые образуются в результате сворачивания турбулентного вихревого слоя. Они наблюдались вплоть до расстояний $d/x = 460$ при $Re_d = 3,3 \cdot 10^3$ [6], а в ближней области следа даже при $Re_d \sim 10^7$. Пределы по расстоянию и числу Рейнольдса в экспериментах не были достигнуты и можно ожидать, что КС существуют и при больших, чем здесь указано, значениях параметров [26]. Детальное исследование КС в турбулентном режиме не проводилось, тем не менее для следа за цилиндром по экспериментальным данным можно получить общее представление об образовании и эволюции крупных вихрей.

В области чисел $Re_d \approx 40 \div 90$ обтекание цилиндра ламинарно и устойчиво, однако след за цилиндром неустойчив. Эволюция возмущений в нем вдоль по течению напоминает эволюцию простой волны в нелинейной среде без дисперсии — вначале профиль волны укручается, а затем волна опрокидывается и формируется периодическая последовательность вихрей разных знаков. Как хорошо известно [27], такая геометрия вихрей устойчива лишь в случае их расположения в шахматном порядке — дорожка Кармана. При $Re_d \geq 90$ стационарное обтекание цилиндра становится неустойчивым и с разных сторон происходит сход вихревых слоев, промодулированных с частотой $St_d \approx 0,18$. Сворачивание этих слоев непосредственно около цилиндра также порождает дорожку Кармана, которая остается ламинарной до $Re_d \approx 200$. При $Re_d \geq 200$ в следе происходит переход к турбулентности, точка перехода зависит от числа Рейнольдса — она приближается к цилиндру с ростом Re_d вплоть до значений $Re_d \approx 5,5 \cdot 10^5$. При больших числах Re_d происходит отрыв турбулентного пограничного слоя.

Как следует из экспериментов, при $Re_d = 750 \div 5500$ роль неустойчивости двойного ряда вихрей, которая приводит к конфигурации типа шахматной дорожки, уменьшается. При этом в следе вначале формируются независимо две системы вихрей, являющихся результатом сворачивания вихревых слоев, расположенных по разные стороны относительно плоскости симметрии течения. Затем развивается волнообразное движение в ядре следа и образуется шахматная дорожка — результат неустойчивости двойной цепочки. Однако эта неустойчивость не всегда успевает проявиться и часто в следе наблюдается просто симметричное расположение вихрей. Оно обычно возникает одновременно с уширением ядра следа и может быть объяснено подавлением неустойчивости турбулентностью. При этом движение в ядре теряет свой волнообразный характер, вихри выталкиваются на периферию следа, и он уширяется (см. рис. 11, а).

С ростом числа Рейнольдса (примерно с $Re_d \approx 5,5 \cdot 10^3$) эффекты неустойчивости двойной цепочки вновь становятся преобладающими и в турбулентном ядре следа снова возникают волнообразные движения. Эти движения, как и движения вихрей, носят нерегулярный характер, во многих местах наблюдается дробление вихрей, деформация или полное разрушение (рис. 11, б). Интересно, что наряду с разрушением иногда наблюдается образование новых вихрей в турбулентном ядре, что, по-видимому, связано с развитием локальной сдвиговой неустойчивости. При критических числах Рейнольдса ($Re_d \approx 5,5 \cdot 10^5$) и немного больших наблюдается полная потеря регулярности, однако при дальнейшем росте Re_d такая регулярность (по крайней мере при $Re_d \approx 10^7$ в ближнем следе) снова восстанавливается.

2. ОБРАЗОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР

Исходными для анализа КС служат уравнения гидродинамики, в которых проведено двойное усреднение — по времени и по специально выбранному ансамблю, определяемому какими-либо характерными для КС признаками. В результате получается связанная система уравнений для стационарного среднего течения ($U(x)$, $P(x)$) и крупномасштабных движений ($\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{p}(x, t)$) (см., например, [28])

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}, \quad \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i' u_j' \rangle - \overline{u_i' u_j'}), \quad \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $u' = u - (U + \tilde{u})$ — поле скорости мелкомасштабных пульсаций, $\tilde{f} = \langle f \rangle - \bar{f}$, черта означает обычное усреднение по

времени, а угловые скобки — по ансамблю. Для того чтобы эта система была самосогласована, необходимо иметь выражения для $\overline{u'_i u'_i}$ и тензора $\tilde{r}_{ij} = (\langle u'_i u'_j \rangle - \overline{u'_i u'_j})$, который следовало бы называть тензором рейнольдсовых напряжений для КС. Этот тензор зависит от свойств мелкомасштабной турбулентности и выбора ансамбля, по которому проводится усреднение. Сейчас не ясно, каким образом моделировать тензор \tilde{r}_{ij} . Можно, конечно, использовать гипотезы, применяемые в стандартных схемах замыкания [24, 29]. Однако в данном случае все они в равной мере необоснованны, поэтому мы будем пользоваться простейшей из них — гипотезой о турбулентной вязкости. Эту величину ν_T определим соотношением

$$\tilde{r}_{ij} = -\tilde{\nu}_T (\partial \tilde{u}_i / \partial x_j + \partial \tilde{u}_j / \partial x_i).$$

2.1. *Отрицательная вязкость.* При обсуждении проблемы крупномасштабных регулярных образований в турбулентности обычно наиболее удивительной выглядит возможность генерации крупных структур мелкомасштабными пульсациями — эффект, который часто называют «отрицательной вязкостью» [30, 31]². Подобные явления оказываются весьма естественными для макротурбулентных процессов в атмосфере и океане. Как правило, эффекты типа отрицательной вязкости проявляются лишь в двумерных турбулентных течениях. На спектральном языке (в k -пространстве) эффект отрицательной вязкости сродни хорошо известному в радиофизике эффекту параметрической генерации волн при случайной накачке или детектированию случайного волнового поля (обычно только для такого процесса и используется термин). Эта аналогия особенно естественна для ситуаций, когда пространственный спектр мелкомасштабной турбулентности ограничен снизу, как, например, для турбулентной конвекции в горизонтальной полости при не слишком больших числах Рэлея.

Если предположить, что интенсивность мелкомасштабных пульсаций имеет максимум внутри некоторого спектрального интервала, то среди появляющихся в результате действия квадратичной гидродинамической нелинейности (детектирование) крупномасштабных движений наибольшими амплитудами должны обладать предельно крупные вихри, существованию которых не препятствует геометрия течения. Именно такие вихри наиболее интенсивно подпитываются за счет биений мелкомасштабных движений. Если еще учесть обычный для подобных ситуаций эффект конкуренции движений с не слишком близкими масштабами [32], то можно сказать, что появление наиболее крупных вихрей (вихрей с характерным масштабом порядка размеров полости) наиболее вероятно. Именно такие крупномасштабные течения наблюдались авторами работы [33] при исследовании турбулентной кон-

Подчеркнем, что наличие отрицательной вязкости обеспечивает лишь передачу энергии вниз по спектру. Регулярными же крупномасштабными образованиями могут оказаться только благодаря специфически и свойствам мелкомасштабной турбулентности либо дополнительным механизмам.

векции в горизонтальной полости, длина которой в 10—20 раз превышала высоту. В частности, в экспериментах с водой при числах Рэлея ³ более 10^6 на фоне мелкомасштабной турбулентности возникало крупномасштабное течение вдоль всей ячейки (рис. 12).

Для такого течения, учитывая его малые скорости и двумерность, усредненные уравнения Навье—Стокса можно записать в предельно простом виде $\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u_x u'_z}) = \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{u}_x$. Связь между средним течением и рейнольдсовыми напряжениями $\overline{u_x u'_z}$, выраженная этим соотношением, как выяснилось из эксперимента, соответствует наблюдаемому крупномасштабному течению. Таким образом,

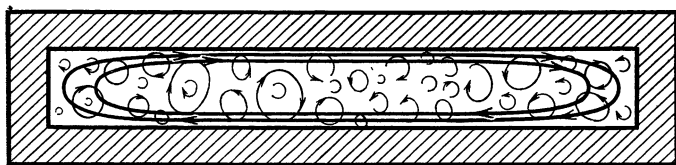


Рис. 12. Крупномасштабное течение в конвективной ячейке, развивающееся после установления режима турбулентной конвекции

если ввести турбулентную вязкость $\nu_T \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{u}_x = -\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u_x u'_z})$, то окажется, что $\nu_T = -\nu < 0$, т. е. существование крупномасштабного вихря в рассматриваемом течении есть результат эффекта отрицательной вязкости.

2.2. *Диссипативная неустойчивость турбулентных сдвиговых течений.* В качестве примера, поясняющего этот механизм возникновения КС и иллюстрирующего роль мелкомасштабной турбулентности, рассмотрим вихревое течение с начальным профилем скорости, который приведен на рис. 13. Это вихрь, внутри ядра которого ($r < r_0$) жидкость однородно вращается с угловой скоростью $\Omega = \Omega_0$, а вне его скорость вращения убывает ($\Omega \sim 1/r^2$). Пусть мелкомасштабная турбулентность существует лишь вне ядра, а движение внутри ядра вихря ламинарно. Как будет вести себя граница ядра? Начальная эволюция вихря может быть исследована на основе анализа устойчивости. Проведем его в предположении, что мелкомасштабная турбулентность проявляет себя лишь как турбулентная вязкость (при $r > r_0$). При этом используем результаты А. Л. Фабриканта [34]. Поскольку завихренность в таком течении кусочно-однородна, естественно найти выражения для амплитуд малых колебаний примерно вида $\exp(i\omega t - in\varphi)$ внутри и вне ядра вихря, а затем их сшить, воспользовавшись

³ Число Рэлея $Ra = g\Delta T h^3 \beta / \nu \kappa$, где g — ускорение свободного падения; $\Delta T > 0$ — разность температур на нижней и верхней границах полости; h — ее высота, ν — вязкость; κ — температуропроводность среды, а β — коэффициент теплового расширения.

непрерывностью нормальных к подвижной границе компонент потока импульса и непрерывностью величины $\xi = u_\varphi/\kappa$. Здесь u_φ — азимутальная компонента скорости, а $\kappa = \omega - n\Omega(r)$.

Амплитуда малых колебаний радиальной ur , азимутальной u_φ скоростей и давления p внутри ядра (см. рис. 13, область I) оказывается равной (ср. [34])

$$u_r^{(1)} = D_n \frac{nr^{n-1}}{\kappa + 2\Omega}, \quad u_\varphi = iD_n \frac{nr^{n-1}}{\kappa + 2\Omega}, \quad p^{(1)} = D_n \rho_0 r^n, \quad (3)$$

где ρ_0 — плотность несжимаемой жидкости; D_n — произвольная постоянная. В области II — вне ядра (см. рис. 13), где уже учи-

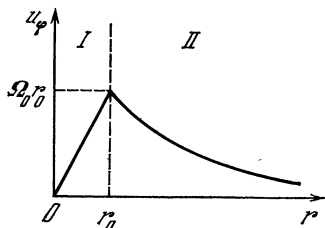


Рис. 13. Профиль скорости, создаваемой вихрем с однородной завихренностью

тывается турбулентная вязкость ν_T , эти величины соответственно равны ⁴

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} &= A_n n r^{n-1} + N_n \exp[q(r - r_0)], \\ u_\varphi^{(2)} &= -iA_n r^{n-1} + N_n \frac{in}{qr_0} \exp[q(r - r_0)], \\ p^{(2)} &= A_n \kappa \rho_0 r^{-n} + 2\rho_0 \Omega \frac{N_n}{q} \exp[q(r - r_0)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $q = (i\kappa/\nu)^{1/2}$ ($\text{Re } q < 0$), A_n и N_n — произвольные постоянные. Поскольку на границе $r = r_0$ должны быть непрерывны величины [35] $-p + 2\rho_0 \nu (\partial u_\varphi / \partial r) - \rho_0 r_0 \Omega^2 \xi + in\rho_0 \nu \xi (\partial \Omega / \partial r)$, $\rho_0 \nu \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} - \frac{inu_\varphi}{r} + \left(r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \right]$ и ξ , получаем систему трех уравнений относительно A_n , D_n и N_n , условие разрешимости которой дает нам характеристическое уравнение, определяющее собственные частоты колебаний границы. В первом приближении по $\nu/\kappa r_0^2 \ll 1$ оно имеет вид

$$\kappa(\kappa + \Omega_0) = i \frac{\nu \Omega_0}{r_0^2} n(n-2). \quad (5)$$

⁴ Эти решения есть линейная комбинация решения без учета вязкости и быстро затухающего по мере удаления от ядра вихря решения с учетом вязкости. Дело в том, что линеаризованным уравнениям Навье—Стокса однородно вращающейся несжимаемой жидкости удовлетворяют и невязкие двумерные колебания. Учет же вязкости (повышение порядка уравнений) приводит к появлению дополнительных линейно-независимых решений, которые при $\nu \rightarrow 0$ быстро осциллируют и затухают. Мы рассматриваем лишь достаточно быстрые колебания, за характерное время которых граница между турбулентным и нетурбулентным течением не успевает размыться за счет турбулентной диффузии. Это предполагает, что $\omega/\Omega_0 \gg \nu/\Omega_0 r_0^2$.

Отсюда находим частоту колебаний на n -й моде $\omega \approx (n - 1)\Omega_0 - ivn(n - 2)/r_0^2$. Из этого выражения следует, что при $n = 1$ и 2 колебания границы не нарастают ($\text{Im } \omega > 0$), а при $n = 3, 4, \dots$ уже есть неустойчивость, т. е. на границе раздела турбулентной и нетурбулентной жидкости должны возникнуть одно- временно 3 или более КС. Рассмотрим нелинейную эволюцию подобных структур.

2.3. *Нелинейная эволюция длинноволновых возмущений.* Таким образом, на начальном этапе развития крупномасштабные движения в турбулентности зачастую представляют собой просто длинноволновую модуляцию турбулентного потока. В развитом же состоянии когерентные структуры — это, как правило, крупные вихри, каждый из которых можно рассматривать отдельно. Каким же образом они возникают? Для сдвиговых турбулентных течений одним из наиболее типичных механизмов эволюции волн в крупные вихри является, по-видимому, сворачивание неоднородного завихренного слоя. В результате сворачивания такого слоя образуется последовательность спиралей (клубков) — собственно когерентные структуры. Поясним этот процесс на примере двумерного течения.

В качестве исходных воспользуемся уравнениями (2). Полагая, что турбулентные числа Рейнольдса велики ($\text{Re}_T = \tilde{u}\tilde{L}/\tilde{\nu}_T \sim \sim UL/\nu_T \gtrsim 10^2$), пренебрежем турбулентной вязкостью. Далее будем интересоваться эволюцией крупномасштабных возмущений $\tilde{u}(x, y, t)$ на фоне среднего турбулентного течения $U(y)$. В такой простейшей постановке наша задача ничем не отличается от рассмотрения эволюции ламинарного сдвигового слоя. Поэтому приведем здесь лишь идею решения и результат, следуя [36—38]. Введем функцию тока $\Psi(x, y, t)$ ($u_x = \partial\Psi/\partial y$, $u_y = -\partial\Psi/\partial x$), тогда уравнения, описывающие эволюцию полей скорости и завихренности, запишутся в виде

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \omega \text{ или } \Delta\Psi = -\omega, \quad (6)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u_x \frac{\partial\omega}{\partial x} + u_y \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Если выделить возмущенную на фоне среднего течения функцию тока $\tilde{\Psi}$

$$\Psi = \int_0^y U(y) dy + \tilde{\Psi}, \quad (8)$$

то для нее из (6), (7) можно получить уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta\tilde{\Psi} - U''_{yy} \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial x} = \left(\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y} - \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x} \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial y} \right). \quad (9)$$

В линейном приближении якобиан в правой части обращается в нуль и (9) переходит в известное уравнение Рэля, которое

обычно записывается для решений $\tilde{\Psi}(x, y, t)$ вида $\tilde{\Psi}_1(y) \times \exp [ik(x - ct)]$ (k и c — волновое число и фазовая скорость распространяющихся вдоль сдвига гармонических возмущений). Из уравнения Рэлея для таких возмущений

$$[U(y) - c] \tilde{\omega}_1 = U''_{yy}(y) \tilde{\Psi}_1 \quad (10)$$

следует, что завихренность $\tilde{\omega}_1 = \Delta \tilde{\Psi}_1$ в точке $y = y_c$, где фазовая скорость возмущения совпадает со скоростью потока, терпит скачок. В действительности, конечно, учет вязких, нестационарных или нелинейных эффектов сглаживает градиенты и скачки невозможны. Нам сейчас интересно влияние в первую очередь нелинейности. Если амплитуду возмущения считать малой, то такой будет и величина нелинейности. Скачок при этом размоется незначительно и основное изменение завихренности будет сосредоточено в тонком слое вблизи точки $y = y_c$ — нелинейный критический слой. Проследим за его эволюцией. Малость нелинейности одновременно позволяет пренебречь гармониками основного возмущения, что существенно упрощает анализ. Имея это в виду, решения для $\tilde{\Psi}$ вне критического слоя представим так:

$$\tilde{\Psi} = \mu [A_{\pm}(t) \varphi(y) + B_{\pm}(t) \Phi(y)] \exp [ik(x - ct)] + \text{к. с.} + \mu^{3/2} \Psi^{(1)}(x, y, t) + \dots, \quad (11)$$

где μ — малый параметр, характеризующий амплитуду возмущения, а $\varphi(y)$ и $\Phi(y)$ — функции Толлмина, являющиеся решениями уравнения Рэлея (знаки плюс и минус соответствуют решениям в областях выше и ниже критического слоя). Внутри критического слоя решение также записывается в виде разложения по степеням $\mu^{1/2}$. Затем, используя метод сращиваемых асимптотических разложений [39], можно получить уравнения для $\tilde{\omega}$ и амплитуды $A_{\pm}(t) = (1/c) B_{\pm}(t)$ волновых движений в виде [36]

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y_c} (y - y_c) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi} + kA \sin k\xi \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2kc}{(dU/dy)|_{y_c}} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{\omega} \sin k\xi \rangle dy. \quad (13)$$

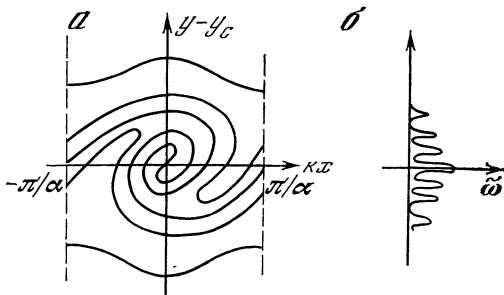
Кинетическое уравнение (12), описывающее эволюцию возмущения завихренности вблизи y_c , выражает закон сохранения вихря жидкими частицами. Траектории частиц в окрестности y_c определяются характеристиками этого уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y_c} (y - y_c), \quad \frac{d(y - y_c)}{dt} = kcA \sin kx. \quad (14)$$

Теперь мы уже можем нарисовать эволюцию критического слоя на плоскости $x, y - y_c$ (фазовая плоскость системы (14)). Малые

отклонения критического слоя от невозмущенного состояния будут нарастать за счет того, что разные жидкие частицы будут переноситься по разным траекториям неизохронного осциллятора (14) — близкие к центрам «кошачьих глаз» точки будут закручиваться существенно быстрее, чем расположенные в окрестности седел. В результате и образуется совокупность нарастающих по t спиральных вихрей. Начальный профиль завихренности $\omega(y - y_c)$ при этом из гладкого превратится в сильно изрезанный (рис. 14). Однако мелкомасштабная турбулентность, очевидно, выравнивает осцилляции завихренности, и скрученная спираль критического слоя превращается в когерентную структуру с размазанным распределением завихренности и мелкомасштабной турбулентности

Рис. 14. Линии постоянного уровня завихренности в критическом слое (а) и осцилляции завихренности в сечении $x = 0$ (б)



внутри. Здесь имеется глубокая аналогия с процессом взаимодействия волн и частиц в бесстолкновительной плазме, которая подробно обсуждается в [36, 37, 40—42]. Эти результаты получены с помощью асимптотического метода, справедливого лишь для возмущений малой амплитуды. Однако численные эксперименты [22] показывают, что рассматриваемый здесь механизм возникновения когерентных структур является общим (см. рис. 7).

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КС ДРУГ С ДРУГОМ И С ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ

При рассмотрении нелинейной динамики КС в турбулентных сдвиговых течениях в первую очередь естественно интересоваться их элементарными взаимодействиями друг с другом и с мелкомасштабной турбулентностью, а также коллективными эффектами в более или менее регулярных образованиях из КС — следах и цепочках. Именно цепочки из КС и их простейшие объединения представляют наибольший интерес и с точки зрения воздействия внешних полей на двумерные течения.

В этих направлениях к настоящему времени имеются результаты большого числа экспериментов, в том числе и численных. Для понимания же явлений весьма важно построение сравнительно простых моделей КС в турбулентных течениях, которые бы давали соответствие с экспериментом и в то же время были доступны для аналитического описания.

3.1. *Модели КС в турбулентных потоках*, учитывающие изменение статистических свойств мелкомасштабной турбулентности, в частности ее подавление под действием КС, на сегодняшний день отсутствуют. На первом этапе кажется естественным построение таких моделей, в которых учитывается эволюция хотя бы пространственного распределения мелкомасштабной турбулентности. Это можно осуществить, рассматривая ее как пассивную примесь⁵, находящуюся в поле скорости КС, основной особенностью которых считаем наличие в них ярко выделенных вихревых центров.

Как и прежде, крупномасштабные движения \tilde{u} , \tilde{r} считаем двумерными (в отличие от мелкомасштабных) и будем их описывать уравнением (2) без учета мелкомасштабных движений (в правой части (2) пренебрежем слагаемыми порядка $u_i u_j$). Для описания же поля завихренности ω_i или какой-либо другой характеристики s' мелкомасштабной турбулентности используем обычное уравнение переноса

$$\partial s' / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) s' = 0. \quad (15)$$

Поле скорости КС на достаточном расстоянии от вихревых центров можно представить в виде суммы скоростей, создаваемых системой N дискретных вихрей:

$$\tilde{u}_x - i \tilde{u}_y = \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n}{2\pi i (z - z_n)} \left[1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{D_{mn}}{(z - z_n)^m} \right], \quad (16)$$

где $z = x + iy$, $\Gamma_n = \int_{Q_n} \omega_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ — интенсивность n -го вихря;

$\mathbf{r}_n = \int_{Q_n} \mathbf{r} \omega_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} / \int_{Q_n} \omega_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ — координата его центра завихренности;

$D_{mn} = \int_{Q_n} \omega_n(\mathbf{r}) (z - z_n)^m d\mathbf{r} / \int_{Q_n} \omega_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ — m -й момент n -го вихря;

$\omega(\mathbf{r})$ — распределение завихренности. Слагаемые с D_{mn} в выражении (16) позволяют учесть влияние тонкой структуры вихревых центров на создаваемое ими поле скорости. Будем считать, что время установления внутреннего движения в вихревых центрах достаточно мало по сравнению с временами рассматриваемых эффектов. Тогда можно (см., например, [22]) воспользоваться приближением аксиальной симметрии распределения завихренности вблизи вихревого центра и положить $D_{mn} = 0$. Это означает, что поле скорости вне центров совпадает с полем точечных вихрей, расположенных в точках \mathbf{r}_n . При сделанных предположениях задача о взаимодействии когерентных структур

⁵ Такое приближение справедливо, когда характерные времена энергообмена между мелкомасштабной турбулентностью и крупномасштабными движениями существенно больше времен рассматриваемых эффектов

сводится к анализу динамической системы (см., например, [27])

$$\frac{dz_n^*}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z_n - z_j)}, \quad (17)$$

$$\frac{dz^*}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - z_j)}. \quad (18)$$

Последнее соотношение определяет характеристики уравнения (15), описывающего движение мелкомасштабной турбулентности как пассивной примеси. Количество вихревых центров в системе (17), (18) может быть различным — оно зависит от вида течения и характера решаемой задачи. Например, одновихревое приближение может быть использовано при рассмотрении поведения мелкомасштабной примеси на периферии когерентной структуры — вдали от вихревых центров — или при рассмотрении структур, образование которых инициировано сравнительно редкими импульсами, возмущающими сдвиговый слой [43]. Двухвихревая модель требуется для описания поля скорости когерентных структур, образовавшихся в результате часто наблюдаемого слияния пары вихрей. Более сложные структуры также возникают в сдвиговых слоях в результате последовательности слияний. Обычно в сдвиговых слоях преобладают парные слияния, так что сложные структуры можно рассматривать как иерархию двухвихревых, представляя на каждом этапе вихревой центр в виде двух более мелких вихрей.

Мы уже говорили, что процессы образования КС во многом аналогичны возникновению периодического распределения завихренности при свертывании критического слоя. В результате возникает близкая к регулярной цепочка вихревых центров, поле скорости которой можно аппроксимировать известным решением для функции тока [44]

$$\Psi(x, y) = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi y}{l} - \alpha \cos \frac{2\pi x}{l} \right). \quad (19)$$

Здесь l — период цепочки, а параметр α характеризует распределение завихренности ($\alpha = 0$ соответствует однородной скорости на $y = \text{const}$, $\alpha = 1$ — цепочке точечных вихрей). В настоящее время нет последовательного алгоритма, позволяющего определить α по исходным параметрам течения. Однако эксперименты, физические и численные, показывают, что завихренность концентрируется в сравнительно малой области вблизи центра КС [21, 22]. Это позволяет смоделировать последовательность КС цепочкой точечных вихрей ($\alpha = 1$, $\Gamma_n = \Gamma_0$). Движение жидкой частицы в поле такой цепочки относительно вихря, положения которого выбрано в качестве начала системы координат, описывается урав-

нениями

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = -H \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y - \cos x}, \quad (20)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = H \frac{\sin x}{\operatorname{ch} y - \cos x}. \quad (21)$$

Мы использовали безразмерные координаты x, y , связанные с размерными x', y' соотношением $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \frac{2\pi}{l} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$. и безразмерное время $\tau = t\Gamma\pi/Hl^2$; H — произвольный параметр, введенный в уравнения для удобства дальнейшего решения.

Система уравнений (20), (21) имеет интеграл $\operatorname{ch} y - \cos x = \text{const}$. Если теперь произвольную постоянную H приравнять этому интегралу, для описания жидких частиц, движущихся по определенной траектории, можно получить уравнение нелинейного комплексного маятника [45, 46]

$$\ddot{z} + \sin z = 0, \quad (22)$$

где $z = x + iy$. Это уравнение получается, если домножить (21) на i , продифференцировать оба уравнения по τ и сложить. Решение (22) имеет вид

для нефинитных движений ($H > 2$)

$$z = 2 \operatorname{am} \left\{ \tau \frac{H}{2} + \theta_0, \frac{2}{H} \right\}, \quad (23)$$

для финитных движений ($H < 2$)

$$z = 2 \operatorname{arcsin} \left\{ \frac{H}{2} \operatorname{sn} \left[\tau + \theta_0, \frac{H}{2} \right] \right\}, \quad (24)$$

на сепаратрисе ($H = 2$)

$$z = 2 \operatorname{arcsin} \operatorname{th} (\tau + \theta_0). \quad (25)$$

Здесь $\theta_0 = \theta'_0 + i\theta''_0$ определяется из начальных условий.

Таким образом, движение мелкомасштабной турбулентности в поле скорости регулярной цепочки из КС аналогично, например, движению заряженных частиц в поле продольной электрической волны [42—47]. Никаких неожиданных эффектов здесь нет, просто жидкие частицы разделяются сепаратрисой на захваченные вихревыми центрами и прелетные — двигающиеся вдоль цепочки. Качественные особенности появятся, когда будем рассматривать действие внешних полей на сдвиговый слой из КС (см. подразд. 3.3).

Приведенное решение (23)—(25) одновременно описывает и движение вихревых центров относительно друг друга, если ограничиться движениями лишь удвоенного периода, эксперименты показывают, что именно такие возмущения сказываются в первую очередь [16, 19, 21]. В этом случае относительное движение вихрей с четными и нечетными номерами описывается решением (23)—(25) с заменой $\Gamma \rightarrow 2\Gamma$.

При разрушении дорожки из КС коллективные эффекты уже не столь существенны и определяющим становится взаимодействие ближайших КС.

3.2. *Взаимодействие когерентных структур.* Простейшим, но, как уже отмечалось, представляющим значительный интерес для динамики КС является парное взаимодействие, которое описывается уравнениями (17), (18) при $N = 2$. Из этих уравнений следует, что вихревые центры движутся по окружности радиуса ρ_0 с постоянной угловой скоростью $\Omega = \Gamma/4\pi\rho_0^2$, а безразмерные координаты $\xi = [z - (z_1 + z_2)/2] \rho_0^{-1} \exp(-i\Omega t)$ пассивной примеси в системе отсчета, вращающейся вместе с вихрями, удовлетворяют уравнению]

$$\frac{d\xi^*}{d\tau} = i\xi^* - i \frac{4\xi}{\xi^2 - 1} \quad (\tau = \Omega t). \quad (26)$$

Это уравнение, описывающее эволюцию мелкомасштабной турбулентности, имеет интеграл]

$$H = |\xi|^2 - 2 \ln (|\xi|^4 - 2|\xi|^2 \cos^2 \varphi + 1) \quad (\xi = |\xi| e^{i\varphi}), \quad (27)$$

который определяет траектории жидких частиц (см. рис. 16) и позволяет получить решения (26) в неявном виде

$$\tau - \tau_0 = - \int_{|\xi(\tau_0)|^2}^{|\xi(\tau)|^2} \frac{C \exp(x/2) dx}{8x \sqrt{1 - [(1 + x^2 - C \exp(x/2))/2x]^2}}, \quad (28)$$

$$\cos \varphi = (1 + |\xi|^4 - C \exp(|\xi|^2/2))/2|\xi|^2. \quad (29)$$

Воспользовавшись этими решениями, рассмотрим эволюцию взаимодействующих КС, каждая из которых состоит из вихревого центра, вокруг которого мелкомасштабная турбулентность в начальный момент равномерно распределена внутри окружности радиуса ρ_T . Если $\rho_T < 0,7$, то объединения таких структур не происходит⁶ (см. рис. 16). При $0,7 < \rho_T < 0,8$ образуется новая, более сложная структура, которая вдале от вихревых центров состоит из чередующихся слоев турбулизованной жидкости, принадлежавшей ранее разным КС (рис. 16, а). Между этими слоями находится вовлеченная нетурбулизованная жидкость. Наконец, при еще больших начальных размерах $\rho_T > 0,8$, помимо объединения КС, происходит их рассеяние, т. е. унос мелкомасштабной турбулентности от вихревых центров (рис. 16, б). Время объединения, как видно из рисунка, практически не превышает одного периода вращения вихревых центров друг относительно друга. Точно так же будут объединяться и КС с вихревыми центрами конечных размеров $\rho_\omega < 0,5$, если начальное распределение завихренности в них близко к осесимметричному. Действительно, траектории жидких частиц, переносящих завихренность, в этом

⁶ Естественно, лишь до тех пор, пока не станут существенными эффекты турбулентной диффузии.

случае близки к окружностям (см. рис. 15) и не разрушают симметрию КС. Более того, на начальном этапе качественно процесс не изменится, даже когда размеры вихрей несколько превышают критическое значение $\rho_{кр}$, при котором происходит объединение. Для сравнения на рис. 16, *в* приведена картина слияния вихрей с однородным распределением завихренности, полученная численно при решении уравнений Эйлера [48]. Оказывается, что процессы в приведенном здесь модельном описании и численном эксперименте не только качественно похожи, но и конкретные значения $\rho_{кр}$ для этих двух случаев отличаются всего лишь на 15%.

3.3. *Эволюция КС во внешних полях.* Установление факта, что крупномасштабные структуры играют существенную роль в динамике турбулентных течений, стимулировало попытки управления течениями с помощью воздействия внешних периодических возмущений на КС. Эксперименты хотя и дали обнадеживающие результаты [19, 20, 49—55], но одновременно с этим показали, что внешние воздействия действуют не всегда ожидаемым образом — иногда они приводят к более упорядоченным движениям, а иногда возможен обратный эффект. Одно из возможных его объяснений заключается в том, что регулярное воздействие на КС может приводить к их стохастизации. Это справедливо как для недиссипативных, так и для диссипативных структур.

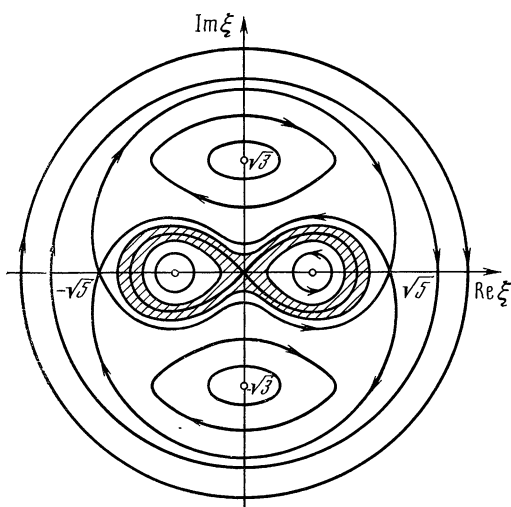
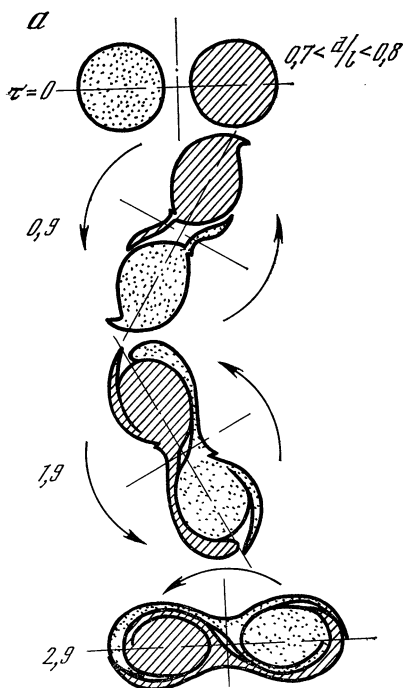


Рис. 15. Траектории жидких частиц в поле вихревой пары. Область, в которой происходит хаотическое движение (см. подразд. 3.3) заштрихована

Рис. 16. Объединение КС без слияния вихревых центров (*а, б*) и слияние КС с однородным распределением завихренности (*в*) [48]

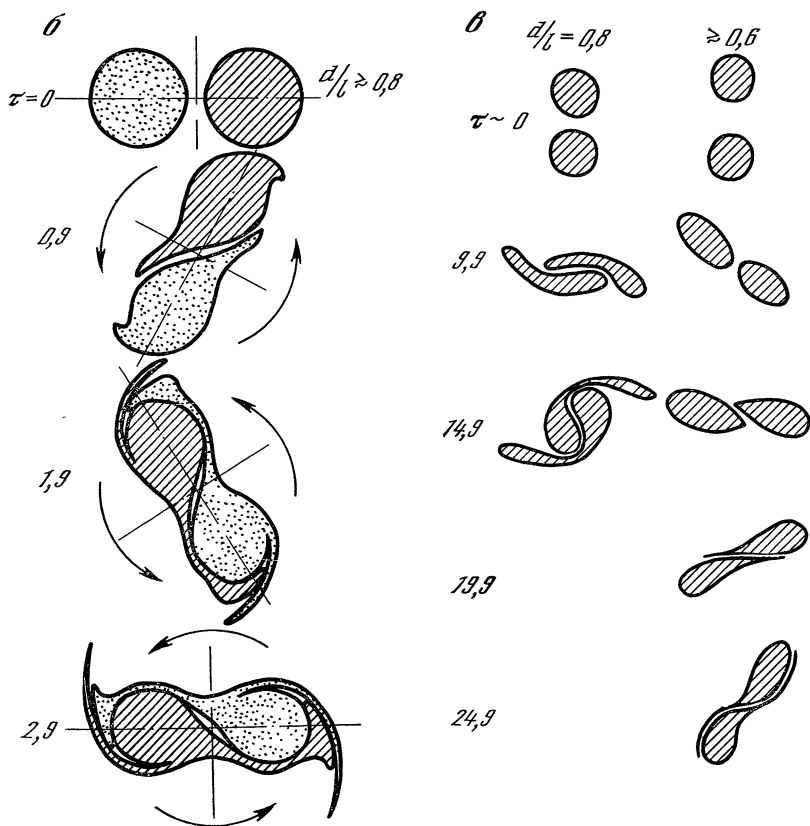


Эффект стохастизации недиссипативных когерентных структур рассмотрим на примере моделей, описанных в предыдущем разделе. Внешнее поле (для определенности акустическое) будем считать бегущей волной, распространяющейся перпендикулярно цепочке, — $u = y_0 u_0 \sin(2ky - 2\omega t)$. Тогда в приближении малости пространственного периода цепочки по сравнению с длиной волны ($kl \ll 1$) и малости амплитуды волны ($M = u_0/c \ll 1$, $c = \omega/k$ — скорость волны) движение жидких частиц в системе координат, начало которой совпадает с одним из вихрей, будет определяться как скоростью, создаваемой цепочкой вихрей, так и скоростью относительного движения цепочки и жидкой частицы в поле волны (ср. с (20) и (21)), т. е.

$$\frac{dx}{d\tau} = -H \frac{\text{sh } y}{\text{ch } y - \cos x}, \quad (30)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = H \frac{\sin x}{\text{ch } y - \cos x} + 2M \frac{\omega H}{\Omega} y \cos\left(\frac{2\omega H}{\Omega} \tau\right). \quad (31)$$

Покажем, что в системе (30), (31), которая описывает перенос жидких частиц, возможно хаотическое движение. Для этого отметим, что в силу идентичности вихрей фазовая поверхность невозмущенной системы является цилиндром, развертка которого представлена на рис. 17. Точки $x = -\pi$ и $x = \pi$ тождественны



ввиду периодичности. На фазовой поверхности имеется гомоклиническая траектория — сепаратриса, выходящая из седла и в него же возвращающаяся. При выполнении определенных условий разрушение этой траектории внешним возмущением приводит к стохастическому режиму движения. Эти условия определяются критерием Мельникова [56], который для гамильтоновой системы

$$\frac{dx}{dt} = U(x, y) + \varepsilon u(x, y, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \varepsilon u(x, y, t), \quad (32)$$

$$\frac{dy}{dt} = V(x, y) + \varepsilon v(x, y, t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \varepsilon v(x, y, t) \quad (33)$$

эквивалентен требованию знакопеременности функции

$$\Delta(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{u(x_0(t-t_0), y_0(t-t_0), t)V(x_0(t-t_0), y_0(t-t_0), t) - v(x_0(t-t_0), y_0(t-t_0), t)U(x_0(t-t_0), y_0(t-t_0), t)\} dt. \quad (34)$$

Здесь $x_0(t-t_0)$, $y_0(t-t_0)$ — решение невозмущенной системы.

Из (25) и (34) следует, что

$$\Delta(\tau_0) \approx M_0 \frac{5\pi\omega}{\Omega} \frac{1}{\text{ch}(\pi\omega/\Omega)} \cos\left(\frac{4\omega}{\Omega}\tau_0\right) \equiv \delta_0 \cos\left(\frac{4\omega}{\Omega}\tau_0\right) \quad (35)$$

— знакопеременная функция с амплитудой δ , которую обычно принимают в качестве оценки средней ширины стохастического слоя. Она достигает максимума при $(\pi\omega/\Omega) \approx 1,2$. Вблизи седла, как показывают простейшие оценки и численные эксперименты, размеры стохастической области пропорциональны $\sqrt{\delta_0}$ (см. рис. 17). Таким образом, воздействие волны приводит к существенному перемешиванию жидких частиц как поперек, так и вдоль цепочки. Например, частица, которая в отсутствие волны совершает локализованные движения, при $M=0,05$ за двести периодов внешнего воздействия смещается на расстояние $x' = 25l$ вдоль сдвигового слоя. В силу схожести соответствующих уравнений вывод о стохастизации справедлив и для движений двух одинаковых цепочек вихрей друг относительно друга. В этом случае под действием внешней волны стохастизируется не только движение жидкой частицы, но и всего поля скорости в целом [45, 46].

Аналогичное рассмотрение показывает, что движение жидких частиц в поле двух вихревых центров под действием параболического поля также стохастизируется и, как и прежде, ширина стохастического слоя $\Delta(\tau_0) \sim M_0$ при $\omega \sim \Omega$ [45, 46]. Воздействие акустического поля на КС, состоящее более чем из двух вихревых центров, также может привести и к стохастизации поля скорости. В этом легко убедиться, если предположить, что жидкая частица переносит малую, но конечную завихренность $\gamma \ll \Gamma$, так что ее влияние на КС может быть учтено методом возмущений⁷. Суще-

⁷ Исследование стохастизации трех вихрей во внешнем поле представляет самостоятельный интерес с точки зрения построения теории двумерной турбулентности как ансамбля точечных вихрей (см., например, [57]).

ственно, что в области стохастичности (где фазовые траектории неустойчивы — разбегаются) жидкие частицы будут сложным образом расплываться — перемешиваться. Таким образом, взаимодействие крупномасштабных полей — периодической волны и поля крупных вихрей — приводит к дополнительной диффузии, помимо той, которая обусловлена мелкомасштабной турбулентностью.

В заключение заметим, что при более сложных взаимодействиях (при $N \gg 3$ или при наличии границ) возможна стохастизация КС и в отсутствие внешних возмущений [57—60].

Учет влияния турбулентной вязкости на поведение КС в поле периодической волны проведем на примере модели, описывающей эволюцию границы раздела между турбулентной и нетурбулентной жидкостью (ср. подраздел 2.2). Это может быть граница какого-то турбулентного следа или струи либо граница между турбулизованной и нетурбулизованной жидкостью в пограничном слое. Как мы видели (см. подразд. 1.3), развитие границы следа происходит подобно эволюции простой волны. Если предположить, что турбулентная вязкость велика, то она должна препятствовать опрокидыванию волны, сглаживая градиенты. В результате приходим просто к неоднородному уравнению Бюргерса, которое следует дополнить слагаемым, ответственным за крупномасштабную сдвиговую неустойчивость. Например, применительно к погранслою такая феноменологическая модель соответствует уравнению

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c}{\delta} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \gamma \eta = \nu_{\text{эф}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \eta_{\text{вн}}(x, \omega t). \quad (36)$$

Здесь $\eta_{\text{вн}}(x, \omega t) = A \cos(\omega t - kx)$; δ — толщина турбулентного пограничного слоя; γ — инкремент длинноволновых возмущений, определяемый взаимодействием волн отрицательной энергии с вязким подслоем [36]. В безразмерных переменных $q = kc^2/\gamma^2\delta$, $u = \eta\gamma/c$, $\tau = \gamma t$, $\xi = (x - ct)\gamma^2 \frac{\delta}{c^2}$ (36) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} - u = \frac{1}{\text{Re}_{\text{эф}}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + A_0 \sin q\xi, \quad q = k \frac{c^2}{\gamma^2 \delta^2}, \quad (37)$$

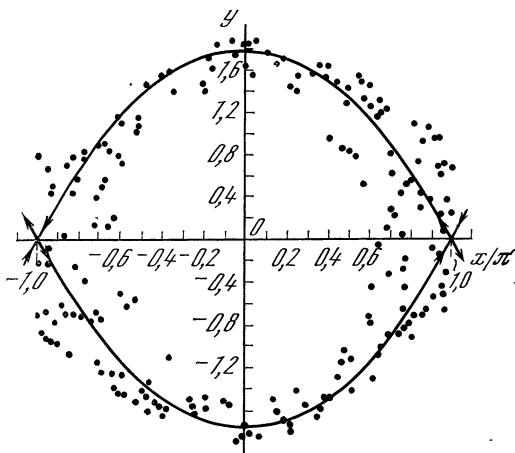


Рис. 17. Фазовый портрет системы (30), (31) на семействе секущих плоскостей $\tau = n\pi$, построенный численно с помощью отображения Пуанкаре

где $\text{Re}_{\text{эф}} = c^4/\gamma^3\delta^2\nu_{\text{эф}}$; $A_0 = \omega A/c$. Фазовая скорость внешней волны предполагается равной скорости c невозмущенного течения.

Ограничимся анализом частного класса решений (37) в виде стационарных волн [46] $u = u(\xi)$, которые описываются уравнением в обыкновенных производных

$$\frac{1}{\text{Re}_{\text{эф}}} \frac{d^2u}{d\xi^2} - u \frac{du}{d\xi} + u = A_0 \sin q\xi. \quad (38)$$

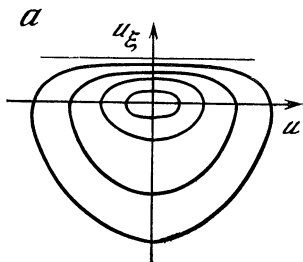


Рис. 18. Фазовый портрет уравнения (38) в отсутствие возмущения (а) и фазовый портрет той же системы на семействе секущих $\xi = 2\pi n/q$ при наличии возмущения (б)

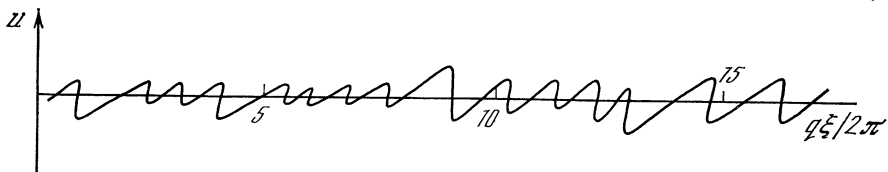
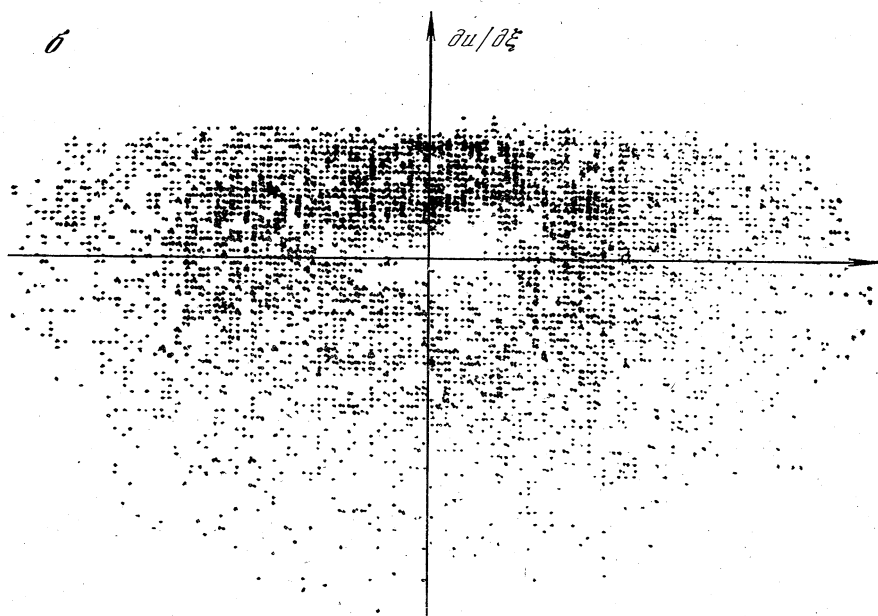


Рис. 19. Пример численной реализации $u(\xi)$, которая получена при значениях параметров $\text{Re}_{\text{эф}}$ и A_0 , соответствующих стохастическому режиму

При $A_0 = 0$ — это уравнение нелинейного осциллятора, фазовая плоскость которого приведена на рис. 18, а. Описываемые (38) при $A_0 = 0$ когерентные образования имеют вид периодических волн пилообразной формы. Движущаяся синхронно с КС периодическая внешняя волна либо навязывает стационарной волне свой пространственный период (синхронизация), либо пространственные биения (модуляция). Как показали численные исследования уравнения (38), при увеличении амплитуды A_0 возможен и несколько неожиданный эффект — периодическое поле стохастизует КС. В этом случае зубцы пилы отличаются друг от друга по амплитуде (и, следовательно, ширине), а сама реализация u (ξ) выглядит совершенно случайной (рис. 19). Для доказательства стохастичности в этой системе исследовалось разбегание близких траекторий и было показано, в частности, что ляпуновский показатель λ^+ , характеризующий среднюю скорость экспоненциального разбегания траекторий, больше нуля. Так, для $Re_{эф} = 1$, $q = 0,2\pi$, $A_0 = 0,2$ имеем $\lambda^+ \simeq 0,01$. В пространстве u , u_ξ , t системы (38) такому режиму соответствует стохастическое множество, фазовый портрет которого на секущей $\xi = 2\pi n/q$, построенный численно с помощью отображения Пуанкаре, приведен на рис. 18, б.

Детальное численное исследование (38) показало, что стохастизация когерентных структур происходит и в случае, когда скорость внешней периодической волны несколько больше средней скорости течения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Мы рассмотрели наиболее простые ситуации, не отягощенные разного рода неоднородностями, вращением, градиентами давления, стратификацией и т. д. Любой из этих факторов может либо способствовать развитию когерентных структур и даже приводить к подавлению турбулентности — реламинизация, либо приводить к их разрушению. Однако общая тенденция заключается в том, что действующие на течение дополнительные стационарные поля делают течение анизотропным и, как правило, стабилизируют его, сужая спектр пульсаций и уменьшая рейнольдсовы напряжения. Именно так влияет устойчивая стратификация⁸. В частности, в эксперименте [63] с холодной турбулентной струей, истекающей в нагретый спутный поток, наблюдалось подавление процесса парного слияния вихрей силами плавучести и стабилизации течения за счет возрастания анизотропии и уменьшения вертикального потока тепла. В связи с учетом стратификации чрезвычайно интересный представляют, по нашему мнению, анализ крупномасштабных неустойчивостей, возникающих при взаимодействии турбулентности с внутренними волнами.

⁸ О действии вращения на турбулентность см. экспериментальные работы [61, 62].

2. Как и при описании всякой сложной системы, эволюционирующей во времени, достаточно существенно продвинуться в описании когерентных структур в турбулентности удается лишь в случаях, когда возможно провести разделение движений на мелкокомасштабные и крупномасштабные (для сосредоточенных систем — это быстрые и медленные движения). В этом случае, пользуясь некоторыми гипотезами (типа гипотез замыкания), мелкокомасштабную турбулентность, связанную с крупными структурами лишь через свои усредненные характеристики, можно рассматривать как эффективную нелинейную среду, параметры которой зависят от поля скорости. Если же подобное разделение масштабов объективно невозможно, турбулентность есть статистический ансамбль когерентных структур, как в пограничном слое, то наиболее адекватным способом описания должно быть, по-видимому, кинетическое описание газа из соответствующих когерентных структур. Подобная теория сейчас строится для сильной ленгмюровской турбулентности в плазме, где в качестве когерентных структур выступают ленгмюровские солитоны. Сейчас в направлении построения подобной теории гидродинамической турбулентности делаются лишь самые первые шаги, связанные с построением и статистическим анализом простейших моделей. Существенную роль в этих моделях играет малый параметр, характеризующий отношение собственных пространственно-временных масштабов когерентных структур к расстоянию между ними (в пространстве или во времени). Наличие малого параметра (коэффициента перемежаемости или скважности) позволяет воспользоваться в дальнейшем анализе методами теории возмущений. Применительно к турбулентной конвекции вблизи границы возникновения, описываемой моделью Лоренца, подобная теория структурной турбулентности построена в [64, 65]. Упомянем в этой связи также работы [66—68], в которых статистические характеристики явления перемежаемости исследуются на основе предельно идеализированных моделей — одномерных отображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 400 с.
2. Structure and Mechanisms of Turbulence. I, II.— Lect. notes phys. Berlin, Heidelberg, N. Y., 1978, 75, N 76, S. 295, 406.
3. Roshko A. Structure of turbulent shear flows: A new look.— AIAA J., 1976, 14, p. 1349—1357.
4. Zaman K. B. M. Q., Hussain A. K. M. F. The mechanisms of vortex pairing in an axisymmetric mixing layer.— In: Turbulent Shear Flows II. Berlin, Heidelberg, N. Y.; Spring-Verl., 1980, p. 327—343.
5. Head M. R., Bandyopadhyay P. New aspects of turbulent boundarylayer structure.— J. Fluid Mech., 1981, 107, p. 297—338.
6. Papailiou D. D., Lykoudis P. S. Turbulent vortex streets and the entrainment mechanism of the turbulent wake.— J. Fluid Mech., 1974, 62, p. 11—31.
7. Yule A. J. Phase scrambling effects and turbulence date analysis.— In: Turbulent Shear Flows II. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Spring-Verl., 1980, p. 263—281.

8. Kovaszny L. S. G., Kibens V., Blackwelder R. F. Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer.— J. Fluid Mech., 1970, 41, p. 283—325.
9. Blackwelder R. F., Kaplan R. E. On the wall structure of the turbulent boundary layer.— J. Fluid. Mech., 1976, 76, p. 89—112.
10. Wilmarth W. W., Lu S. S. Structure of the Reymolds stress near the wall.— J. Fluid Mech., 1972, 55, p. 65—92.
11. Falco R. E. Coherent motions in the outer region of turbulent boundary layers.— Phys. Fluids, 1977, 20S, p. 124—132.
12. Brown G. L., Thomas A. S. W. Large structure in a turbulent boundary layer.— Phys. Fluids, 1977, 20, p. 243—252.
13. Chen C. H. P., Blackwelder R. F. Large-scale motion in a turbulent boundary layer: A study using temperature contamination.— J. Fluid. Mech., 1978, 89, p. 1—31.
14. Hedley T. B., Keffer J. F. Turbulent / non-turbulent decisions in an intermittent flow.— J. Fluid. Mech., 1974, 64, p. 625—644.
15. Lilley G., Morris P., Tester B. On the theory of jet noise and its applications.— AIAAPap., 1973, N 987. 36 p.
16. Yule A. J. Large-scale structure in the mixing layer of round jet.— J. Fluid Mech., 1978, 89, p. 413—432.
17. Chen Y. Y. Wavelike eddies in a turbulent jet.— AIAA J., 1977, 15, p. 992—1001.
18. Michalke A. Instabilität eines kompressibelen runden freistrahls unter Berücksichtigung des Einflusses der Strahlgrenzschichtdicke.— Ztschr. Flugwiss., 1977, 19, S. 319—328.
19. Petersen R. A. Influence of wave dispersion on vortex pairing in a jet.— J. Fluid Mech., 1978, 89, p. 469—495.
20. Crow S. C., Champagne F. H. Orderly structure in jet turbulence.— J. Fluid Mech., 1974, 48, p. 547—551.
21. Winant C. D., Browand F. K. Vortex pairing: The mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reymolds number.— J. Fluid Mech., 1974, 63, p. 237—255.
22. Aref H., Siggia E. D. Vortex dynamics of the two-dimensional turbulent shear layer.— J. Fluid Mech., 1980, 100, p. 705—738.
23. Bernal L. P., Breidenthal R., Brown G. L. et al. On the development of three-dimensional small scale in turbulent mixing layers.— In: Turbulent Shear Flows 2. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Spring.-Verl., 1980, p. 305—313.
24. Турбулентность: Пер. с англ./ Под ред. Брэдшоу П. М.: Машиностроение, 1980, с. 45.
25. Kovaszny L. S. G. Large scale structure in turbulence: A question or an answer?— In: Structure and Mechanisms of Turbulence I.— In: Lect. Notes. Phys. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Spring.-Verl., 1978, S. 1—18.
26. Сюрер Р. Аэрогидродинамика окружающей среды. М.: Мир, 1980. 82 с.
27. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1948. Ч. 1. 583 с.
28. Legner H. H., Finson M. L. On stability of fine-scaled turbulent free shear flows.— J. Fluid Mech., 1980, 100, p. 303—319.
29. Турбулентность. Принципы и применения: Пер. с англ./ Под ред. Фроста У., Моулдена Т. М.: Мир, 1980. 536 с.
30. Монин А. С., Ozmidov P. B. Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 320 с.
31. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью: Пер. с англ./ Под ред. Монина А. С. М.: Мир, 1971. 260 с.
32. Рабинович М. И. Автоколебания распределенных систем.— Изв. вузов. Радиофизика., 1974, 17, с. 477—510.
33. Krishnamurti R., Howard L. N. Large-scale flow generation in turbulent convection.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1981, 78, p. 1981—1985.
34. Фабрикант А. Л. О возникновении автоколебаний в неравновесных системах с потоками: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Горький: ИПФ АН СССР, 1980. 145 с.

35. *Лаандау Л. Д., Лифшиц М. Е.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
36. *Реутов В. П.* Нестационарный критический слой и нелинейная стадия неустойчивости в плоском течении Пуазейля: Препринт № 7. Горький: ИПФ АН СССР, 1980. 22 с.
37. *Реутов В. П.* Плазменно-гидродинамическая аналогия и нелинейная стадия неустойчивости ветровых волн.— Изв. АН СССР. ФАО, 1980, 16, с. 1266—1275.
38. *Robinson J. L.* The inviscid nonlinear instability of parallel shear flows.— J. Fluid Mech., 1974, 63, p. 723—752.
39. *Huberman R.* Critical layers in parallel flows.— Stud. Appl. Math., 1972, 51, p. 139—161.
40. *Андронов А. А., Фабрикант А. Л.* Затухание Ландау, ветровые волны и свисток.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 68—104.
41. *Бетнов Р.* Переход.— В кн.: Турбулентность: Принципы и применение / Под ред. Фроста У., Моулдена Т. М.: Мир, 1980, с. 164—183.
42. *Кадомицев Б. Б., Канторович В. М.* Теория турбулентности в гидродинамике и плазме.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 27, с. 511—540.
43. *Jimenez J.* Numerical simulation of mixing layer vortices.— In: Structure and mechanisms of turbulence. I.— Lect. Notes. Phys. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Spring-Verl., 1978, 75, p. 147—161.
44. *Stuart J. T.* On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers.— J. Fluid Mech., 1967, 29, p. 417—440.
45. *Кузнецова Л. М., Рабинович М. И., Суцук М. М.* Влияние волн на процессы переноса в вихревых течениях.— Изв. АН СССР. ФАО, 1982, 7, с. 1—10.
46. *Aranson I. S., Rabinovich M. I., Sushchik M. M.* Stochastization of coherent structures by a periodic field.— In: Chaos and order in nature / Ed. Haken H. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Spring-Verl., 1981, p. 54—63.
47. *Кадомицев Б. Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 240 с.
48. *Zabusky N. J.* Coherent structure in hydrodynamics.— In: The significance of nonlinearity in the natural science. N. Y.: Plenum press, 1977, p. 145—173.
49. *Гиневский А. С., Власов Е. Ф., Колесников А. В.* Аэроакустические взаимодействия. М.: Машиностроение, 1978. 177 с.
50. *Zaman K. B. M. Q., Hussain A. K. M. F.* Turbulence suppression in free shear flows by controlled excitation.— J. Fluid Mech., 1981, 103, p. 133—159.
51. *Parthasarathy S. P., Cuffel R., Massier P. F.* Influence of internally generated pure tones on the broadband noise radiated from a jet.— AIAA J., 1978, 16, p. 538—540.
52. *Иванов Н. Н.* Истечение турбулентной струи при воздействии акустических возмущений.— ЖИМТФ, 1972, 1, с. 58—68.
53. *Sato H., Saito H.* Artificial control of the laminar-turbulent transition of two-dimensional wake by external sound.— J. Fluid Mech., 1978, 84, 657—672.
54. *Bechert D. W., Pfizenmaier E.* Amplification of jet noise by a higher-mode acoustical excitation.— AIAA J., 1977, 15, p. 1268—1271.
55. *Левченко В. Я., Козлов В. В.* Возникновение и развитие возмущений в пограничном слое.— В кн.: Модели в механике сплошной среды / Под ред. Яненко Н. Н. Новосибирск, 1979, с. 5—46.
56. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1963, 12, с. 3—52.
57. *Новиков Е. А.* Динамика и статистика системы вихрей.— ЖЭТФ, 1975, 68, с. 1868—1882.
58. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Коллапс вихрей.— ЖЭТФ, 1979, 77, с. 588—597.
59. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Стохастизация вихрей.— Письма в ЖЭТФ, 1974, 29, с. 737—740.
60. *Гешев П. И., Черныш А. И.* Движение вихрей в двумерной односвязной области: Препринт № 65—80. Новосибирск: ИТФСО АН СССР, 1980. 18 с.

61. Владимиров В. А., Луговцов Б. А., Гарасов В. Ф. Подавление турбулентности в ядрах концентрированных вихрей.— ПМТФ, 1980, № 5, с. 69—76.
62. Владимиров В. А., Гарасов В. Ф. Структура турбулентности вблизи ядра кольцевого вихря.— ДАН СССР, 1979, 245, с. 1325—1328.
63. Hopfinger E. J. Buoyancy effects on the large scale structure of free turbulent shear flows.— In: Structure and mechanisms of turbulence. I. Lect. Notes Phys. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verl., 1978, 75, S. 65—85.
64. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. К теории структурной турбулентности.— ДАН СССР, 1981, 257, с. 1319—1322.
65. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Структурная турбулентность в диссипативных системах: Препринт № 74—81. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981. 48 с.
66. Mayer-Kress G., Haken H. Intermittent behaviour of the logistic system.— Phys. Lett., A, 1981, 82, N 4, blz. 151—155.
67. Hirsch J. E., Huberman B. A., Scalapino D. S. A theory of intermittency.— Phys. Rev. A, 1982, 25, N 1, p. 519—532.
68. Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems.— Commun Math. Phys., 1980, 74, N 2, p. 189—201.

УДК 532.501.34+533.9

ВТОРИЧНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

С. С. МОИСЕЕВ, В. Г. ПУНГИН, Р. З. САГДЕЕВ,
Н. В. СУЯЗОВ, А. В. ТУР, В. В. ЯНОВСКИЙ

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что неустойчивости порождают многие важные физические процессы в сплошных средах: они предшествуют развитой турбулентности, аномальной диффузии и другим нелинейным явлениям. Естественно, что анализ возникающих при развитии неустойчивостей состояний является весьма трудной и, в смысле строгого подхода, далеко не всегда выполнимой задачей. Часто ситуация осложняется вторичными неустойчивостями и каскадными процессами, некоторые из которых рассматриваются в данной работе.

Одним из примеров такой ситуации является парадокс о возникновении аномальной диффузии плазмы за счет высокочастотной неустойчивости, для которой движением ионов можно пренебречь.

Непосредственно высокочастотные колебания не могут привести к диффузии плазмы (анализ ошибочных работ, игнорирующих этот физический факт, см., например, в [1]). Однако в процессе развития подобной неустойчивости за счет рассеяния электронов на случайных колебаниях возникают диссипативные процессы, проявляющиеся в виде турбулентной вязкости и теплопроводности в усредненных низкочастотных уравнениях для электронной компоненты. Это же, в свою очередь, может привести к развитию вторичных диссипативных дрейфовых неустойчивостей. Так, например, турбулентная вязкость электронов приводит к универ-

сальной диссипативной неустойчивости разреженной плазмы [2], подобной диссипативной дрейфовой неустойчивости за счет кулоновского электронного трения [3]. Таким образом, в данном случае высокочастотная неустойчивость может привести к аномальной диффузии плазмы благодаря развитию каскада неустойчивостей. В распределенных системах с большим числом степеней свободы первичные неустойчивости часто меняют характер последующей эволюции системы. Например, в растущих магнитных полях возможно замагничивание электронов, кроме того, неустойчивость может привести к спонтанному нарушению симметрии и создать в системе условия для более быстрого сброса неравновесности (так происходит в дрейфовой ионосферной турбулентности, рассматриваемой в разд. 1) или изменить условия устойчивости исходного течения так, что в результате возникает взрывная неустойчивость (пример, рассмотренный в разд. 3). Кроме того, нас будут интересовать некоторые неустойчивости в стохастических уравнениях, отсутствующие в динамической постановке. Более того, подобные неустойчивости отсутствуют в ряде случаев и в уравнениях для первых моментов, проявляясь, однако, для корреляторов более высокого порядка (пример см. в разд. 2). Не исключено, что подобные корреляционные неустойчивости могут быть полезными при изучении характера эволюции неравновесной системы, далекой от термодинамического равновесия.

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие с физической точки зрения ряд высказанных соображений.

1. ПЕРЕКАЧКА ЭНЕРГИИ И СПЕКТРЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ГРАДИЕНТНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В ИОНОСФЕРЕ

Очень часто турбулентность, развивающаяся в сплошных средах из первичной неустойчивости, носит гидродинамический характер. Поэтому представляют интерес ситуации, в которых возможны отклонения от обычной колмогоровской схемы передачи энергии по спектру. Одним из таких примеров является рассматриваемая в [4] турбулентность дрейфовых волн с незамагниченными ионами. При этом, как показано в работе, механизм перекачки энергии в рассматриваемой турбулентности имеет некоторое сходство со спонтанным нарушением симметрии в теории поля. Системе выгодно благодаря неустойчивости нарушить исходную симметрию, после чего в ней создаются условия для наиболее быстрой перекачки энергии в область диссипации.

Рассмотрим ионосферную плазму, в которой на высотах порядка сотни километров в экваториальной электроосфере существует «чистая» дрейфовая турбулентность, охватывающая длины волн от сотни до нескольких метров (см., например, [5, 6], там же библиография). В области длинных волн турбулентность является сильной из-за линейности закона дисперсии. Механизмом раскачки волн в этом случае является неустойчивость, найденная в [7], возникающая в неоднородной плазме с током и с незамагниченными

ионами при $c_s^2 > v_d^2$ (c — скорость звука, v_d — дрейфовая скорость электронов в электрооструе). Источником неравновесности служит вертикальный градиент плотности ионосферы dn_0/dz (ось z направлена по вертикали, магнитное поле Земли — по оси x). Раскачивающиеся вследствие этой неустойчивости, которую будем называть первичной, дрейфовые волны распространяются вдоль оси y и имеют длины волн порядка 50×100 м. Вопрос о перекачке энергии в наблюдающиеся метровые волны не является тривиальным и обсуждается в большом числе работ (см. [5], там же библиография), так как в одномерной геометрии для реальных ионосферных параметров нелинейные члены в уравнениях движения очень малы и перекачка оказывается чрезвычайно медленной. В этих условиях системе выгодно избрать какой-то иной, более быстрый способ перекачки энергии в короткие волны. Как уже говорилось, для этого система спонтанно нарушает одномерную симметрию. Это происходит благодаря вторичной неустойчивости на градиенте плотности первичной волны. Для реальных параметров плазмы вторичная неустойчивость генерирует волны с длиной волны того же порядка, что и первичная, следовательно, не объясняет сама по себе наблюдающейся перекачки. Однако роль нарушения симметрии и вторичных волн проявляется в нелинейной теории, так как через вторичные волны исходная волна уже сильно взаимодействует сама с собой, что и приводит к перекачке энергии в метровые волны. Короткие волны стабилизируются вязкостью, что приводит к формированию нелинейных пакетов, косо распространяющихся вблизи оси y . В области длинных волн, где вязкостью можно пренебречь, найден спектр турбулентности $\epsilon_k \sim k^{-3}$. Полученные результаты хорошо согласуются с данными ионосферных экспериментов и радарных измерений [8]. Так, эксперименты показывают, что флюктуации амплитуды имеют уровень порядка 5—10%, теория дает 7%. Спектр k^{-3} также подтверждается ионосферными и радарными измерениями [8].

Отсылая за подробностями к цитированной выше работе [4], приведем здесь только наиболее интересные уравнения взаимодействующих между собой первичных и вторичных волн, распространяющихся соответственно вдоль осей y и z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} - \left(\frac{\Omega_l}{v_l L} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi v_d n_1 + \frac{\Omega_l}{v_l} \Psi v_d n_2 \frac{\partial n_1}{\partial z} - \\ - \left(\frac{\Omega_l}{v_l} \right)^2 \Psi^2 v_d n_1 \frac{\partial n_1 n_2}{\partial y} = \frac{c_s^2}{v_i} \frac{\partial^2 n_1}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial n_2}{\partial t} - \frac{\Omega_l}{v_l} \Psi v_d n_1 \frac{\partial n_2}{\partial z} + \left(\frac{\Omega_l}{v_l} \right)^2 \Psi^2 v_d n_1 n_2 \frac{\partial n_1}{\partial y} - \right. \\ \left. - \frac{c_s^2 \Psi}{v_i} \frac{\partial^2 n_2}{\partial z^2} \right) = \left(\frac{\Omega_l}{v_l} \right)^2 \Psi^2 v_d \left\{ \frac{\partial n_1 n_2}{\partial y} \frac{\partial n_2}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (n_1 n_2) \frac{\partial n_2}{\partial y} \right\} \approx \\ \approx \left(\frac{\Omega_l}{v_l} \right)^2 \Psi^2 v_d n_2 \frac{\partial n_1}{\partial y} \frac{\partial n_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь n_1 — нелинейная волна, бегущая вдоль оси y и в линейном приближении описывающая первичную неустойчивость; n_2 — соответственно при малой амплитуде представляет собой вторичную волну; Ω_i — ларморовская частота электронов; v_l , v_i — соответственно частоты соударений электронов и ионов, $\Psi = v_i v_l / \Omega_l \Omega_i$ (Ω_i — ларморовская частота ионов); L — характерный градиент плотности плазмы. Из приведенных уравнений движения (1.1) и (1.2) видно, что перекачка энергии от длинноволновых к коротковолновым модам происходит в волне n_1 благодаря члену $(\Omega_l/v_l)^2 \Psi v_d n_1 (\partial n_1 n_2 / \partial y)$, в волне n_2 — благодаря последнему слагаемому в (1.2).

Качественно уравнение (1.1) даже близко к уравнению Бюргера с неустойчивостью $\gamma = (\Omega_l/v_l) (v_d/L) \Psi$.

Найдем характерные масштабы и амплитуды волн, при которых происходит стабилизация неустойчивостей. Рассмотрим вначале волну n_1 . Нелинейность для n_1 носит квазилинейный характер и поэтому приводит к укрупнению пакета до масштабов, на которых нелинейный и вязкий члены сравниваются:

$$\left(\frac{\Omega_l}{v_l}\right)^2 \Psi^2 v_d \frac{\partial n_1 n_2}{\partial y} n_1 \sim \frac{c_s^2 \Psi}{v_i} \frac{\partial^2 n_1}{\partial y^2}. \quad (1.3)$$

Подставляя в последнее выражение параметры реальной плазмы: $v_l \sim 4 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $v_i \sim 250 \text{ с}^{-1}$, $\Omega_l \sim 5 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$, $\Omega_i \sim 90 \text{ с}^{-1}$, $L = [(1/n_0)(dn_0/dz)]^{-1} \sim 600 \text{ м}$, $v_d = 10^2 \text{ м/с}$, $c_s^2 \sim 10^5 \text{ (м/с)}^2$, получаем $\lambda_y n_1 n_2 \sim 0,02 \text{ м}$, λ_y — характерный масштаб нелинейного пакета вдоль оси y . Нарастание амплитуды нелинейного пакета происходит благодаря действию неустойчивости, при этом амплитуда достигает величины, определяемой следующей оценкой:

$$\frac{\Omega_l}{v_l} \frac{\Psi}{L} v_d n_1 \sim \left(\frac{\Omega_l}{v_l}\right)^2 \Psi^2 v_d \frac{\partial n_1 n_2}{\partial y} n_1,$$

т. е. $\lambda_y \sim 10^3 n_1 n_2$ (в м). В результате

$$\lambda \sim \sqrt{20} \sim 4,4 \text{ м}. \quad (1.4)$$

Аналогично из уравнения для n_2 получим

$$n_1 \sim n_2 \sim 1/14, \quad \lambda_y \sim \lambda_z. \quad (1.5)$$

Результаты (1.4), (1.5) хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Таким образом, приходим к выводу, что через вторичную волну первичная волна испытывает сильное «самовоздействие», что приводит к ее укрупнению и перекачке энергии по спектру. С формальной точки зрения перекрестная нелинейность $(\partial n / \partial y)(\partial \Phi / \partial z) - (\partial n / \partial z)(\partial \Phi / \partial y)$ обращается в нуль для одной гармоники. Однако если коэффициент перед такой нелинейностью самый большой, то системе, может быть, выгодно возбудить две или несколько волн, чтобы иметь возможность самым быстрым образом избавиться от неравновесности.

Характерное время обмена энергией между первичными и вторичными волнами

$$\tau_H \sim \gamma_2^{-1},$$

$$\gamma_2 \sim \left(\frac{\Omega_l}{v_l} \right)^2 \Psi^2 v_d n_2 \frac{\partial n_1}{\partial y}.$$

В стационаре $\gamma \sim \gamma_2$, отсюда находим спектр турбулентности $\varepsilon \sim k_y^{-3}$.

Рассмотренный пример интересен с двух точек зрения. Во-первых, первичная неустойчивость не описывает целый ряд важных физических особенностей режима насыщения, во-вторых, здесь малое число качественно различных каскадов — всего два.

2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

В настоящем разделе рассматривается вопрос о возможности возникновения неустойчивостей в уравнениях для более высоких корреляционных моментов в распределенных системах со случайными силами в том случае, когда для отдельных динамических реализаций (а также, возможно, и в уравнениях относительно первых моментов) эти неустойчивости отсутствуют¹. Введение случайных параметров в уравнения по многим причинам может приводить к новым неустойчивостям (диссипативные неустойчивости, параметрическая раскачка за счет временной зависимости случайного параметра и др.). Помимо чисто прикладного, этот вопрос имеет принципиальное значение. В самом деле, в системах, находящихся вблизи от состояния термодинамического равновесия, направленность процесса характеризуется существованием соответствующих функций Ляпунова — термодинамических потенциалов (при определенных граничных условиях) или, в более общем случае, производства энтропии (см. [10]). Однако вдали от состояния термодинамического равновесия указанные величины теряют смысл функций Ляпунова, и поиск таковой представляет собой отдельную, зачастую весьма трудную задачу.

Часто нас интересует вопрос не о самих конечных состояниях, а о том, куда эволюционирует система — либо в область, подчиняющуюся обычной равновесной или неравновесной термодинамике, либо же в область, где возникает уже не молекулярный, а турбулентный «беспорядок» или же диссипативные когерентные состояния. С этой точки зрения интересно остановиться на анализе «неустойчивости Бенара», проведенном в [10], но уже с несколько иных позиций. Речь идет о поведении жидкости в поле тяжести между двумя плоскостями с температурами соответственно нижней и верхней T_1, T_2 ($T_1 > T_2$). Если разность температур достаточно

¹ Для дискретных динамических систем см. [9].

мала, то небольшие флюктуационные конвекционные потоки гасятся и исчезают. Но когда величина $(T_1 - T_2)/(T_1 + T_2)$ превышает некоторое критическое значение, то в результате роста флюктуаций в системе формируется макроскопический поток жидкости, т. е. бóльшая степень организации системы, чем первоначальное состояние покоя. Такая неустойчивость в системе приводит к росту корреляции и ее уместно назвать корреляционной. Можно ожидать и в более общих случаях, что когда уравнение для корреляционной функции содержит неустойчивые решения, то в системе могут возникать когерентные состояния, если они первоначально отсутствовали².

Чрезвычайно интересный вопрос о том, к какому состоянию стремится неустойчивое течение (т. е. неустойчивость существует уже для первых моментов), определяется эволюцией поправки к начальной корреляционной функции.

В качестве примера неустойчивости более высоких моментов при устойчивости первого момента рассмотрим уравнения для мелкой воды [11] в случае, когда глубина h меняется по случайному закону

$$\partial u / \partial t + g \nabla \eta = 0, \quad \partial \eta / \partial t + \operatorname{div} (hu) = 0, \quad (2.1)$$

где $\eta(\mathbf{r}, t)$ — возвышение водной поверхности, \mathbf{u} — горизонтальная скорость частиц жидкости на поверхности воды. Возьмем $h = h_0 + \tilde{h}$, где h_0 — детерминированная величина, а $\tilde{h}(\mathbf{r}, t)$ — случайная гауссова поправка, причем

$$\langle \tilde{h} \rangle = 0, \quad \langle \tilde{h} \tilde{h}' \rangle = B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad \dagger$$

Для получения замкнутых уравнений воспользуемся методом, развитым в [12, 13] при вычислении турбулентной вязкости (см. также [9]).

Используя формулу Фуруцу—Новикова (см., например, [14]) и (2.1), нетрудно показать, что

$$\frac{\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\delta h(\mathbf{r}', t)} = 0, \quad \frac{\delta \eta(\mathbf{r}, t)}{\delta \eta(\mathbf{r}', t)} = -\frac{1}{2} \operatorname{div} \{ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \}.$$

Тогда уравнение для первого момента примет вид

$$\frac{\partial^2 \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t^2} - g \operatorname{grad} \operatorname{div} \{ h_0 \langle \mathbf{u} \rangle \} = 0, \quad (2.2)$$

т. е. неустойчивость для первого момента не возникает.

Рассмотрим систему уравнений, описывающую одноточечные вторые моменты, для простоты в одномерном (в плоскости границы) приближении

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle u^2 \rangle + g \left\langle u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad (2.3)$$

$$\left\langle \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial x} \langle \eta^2 \rangle = 0, \quad (2.4)$$

² Строго говоря, при этом необходимо исследовать нелинейную стадию неустойчивости.

$$\left\langle u \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\rangle + \left\langle u \frac{\partial hu}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \eta^2 \rangle + \left\langle \eta \frac{\partial hu}{\partial x} \right\rangle = 0. \quad (2.6)$$

Используя систему (2.3)–(2.6), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u\eta \rangle + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x} \langle \eta^2 \rangle + \frac{h_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} \langle u^2 \rangle = 0. \quad (2.7)$$

При рассмотрении коротковолновых возмущений для вторых моментов пренебрегаем членами с пространственными производными B первоначального динамического решения. В результате вместо (2.3) и (2.6) получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle u^2 \rangle + g \frac{\partial}{\partial x} \langle u\eta \rangle = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \eta^2 \rangle - \frac{1}{2} B(x, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle u^2 \rangle = 0. \quad (2.9)$$

Из (2.7) – (2.9) имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^3 - i \frac{g^2 k^4 B}{2} - \omega g h, \quad k^2 = 0. \quad (2.10)$$

Пренебрегая ω^3 , приходим к неустойчивому решению с $\text{Im } \omega = = g B k^2 / 2 h_0$. В пределах применимости данного приближения инкремент, как видим, растет с ростом k . Заметим далее, что для изотропной турбулентности аналогичное рассмотрение дает нам неустойчивость вторых двухточечных одновременных корреляционных моментов.

В заключение данного раздела обратим внимание на то, что совершенно аналогичное рассмотрение приводит к корреляционной неустойчивости для внутренней волны, если частота Вайселя $N = \sqrt{-g(dn_0/dz)(1/n_0)}$ содержит случайную поправку. Такая поправка может появиться, например, за счет перемешивания плотности в турбулентных областях, что приводит к вариациям размера стратификации.

3. О ВЗРЫВНОМ ХАРАКТЕРЕ ВЛИЯНИЯ МОД КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ

Близкие к рассмотренным выше вторичным неустойчивостям примеры можно найти в задачах нелинейной теории устойчивости течений жидкости. Моды возмущений конечной амплитуды могут изменять характер своей устойчивости (по сравнению с соответствующими бесконечно малыми возмущениями) и изменять устойчивость параметрически связанных с ними мод. Наиболее ярко изменение характера устойчивости, очевидно, проявляется, если подверженная такому воздействию мода находится на границе области линейной неустойчивости.

Для слоистых течений устойчиво стратифицированной идеальной жидкости, т. е. течений, состоящих из однородных слоев

с постоянными вертикальными градиентами горизонтальной скорости невозмущенного потока (профиль скорости имеет изломы или разрывы), типичной является ситуация (см., например, [15, 16]), когда граница области неустойчивости отделяет эту область от примыкающей к ней области нейтральной устойчивости. На такой границе дисперсионное уравнение $\omega = \omega(k)$ имеет особенность типа корневой точки ветвления и обращается в нуль адиабатический инвариант $I = \partial L_0 / \partial \omega$, где L_0 — первый квадратичный по амплитуде член разложения усредненного лагранжиана. Указанная особенность изменяет вблизи границы линейной неустойчивости привычную структуру используемого при анализе нелинейных эффектов уравнения для медленной амплитуды возмущения A , поскольку первая производная амплитуды по медленному времени $\tau = \epsilon t$ умножается на коэффициент³, обращающийся в нуль на границе, и, следовательно, возникает необходимость учесть следующую вторую производную $\partial^2 A / \partial \tau^2$. В частности, самовоздействие пограничной моды уже не описывается уравнением Ландау [17].

Особенности нелинейных эффектов для пограничных мод проследим на примере течения Кельвина—Гельмгольца, когда два слоя бесконечной толщины с различными плотностями верхней ρ_I и нижней ρ_{II} жидкостей ($\rho_I < \rho_{II}$) и с различными скоростями потоков U_I и U_{II} ($U_I \rho_I + U_{II} \rho_{II} = 0$ — система координат Ламба) стабилизированы силой тяжести и поверхностным натяжением σ на границе раздела слоев. Дисперсионное соотношение линейной задачи (ее решение см., например, в [18]) в безразмерных переменных, нормированных с помощью масштаба длины $l_0 = \sqrt{\sigma/g(\rho_{II} - \rho_I)}$ и времени $t_0 = \sqrt{l_0(\rho_{II} + \rho_I)/g(\rho_{II} - \rho_I)}$, имеет следующий вид:

$$\omega = \pm \sqrt{k(k^2 - \langle U_0^2 \rangle k + 1)}, \quad (3.1)$$

где $\langle U_0^2 \rangle = (U_I^2 \rho_I + U_{II}^2 \rho_{II}) / (\rho_I + \rho_{II})$ — параметр, характеризующий течение ($\langle U_0^2 \rangle^{-1}$ — аналог числа Ричардсона для данной задачи), $k > 0$. Кривая $\langle U_0^2 \rangle = k + k^{-1}$ на плоскости $k, \langle U_0^2 \rangle$ разделяет области неустойчивости (выше кривой) и нейтральной устойчивости (ниже кривой) по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Исследуем самовоздействие моды с $k = 1$ при значении параметра, несколько меньшем критического $\langle U_0^2 \rangle = 2$ (мода $k = 1$ становится пограничной, когда $\langle U_0^2 \rangle = 2$). Этот пример интересен тем, что при таком значении параметра $\langle U_0^2 \rangle$ поток нейтрально устойчив по отношению к любым волновым возмущениям с бесконечно малой амплитудой. Степень близости параметра $\langle U_0^2 \rangle$ к критическому значению определяется в этом случае частотой рассматриваемой волны с $k = 1$, которая равна нулю при $\langle U_0^2 \rangle = 2$ (см.

³ Этот коэффициент пропорционален адиабатическому инварианту I .

(3.1)). Пусть частота $\omega = \varepsilon\Omega$ имеет тот же порядок малости, что и медленное время $\tau = \varepsilon t$. Возвышение поверхности раздела представим в виде

$$\eta(x, t) = \varepsilon A(\tau) \exp(i\omega t - ikx) + \text{к.с.},$$

где ε — малый параметр, а к.с. — комплексно-сопряженное выражение.

Тогда уравнение, описывающее самовоздействие, записывается в виде

$$\frac{d^2 A}{d\tau^2} + 2i\Omega \frac{dA}{d\tau} = q |A|^2 A, \quad (3.2)$$

где $q = 8(\rho_{II} - \rho_I)^2 / (\rho_{II} + \rho_I)^2 - 5/2$.

При соотношении плотностей $\rho_I / \rho_{II} < 0,28$ ($q > 0$) уравнение (3.2) может иметь решения взрывного типа, которые характеризуются достижением амплитудой A бесконечно больших значений за конечное время τ_B . Решение взрывного типа реализуется, если выполнено пороговое условие на начальные значения $A(0)$ и $(dA/d\tau)(0)$, которое в случае $(dA/d\tau)(0) = 0$ записывается следующим образом: $|A(0)| > 0,58 q^{-1/2} \Omega$. Время взрыва для $\Omega = 0$ (для «предельной» пограничной моды) определяется выражением $\tau_B \approx 1,8 q^{-1/2} |A(0)|^{-1}$.

В рассматриваемом течении взрывной рост пограничных мод конечной амплитуды возникает также за счет их взаимодействия. При заданном значении параметра $\langle U_0^2 \rangle > 2$ существуют две пограничные моды. Рассмотрим нелинейное параметрическое взаимодействие таких мод в случае, когда каждая из них создает для другой синфазное возмущение потоков и, следовательно, изменяет условие устойчивости. Такая возможность имеет место при выполнении условия синхронизма $k_2 = 2k_1$, для чего нужно выбрать значение параметра невозмущенного потока $\langle U_0^2 \rangle$, равное $3/\sqrt{2}$. Возвышение поверхности раздела представим в виде $\eta(x, t) = \varepsilon^2 A_1(\tau) \exp(-ik_1 x) + \varepsilon^2 A_2(\tau) \exp(-ik_2 x) + \text{к.с.}$ Тогда получаем систему уравнений для медленных амплитуд

$$\frac{d^2 A_1}{d\tau^2} = \alpha A_2 A_1^*, \quad \frac{d^2 A_2}{d\tau^2} = \alpha A_1^2, \quad (3.3)$$

где $\alpha = 3(\rho_{II} - \rho_I)/2(\rho_{II} + \rho_I)$. Система (3.3) имеет решение взрывного типа, т. е. амплитуды достигают бесконечных значений за конечное время. Пусть $dA_1/d\tau = dA_2/d\tau = 0$ при $\tau = 0$. В случае равенства начальных амплитуд первой и второй гармоник ($A_1(0) = A_2(0) = A_0$) решение выражается через эллиптические функции и обращается в бесконечность за время $\tau_{B2} \approx 3/\sqrt{\alpha A_0}$. Если в начальный момент в системе существует только одна волна первой гармоники ($A_2(0) = 0, A_1(0) = A_0$), то решение также взрывное, а время взрыва, как показывает численный расчет, несколько увеличивается, т. е. $\tau_{B1} \approx 1,3 \tau_{B2}$.

Подчеркнем тот факт, что обычное параметрическое взаимодействие непограничных ⁴ нейтрально устойчивых мод в рассматриваемом двухслойном течении не имеет взрывного характера. Возможность взрыва таких мод определяется знаком адиабатического инварианта I [19, 20]. Условием же взрыва двух пограничных мод ($k_2 = 2k_1$) является совпадение знаков производной $\partial I / \partial \omega$. Кроме того, время взрыва в этом случае пропорционально не A_0^{-1} , а $A_0^{-1/2}$.

Отличительная особенность параметрического взаимодействия с участием пограничных мод состоит также в отсутствии для них интеграла типа Мэнли — Роу. Интеграл энергии в рассмотренном случае взаимодействия двух пограничных мод (см. (3.2)) записывается в виде ($k_1 = 1/\sqrt{2}$)

$$\frac{1}{k_1} \left| \frac{dA_1}{d\tau} \right|^2 + \frac{1}{k_2} \left| \frac{dA_2}{d\tau} \right|^2 - \sqrt{2} \alpha \operatorname{Re} (A_2^* A_1^2) = \text{const.} \quad (3.4)$$

Резонансное взаимодействие двух мод, волновые числа которых лежат на границе области линейной неустойчивости, для течения с гладким профилем скорости и плотности рассматривал Келли [21], но в его случае область $k > k_2$ не была областью нейтрально устойчивых возмущений и укороченное уравнение для A_2 имело другой вид. В результате взаимодействие таких пограничных мод не носило взрывного характера.

Для рассмотренных выше примеров характерно, что мода конечной амплитуды, влияющая на устойчивость течения, сама при этом становится неустойчивой. На нашем языке это вторичная неустойчивость, которая, как здесь показано, может иметь взрывной характер. Рассмотренные примеры могут, по-видимому, служить в качестве предварительной маломодовой модели для более сложных случаев, когда в результате изменения устойчивости течения волной конечной амплитуды возникает турбулентность, усиливающая в свою очередь запускающую волну.

В заключение кратко остановимся на одном таком случае взаимной генерации волн и турбулентности, качественный анализ которого на квазилинейной стадии процесса для приземного слоя атмосферы был дан в [22]. Механизм рассматриваемого явления следующий. Внутренняя гравитационная волна (ВГВ) конечной амплитуды (она может, например, возникнуть в области высот, где число Ричардсона меньше критического) попадает в статически устойчивый ночной приземный пограничный слой. Благодаря ее воздействию на неоднородное фоновое течение возникает неустойчивость, и вследствие этого генерируется (или усиливается имевшаяся первоначально) турбулентность. В результате растут

⁴ Т. е. мод, расположенных достаточно далеко от границы линейной неустойчивости, для которых $\varepsilon (\partial I / \partial \omega) I^{-1} \ll 1$, и, следовательно, второй производной можно пренебречь.

турбулентные потоки количества движения и энергии, влияя также и на ВГВ. В [22] удалось показать, что в планетарном пограничном слое фоновая картина такова, что при определенной структуре моды ВГВ эти потоки имеют именно тот знак, который способствует усилению первоначальной волны. Это же, в свою очередь, увеличивает интенсивность и протяженность турбулентных областей, вызывая взрывной рост амплитуд волн и турбулентности. Поскольку в [22] фоновое течение считается заданным, турбулентность безынерционной, а также сделан ряд других модельных допущений, то в настоящее время остаются неясными как темп роста (в частности, пределы применимости взрывного процесса), так и возникающие при этом режимы насыщения. Однако важность проведенного в [22] качественного рассмотрения не вызывает сомнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадоццев Б. Б.* Турбулентность плазмы.— В кн.: Во прсы тесрии плазмы М.: Атомиздат, 1964, вып. 4, с. 188—338.
2. *Коган Е. Я., Моисеев С. С., Ораевский В. Н.* Гидродинамические модели в применении к исследованию замагниченной плазмы.— Журн. прикл. механ. и техн. физ., 1965, № 6, с. 41—45.
3. *Моисеев С. С., Сагдеев Р. З.* О коэффициенте диффузии Бома.— ЖЭТФ, 1963, 44, № 2, с. 736—765.
4. *Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Яновский В. В.* Перекачка энергии и спектры турбулентности при возбуждении градиентной неустойчивости в ионосферной плазме.— ЖЭТФ, 1981, 80, № 2, с. 597—607.
5. *Sudan R. N., Akinrimist J., Farley D. T.* Generation of small-scale irregularities in the equatorial electrojet.— J. Geophys. Res., 1973, 78, N 1, p. 240—248.
6. *Sudan R. N., Keskinen M. J.* Theory of strongly turbulent two-dimensional convection of low-pressure plasma.— Phys. Fluids, 1979, 22, p. 2305—2314.
7. *Rogister A., D'Angelo N.* Type II irregularities in equatorial electrojet.— J. Geophys. Res., 1970, 75, p. 3879—3887.
8. *Ott E., Farley D. T.* The K-spectrum of ionospheric irregularities.— J. Geophys. Res., 1974, 79, p. 2469—2472.
9. *Кляцкин В. И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975. 240 с.
10. *Пригожин И.* Время, структура и флуктуации.— УФН, 1980, 131, № 2, с. 185—212.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
12. *Моисеев С. С., Тур А. В., Яновский В. В.* О турбулентности пилообразных волн.— Изв. вузов. Радиотехника, 1977, 20, № 7, с. 1032—1039.
13. *Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Яновский В. В.* Влияние вихрей на спектр акустической турбулентности.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 105—115.
14. *Новиков Е. А.* Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности.— ЖЭТФ, 1964, 47, № 5, с. 1919—1926.
15. *Drazin H. G., Howard L. N.* Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid.— Adv. Appl. Mech., 1966, 9, p. 1—89.
16. *Госсард Э. Э., Хук У. Х.* Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.
17. *Монин А. С.* О природе турбулентности.— УФН, 1978, 125, № 1, с. 97—122.
18. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.

19. Рабинович М. И., Реутов В. И. Взаимодействие параметрически связанных волн в неравновесных средах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, 16, № 6, с. 815—839.
20. Воронович А. Г., Рыбак С. А. Взрывная неустойчивость стратифицированных течений.— ДАН СССР, 1978, 239, № 6, с. 1457—1460.
21. Kelly R. E. Finite-amplitude instability of parallel shear flow.— J. Fluid Mech., 1968, 31, pt 4, p. 789—799.
22. Chimonas G. The stability of a coupled wave-turbulence system in parallel shear flow.— Boundary — Layer Meteorol., 1972, 2, blz. 444—452.

УДК 530.145.1; 534.2.

СТОХАСТИЧНОСТЬ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Г. М. ЗАСЛАВСКИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ динамической эволюции в различных задачах классической механики имеет огромную историю, и исследованию устойчивости систем отводится в ней центральное место. Однако лишь в последнее двадцатилетие стало ясно, что в динамических системах может возникнуть новый вид неустойчивости, приводящий к тому, что траектории системы являются реализациями случайного процесса. Наиболее удивительным свойством этой («стохастической») неустойчивости является то, что она может возникать в определенной области значений параметров системы и в определенной области фазового пространства. Вне этих областей («областей стохастичности») траектории системы являются регулярными (неслучайными) функциями времени. Переход к стохастическому движению при изменении параметров системы является внутренним свойством системы и существует в отсутствие каких-либо случайных воздействий на систему. Динамические системы со стохастическими свойствами являются типичными, в то время как динамические системы, в которых ни при каких значениях параметров стохастичность не возникает, — исключение. Это объясняет то большое внимание исследователей, которое уделяется анализу стохастичности.

Исследование условий, при которых в динамической системе возникает случайное движение, имеет, кроме проблемы устойчивости, еще два интересных аспекта. Это условия перехода к статистическому описанию системы и проблема обоснования статистической механики и условия образования турбулентного движения из ламинарного.

Однако то представление о стохастичности, которое возникло сейчас для классических динамических систем, является лишь частью нашего понимания законов природы. Реальные физические объекты являются квантовыми. Поэтому естественным продолжением исследований является выяснение тех свойств квантовых систем, которым в классическом случае соответствует стохастическое движение.

2. КЛАССИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

Опишем некоторые свойства классических динамических систем, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $D(t)$ есть расстояние между двумя траекториями системы в фазовом пространстве в момент времени t и пусть $D(0)$ очень мало. Тогда локальная неустойчивость системы выражается в следующем свойстве:

$$D(t) = \exp(h_0 t) D(0). \quad (2.1)$$

Локальная неустойчивость приводит к перемешиванию траекторий в фазовом пространстве, которое проявляется в стохастичности системы [1—3]. При условии (2.1) капля фазового объема равномерно и нерегулярно расплывается (рис. 1) и корреляции соответствующих физических величин экспоненциально убывают со временем.

Более точное выражение свойства локальной неустойчивости заключается в том, что величина

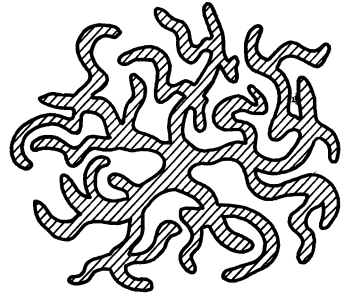


Рис. 1

$$h = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{D(0) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} \ln \frac{D(t)}{D(0)} \right] \quad (2.2)$$

не равна нулю. Выражение (2.2) определяет энтропию Колмогорова [4]. Системы, для которых $h > 0$, назовем K -системами. Можно показать, что $h \sim \langle h_0 \rangle$, где усреднение производится по фазовому пространству.

Приведем примеры двух классов классических гамильтоновых систем, в которых возникает стохастичность.

Первый из них связан с задачей о возмущении нелинейного осциллятора внешней периодической силой с очень большим числом фурье-гармоник. Модельный гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta) T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (2.3)$$

где ε — безразмерный параметр возмущения. Формула (2.3) описывает периодическое действие δ -импульсов на осциллятор. Это позволяет записать уравнения движения в виде отображения

$$I_{n+1} = I_n + \varepsilon v(I_n, \vartheta_n), \quad \vartheta_{n+1} = \vartheta_n + u(I_n, \vartheta_n) \pmod{2\pi}, \quad (2.4)$$

где v и u — функции, которые легко найти непосредственно из уравнений движения, а I_n, ϑ_n — значения переменных в момент времени $t_n = nT - 0$. Введем безразмерный параметр нелинейности осциллятора

$$\mu = \frac{d\omega}{dI} \frac{I}{\omega}, \quad \omega = \omega(I) = \frac{dH_0}{dI}. \quad (2.5)$$

Пусть для простоты $\varepsilon \ll 1$ и $\mu \ll 1$. Исследование системы (2.3), (2.4) показывает [1—3], что при условии

$$K = \varepsilon \mu \omega T \gg 1 \quad (2.6)$$

возникает локальная неустойчивость (2.1) и динамика системы становится стохастической. Различные обобщения, приложения и анализ свойств стохастической динамики содержатся также в обзорах [1—3]. Нам понадобятся следующие ее особенности.

Существуют два основных временных масштаба τ_c и τ_D . Время τ_c определяет быстрый процесс перемешивания по фазе ϑ и расцепление корреляций фаз

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta(\tau) \exp[i\vartheta(t + \tau)] \exp[-i\vartheta(\tau)] \sim \exp(-t/\tau_c),$$

$$\tau_c \sim T/\ln K. \quad (2.7)$$

Время τ_D определяет медленный процесс диффузии по переменной I и равно

$$T_D \sim T/\varepsilon^2. \quad (2.8)$$

К другому классу задач относятся замкнутые системы с N степенями свободы, в которых стохастичность возникает при достаточно сильном взаимодействии между различными степенями свободы.

Гамильтониан таких систем может быть записан в виде

$$H = H(I_1, \vartheta_1; I_2, \vartheta_2; \dots; I_N, \vartheta_N) = H_0(I_1, I_2, \dots, I_N) + \varepsilon V(I_1, \vartheta_1; I_2, \vartheta_2; \dots; I_n, \vartheta_n), \quad (2.9)$$

где V — потенциал взаимодействия. Основной результат для систем такого типа заключается в том, что при достаточно малых ε существует ровно N однозначных и независимых (находящихся в инволюции) интегралов движения (теорема Колмогорова — Арнольда—Мозера [5]). При $\varepsilon = 0$ в качестве таких интегралов могут быть выбраны действия I_1, I_2, \dots, I_N . При $\varepsilon > \varepsilon_c$ часть интегралов движения (или все, кроме интеграла энергии $E = H$) разрушается и их число становится меньше N . В этом случае и возникает стохастичность. Справедливо также обратное утверждение: появление стохастичности сопровождается разрушением интегралов движения.

Следует заметить, что общая картина развития стохастичности и ее характерных особенностей одинакова для приведенных двух классов задач (будем называть их далее нестационарным и стационарным случаями соответственно). Однако такая классификация понадобится при изучении квантовых систем.

Хорошим примером возникновения стохастичности в стационарных задачах может служить динамическая система типа «бильярд». Плоскому бильярду соответствует $N = 2$. Однако число независимых и однозначных интегралов движения может быть рав-

но и единице в зависимости от формы бильярда. Стохастическое движение возникает, например, в бильярде типа «звезда» (рис. 2) и в бильярде типа «стадион» [6] (рис. 3). Стадион составлен из двух полукругов и двух прямолинейных участков¹.

Важным свойством K -систем является свойство универсальности. Колмогоров впервые отметил, что динамические системы с одинаковым значением энтропии h должны иметь топологически эквивалентные траектории в фазовом пространстве. Универсальность систем с перемешиванием заключается в том, что в системах с одинаковыми h процесс перемешивания происходит «одинаково» (в вероятностном смысле). В реальных физических системах, как правило, есть два времени: τ_c и τ_D . Поэтому свойство

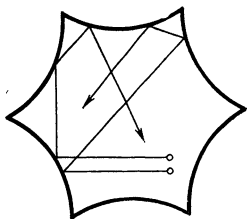


Рис. 2

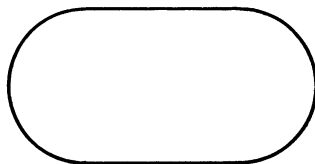


Рис. 3

универсальности справедливо лишь на временах $t \lesssim \tau_c \ll \tau_D$. На этих временах достаточно изучить какую-либо систему со стохастичностью, чтобы знать все о любой другой K -системе с тем же значением h .

3. КВАНТОВЫЕ K -СИСТЕМЫ И ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Специфика квантовомеханического способа описания динамической системы делает невозможным прямое перенесение методов классической теории на квантовые объекты. Прежде всего это связано с отсутствием понятия траектории. Поэтому понятия локальной неустойчивости и перемешивания в квантовой механике отсутствуют. К этому можно добавить, что задача об определении собственных функций и собственных значений в проблемах стационарного типа не имеет себе аналога в классической механике.

В формуле (2.1), описывающей локальную неустойчивость, величина $D(0)$ есть расстояние между двумя точками в фазовом пространстве. Эти точки соответствуют двум разным состояниям системы. Однако в квантовом случае это расстояние не может быть меньше \hbar в силу соотношения неопределенности. Поэтому в определении (2.2) для энтропии h предельный переход $D(0) \rightarrow 0$ невозможен. Это обстоятельство приводит к тому, что динамическая энтропия h в квантовых системах должна быть равной нулю. Действительно, пусть, например, динамика классической

¹ Различные типы бильярдов и приближенный анализ критерия стохастичности движения в них приведены в [7].

системы задана отображением типа (2.4). При этом

$$D_{n+1} = KD_n, \quad (3.1)$$

где параметр растяжения K считаем для простоты не зависящим от n . Зафиксируем величину D в некоторый момент времени $n \gg 1$. Тогда из (3.1) следует

$$D_{n-m} = K^{-m}D \quad (m \geq 0). \quad (3.2)$$

В классическом случае $D_{n-m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и $h = \ln K$. В квантовом случае D_{n-m} достигает значения \hbar при некотором

$$m_0 = \frac{\ln D/\hbar}{\ln K}$$

и дальнейшее уменьшение D_{n-m} невозможно. Из формулы (2.2) следует, что $h = 0$.

Можно было бы по аналогии с результатами классической динамики поставить следующий вопрос: существуют ли какие-либо условия, при которых регулярное движение квантовой системы переходит в стохастическое (в каком-то смысле) движение. На этом пути, однако, никаких результатов пока не существует.

Возможен другой подход к проблеме стохастичности в задачах квантовой механики. Он может быть сформулирован в виде следующей проблемы: описать свойства квантовой K -системы. Квантовой K -системой называется такая динамическая система, которая в классическом пределе ($\hbar = 0$) является K -системой. Другими словами, проблема заключается в определении квантовых свойств таких гамильтонианов, которые в классическом пределе описывают движение с перемешиванием.

Приведем ее решение для тех двух типов классических моделей, которые рассматривались в предыдущем разделе.

4. СТРУКТУРА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА КВАНТОВЫХ K -СИСТЕМ

Рассмотрим консервативную систему с гамильтонианом (2.9), в которой появление стохастичности обусловлено взаимодействием между различными степенями свободы. Будем считать, что $N \geq 2$. Основной характеристикой квантовой консервативной системы является структура ее энергетического спектра. Он определяется набором квантовых чисел n_1, \dots, n_M . Эти числа являются интегралами движения, и их число $M \leq N$. Поэтому разрушение интегралов движения должно сопровождаться также разрушением квантовых чисел.

Далее будем рассматривать только квазиклассический предел, когда числа n_1, \dots, n_M велики. Правила квантования при $M = N$ впервые сформулированы Эйнштейном [8]. Они имеют вид

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \int_{c_k} \sum_{i=1}^N p_i dq_i = n_k \hbar \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (4.1)$$

где C_k — замкнутые контуры, которые выбираются следующим образом. При $M = N$ движение системы происходит по поверхности N -мерного тора и, кроме того, величина $\sum_{i=1}^N p_i dq_i$ является полным дифференциалом [5]. Поэтому значения I_k совпадают для всех контуров, которые путем неособой деформации приводятся друг к другу. Однако на N -мерном торе могут быть выбраны точно N замкнутых контуров, которые не сводятся друг к другу. Эти неприводимые контуры и есть C_k в (4.1). Заметим также, что величины I_k являются интегральными инвариантами Пуанкаре [5]. Таким образом, существует N квантовых чисел n_k , определяющих энергию E системы.

Однако при $M < N$ правила (4.1) теряют смысл и вопрос о квантовании в этом случае был впервые поставлен в той же работе [8]. Сейчас нам уже известно, что при $M < N$ движение системы является стохастическим, и поэтому задача о квантовании в этом случае эквивалентна задаче о квантовании K -систем. В частности, эта задача при $N = 2$ эквивалентна задаче о квантовании бильярдов типа звезды, стадион и т. д. Эквивалентная проблема возникает в классической физике, если нам требуется найти спектр колебаний резонаторов с формой, показанной на рис. 2 или рис. 3.

Введем величину

$$S(E) = \sum_{i=1}^N \int_C p_i dq_i, \quad (4.2)$$

равную действию системы на некотором контуре C . Считаем, что контур C совпадает с траекторией, очень близкой к замкнутой. Величина $S(E)$ по-прежнему является инвариантом, однако в стохастическом случае она является случайной величиной, так как сама траектория есть случайный процесс. Тогда собственными значениями энергии являются те значения E , которые удовлетворяют уравнению [10]²

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} S(E) \right] = 1, \quad (4.3)$$

где $S(E)$ определяется формулой (4.2). Обозначим через $P_m(E)$ вероятность того, что $S(E) = 2\pi m\hbar$. Отсюда вероятность того, что значение E является собственным значением задачи, равна

$$P(E) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(E).$$

Из (4.3) следует, что значения E удовлетворяют стохастическому уравнению, и поэтому их распределение является также случайным. Это означает, что если для конкретной системы (например, для бильярда типа звезда с фиксированной геометрией)

² Результаты, излагаемые в этом разделе, были получены в работах [7, 9—11].

расположить все решения уравнения (4.3) в порядке возрастания ($E_1 < E_2 < \dots$), то расстояние между соседними собственными значениями будет меняться случайно вдоль оси энергий. Такая конкретная реализация последовательности собственных значений может быть рассмотрена как представитель некоторого статистического ансамбля. Этот ансамбль образуется в результате, например, малого возмущения геометрии бильярда, которое приводит к сильной перестройке последовательности значений (E_1, E_2, \dots). Однако статистические свойства распределения энергий E_i при этом сохраняются. Характеристикой их распределения является величина $P(E | \Delta E)$, равная вероятности того, что если E есть собственное значение, то ближайшее к нему собственное значение находится на расстоянии ΔE .

Можно определить функцию $P(E | \Delta E)$ в двух предельных случаях: $\Delta E \rightarrow 0$ (т. е. $\Delta E \ll \langle \Delta E \rangle$) и $\Delta E \rightarrow \infty$ (т. е. $\Delta E \gg \langle \Delta E \rangle$), где $\langle \Delta E \rangle$ — среднее расстояние между энергетическими уровнями. При $\Delta E \rightarrow 0$

$$P(E | \Delta E) \propto |\Delta E|^{\frac{\text{const}}{h(E)}}, \quad (4.4)$$

где h — энтропия Колмогорова и величина $\text{const} \sim 1$. Из (4.4) видно, что при $\Delta E \rightarrow 0$ величина $P(E | \Delta E) \rightarrow 0$. Этот факт известен как «расталкивание уровней». Он выражает следствие известной теоремы Вигнера о невозможности пересечения уровней, принадлежащих к одному типу симметрии. Идеи о расталкивании уровней при разрушении квантовых чисел и о возможности их статистического описания были впервые предсказаны в работах [12, 13]. Однако конкретная реализация этих идей (см., например, [14]) в правильной форме не могла быть достигнута, так как в то время еще не была известна связь разрушения квантовых чисел с динамическими свойствами системы.

В работе [15] проведен численный анализ собственных значений для бильярда типа стадион (см. рис. 3). Гистограмма распределения расстояний между уровнями приведена на рис. 4. Она демонстрирует убывание $P(E | \Delta E)$ при $\Delta E \rightarrow 0$ в соответствии с формулой (4.4). Для контроля в работе [15] построена также функция распределения расстояний между уровнями для круга (рис. 5), в котором $P(E | \Delta E)$ при $\Delta E \rightarrow 0$ имеет максимум (это распределение легко может быть получено аналитически, так как краевая задача для круга имеет точное решение).

Во втором предельном случае ($\Delta E \rightarrow \infty$) распределение $P(E | \Delta E)$ имеет вид

$$P(E | \Delta E) = A \exp(-B(\Delta E)^2). \quad (4.5)$$

Формула (4.5) и величины A и B , зависящие от E , получены в [7, 9].

Основной особенностью (4.4) является то, что ее вид определяется в основном одним параметром — энтропией Колмогорова h . Это прямое следствие универсальности классических K -систем,

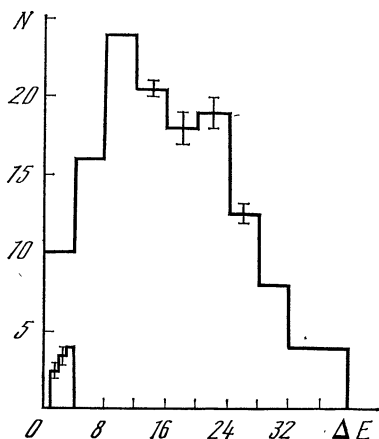


Рис. 4

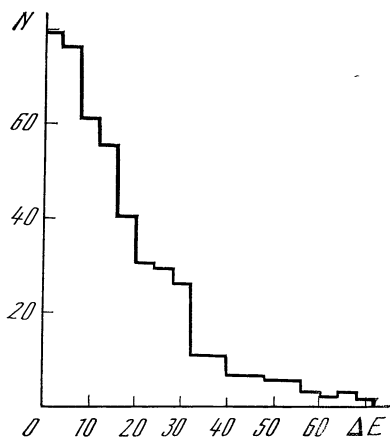


Рис. 5

которое обсуждалось в конце разд. 2. Тем же свойством универсальности обладает и распределение (4.4). Различные квантовые K -системы с одинаковыми значениями \hbar имеют в области квазислучайности один и тот же закон распределения расстояний между уровнями.

Закон распределения энергетических уровней при разрушении интегралов движения имеет обширный круг приложений. Первоначально он возник в связи с задачей об описании возбужденных состояний тяжелых ядер [12, 13]. Аналогичная задача возникает при описании электронных спектров атомов в условиях сильной LS -связи. Однако в последнее время возник новый объект — возбужденные молекулы, в которых колебательные спектры должны иметь квазислучайную структуру. Подробнее о приложениях см. в обзорах [7, 11].

5. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КВАНТОВЫЕ K -СИСТЕМЫ

Рассмотрим теперь задачу, которая была отнесена ранее к первому типу задач. Ее классический вариант определяется гамильтонианом (2.3). В квантовом случае удобно выбрать гамильтониан в форме

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_0 + \varepsilon \hat{V} f(t), \quad \hat{H}_0 = \hbar \omega a^+ a + \hbar^2 \mu_0 (a^+ a)^2, \quad (5.1)$$

$$\hat{V} = \hbar \omega (a^+ + a), \quad f(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

где a^+ , a — операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие перестановочным соотношениям $[a, a^+] = 1$. В классическом пределе величина $\hbar a^+ a$ переходит в действие I и соответственно \hat{H}_0

переходит в

$$H_0 = \omega I + \mu_0 I^2.$$

Величина $(a^+ + a)$ пропорциональна оператору координаты. Параметр μ_0 может быть безразмерен

$$\mu = \mu_0 I / \omega,$$

после чего он совпадает с выражением (2.5) для μ .

Воспользуемся уравнениями движения Гейзенберга

$$i\hbar \dot{a} = [Q, \hat{H}] = \hbar(\omega + \mu_0 \hbar) + 2\mu_0 \hbar^2 a^+ a + \varepsilon \omega \hbar T \sum_{h=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (5.2)$$

Из (5.2) легко получить отображение операторов

$$a_{n+1} = \exp[-i\omega(\bar{a}_n^+ \bar{a}_n) T] \bar{a}_n, \quad a_{n+1}^+ = \bar{a}_n^+ \exp[i\omega(\bar{a}_n^+ \bar{a}_n) T], \quad (5.3)$$

где

$$\omega(\bar{a}_n^+ \bar{a}_n) = \omega + \mu_0 \hbar + 2\mu_0 \hbar \bar{a}_n^+ \bar{a}_n, \quad \bar{a} = a - i\varepsilon, \quad \bar{a}^+ = a^+ + i\varepsilon.$$

Аналогично из уравнения Шредингера с гамильтонианом (5.1) можно получить отображение для волновых функций в шредингеровском представлении

$$\Psi_{n+1} = \exp[-i\varepsilon(a^+ + a)] \exp[-i(\omega a^+ a + \mu_0 \hbar (a^+ a)^2) T] \Psi_n. \quad (5.4)$$

Приведем результаты исследования отображений (5.3) и (5.4) [16—18].

Формулы (5.3) задают отображение \hat{T} для операторов в форме

$$(a_{n+1}^+, a_{n+1}) = \hat{T}(a_n^+, a_n). \quad (5.5)$$

В такой форме его физические свойства определить трудно. Рассмотрим пространство средних значений $\langle \cdot | a_n^+ | \cdot \rangle$ и $\langle \cdot | a_n | \cdot \rangle$

$$\alpha_n^* = \langle \cdot | a_n^+ | \cdot \rangle, \quad \alpha_n = \langle \cdot | a_n | \cdot \rangle, \quad (5.6)$$

где $\langle \cdot | \cdot | \cdot \rangle$ — векторы некоторого нормированного базиса, обладающего свойством полноты. Операцию усреднения назовем проектированием, а пространство (α_n^*, α_n) — фазовым пространством. Тогда проектирование уравнения (5.6) дает

$$(\alpha_{n+1}^*, \alpha_{n+1}) = \hat{\mathcal{F}}(\alpha_n^*, \alpha_n), \quad (5.7)$$

где $\hat{\mathcal{F}}$ есть оператор сдвига на время T в пространстве проекций (α^*, α) . Заметим, что при проектировании свойство марковости отображения, которое имеет место в классическом случае, может быть потеряно. Это означает, что оператор $\hat{\mathcal{F}}$ зависит не только от (α_n^*, α_n) , но и от предыдущих значений (α^*, α) .

Формулу (5.7) можно уже исследовать обычными классическими методами, так как это выражение записано для c -чисел.

Удобно в качестве базиса $|\cdot\rangle, \langle\cdot|$ выбрать базис когерентных состояний для начальных значений операторов

$$a_0 |\alpha\rangle = \alpha_0 |\alpha_0\rangle, \quad \langle\alpha_0| a_0^\dagger = \alpha_0^* \langle\alpha_0|.$$

В работах [16, 17] был предложен метод получения оператора $\hat{\mathcal{F}}$ в виде разложения по степеням \hbar . Из него следовало, что

$$(\alpha_{n+1}^*, \alpha_{n+1}) = \hat{T}_{cl}[1 + O(\mu_0 \hbar T e^{2nl n K})](\alpha_n^*, \alpha_n) \quad (K \gg 1). \quad (5.8)$$

Здесь \hat{T}_{cl} — классическое отображение типа (2.4), параметр растяжения K определен формулой (2.6) и в квадратных скобках стоит квантовая поправка, которая экспоненциально нарастает с ростом времени n . В устойчивом случае ($K < 1$) квантовая поправка к отображению \hat{T}_{cl} растет со временем степенным образом.

Таким образом, классические результаты оказываются справедливыми для времен

$$n < n_n \equiv \frac{\ln(1/\mu_0 \hbar T)}{\ln K}. \quad (5.9)$$

Причина расходимости в (5.8) имеет очевидный смысл и связана с распылением волнового пакета в фазовом пространстве. Вследствие локальной неустойчивости скорость распыления является экспоненциальной.

В [7, 18] получен параметр

$$\zeta = \mu_0 \hbar T, \quad (5.10)$$

такой, что при $\zeta \ll 1$ существует область применимости (по времени) классических результатов, а при $\zeta \gg 1$ распыление пакета происходит за один шаг отображения и квазиклассическое приближение сразу неприменимо. Это показывает, что для $\zeta \ll 1$ и при $n > n_n$ задача об эволюции квантовой K -системы является существенно квантовой, несмотря на то что обычные условия квазиклассичности могут быть выполнены ($\epsilon I/\hbar \gg 1$).

Исследование асимптотики больших времен для системы (5.1) проведено в [18]. Введем аналог классических переменных действие—угол для проекций

$$\alpha_n = I_n^{1/2} \exp(-i\vartheta_n).$$

Тогда можно ввести коррелятор R фаз ϑ аналогично формуле (2.7). Анализ [18] показывает, что при $\zeta \ll 1$ корреляционная функция R_n убывает экспоненциально с ростом n , подобно тому как это имеет место в классическом пределе (см. формулу (2.7) с $t = nT$). Такая эволюция системы происходит до времен, пропорциональных n_n (см. (5.9)) и коррелятор фаз достигает значения

$$R_{n_n} \sim (\mu_0 \hbar T)^{1/4}. \quad (5.11)$$

При дальнейшем росте n убывание коррелятора происходит степенным образом

$$R_n \gtrsim \text{const} \left(\frac{\hbar}{n\epsilon I} \right)^{1/4} \quad (n \gg n_n). \quad (5.12)$$

Формулы (5.11) и (5.12) показывают, что квантовые системы обладают достаточно сильными корреляционными эффектами, которые начинают проявляться на больших временах.

Незатухающие корреляции фаз естественным образом влияют на диффузию системы по переменной действия I . Несмотря на то что коррелятор фаз мал (см. (5.10) и (5.11)), он приводит к накапливающимся эффектам в изменении $\langle \Delta I \rangle$, и эти изменения могут привести к отличию в диффузии квантовой K -системы от соответствующей классической. Такой эффект наблюдался в численных экспериментах для модели, близкой к (5.1) [19].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше приведены два типа характерных задач для квантовых K -систем. Особенностью «квантования» является существенное влияние корреляционных эффектов. Отметим, что асимптотика распределения энергетических уровней при $\Delta F \rightarrow 0$ обладает масштабной инвариантностью. Ограничения объема не позволяют нам остановиться более детально на других особенностях квантовых K -систем и на многочисленных приложениях. Этот пробел могут восполнить обзоры [7, 11, 19].

Укажем в заключение на одну из проблем, которые возникают в связи с анализом квантовых K -систем. В классической механике гамильтоновых систем существует хорошо определенное понятие интегрируемости динамической системы. Отсутствие интегрируемости порождает стохастичность и наоборот. Однако эквивалентное понятие интегрируемости квантовых систем отсутствует, и поэтому не ясно, что в квантовых системах соответствует классическому понятию границы неинтегрируемости (границе стохастичности или границе разрушения интегралов движения). Ряд других задач приведен в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Г. М., Чуриков Б. В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний.— УФН, 1971, 105, с. 3—40.
2. Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970. 143 с.
3. Chirikov B. V. A universal instability of manydimensional oscillator systems.— Phys. Rep., 1979, 52, p. 263—379.
4. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 383 с.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
6. Bunimovich L. A. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards.— Commun Math. Phys., Springer, 1979, 65, S. 295—312.
7. Zaslavsky G. M. Stochasticity in quantum systems.— Physics Rep., Amsterdam, 1981, 80, p. 157—250.
8. Einstein A.— Verhandl. Dtsch. phys. Ges., 1917, 19, S. 82—92.
9. Заславский Г. М., Филоненко Н. Н. Статистические свойства энергетического спектра скользящих электронов с перемешивающимися классическими траекториями.— ЖЭТФ, 1973, 65, с. 643—656.

10. Заславский Г. М. Статистика энергетических условий при разрушении интегралов движения.— ЖЭТФ, 1977, 73, с. 2089—2097.
11. Заславский Г. М. Статистика энергетического спектра.— УФН, 1979, 129, с. 211—238.
12. Ландау Л. Д., Смородинский Я. А. Лекции по теории ядра. М.: Гостехиздат., 1955. 140 с.
13. Wigner E. P.— Math. Ann., 1951, 53, S. 36—67; 1955, 62, S. 548—564; 1957, 65, S. 203—207; 1958, 67, S. 325—326.
14. Dyson F. J. Statistical theory of the energy levels of complex systems.— J. Math. Phys., 1962, 3, p. 140—175.
15. McDonald V., Kaufman A. Spectrum and eigenfunctions for a Hamiltonian with stochastic trajectories.— Phys. Rev. Lett., 1979, 42, p. 1189—1191.
16. Berman G. P., Zaslavskii G. M. Condition of stochasticity in quantum nonlinear systems. II Kinetic description of quantum K-systems.— Physica A, 1978, 91A, p. 450—460.
17. Берман Г. П., Заславский Г. М. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний.— ДАН СССР, 1978, 240, с. 1082—1085.
18. Берман Г. П., Заславский Г. М. Квантовые отображения и проблема стохастичности в квантовых системах: Препринт № 164Ф. Красноярск: ИФ СО АН СССР, 1981. 48 с.
19. Chirikov B. V., Izraelev F. M., Shepelyanskii D. L. Dynamical stochasticity in classical and quantum mechanics.— Soviet Scientific Reviews, 1981, 2С, p. 209—267.

УДК 532.59

ВИХРИ В МЕЛКОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ АТМОСФЕРЕ

В. И. ПЕТВИАШВИЛИ, О. А. ПОХОТЕЛОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

В атмосфере Земли, Юпитера и других вращающихся планет наблюдаются уединенные вихри, размер которых порядка радиуса Россби, что много больше глубины самой атмосферы. Это обстоятельство позволяет рассматривать их в рамках двумерной модели. К таким вихрям прежде всего следует отнести Красное пятно Юпитера и тропические циклоны или тайфуны, образующиеся в атмосфере Земли. Самым замечательным и труднообъяснимым свойством таких вихрей является их большое время жизни по сравнению с характерным временем — периодом вращения планеты.

В длинноволновом пределе в атмосфере известны три типа колебаний: волны Россби, частота которых много меньше частоты вращения планеты ω_0 , инерционные волны, частота которых близка к ω_0 , и хорошо известные длинноволновые гравитационные волны с частотой $\omega \gg \omega_0$.

Далее покажем, что волны Россби и инерционные волны могут образовывать уединенные вихри с размерами, большими радиуса Россби, вращающиеся и перемещающиеся в направлении против вращения планеты. Скорость их порядка дрейфовой скорости (скорости Россби). Такие вихри, возможно, соответствуют пятнам на Юпитере и тайфунам на Земле, а недавно были смодели-

рованы в лаборатории [1]. Вихри возникают из-за закручивания ветра силой Кориолиса и надолго сохраняют свою форму. Представляет интерес упрощенное описание этих явлений.

2. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕЛКОЙ АТМОСФЕРЫ

В работе [2] получена следующая система уравнений, описывающая волны во вращающейся атмосфере, глубина которой много меньше длины волны:

$$dv/dt = -gH_0 \nabla h + f [v\xi], \quad (1)$$

$$\partial h/\partial t + \operatorname{div} v (1 + h) = 0, \quad (2)$$

где v — горизонтальная составляющая скорости атмосферы, $f = 2\omega_0 \sin \alpha$; α — широтный угол; ξ — единичный вектор вдоль вертикали; g — ускорение силы тяжести; H_0 — глубина однородной атмосферы; $h = (H - H_0)/H_0$ — относительное возмущение глубины атмосферы.

В этой модели атмосфера представляется как несжимаемая мелкая жидкость постоянной глубины H_0 . Дисперсионное уравнение малых колебаний атмосферы имеет вид

$$\omega (1 + k^2 r_0^2 - \omega^2/f^2) = -k_\phi v_*, \quad (3)$$

где $r_0 = (gH_0)^{1/2}/f$ — радиус Россби; $v_* = gH_0/2\omega_0 R \sin^2 \alpha$ — дрейфовая скорость Россби; R — радиус планеты; k_ϕ — проекция волнового вектора колебаний на параллель.

Уравнение (3) описывает две ветви. Ветвь, частота которой много меньше f

$$\omega = -\frac{k_\phi v_*}{1 + k^2 r_0^2}, \quad (4)$$

соответствует волнам Россби.

При частотах, много больших f , имеем гравитационные волны на мелкой воде. Наконец, при $\omega \sim f$ из (3) получим дисперсионное уравнение инерционных волн в мелкой вращающейся атмосфере

$$\omega = f (1 + k^2 r_0^2/2). \quad (5)$$

3. ВИХРЬ РОССБИ И КРАСНОЕ ПЯТНО ЮПИТЕРА

В работе [3] показано, что волны Россби могут образовывать уединенный вихрь. Следуя этой работе, выведем упрощенное уравнение, описывающее только волны Россби. Для этого предположим $f \gg d/dt$, что согласуется с параметрами Красного пятна. Тогда из (1) получим разложение в ряд по степеням ω/f

$$v = g \frac{H_0}{f} [\xi \nabla h] - g \frac{H_0}{f^2} \nabla \frac{\partial h}{\partial t} - r_0^2 \frac{\partial \nabla h}{\partial t} - f r_0^4 ([\xi \nabla h] \nabla) \nabla h + \dots \quad (6)$$

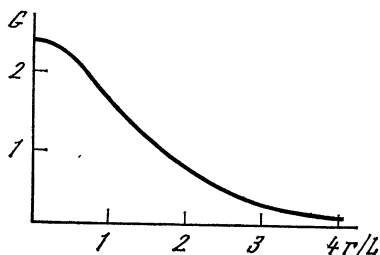


Рис. 1. Зависимость функции G от r/L

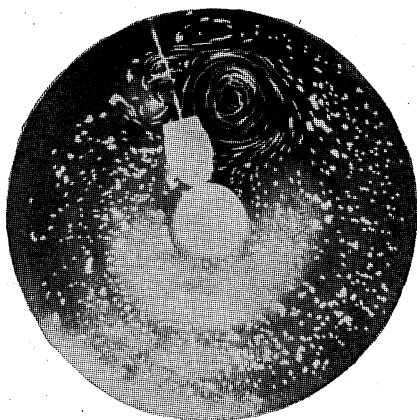


Рис. 2. Поверхность вращающейся жидкости с возбужденным вихрем Россби

Подставляя (6) в (1) и опуская малые члены, получим искомое замкнутое уравнение относительно h

$$\frac{\partial}{\partial t} (h - r_0^2 \Delta h) - \frac{v_*}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} (h + h^2/2) = fr_0^4 ([\xi \nabla h] \nabla) \Delta h. \quad (7)$$

Из (4), (7) видно, что волны Россби похожи на дрейфовые волны в плазме [4]. Сходство вызвано тем, что во вращающейся атмосфере и замагниченной плазме действуют близкие по свойствам силы: сила Кориолиса и сила Лоренца. Роль радиуса Лармора при этом играет радиус Россби. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что уравнение (7) имеет стационарное решение $h = F(\varphi + ut/R, \alpha)$, где F удовлетворяет уравнению

$$r_0^2 \Delta F = \left(1 - \frac{v_*}{u}\right) F - \frac{3v_*}{2u} F^2 + F_1 \left(F - \frac{u}{2v_*}\right). \quad (8)$$

Здесь F_1 — произвольная функция. Для уединенного вихревого решения необходимо чтобы $F_1 = 0$. Постоянная u/R есть угловая скорость перемещения вихря вдоль параллели. Уравнение (8) легко решается, если размеры вихря много меньше R . Тогда в нулевом приближении v_* можно считать постоянной. В этом случае получим решение, зависящее только от расстояния r в горизонтальной плоскости до центра вихря:

$$F = \frac{2r_0}{3L} G\left(\frac{r}{L}\right), \quad (9)$$

где L — характерный размер вихря. График функции G представлен на рис. 1.

Вращение вихря, как и его распространение, направлено против вращения планеты. Как в антициклоне, давление в середине вихря больше, чем на краях.

Недавно получены данные Юпитера [5], качественно согласующиеся с полученным решением. Параметры Юпитера примерно равны

$$R \sim 7 \cdot 10^7 \text{ м}, \quad \omega_0 \sim 3,5 \cdot 10^4 \text{ рад/с}, \quad r_0 \sim 2 \cdot 10^6 \text{ м}, \quad (10)$$

$$v_* \sim 10^3 \text{ м/с}.$$

При наличии слоя холодного воздуха у поверхности или по другим причинам эти величины эффективно могут стать меньше. С учетом (10) видно, что параметры полученного решения хорошо согласуются с наблюдаемыми свойствами Красного пятна Юпитера. В работе [3] указано, что этот вихрь можно легко смоделировать на мелкой жидкости во вращающемся сосуде с параболическим профилем дна. На рис. 2 приводится фотография вихря, полученного в таком сосуде [1]. В этой работе замечено, что возможны уединенные вихри только антициклонического типа, а уединенные циклоны невозможны, что согласуется с выводами теории.

4. ВИХРЬ ИНЕРЦИОННЫХ ВОЛН И ТАЙФУНЫ НА ЗЕМЛЕ

Покажем, что колебания с частотой $\omega \sim f$ (инерционные волны) также могут образовывать уединенный вихрь. Основной нелинейностью при этом является высокочастотное давление, приводящее к образованию потенциальной ямы на волнах Россби. Эта яма препятствует дисперсионному расплыванию инерционных волн и приводит к образованию осциллирующего уединенного вихря.

Введем переменные

$$A \equiv \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad B = \operatorname{rot}_{\zeta} \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = h\mathbf{v}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{v}\nabla v. \quad (11)$$

Все переменные считаем зависящими от времени в виде

$$A = A_0 + A_1 \exp(ift) + A_2 \exp(i2ft) + \dots \text{ и т.д.} \quad (12)$$

Считая первую гармонику много большей остальных, в линейном приближении имеем

$$h_1 = iA_1/f, \quad B_1 = iA_1. \quad (13)$$

Первая гармоника оказывает высокочастотное давление на атмосферу. Вследствие этого глубина атмосферы меняется на величину h_0 . Ее можно вычислить из уравнения непрерывности (2)

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} - v_* \frac{\partial h_0}{\partial \varphi} - r_0^2 \Delta \frac{\partial h_0}{\partial t} = v_* \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{|v_1|^2}{gH_0}. \quad (14)$$

Считая, что вихрь бежит со скоростью c вдоль параллели, $\partial/\partial t$ можно заменить на $c\partial/\partial\varphi$. Отсюда

$$r_0^2 \Delta h_0 = \left(1 - \frac{v_*}{c}\right) h_0 - \frac{v_*}{c} \frac{|v_1|^2}{gH_0}. \quad (15)$$

Это уравнение по форме сходно с уравнением изменения плотности плазмы под влиянием ВЧ-давления ленгмюровских волн [6]. В уравнении для первой гармоники учтем малые члены. К этим членам относим дисперсионную поправку и линейные поправки.

Из уравнений (1), (2) получаем

$$2if \frac{\partial A_1}{\partial t} + gH_0 \Delta A_1 = -if \operatorname{div} \mathbf{N}_1 - f \operatorname{rot}_{\zeta} \mathbf{N}_1 + gH_0 \Delta \operatorname{div} \mathbf{P}_1, \quad (16)$$

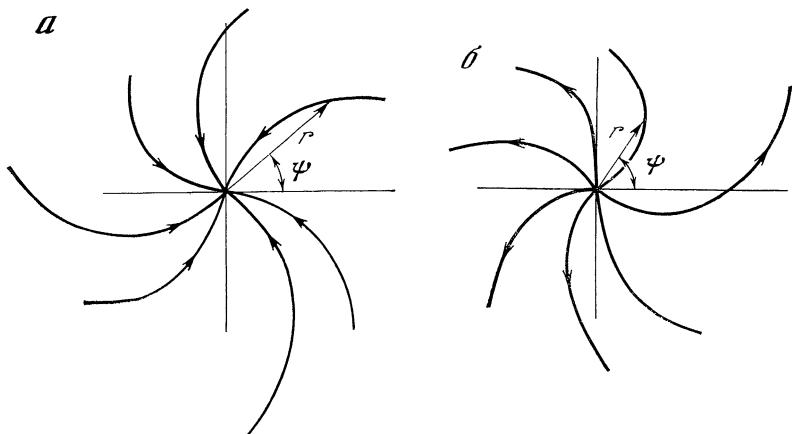


Рис. 3. Линии тока вихря ($m = 0$) в полярной системе координат r, ψ (стадия накачки атмосферы в центр вихря («глаз») (а) и истечения атмосферы из «глаза» вихря (б))

где

$$N_1 = \frac{igH_0}{f} [\nabla (\mathbf{v}_1 \nabla h_0) - \mathbf{v}_1 \Delta h_0 - A_1 \nabla h_0], \quad (17)$$

$$P_1 = \mathbf{v}_1 h_0. \quad (18)$$

Вкладом от нелинейностей на второй гармонике пренебрегаем как малой более высокого порядка.

Ищем стационарное решение уравнения (16). Для этого вводим полярную систему координат (r, ψ) с центром в начале вихря и полярным углом ψ , отсчитываемым против часовой стрелки. После этого ищем решение уравнения (16) в виде

$$v_r = u(r) \exp(im\psi), \quad v_\psi = iv_r, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (19)$$

В результате преобразований получаем уравнение для амплитуды скорости вихря

$$(1 + h_0) \Delta_{m-1} u = \frac{2\Omega fu}{gH_0} - 3 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial h_0}{\partial r} - \frac{(m-1)}{r} u \frac{\partial h_0}{\partial r} + \frac{1}{r^{1-m}} \int r^{1-m} dr \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{m-1}{r} u \right) \Delta h_0. \quad (20)$$

Решение этого уравнения для $m = 0$ качественно имеет вид, приведенный на рис. 3, а, б. Линии тока вихря расположены по спиральям, вдоль которых происходят осцилляции атмосферы с частотой f . При $m = 0$ эти осцилляции происходят в фазе. Если в вихре $m = 1$, то в диаметрально противоположных точках вихря осцилляции скорости атмосферы происходят в противофазе и т. д.

Полученное решение можно сравнить с наблюдаемыми свойствами тайфунов, возникающих в тропической зоне земной атмосферы. Тайфун представляет собой систему очень сильных ветров, дующих по спирали вокруг безветренного центра, назы-

ваемого глазом. Такая структура тайфуна в целом похожа на качественное решение, приведенное на рис. 3, а, б. Характерные значения радиуса Россби и дрейфовой скорости определяются эффективной высотой однородной атмосферы. В случае тайфуна эта высота может быть порядка 1 км из-за наличия тонкого слоя влажного воздуха. Поэтому эффективная величина радиуса Россби может оказаться в случае с Землей порядка нескольких сот километров, что примерно соответствует размерам тайфуна. Дрейфовая же скорость примерно равна $20 \div 40$ м/с, что соответствует его скорости распространения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипов С. В., Незлин М. В., Снежкин Е. А., Трубников А. С. Солитон Россби.— Письма в ЖЭТФ, 1981, 33, с. 368—372.
2. Morikawa G. K. Geostrophic vortex motion.— J. Meteorol., 1960, 17, p. 148—151.
3. Петвиашвили В. И. Красное пятно Юпитера и дрейфовый солитон в плазме.— Письма в ЖЭТФ, 1980, 32, с. 632—635.
4. Hasegawa A., McLennan C. G., Kodama Y. Nonlinear behaviour and turbulence spectra of drift waves and Rossby waves.— Phys. Fluids, 1979, 22, p. 2122—2129.
5. Muxworthy T., Redekopp L. G. A solitary wave theory of the Great Red Spot and other observed features in the Jupiter atmosphere.— Ikarus, 1976, 29, p. 261—271.
6. Захаров В. Е. Коллапс ленгмюровских волн.— ЖЭТФ, 1972, 62, с. 1745—1759.

УДК 621.372.22

СВЯЗАННЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СОЛИТОННЫЕ ОБРАЗОВАНИЯ

К. А. ГОРШКОВ, В. А. МИРОНОВ, А. М. СЕРГЕЕВ

Исследование солитонов в последнее время является одной из важнейших проблем в математической теории нелинейных волн. Прогресс в изучении динамики солитонов и интерес, проявляемый к такого рода волновым процессам практически во всех областях физики, в значительной мере обусловлены открытием точных методов решения нелинейных уравнений в частных производных [1]. Наибольший интерес с физической точки зрения представляют получаемые с помощью точных методов так называемые N -солитонные решения, описывающие взаимодействия N уединенных волн. С их помощью удалось выявить принципиальную роль солитонов при решении самых разнообразных физических проблем. Отметим здесь возможную интерпретацию солитонов как полевых частиц в нелинейной теории полей, описание сильной ленгмюровской турбулентности плазмы с помощью набора солитонов, возможную связь фазовых переходов с возбуждением нелинейных мод в виде последовательности солитонов в некоторых моделях физики твердого тела.

Существенно, что точные N -солитонные решения описывают, как правило, взаимодействие первоначально удаленных друг от друга уединенных волн, причем в большинстве исследованных случаев оказывается, что после столкновения остаются расходящиеся солитоны с теми же параметрами, что и до взаимодействия. Вместе с тем для физических приложений, в том числе и для упоминавшихся выше, могут представлять непосредственный интерес N -солитонные решения другого типа, называемые мультисолитонами, и представляющие собой стационарные связанные состояния, составленные из одиночных солитонов и двигающиеся как единое целое. Исследованию этого типа N -солитонных решений посвящена настоящая работа.

В довольно общей постановке вопрос о существовании мультисолитонов может быть решен применительно к слабо взаимодействующим уединенным волнам с близкими параметрами, если расстояние между ними существенно превосходит их эффективные размеры. Известно [2], что при этих условиях динамика взаимодействия солитонов тождественна динамике частиц с парным потенциалом взаимодействия и, вообще говоря, с анизотропной массой

$$M_{kl} \frac{d^2 s_k^{(i)}}{dt^2} = \sum_j U_{s_l^{(i)}}(\dots, s^{(i)} - s^{(j)}, \dots), \quad (1)$$

где $s_k^{(i)}$ — k -я координата центра i -го солитона. Укажем, что в случае, когда система уравнений поля может быть записана в лагранжевой форме, масса частицы стандартным образом выражается через полный волновой импульс солитона

$$M_{kl} = \frac{\partial P_l}{\partial V_k}, \quad P_l = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial L}{\partial \Phi_t} \Phi x_l, \quad (2)$$

а парный потенциал взаимодействия оказывается равным приращению нелинейной части функции Лагранжа, связанному с наличием поля соседних солитонов в месте расположения данного (i -го):

$$U(\dots, s^{(i)} - s^{(j)}, \dots) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta L_N}{\delta \Phi} \Big|_{\Phi(x=s^{(i)})} \Phi(x - s^{(j)}) dx. \quad (3)$$

В этой ситуации решение вопроса о существовании мультисолитонов сводится, очевидно, к нахождению равновесных пространственных конфигураций частиц с заданным законом взаимодействия. Эти общие соображения продемонстрируем на конкретном примере, изложенных ниже.

1. СЕМЕЙСТВА МУЛЬТИСОЛИТОНОВ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ АСИМПТОТИКИ ПОЛЯ ОДИНОЧНОГО СОЛИТОНА

Обсуждение естественно начать с одномерных примеров как наиболее простых, поскольку, во-первых, в этом случае пространственная конфигурация связанных солитонов единственна (они расположены вдоль прямой) и, во-вторых, для типичных ситуаций структурный вид потенциала взаимодействия известен [2, 3]:

$$U(s) = \sum_k \operatorname{Re} C_k \exp(\lambda_k |s|), \quad (4)$$

где C_k — постоянные; λ_k — характеристические корни линеаризованных стационарных уравнений поля (берутся только корни с $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$). Из (4) сразу следуют два общих вывода.

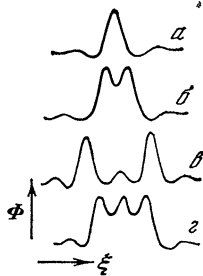


Рис. 1. Типы солитонов (а—г)

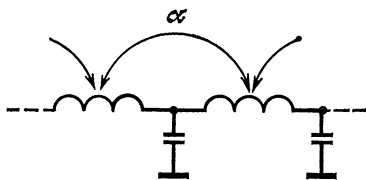


Рис. 2. Линия передачи

1. Если корень с $\max \operatorname{Re} \lambda_k$ имеет ненулевую мнимую часть, то $U(s)$ имеет бесконечное число экстремумов и, следовательно, такое же число возможных типов двойных мультисолитонов.

2. Если корень с $\max \operatorname{Re} \lambda_k$ — чисто действительный, то потенциал взаимодействия может иметь лишь конечное число экстремумов или не иметь их вовсе. Поэтому по крайней мере двойных мультисолитонов может быть либо конечное число, либо не быть совсем.

К первому типу относятся так называемые осциллирующие солитоны, впервые обнаруженные Кавахарой [4] при численном исследовании стационарных (зависящих от $\xi = x - vt$) решений обобщенного уравнения Кортевега—де Вриза

$$\Phi_t + \Phi \Phi_x + \beta_1 \Phi_x^{(3)} + \beta_2 \Phi_x^{(5)} = 0. \quad (5)$$

Кавохарой был найден лишь одиночный солитон этого уравнения (рис. 1, а). Позднее, исследуя эти солитоны экспериментально, Папко обнаружил, что, кроме одиночных, существует целый набор разнообразных связанных состояний, в том числе и стационарных; некоторые из них приведены на рис. 1, б — г [3]. Эксперименты проводились в электромагнитной линии передачи радиодиапазона с нелинейными емкостями и взаимноиндуктивной связью ($0 \leq \alpha \leq 1$) между соседними звеньями (рис. 2).

Континуальным аналогом такой линии является уравнение (5) с $\beta_1 = (1/12 - \alpha)(1 + 2\alpha)^{1/2}$, $\beta_2 = (1/360 - \alpha/12)(1 + 2\alpha)^{1/2}$. Из линеаризованного вблизи $\Phi = 0$ стационарного уравнения (5) легко найти, что при $\beta_1^2 + 4\beta_2 V < 0$ характеристические корни λ_k имеют вид $\pm \text{Re } \lambda \pm i \text{Im } \lambda$, так что потенциал взаимодействия $U(s) \sim \exp(-|\text{Re } \lambda|s) \cos[(\text{Im } \lambda)s]$ и число мультисолитонов бесконечны (счетны).

Здесь имеется возможность более строгого доказательства этого результата. Как показано Пиковским [3], в 4-мерном фазовом пространстве стационарного уравнения (5) существует гомоклиническая структура, включающая счетное множество замкнутых траекторий, соответствующих мультисолитонам.

Следующий пример, близкий к только что рассмотренному, относится к самофокусировке стационарных волновых пучков в замагниченной плазме. Как следует из работы [5], поперечная структура плоских пучков электромагнитных волн, распространяющихся в «особых» направлениях, описывается уравнением

$$-u\Phi + \beta\Phi^3 + \alpha\Phi^{(2)} + \Phi^{(4)} = 0, \quad (6)$$

которое, очевидно, имеет те же характеристические корни λ_k , что и (5). Поэтому существование одиночного солитона в этом случае порождает тот же бесконечный набор мультисолитонов, что и в предыдущем примере. Существенное отличие заключается в том, что каждое связанное состояние из N солитонов уравнения (5) здесь оказывается вырожденным. Действительно, поскольку (6) инвариантно относительно преобразования $\Phi \rightarrow -\Phi$, то любой из одиночных солитонов в связанном состоянии может быть взят с произвольным знаком.

2. МНОГОСОЛИТОННЫЕ ОБРАЗОВАНИЯ В СИСТЕМАХ С НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Достаточно жесткие условия применимости (5, 6) могут показаться свидетельством исключительности рассмотренных выше многосолитонных образований. Вообще реальные физические системы, описываемые уравнениями с аналогичным асимптотическим поведением уединенных решений, представляются весьма редкими. В этой связи нам кажется важным продемонстрировать, что мультисолитоны могут играть на самом деле значительную роль в фундаментальных физических уравнениях, справедливых не только в случае ЭМ-волн в замагниченной и изотропной плазме, но и, например, для квантовых систем элементарных частиц. Одно из них — уравнение Шредингера вида

$$-i\Psi_t + \Delta\Psi + \Psi \int |\Psi(\mathbf{r}')|^2 V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 0, \quad (7)$$

в котором потенциал взаимодействия $V(\mathbf{R})$ характеризует степень нелокальности нелинейных свойств системы.

1. Важным примером является экспоненциально быстрое падение потенциала «точечного источника» в пространстве [6, 7] $V(\mathbf{R}) = \exp(-|\mathbf{R}|)/|\mathbf{R}|$. При этом (7) описывает, в частности, тепловое самовоздействие пучков ЭМ-волн в плазме [8] и может быть представлено в более привычном виде системой

$$-i\Psi_z + \Delta\Psi + \theta\Psi = 0, \quad (8)$$

$$\Delta\theta - \theta = -|\Psi|^2, \quad (9)$$

где θ — относительное возмущение температуры при нагреве среды; Ψ — безразмерная комплексная амплитуда электрического поля, а характерным пространственным масштабом в материальной связи (9) служит длина теплопроводности.

Рассмотрим сначала одномерные локализованные решения системы (8) — (9) вида $\Psi = \Phi(x) \exp(-iEz)$, $\theta = \theta(x)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\Phi_{xx} - E\Phi + \theta\Phi = 0, \quad \theta_{xx} - \theta + \Phi^2 = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что переход к локальной нелинейности реализуется при $E \rightarrow 0$, а соответствующий солитон имеет четное распределение поля

$$\Phi = \sqrt{2E} \operatorname{ch}^{-1}(\sqrt{Ex}). \quad (11)$$

С помощью численного интегрирования удается показать, что во всем диапазоне значений $0 < E \leq 1$ единственное решение единственно и топологически не отличается от (11). Для $E = 1$ можно записать следующее аналитическое выражение солитона:

$$\Phi = \Psi_{\frac{E}{2}} = 3/2 \operatorname{ch}^{-2}(x/2). \quad (12)$$

Все собственные значения задачи (10) для $E > 1$ бесконечно вырождены. При этом собственные функции «составляются» путем последовательного «добавления» одиночного солитона так, чтобы фазы колебаний в отдельных сгустках поля были сдвинуты на π (рис. 3), т. е. имеет место квазисуперпозиция таких образований. При $E \rightarrow 1$ расстояние между солитонами увеличивается, так что в пределе остается простой солитон с распределением (11).

Исследование устойчивости связанного состояния наиболее просто провести в случае бисолитонного решения для $E \approx 1$. При

этом расстояние между солитонами $\bar{x} = 2 \int_0^{\infty} x |\Psi|^2 dx$ существенно

больше их размеров и взаимодействие между ними осуществляется «хвостами». Переходя от уравнения Шредингера к уравнению движения солитонов разной полярности и формы (12), получим

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \frac{81}{2} \exp(-\sqrt{E}\bar{x}) - \frac{81}{16} \exp(-\bar{x}).$$

Видно, что устойчивое связанное состояние возможно лишь при $E > 1$, а расстояние между солитонами составляет $x_0 = \ln 8 / (\sqrt{E} - 1)$, что совпадает с численными расчетами.

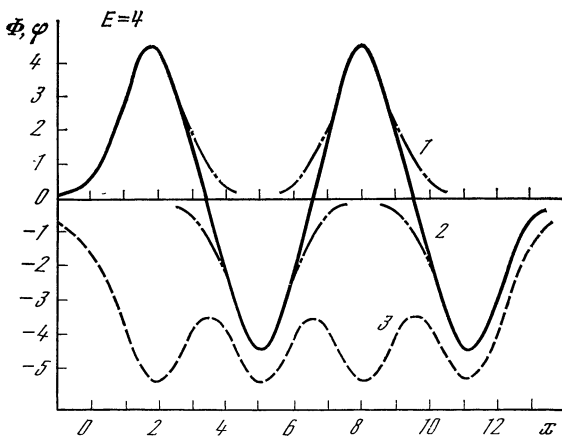


Рис. 3. Структура мультисолитона

1 — одиночный солитон; 2, 3 — Φ и ϕ соответственно

Исследование двумерных связанных многосолитонных образований осложняется тем, что наряду с основной устойчивой аксиально-симметричной модой такой системы существуют высшие (резонансные) симметричные распределения [9], которые неустойчивы по отношению к разбиению на отдельные простые структуры типа основного солитона. Можно, однако, утверждать, что связанные состояния солитонов основного типа появляются при $E > 1$, когда масштаб распределения температуры больше характерного поперечного размера поля, т. е. нелинейность существенно нелокальна. Аналогично одномерной задаче и здесь в нелинейной системе выполнен принцип «суперпозиции», но набор мультисолитонов, естественно, богаче (рис. 4, а — е).

Полученный результат можно обобщить и на трехмерный случай. Интересно отметить, что при этом исходная система (8), (9) использовалась для определения структуры нуклонов с волновой функцией Ψ в согласованном поле ядерных сил с потенциалом ϕ типа Юкавы [10]. Здесь слабое возмущение структуры солитонов и их взаимодействие «хвостами» соответствуют малому дефекту масс при синтезе ядер.

Выбранный потенциал $V(R)$ не является исключительным, скорее нелокальность взаимодействия представляет правило, благодаря которому происходит «склеивание» одиночных солитонов в сложное образование. Для сильно нелокальной нелинейности ($E \gg 1$) в левой части (9) можно пренебречь членом θ и перейти к кулоновскому потенциалу. В таком виде система (8) — (9) используется, например, в квантовой хромодинамике при описании Ψ -функции кварков в барионе, взаимодействующих на малых расстояниях по закону Кулона [11]. Поэтому исследованные решения могут представлять интерес в теории многочастичных квантовых систем.

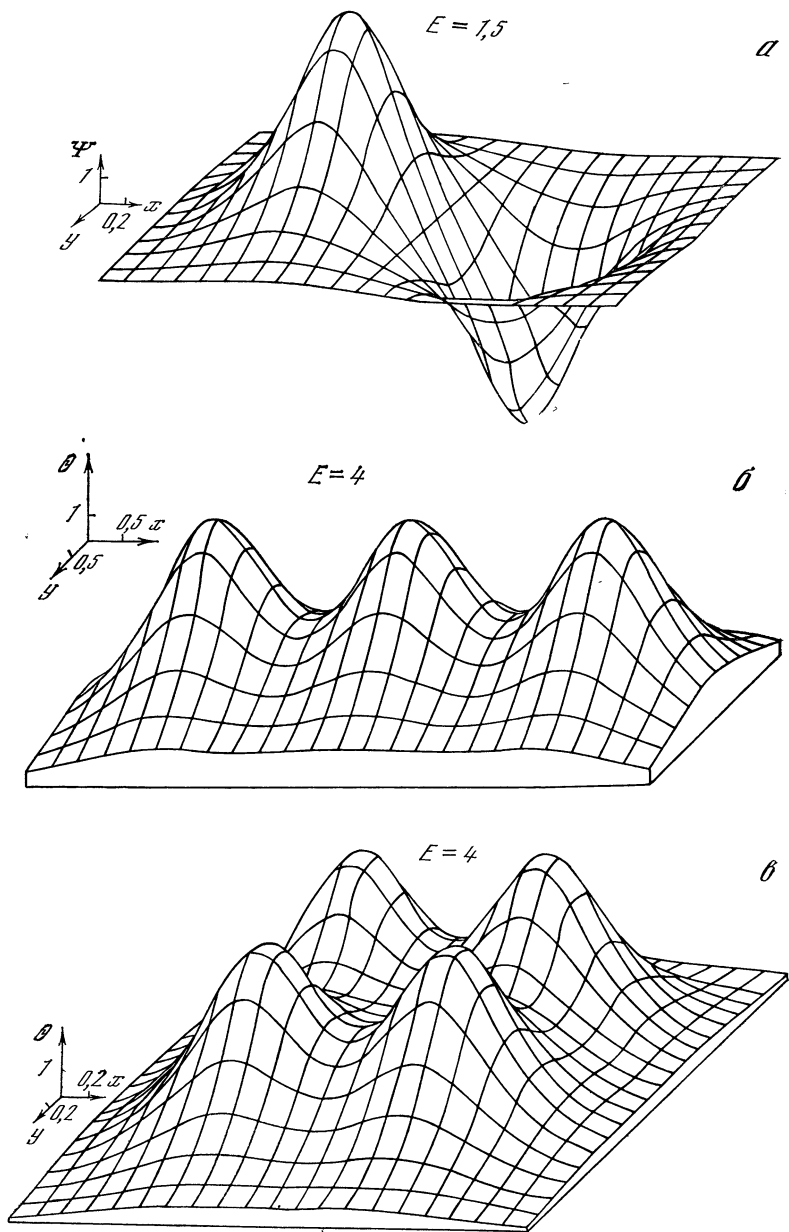


Рис. 4. Распределение поля в бисолитоне (а), потенциалов в двумерных три солитоне (б) и тетрасолитоне (в)

2. Для потенциала взаимодействия $V(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R}) - \exp \times (-|\mathbf{R}|)/|\mathbf{R}|$ в одномерном случае исходное интегродифференциальное уравнение (7) описывает самовоздействие пакетов верхнегибридных плазменных волн, распространяющихся с дозвуковой скоростью в плазме низкого давления ($\beta = 8\pi NT/H_0^2$, $\beta \ll 1$) в направлении, перпендикулярном постоянному магнитному полю H_0 [6]. Решение, соответствующее солитонам, удовлетворяет при этом стационарной системе уравнений

$$\Phi'' - (E + n)\Phi = 0, \quad (13)$$

$$n'' - n + (\Phi^2)'' = 0. \quad (14)$$

Из первого интеграла системы (13), (14)

$$-1/2 [(n - \Phi^2)']^2 - (n - \Phi^2)^2 + (\Phi')^2 - E\Phi^2 - \Phi^4/2 + n\Phi^2 = 0$$

нетрудно установить, что могут реализоваться лишь четные локализованные распределения. Качественное представление о структуре таких решений можно получить для достаточно узких (в масштабе ларморовского радиуса) распределений поля в верхнегибридном солитоне. При этом удобно исходить из уравнения

$$\Phi'' + (\Phi^2 - E - u)\Phi = 0, \quad u = 1/2 \int \Phi^2(x') \exp(-|x - x'|) dx', \quad (15)$$

эквивалентного системе (13), (14). Очевидно, что в случае $E \gg 1$ интегральная часть в нелинейном члене является плавной (на характерном масштабе солитона $(\sqrt{E})^{-1}$) функцией. Поэтому солитонные решения (15) можно построить в адиабатическом приближении, рассматривая u как медленно меняющийся параметр. На фазовой плоскости (Φ, Φ') , определяемой локальным значением u , солитонам соответствуют интегральные кривые, выходящие из седловой точки $(0, 0)$ и возвращающиеся в исходное состояние через определенное число оборотов внутри медленно меняющейся сепаратрисы. Так, при одном обороте имеем одиночный солитон с распределением поля, асимптотически близким ($E \rightarrow \infty$) к распределению в ленгмюровском солитоне $\Phi = \sqrt{2E} \operatorname{ch}^{-1}(\sqrt{E}x)$. Двум оборотам соответствует стационарный бисолитон, в котором за счет нелокальной связи два простых солитона захвачены в ямках плотности на определенном расстоянии друг от друга и т. д.

На рис. 5, а показаны локализованные решения (15), полученные с помощью численного счета на ЭВМ. С уменьшением E амплитуда солитонов, образующих многогорбую структуру, уменьшается. Появляются более сложные образования, состоящие из набора N -солитонных объектов (рис. 5, б). При $E \rightarrow 0$ солитоны расширяются и перекрывают друг друга настолько, что пространственное распределение становится квазиоднородным ($\Phi \rightarrow \Phi_0 = 1/\sqrt{2}$). Таким образом, для любого значе-

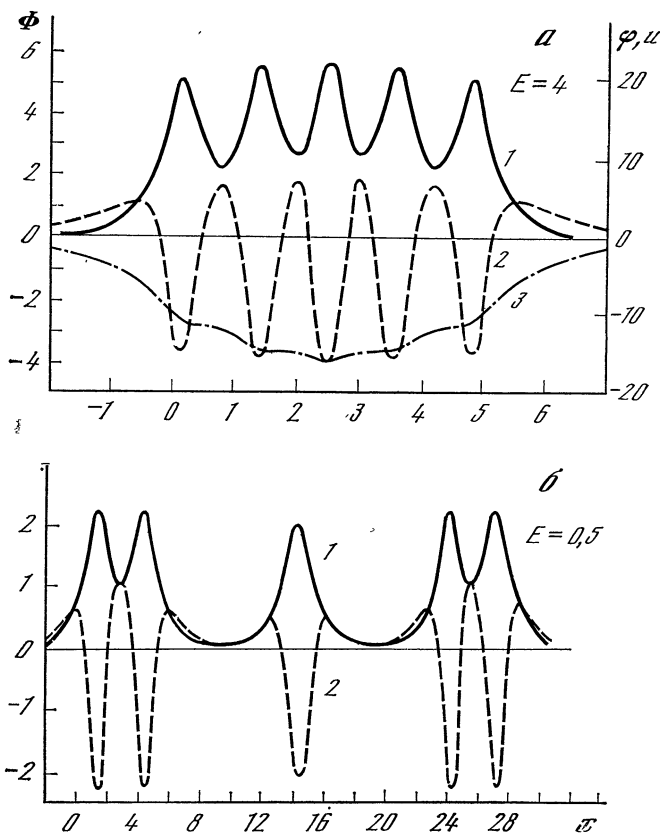


Рис. 5. Структуры мультисолитонов (а, б)

1—3 — Φ , φ и u соответственно

ния E , т. е. отстройки частоты электрического поля от плазменной, имеется счетное множество различных солитонов ленгмюровских волн, распространяющихся с дозвуковой скоростью в замагниченной плазме низкого давления.

3. Другим примером знакопеременного потенциала взаимодействия является $V(\mathbf{R}) = \cos |\mathbf{R}| / |\mathbf{R}|$. Одна из физически интересных систем, имеющих локализованные решения, аналогичные солитонам в уравнении (7) с таким потенциалом, исследовалась в работах Нишикавы [12] и Маханькова [13]. Эта система описывает одномерные связанные ленгмюровские и ионно-звуковые колебания с учетом собственной нелинейности и дисперсий последних:

$$-i\Psi_t + \Psi_{xx} - n\Psi = 0, \quad (16)$$

$$n_{tt} - n_{xx} - 3\mu(n^2)_{xx} - \mu n_{xxxx} = (|\Psi|^2)_{xx}, \quad (17)$$

где безразмерные переменные связаны с физическими следующими соотношениями:

$$t = \frac{2}{3} \frac{m}{M} \omega_{pe}, \quad x = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{x_{ph}}{r_{De}}, \quad \Psi^2 = \frac{3M}{4m} \frac{E_{ph}^2}{16\pi N_0 (T_e + T_i)},$$

$$n = \frac{3}{4} \frac{M}{m} \frac{\Delta N}{N_0}, \quad \mu = \frac{4}{9} \frac{m}{M}.$$

Система (16), (17), описывающая околосвуковые движения, имеет солитонные решения вида $\Psi = \Psi(x-ut) \exp(-iux/2 - i\alpha t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\Psi'' - E\Psi - n\Psi = 0, \quad (18)$$

$$n'' + \alpha n + 3n^2 + \Psi^2 = 0, \quad (19)$$

в которых переменные измеряются в единицах $x_0 = (\mu/|1-u^2|)^{1/2}$, $\Psi_0 = |1-u^2|/\mu^{1/2}$, $n_0 = |1-u^2|/\mu$. Кроме того, $E = x_0^2 (u^2/4 + \alpha) > 0$ — свободный параметр, $\alpha = \pm 1$, в зависимости от того, дозвуковой или сверхзвуковой процесс рассматривается в задаче. При $\alpha = -1$ соотношение (19) можно представить в виде

$$n = 1/2 \int (3n^2 + \Psi^2) \exp(-|x-x'|) dx',$$

откуда сразу легко заключить, что $n > 0$ и локализация поля Ψ в сверхзвуковом солитоне невозможна. Поэтому единственным интересным случаем является $\alpha = 1$.

Система (18), (19) весьма сложна для аналитического исследования, несмотря на существование очевидного первого интеграла движения. Естественно попытаться упростить ее, предположив, что для достаточно плавных распределений плотности плазмы в звуковой волне дисперсионная поправка в (19) мала и нелинейность локальна. Тогда однократное интегрирование (18), (19) приводит к соотношению

$$(n')^2 + V(n) = 0, \quad (20)$$

в котором потенциал $V(n)$ записывается в форме

$$V(n) = -(4n^2(1+3n)/(1+6n)^2) [2n^2 + (n/2)(1+6E) + E].$$

Условие сведения уравнений (18), (19) к (20) выполняется для интересующих нас уединенных решений в двух случаях.

1. Для $E \ll 1$ имеем предельный переход к обычному ленгмюровскому солитону вида $\Psi = \sqrt{2E} \operatorname{ch}^{-1}(\sqrt{Ex})$, $n = -\Psi^2 = 2E \operatorname{ch}^{-2}(\sqrt{Ex})$.

2. При $E = 1/18$ особенность потенциала в точке $n = -1/6$ исчезает и получаем локализованное двугорбое распределение поля $\Psi = 1/\sqrt{3} \operatorname{sh}(x/2\sqrt{3})/\operatorname{ch}^2(x/2\sqrt{3})$ в ямке плотности $n = -1/3 \operatorname{ch}^2(x/2\sqrt{3})$. Солитон такой формы «угадан» в работе [12] для полной системы (18), (19), где ему отвечает собственное значение $E = 1/20$. Следовательно, «погрешность» сделанного выше

предположения составляет не более 10%, т. е. роль низкочастотной дисперсии в образовании солитона Нишикавы не принципиальна.

Численное исследование уравнений (18), (19) выявило обширный класс солитонов, существование которых связано с разделением зарядов в медленных движениях плазмы и практически не зависит от нелинейных свойств ионно-звуковых возмущений. Спектр собственных значений таких локализованных решений дискретный и представляет собой последовательность полос, находящихся в области $E < 1/20$ и сгущающихся к $E = 0$ (рис. 6). Каждая из этих полос характеризуется определенным количеством вариаций плотности плазмы, приходящихся на один сгусток ВЧ-поля. Внутри спектральной полосы солитоны различаются по числу горбов распределения $\Psi(x)$, которых в каждой реализации не меньше двух, причем рядом расположенные сгустки поля находятся в противофазе. Некоторые характерные солитонные структуры показаны на рис. 7. Таким образом, имеется счетное множество околорезонансных ленгмюровских солитонов, представляющих, по существу, пути ионно-звуковых колебаний плазмы с захваченными в них определенным образом сфазированными сгустками поля.

Важнейшим условием физической реализуемости полученных решений является доказательство их устойчивости в рамках системы (16), (17). Эта задача требует, безусловно, значительных затрат машинного времени, и полное изложение результатов ее исследования выходит за рамки данного сообщения. Можно лишь сказать, что наиболее простая из численно обнаруженных локализованных мод ведет себя достаточно устойчиво и транслируется на расстояние, в десятки раз превышающее размеры солитона, без значительных изменений своей структуры (рис. 8).

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ МНОГОПУЧКОВОЙ САМОКАНАЛИЗАЦИИ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ВЧ-РАЗРЯДА

Исследовать структуру многосолитонных образований удастся в случае ионизационного самовоздействия косой ленгмюровской волны, распространяющейся в достаточно плотной замагниченной плазме ($\omega_H, \omega_p > \omega$) [14]. Высокочастотное поле, ионизирующее разреженную плазму с $\omega_p < \omega$, способно повысить концентрацию электронов до критической и тем самым создать в области максимальной амплитуды условие распространения косой ленгмюровской волны. Такие самосогласованные распределения поля и плазмы, вытянутые вдоль магнитного поля, наблюдались экспериментально [14, 15] в условиях ВЧ-разряда низкого давления в воздухе, когда главным источником ионизации среды является электронный удар, а основным механизмом потерь — прилипание электронов к электроотрицательным молекулам кислорода. При теоретическом рассмотрении такого эффекта уравнение для

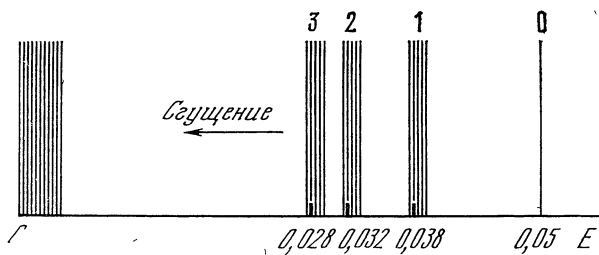


Рис. 6. Спектр локализованных решений

Числа у спектров описывают количество вариаций плотности плазмы, приходящихся на один сгусток ВЧ-поля

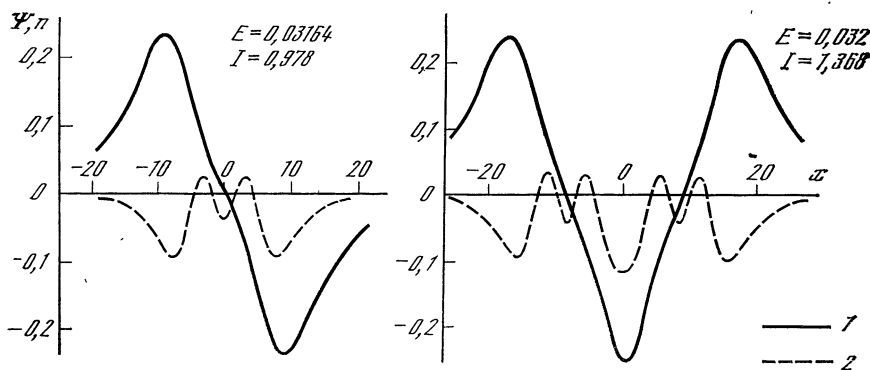


Рис. 7. Характерные солитонные структуры

1, 2 — ψ и n соответственно

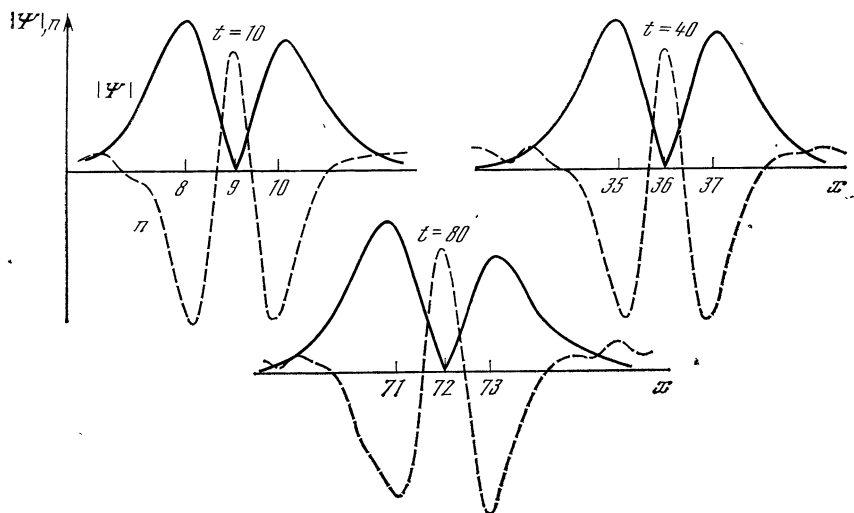


Рис. 8. Эволюция структуры солитона (скорость распространения солитона равна 0,9 м/с, параметр $\mu = 10^{-2}$)

амплитуды волны

$$\Delta_{\perp} E_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(1 - \frac{N}{N_{кр}} \right) E_z = 0 \quad (21)$$

необходимо дополнить материальным соотношением для электронной концентрации в ионизирующем ВЧ-поле.

$$D_{\parallel} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + D_{\perp} \Delta_{\perp} N + \nu_i (|E_z|^2) N - \nu_a N = 0, \quad (22)$$

где D_{\parallel} , D_{\perp} — продольный и поперечный коэффициенты амбиполярной диффузии плазмы; ν_i — частота ионизации, удовлетворяющая в широком диапазоне параметров степенной зависимости $\nu_i = \alpha |E_z|^{2\beta}$ ($\beta \simeq 2 \div 3$); ν_a — частота прилипания электронов. Отметим, что столкновения электронов, осциллирующих в ВЧ-поле, с нейтральными молекулами газа приводят, помимо дополнительной ионизации среды, к диссипации электромагнитного излучения. Если, однако, эффективная частота соударений электронов $\nu_{em} < \omega$, то можно предположить, что затухание волны, слабо проявляющееся на расстояниях порядка ее длины, не играет заметной роли в формировании исследуемой структуры. При этом распространение волнового пучка вида $E_z = \Psi(x, y) \exp(-ik_z z)$ описывается в безразмерных переменных $n = N/N_{кр}$, $r_H = r(\nu/D_{\perp})^{1/2}$, $\Phi = \Psi(\alpha/\nu)^{1/2\beta}$ системой уравнений

$$\Delta \Phi - E(1 - n)\Phi = 0, \quad (23)$$

$$\Delta n - n + n\Phi^{2\beta} = 0, \quad (24)$$

где параметр $E = k_z^2 D/\nu$ определяется отношением диффузионной длины прилипания $(D/\nu)^{1/2}$ к характерному масштабу изменения поля $1/k_z$. Остановимся сначала на исследовании уединенных решений одномерной системы уравнений. Для $E < 1$ существует единственное локализованное решение, качественно не отличающееся от точного аналитического выражения при $E = 1/(2\beta)^2$:

$$\Phi = (3/2)^{1/2\beta} \text{ch}^{-1/2}(x/2), \quad n = (\beta + 1) \text{ch}^{-2}(x/2).$$

Амплитуда солитона Φ_{\max} уменьшается до 1 при $E \rightarrow 0$, а распределение концентрации становится уже соответствующего распределения ВЧ-потенциала.

Если масштаб изменения концентрации $(D/\nu)^{1/2}$ превосходит характерный размер поля (т. е. $E > 1$), существует бесконечное число локализованных решений (сравним с задачей о тепловом самовоздействии пучков), которые образуются путем последовательного «добавления» одиночного солитона, так что фазы колебаний в отдельных сгустках поля отличаются на π (рис. 9). При $E \gg 1$ многогорбая структура «почти» синусоидальных пространственных осцилляций амплитуды ВЧ-потенциала оказывается захваченной в едином распределении плотности плазмы. К сожалению, не удается найти канонических переменных автономной

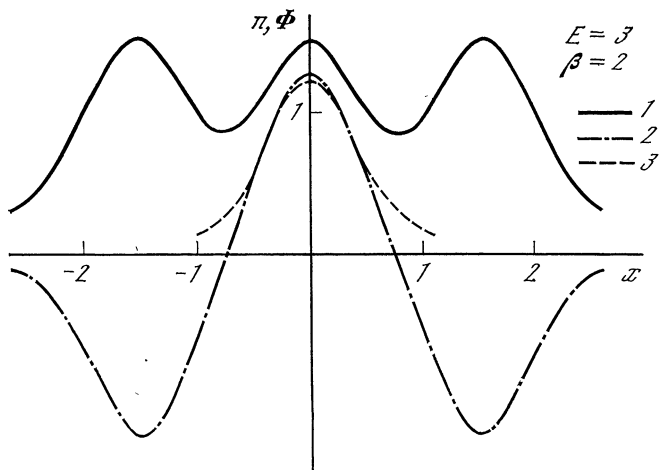


Рис. 9. Самоогласованное распределение концентрации плазмы n (1), ВЧ-потенциала (Φ) (2) и одиночный солитон (3)

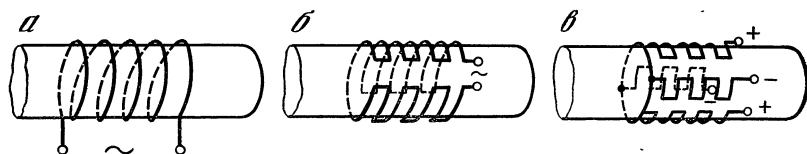


Рис. 10. Типы ВЧ-индукторов, использованных для возбуждения плазменных волн

Источник аксиально-симметричных волн (а), с дипольной симметрией (б) и квадрупольный (в)

системы (23), (24) и определить аналитические характеристики солитонов подобно тому, как это можно сделать для гамильтоновской системы с аналогичными свойствами.

Численный анализ двумерных уединенных решений (23), (24) методом, предложенным в [17], показывает, что основные закономерности появления связанного состояния солитонов, структуры и асимптотического поведения такие же, как и в одномерном случае. Распределение поля и концентрации плазмы имеют такой же вид, как и при тепловом самовоздействии волн (см. рис. 4, а — в).

Эксперименты проводились в стеклянной колбе диаметром 20 см и длиной 180 см при давлении рабочего газа (воздуха) $p \simeq 10^{-2}$ Торр. Высокочастотный разряд возбуждался в продольном магнитном поле $B = 500$ Гс с помощью индукторов цилиндрического (рис. 10, а), дипольного (рис. 10, б) и квадрупольного (рис. 10, в) типов. Частота излучения составляла 60 МГц, мощность W менялась от 0 до 200 Вт.

Перечислим основные результаты экспериментов. При симметричном возбуждении [15, 16] в области индуктора визуально наблюдается характерная коническая поверхность, из вершины которой вдоль магнитного поля вытягивается плазменный шнур. Измерения показывают, что внутри шнура распространяются нижнегибридные волны с продольной длиной волны λ порядка удвоенного размера индуктора. Максимум концентрации плазмы и плотности потока энергии достигается на оси системы. О возбуждении плазменных волн свидетельствует соответствие угла полураствора конуса θ соотношению

$$\operatorname{ctg}^2 \theta = -1 + N/N_{\text{кр}}, \quad (25)$$

N — концентрация плазмы, $N_{\text{кр}} = m_e \omega^2 / 4\pi e^2$.

При несимметричном возбуждении плазменных волн структура разряда существенно зависит от подводимой мощности и отношения длины свободного пробега электрона λ_e к длине плазменной волны λ_{\parallel} . В случае сравнительно небольших значений мощности ($W_0 \lesssim 20$ Вт) картина для разряда качественно такая же, как и для симметричного индуктора (рис. 11, а). При $\lambda_l \gtrsim \lambda/4$ даже в области индукторов удается получить на оси системы полностью изолированный от стенок плазменный шнур (рис. 11, б). С увеличением ВЧ-мощности аксиальная симметрия плазменного образования нарушается и наблюдается расслоение разряда на отдельные плазменные шнуры (от двух при дипольной системе возбуждения (рис. 11, в, г) до восьми при квадрупольной). Распределение концентрации в поперечном сечении пучка, соответствующее дипольному индуктору (см. рис. 10, б), показано на рис. 12. При достаточно большой мощности ($N_{\text{max}}/N_{\text{кр}} \gg 1$) для квадрупольного индуктора ($\lambda_l \ll \lambda_{\parallel}$) наблюдается эффект фокусировки плазменных волн на оси системы с последовательным уменьшением числа плазменных шнуров [14].

Обсудим соответствие экспериментальных данных изложенным теоретическим представлениям. Прежде всего имеется качественное согласие в распределении концентрации и амплитуды ВЧ-потенциала (см. рис. 12 и рис. 4). Определение граничного значения E ($k_z^2 D_{\perp} / \nu_a = 1$) в условиях данного эксперимента, к сожалению, затруднительно, поскольку соответствующая длина волны $\lambda_{\parallel} = 2\pi (\nu_a / D_{\perp})^{-1/2}$ оказывается порядка размеров системы. Однако принятые специально меры по повышению магнитного поля (до $B \approx 1,5$ кГс) привели, как и ожидалось, к результатам, которые указывают на существование бифуркационного значения E . Так, для дипольного источника длиной $l \approx 3$ см ($E = 1,5$, $W \lesssim 100$ Вт, $p = 100^{-2}$ Торр) наблюдаются два канала, а при $l \approx 10$ см ($E = 0,5$) свечение разряда оказывается аксиально-симметричным.

Другой характерной особенностью многосолитонных образований является наличие разности фаз волнового поля в соседних плазменно-волноводных каналах, равной π . Кроме того, остались безрезультатными попытки создания (посредством различных из-

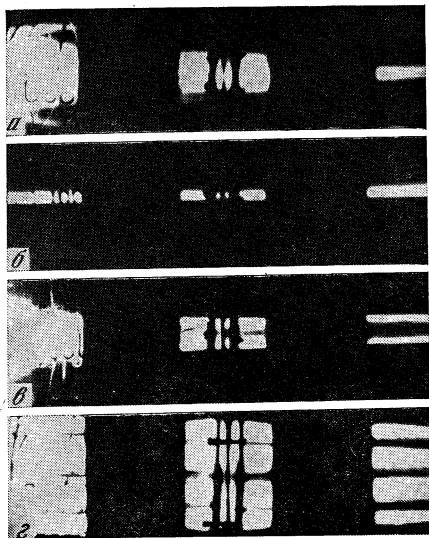


Рис. 11. Структура плазменно-волноводных каналов, возбуждаемых несимметричными источниками в воздухе при $\nu = 500$ Гс

а, б — квадрупольные индукторы ($W = 24$ Вт, $p = 3 \cdot 10^{-2}$ Торр (а) и 20 Вт, $5 \cdot 10^{-2}$ Торр (б)); в, г — дипольный (110 Вт, 10^{-2} Торр) и квадрупольный (110 Вт, 10^{-3} Торр) индукторы соответственно. Вертикальные темные полосы — тени от катушек соленоида и крепления разрядного баллона

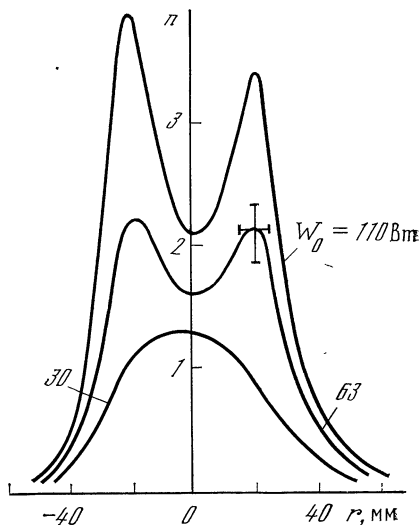


Рис. 12. Распределение плотности плазмы для разных уровней подводимой ВЧ-мощности, иллюстрирующее переход от однолучкового разряда к двухлучковому

менений системы возбуждения) многогорбых синфазных распределений поля.

При учете слабого поглощения становится понятным и эффект последовательного уменьшения числа каналов до одного.

Действительно, по одиночному волновому образованию можно передать поток энергии, определяемый параметрами среды и возбуждаемой длиной волны. Но полный поток энергии уменьшается вследствие диссипации, и, следовательно, число плазменных каналов должно изменяться дискретным образом.

Таким образом, приведенные экспериментальные результаты показывают возможность стационарной многочуковой самоканализации косых ленгмюровских волн и плазмы, а построенные многосолитонные решения объясняют наиболее характерные черты наблюдаемого явления.

Заканчивая обсуждение примеров, отметим основные особенности солитонов в неинтегрируемых системах. Во всех рассмотренных системах существуют устойчивые (по крайней мере в малом) связанные стационарные состояния солитонов, причем объединение одиночных солитонов происходит вполне определенным образом (синфазно либо противофазно). В ряде случаев возможны

солитоны дискретного спектра. Можно ожидать, что эти особенности окажутся важными в понимании новых нетривиальных свойств взаимодействия частицеподобных образований в различных физических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е., Мананков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. М.: Наука, 1980. 324 с.; Захаров В. Е., Мананков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Солитоны в действии / Под ред. Лонгрена К., Скотта Э. М.: Мир, 1981. 312 с.
2. Горшков К. А., Остроровский Л. А., Папко В. В. Взаимодействие и связанные состояния солитонов как классических частиц.— ЖЭТФ, 1976, 71, вып. 2 (8), с. 585—593; Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A. Interaction of solitons in nonintegrable systems: Direct perturbation method and applications.— Physica 3D, 1981, 2, N 1, blz. 428—443.
3. Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A., Papko V. V., Pikoisky A. S. On the existence of stationary multisolitons.— Phys. Lett. A, 1979, 74, N 3/4, blz. 177—179.
4. Kawahara T. Oscillatory solitary wave in dispersive media.— J. Phys. Soc. Jap., 1972, 33, N 1, p. 260—268.
5. Kol'chugina I. A., Sergeev A. M. The nonlinear self-action of EM-wave beams propagating along the specific directions of magnetized plasma.— In: Intern. Conf. on phenom. in ionized gases. Minsh., 1981, Contr. Pap., Pt 1, p. 151—152.
6. Кольчугина И. А., Миронов В. А., Сергеев А. М. О структуре стационарных солитонов в системах с нелокальной нелинейностью.— Письма в ЖЭТФ, 1980, 31, № 6, с. 333—337.
7. Миронов В. А., Сергеев А. М., Шер Э. М. О неодномерных связанных солитонах в нелинейных уравнениях поля.— ДАН СССР, 1981, 260, № 2, с. 325—327.
8. Литвак А. Г., Миронов В. А., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д. Тепловое самовоздействие волновых пучков в плазме с нелокальной нелинейностью.— Физика плазмы, 1975, 1, № 1, с. 60—71.
9. Янкаускас Э. К. Радиальные распределения поля в самофокусировавшемся пучке света.— Изв. вузов. Радиофизика, 1966, 9, № 2, с. 412—415.
10. Браун Дж., Джексон А. Нуклон-нуклонные взаимодействия. М.: Атомиздат, 1979. 247 с.
11. Witten E. Baryons on the $1/N$ expansion.— Nucl. Phys. B, 1979, 160, blz. 57—115.
12. Nishikawa K., Hojo H., Miya K., Ikezi H. Coupled nonlinear electron-plasma and ion-acoustic waves.— Phys. Rev. Lett., 1974, 33, N 2, p. 148—152.
13. Makhankov V. G. Dynamics of classical solitons.— Phys. Repts, 1978, 35, N 1, p. 1—128.
14. Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М., Соколова И. А. Многопучковая самоканализация плазменных волн.— ЖЭТФ, 1981, 80, № 6, с. 2264—2271.
15. Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М. О самоканализации плазменных волн в магнитном поле.— Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, № 11, с. 672—676.
16. Марков Г. А., Миронов В. А., Савин В. Г., Сергеев А. М. Фокусировка и канализация нижнегибридных волн и плазмы при ВЧ-пробое газа.— Физика плазмы, 1980, 6, № 3, с. 670—675.
17. Петвиашвили В. И. Об уравнении необыкновенного солитона.— Физика плазмы, 1976, 2, № 3, с. 469—472.

СОЛИТОНЫ В МАГНИТНЫХ СРЕДАХ

В. М. ЕЛЕОНСКИЙ

Со времени IV горьковской школы, на которой была прочитана А. Косевичем лекция о нелинейных волнах в магнитных средах [1], прошло четыре года. В течение этого времени достигнут существенный прогресс в теории солитонов и доменных границ в магнитных средах. Например, в [2] завершено доказательство того, что уравнения динамики ферромагнетика — уравнения Ландау—Лифшица — представляют собой вполне интегрируемую систему для случая физически содержательной модели одноосного ферромагнетика при учете магнитодипольного взаимодействия. В статье [3] предложен способ построения точных многосолитонных решений уравнений Ландау—Лифшица, отличный от способа обратной задачи. Настоящая статья, хотя и основана на работах [4—11], преследует цель обратить внимание на задачи, не получившие в настоящее время своего полного решения.

1. Рассмотрим задачу, связанную с переходом от вполне интегрируемых моделей к неинтегрируемым, на примере стационарных волн. Солитоны и доменные границы в магнитных средах представляют собой существенно нелинейные образования векторного поля. Следствием является то, что даже в случае стационарных волн выделение полностью интегрируемых моделей является нетривиальной задачей.

Динамика волн в магнитоупорядоченной среде определяется уравнениями Ландау—Лифшица

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \left[m, \frac{\delta F}{\delta m} \right], \quad (1)$$

где $m(x, t)$ — единичный вектор магнитного момента; $\delta F/\delta m$ — производная Эйлера—Лагранжа от свободной энергии. Для одноосного ферромагнетика при учете магнитодипольного взаимодействия свободная энергия является однородной квадратичной формой [2, 8, 9]

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m}{\partial x}, \frac{\partial m}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} (m, Gm), \quad G = -\text{diag}(1 + \varepsilon, 1, 0), \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — единственный структурный параметр среды. Для распространяющихся нормально к оси анизотропии стационарных волн (независимой переменной является $x - ut$, где u — скорость волны) система (1), (2) допускает существование двух независимых первых интегралов [4, 6]

$$\begin{aligned} \mu^2 - (1 + \varepsilon)m_x^2 - m_y^2 &= H, \quad \mu \equiv \left[m, \frac{dm}{dx} \right], \\ (\mu_z + um_z)^2 - \varepsilon(\mu_x + um_x)^2 + \varepsilon m_y^2 &= Q. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь H, Q — произвольные постоянные, а ось анизотропии совпадает с осью z .

Фазовое пространство задачи о стационарных волнах является четырехмерным и, в силу существования двух первых интегралов (3), система является интегрируемой. Отметим, что рассматриваемая задача полностью аналогична задаче о движении заряженной точки по единичной сфере в электрическом поле, определяемом dF/dm , и в магнитном поле монополя, заряд которого пропорционален скорости волны [8]. Для случая нулевой скорости полная интегрируемость задачи была, по существу, доказана К. Нейманом в 1859 г.

Для полной интегрируемости в рассмотренной геометрии существенно, что свободная энергия (2) является однородной квадратичной формой. В случае стационарных волн, распространяющихся вдоль оси анизотропии (независимая переменная $z - ut$), полная интегрируемость является следствием теорем Э. Неттер (в силу инвариантности системы относительно сдвига и вращения вокруг оси анизотропии). Такая задача исследовалась ранее [12], и единственным новым фактом явилось открытие в 1979 г. алгебраических солитонов [7, 13] в магнитных средах.

Изложим полную классификацию уединенных стационарных волн, распространяющихся нормально к оси анизотропии [6, 4]. Уединенным волнам отвечают сепаратрисные решения ($H = 0$, $Q = u^2$).

Для интервала скоростей

$$0 < u < u_-, \quad u_- \equiv \sqrt{1 + \varepsilon} - 1 \quad (4)$$

существуют две пары решений, отвечающих движущимся доменным границам Блоха и Нееля (с правым и левым вращением), а также однопараметрическое множество четырех семейств медленных солитонов. На единичной сфере ($m^2 = 1$) медленным солитонам соответствует уход m от одного из полюсов, выделенных осью анизотропии, и его последующий возврат к тому же полюсу без обхода полярной оси. Движущимся доменным границам отвечает поворот m от одного полюса к другому по дуге большого круга. Эти траектории являются границами раздела четырех семейств медленных солитонов. Других решений — типа движущихся доменных границ в рассматриваемой полностью интегрируемой задаче не существует. Отметим, что для случая движущихся доменных границ первые интегралы (3) являются зависимыми.

Для интервала скоростей

$$u_- < u < u_0, \quad u_0 \equiv 2(1 + \varepsilon)^{1/4} \quad (5)$$

существуют два типа быстрых солитонов. В этом случае однопараметрическому множеству сепаратрисных решений на единичной сфере отвечает движение m , связанное с уходом от полюса по монотонно раскручивающейся спирали и с возвратом к тому же полюсу по скручивающейся спирали.

Для интервала скоростей

$$u_0 < u < u_+, \quad u_+ \equiv \sqrt{1 + \varepsilon} + 1 \quad (6)$$

существуют два однопараметрических типа быстрых солитонов, для которых уход и возврат к полюсным точкам единичной сферы происходят по немонотонно раскручивающейся и скручивающейся спиралям.

Отметим, что при $u > u_-$ не существует решений типа движущихся доменных границ, а при $u > u_+$ — решений, отвечающих уединенным волнам. При $u \rightarrow u_+$ амплитуда солитона стремится к нулю, а его характерный размер неограниченно возрастает. Во всей области существования уединенных волн число симметричных состояний конечно, а несимметричных состояний непрерывное множество. Других типов уединенных волн в данной задаче не существует.

Глубокий и содержательный анализ вполне интегрируемых задач с двумя степенями свободы, выполненный А. Лерманом и Я. Уманским [13а], позволяет описать характерные особенности разбиения 4-мерного фазового пространства и является основой не только для строгого доказательства полноты приведенной выше классификации уединенных волн в магнитных средах, но и для целого ряда аналогичных задач. При учете энергии одноосной анизотропии более высокого порядка (например, четвертого порядка по m) в уравнениях динамики следует произвести замену

$$F \rightarrow F - \beta (m, G(0) m^2), \quad (7)$$

где β — новый структурный параметр среды. При $\beta > 0$ задача характеризуется теми же предельными скоростями (u_{\pm}, u_0), но второй из законов сохранения (3) более не существует. Качественный и численный анализ однозначно указывает на распад существовавшего ранее однопараметрического множества солитонов на счетное множество уединенных волн, обладающих определенной внутренней структурой. Снятие интегрируемости приводит к рождению уединенных волн, отвечающих многопетлевым сепаратрисным решениям, которые при определенных условиях могут рассматриваться как связанное состояние (или кластер) конечного числа солитонов. Более того, при $u < u_-$ возникают движущиеся доменные границы, обладающие внутренней структурой и соответствующие общим для двух седловых точек многопетлевым сепаратрисам. Способ численного анализа таких решений, основанный на поиске точек пересечений кривых касаний траекторий с некоторой выделенной поверхностью и связанных с ними разрывов, изложен в [4], а более полно — в работе Н. Кулагина [14]. Важным в прикладном отношении и до конца не решенным является вопрос о верхнем пределе скорости доменных границ для случая неинтегрируемых моделей.

Стационарные волны в средах с несколькими магнитными подрешетками, динамика которых определяется системой связанных между собой уравнений Ландау—Лафшица, в настоящее время мало исследованы. Следует отметить, что именно к такому случаю относятся задачи о стационарных волнах в антиферромагнетиках, слабых ферромагнетиках и других магнитоупорядоченных средах.

Размерность фазового пространства таких задач не менее удвоенного числа магнитных подрешеток (т. е. для достаточно содержательных моделей равно 8). В качестве простейшего примера можно указать на модель изотропного двухподрешеточного магнетика со свободной энергией вида [9]

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_2}{\partial x} \right)^2 + D(m_1, m_2), \quad (8)$$

где m_1, m_2 — единичные векторы магнитных моментов подрешеток; D — параметр среды. В понятиях механики задаче о стационарных волнах соответствует задача о движении двух взаимодействующих частиц по единичной сфере. При этом потенциал взаимодействия является билинейной функцией обобщенных координат (m_1, m_2) . Задача допускает существование трех независимых первых интегралов

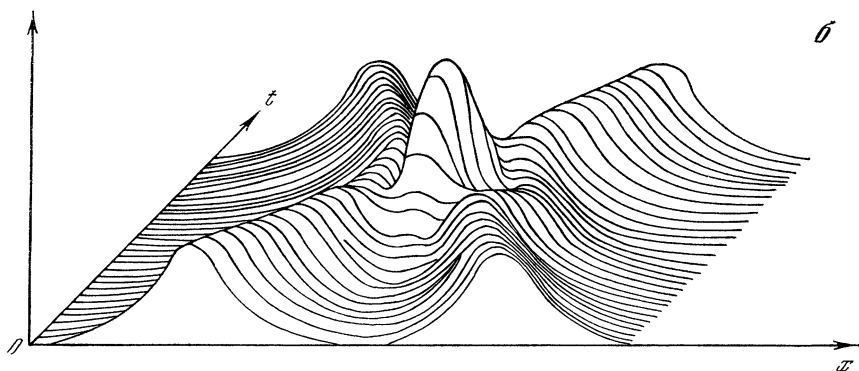
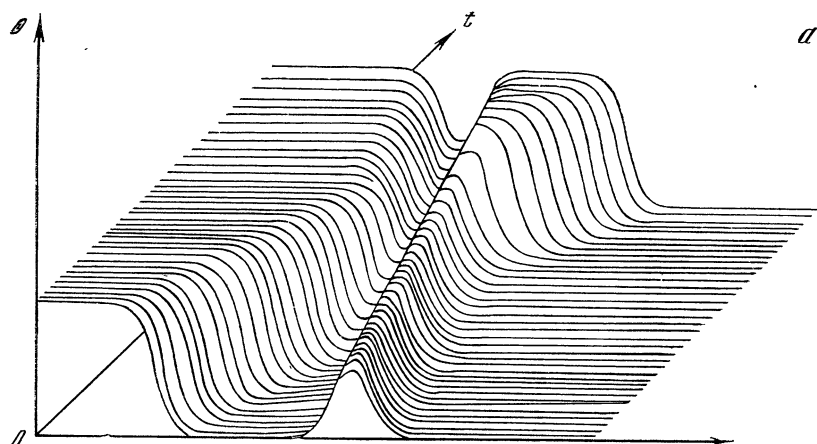
$$M_1^2 + M_2^2 - 2D(m_1, m_2) - 2u^2 = H, \quad M_1 + M_2 = M_0, \\ M_i \equiv \left[m_i, \frac{dm_i}{dx} \right] + um_i. \quad (9)$$

Известно [9], что при $M_0 = 0$ и произвольной постоянной H задача является интегрируемой и этот случай включает в себя все решения типа уединенных волн. Однако решение задачи при $M_0 \neq 0$ неизвестно.

2. Своеобразная ситуация со стационарными волнами в магнитных средах возникает при учете диссипации и внешнего поля («накачки»). Например, в случае одноосного ферромагнетика уравнения динамики имеют вид

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \left[m, \frac{\delta F}{\delta m} \right] + [m, h] + \gamma \left[m, \frac{\partial m}{\partial t} \right], \quad (10)$$

где h — внешнее магнитное поле, которое направлено вдоль оси анизотропии; γ — параметр затухания. Известно [5, 12], что точное решение уравнения (10), отвечающее движущейся доменной границе, представляет собой одно из решений однопараметрического множества решений, существовавших в недиссипативной системе, которое «выживает» при включении внешнего поля и диссипации. При этом однозначно определяется зависимость скорости от параметров (h, γ) для двух основных типов движущихся доменных границ. Такое решение существует только для значений величины внешнего поля, меньших $1/2 \gamma h$. Что же происходит с движущейся доменной границей в полях, больших критического? Существуют ли стационарные волны в области сильных полей? Численный анализ задачи свидетельствует в пользу возможности существования стационарных волн, соответствующих движущимся доменным границам с определенной внутренней структурой. Образом таких решений являются общие для двух седловых точек многопетлевые сепаратрисы. Такие образования можно рассматривать как связанное состояние нескольких дви-



жущихся доменных границ, или кластер, образованный движущейся доменной границей и медленными солитонами. Очевидно, что таким образом при распространении стационарной волны достигается большая диссипация энергии в сильных полях. Иными словами, с ростом поля возникает тенденция к «выживанию» более сложных диссипативных структур.

В слабых ферромагнетиках динамика нелинейных волн при учете диссипации и внешнего поля определяется в наиболее простой модели уравнением [10, 11, 15]

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \sin \Phi = 2h \sin \frac{\Phi}{2} - \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (14)$$

Анализ стационарных волн в такой модели показал [10, 8], что движущейся доменной границе при всех значениях внешнего поля соответствует одно из решений однопараметрического множества решений недиссипативной задачи, а именно 2π -солитон синусового уравнения Гордона, скорость которого однозначно определяется параметрами (h , γ). Однако ситуация является своеобразной. А именно: в полях $h < 1$ такое решение единственно и устойчиво, но при $h > 1$ возникает сплошной спектр скоростей «медленных»

($u < 1$) и «быстрых» ($u > 1$) стационарных волн, которые являются неустойчивыми. Ситуация аналогична той, которая имеет место в задаче Колмогорова—Петровского—Пискунова [16]. К сожалению, в отличие от задачи Колмогорова—Петровского—Пискунова, для которой известно, что эволюция системы приводит к стационарной волне, распространяющейся со скоростью, равной нижней границе сплошного спектра скоростей, в данной задаче точный ответ неизвестен.

В заключение приведем результаты численных экспериментов, полученные Н. Островской и В. Тихомировым, по столкновению доменной границы с быстрым солитоном и быстрых солитонов между собой для вполне интегрируемой системы (1), (2). Процесс столкновения быстрого солитона с доменной границей изображен на рисунке. Более интересным является случай столкновения двух быстрых солитонов (см. рисунок, б). Сближение солитонов до расстояний, при которых становится существенным перекрытие решений, отвечающих невзаимодействующим солитонам, приводит к формированию центрального максимума поля на фоне двух локальных максимумов. Расстояние между последними соответствует наименьшему расстоянию между сталкивающимися солитонами. В дальнейшем наступает фаза уменьшения величины центрального максимума. Эволюция системы в последующие времена приводит к разлету солитонов, идентичных исходным. Изображенная на рисунке, б и описанная выше эволюция решений относится к изменениям одной из двух угловых переменных, характеризующих солитон, а именно полярному углу между осью анизотропии и магнитным моментом (азимутальный угол характеризует прецессию магнитного момента вокруг оси анизотропии).

ЛИТЕРАТУРА

1. Косевич А. М., Иванов Б. А., Ковалев А. С. Нелинейная волна намагниченности в ферромагнетике как связанное состояние большого числа элементарных возбуждений системы.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 45—62.
2. Sklyanin E. K. On complete integrability of the Landau-Lifshitz equation: LOMI Preprint E-3-1979, Leningrad, 1979.
3. Богдан М. М., Ковалев А. С. Точные многосолитонные решения одномерных уравнений Ландау — Лифшица для неизотропного ферромагнетика.— Письма в ЖЭТФ, 1980, 31, с. 453—457.
4. Елеонский В. М., Кирова Н. Н., Кулагин Н. Е. О случайном вырождении самолокализованных решений уравнений Ландау — Лифшица.— ЖЭТФ, 1978, 75, с. 2210—2218.
5. Елеонский В. М., Кирова Н. Н., Кулагин Н. Е. Движение доменных границ во внешнем магнитном поле.— ЖЭТФ, 1979, 76, с. 705—710.
6. Елеонский В. М., Кирова Н. Н., Кулагин Н. Е. Новый закон сохранения для уравнений Ландау — Лифшица.— ЖЭТФ, 1979, 77, с. 409—413.
7. Елеонский В. М., Кирова Н. Н., Кулагин Н. Е. О магнитных солитонах, распространяющихся вдоль оси анизотропии.— Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, с. 601—605.
8. Елеонский В. М., Кирова Н. Н., Кулагин Н. Е. О точных решениях уравнений Ландау — Лифшица для слабых ферромагнетиков.— ЖЭТФ, 1980, 79, с. 321—332.

9. *Елеонский В. М., Кирова Н. Н., Кулагин Н. Е.* О точно решаемых моделях для двухподрешеточных магнетиков.— ЖЭТФ, 1981, 80, с. 357—363.
10. *Звездин А. К.* О динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках.— Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, с. 605—610.
11. *Барьялтар В. Г., Иванов Б. А., Сукстанский А. Л.* Динамика доменных границ в редкоземельных ортоферритах.— Письма в ЖЭТФ, 1979, 5, с. 853—856.
12. *Ахизер И. А., Боровик А. Е.* К теории спиновых волн конечной амплитуды.— ЖЭТФ, 1967, 52, с. 508—513; *Ахизер И. А., Боровик А. Е.* О нелинейных волнах в ферромагнетиках и антиферромагнетиках.— Там же, с. 1332—1344.
13. *Ivanov B. A., Kosevich A. M., Manzhos I. V.* Algebraic soliton in a ferromagnet in the presence of the magnetic field directed along the anisotropy axis.— Solid State Comms, 1980, 34, p. 417—418.
- 13а. *Лерман А. М., Уманский Я. Л.* О топологической структуре интегрируемых гамельтоновых систем с двумя степенями свободы: Тезисы докладов девятой Международной конференции по нелинейным колебаниям. Киев: ИМ АН СССР, 1981, с. 190—191.
14. *Кулагин Н. Е.* Исследование движущихся доменных границ и магнитных солитонов в одноосных ферромагнетиках: Дис. ... канд. физ-мат. наук. Донецк: Донецкий гос. ун-т, 1980.
15. *Барьялтар В. Г., Иванов Б. А., Сукстанский А. Л.* Нелинейные волцы и динамика доменных границ в слабых ферромагнетиках.— ЖЭТФ, 1980, 78, с. 1509—1521.
16. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме.— В кн.: Теория горения и взрыва. М.: Наука, 1981, с. 213—242.

УДК 535.416.3

АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ И КОГЕРЕНТНОСТЬ

В. И. ТАТАРСКИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия начало развиваться новое направление в оптике и радиофизике — адаптивные приемные и излучающие системы. Назначение этих систем — компенсировать искажения волнового поля, обусловленные средой распространения [1—3]. Здесь обычно имеются в виду или турбулентные неоднородности атмосферы (океана), или же нелинейные искажения, вносимые средой, например, из-за нагрева атмосферы излучением.

В связи с адаптивными волновыми системами возникает ряд интересных вопросов теоретического характера. Здесь прежде всего следует отметить, что адаптивная система как бы улучшает пространственную когерентность излучения. Например, с ее помощью можно получить изображение дифракционного качества в тех условиях, когда обычная оптика дает размытое изображение. Поэтому общепринятого понятия когерентности уже недостаточно для описания работы адаптивной системы и нуждается в обобщении. Этому обобщению и посвящена настоящая статья. Первая часть, где рассматриваются адаптивные системы, в которых можно

пренебречь квантовыми шумами, в равной мере относится к волновым полям любой физической природы (оптика, радиодиапазон, акустика и т. д.). Подробное изложение материала этой части работы содержится в статьях [4, 5]. Во второй части рассмотрены квантовые шумы в адаптивной оптической системе (именно эти шумы становятся определяющими при работе со слабыми световыми потоками). Здесь уже используется специфическая для электромагнитного поля теория детектирования сигнала. Подробное изложение этой части работы содержится в статьях [6, 7].

Ограничимся здесь лишь анализом приемных адаптивных волновых систем, предназначенных для компенсации случайных флюктуаций волнового поля, обусловленных средой распространения. При этом предполагаем, что все статистические характеристики (законы распределения вероятностей, корреляционные функции различных порядков и т. п.) этих флюктуаций известны, т. е. известна некоторая априорная информация о тех флюктуациях, которые должны быть скомпенсированы.

2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ АДАПТИВНОЙ ВОЛНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим квазимонохроматическое волновое поле вида $u(\rho, t) \exp(-i\omega t)$. В типичном приемном устройстве это поле сначала подвергается некоторому линейному преобразованию

$$v(\mathbf{r}, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} K_0(\mathbf{r}, \rho) u(\rho, t) d^2\rho, \quad (1)$$

а затем измеряется некоторый линейный функционал от интенсивности $I(\mathbf{r}, t) = |v(\mathbf{r}, t)|^2$ преобразованного поля

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_{-\infty}^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r} M(\mathbf{r}, t') |v(\mathbf{r}, t')|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_1 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_2 L_0(\rho_1, \rho_2, t') u(\rho_1, t') u^*(\rho_2, t'). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь функция L_0 возникает после подстановки (1) в множитель $|v^2|$ под знаком интеграла по \mathbf{r}, t' . Примером преобразования (1) может служить преобразование поля со входной апертуры телескопа в его фокальную плоскость. Функция M может описывать, например, формирование фотоизображения с учетом диффузии в фотослое.

Поле u в выражении (2) случайно. Средний отклик $J = \langle Q \rangle$ получим, усредняя (2), т. е.

$$J(t) = \int_{-\infty}^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_1 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_2 L_0(\rho_1, \rho_2, t') \Gamma(\rho_1, \rho_2, t'). \quad (3)$$

Здесь

$$\Gamma(\rho_1, \rho_2, t) = \langle u(\rho_1, t) u^*(\rho_2, t) \rangle \quad (4)$$

— функция взаимной когерентности второго порядка. Если функция Γ в (3) спадает при увеличении $|\rho_1 - \rho_2|$ быстрее, чем L_0 , то это означает, что недостаточная пространственная когерентность волнового поля препятствует реализации потенциальных возможностей данного прибора. В этом случае и может оказаться целесообразным использование адаптивной системы.

В адаптивной системе мгновенная структура прибора, а следовательно, и функции K , M , описывающие эту структуру, зависят от состояния волнового поля в данный момент и в предшествующие ему моменты времени.

Считаем, что измеряется некоторое количество параметров ξ_1, \dots, ξ_N , зависящих от волнового поля на входной апертуре (так что $\xi_\alpha(t) = \xi_\alpha[u(\tau)]$, $\tau \leq t$), и функция K зависит от измеренных значений этих параметров

$$K = K(r, \rho; \xi_1(t), \dots, \xi_N(t)). \quad (5)$$

В этом случае вместо (2) имеем (обозначая $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$)

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_1 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_2 L(\rho_1, \rho_2, t'; \xi(t')) u(\rho_1, t') u^*(\rho_2, t'). \quad (6)$$

Прежде всего отметим, что функционал Q зависит от волнового поля u уже не квадратично, а более сложным образом. Это означает, что адаптивная система всегда нелинейна. Если разложить функцию L в ряд по параметрам ξ_α , а последние — в ряд по волновому полю u , то в (6) появятся, вообще говоря, произвольные степени волнового поля u . Поэтому при усреднении (6) в правой части возникнут статистические моменты поля u произвольного порядка. Отсюда видно, что функции когерентности второго порядка Γ уже недостаточно для статистического описания адаптивной системы.

Выполним усреднение правой части (6) в два этапа. Сначала зафиксируем значения параметров ξ и усредним множитель $u_1 u_2^*$ при фиксированных ξ , а затем полученное выражение усредним по ξ . Первое усреднение приводит к условной функции когерентности второго порядка при заданных ξ

$$\tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, t/\xi) = \langle u(\rho_1, t) u^*(\rho_2, t) / \xi_1(t), \dots, \xi_N(t) \rangle. \quad (7)$$

После этого для $J = \langle Q \rangle$ получаем

$$J = \int_{-\infty}^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_1 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_2 \langle L(\rho_1, \rho_2, \xi(t')) \tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, t'/\xi(t')) \rangle_{\xi}, \quad (8)$$

где угловые скобки означают усреднение по ξ .

Как следует из (8), среднее значение измеряемой величины зависит от условной функции когерентности $\tilde{\Gamma}$, соответствующей данному набору ξ измеряемых параметров. Отметим, что имеется бесконечное число различных функций $\tilde{\Gamma}$, соответствующих различным наборам параметров ξ . Каждая из этих функций определяется только статистическими свойствами волнового поля. Однако то, какая из них войдет в (8), определяется структурой прибора, который «отбирает» нужную функцию из всей их совокупности.

Величина J зависит не только от $\tilde{\Gamma}$, но и от того, как выбрана зависимость K от ξ . Если целью является получение максимального значения J , то, зная функцию $\tilde{\Gamma}$, можно определить и оптимальный вид функции $K(\xi)$ ¹.

Если искать эту функцию в виде

$$K(s, \rho, \xi) = K_0(s, \rho) \exp\{i\varphi(\rho, \xi)\},$$

то для оптимального фазового корректора, вносящего сдвиг фазы φ в точке ρ вводной апертуры, можно получить нелинейное интегральное уравнение, ядро которого содержит функцию $\tilde{\Gamma}$.

Таким образом, условная функция когерентности $\tilde{\Gamma}$ определяет не только возможный выигрыш, но и алгоритм оптимального управления адаптивной системой.

Существенное влияние на работу адаптивной волновой системы могут оказать шумы измерения, искажающие значения управляющих параметров ξ . Если в результате измерения получаем не значения ξ_α , а искаженные шумами величины $\xi_\alpha + \varepsilon_\alpha$, где ε_α не зависимы от ξ , то вместо (5) будем иметь

$$K = K(\mathbf{r}, \rho, \xi + \varepsilon). \quad (9)$$

В этом случае также может быть получено интегральное уравнение для оптимальной фазовой коррекции, ядро которого зависит уже не только от функции $\tilde{\Gamma}$, но и от распределений вероятностей как управляющих параметров ξ , так и шумов ε . При ухудшении отношения сигнал/шум падает и возможный выигрыш от применения системы адаптации, однако в любом случае ее применение не приводит к уменьшению максимизируемого значения J .

В статье [5] приводятся конкретные примеры волновых полей и адаптивных систем, для которых удается найти вид оптимальной фазовой коррекции и оценить возможный выигрыш.

§ 3. КВАНТОВЫЙ ШУМ В АДАПТИВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Одно из основных приложений адаптивных оптических систем связано с повышением разрешающей способности телескопов. При этом основной интерес представляют наименее изу-

¹ Как показано Дайсоном (см. [8]), для получения максимальной разрешающей способности телескопа можно указать такой функционал вида (6), максимуму которого соответствует компенсация фазовых искажений, вносимых средой распространения.

ченные слабые источники. Однако для слабых световых потоков уже нельзя пренебрегать квантовой природой излучения, с которой связан квантовый шум. Квантовый шум нельзя, вообще говоря, рассматривать как аддитивный шум при измерениях параметров ξ , поскольку он связан с самим волновым полем, а не добавляется к нему в процессе измерения.

Чтобы учесть влияние квантового шума, необходимо более детально проанализировать процесс измерения параметров ξ , характеризующих слабое волновое поле. Такое измерение может быть произведено при помощи счетчиков фотонов того или иного типа.

Квантовая теория фотодетектирования [9, 10] приводит к следующему результату. Если имеется N фотодетекторов, расположенных в точках ρ_1, \dots, ρ_N , то при заданных полях $u(\rho_1, t), \dots, u(\rho_N, t)$ совместная вероятность того, что первый детектор зарегистрирует n_1 фотонов за время от $t - T$ до t , второй — n_2 фотонов, \dots , N -й — n_N фотонов, равна

$$P(n_1, \dots, n_N/u) = \exp(-v_1) v_1^{n_1}/n_1! \dots \exp(-v_N) v_N^{n_N}/n_N!, \quad (10)$$

где

$$v_k = \eta_k \int_{t-T}^t |u(\rho_k, t')|^2 dt', \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

а величина η_k пропорциональна квантовой эффективности k -го детектора, площади его апертуры и длине волны детектируемого излучения. Согласно (11) число фотоотсчетов определяется только квадратом модуля детектируемого поля и не зависит от его фазы. Поэтому, чтобы получить при помощи счетчиков фотонов сведения и о фазе поля, необходимо предварительно осуществить интерференцию света, с тем чтобы преобразовать фазовые соотношения в соотношения интенсивностей. Мы можем, например, поместить счетчики в различных местах интерференционной картины. В соответствии с этим в измерительной части адаптивной оптической системы на фотодетекторы подается не само поле u , а преобразованные поля

$$w_k(t) = \iint F_k(\rho) u(\rho, t) d^2\rho, \quad (12)$$

так что скорости счета v_1, \dots, v_N будут определяться формулой

$$v_k = \eta_k \int_{t-T}^t |w_k(t')|^2 dt'. \quad (13)$$

В адаптивной оптической системе со счетчиками фотонов роль параметров ξ_k играют числа фотоотсчетов n_1, \dots, n_N , зарегистрированных на интервале времени $(t - T, t)$, т. е. функция $\tilde{\Gamma}$ должна определяться формулой

$$\tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, t/n_1, \dots, n_N) = \langle u(\rho_1, t) u^*(\rho_2, t)/n_1, \dots, n_N \rangle. \quad (14)$$

Исходя из (10), можно показать [6], что функция (14) может быть найдена при помощи формулы

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, t/n_1, \dots, n_N) = \\ = \langle u(\rho_1, t) u^*(\rho_2, t) \exp[-(\nu_1 + \dots + \nu_N)] \nu_1^{n_1} \dots \\ \dots \nu_N^{n_N} \rangle u / \langle \exp[-(\nu_1 + \dots + \nu_N)] \nu_1^{n_1} \dots \nu_N^{n_N} \rangle u, \end{aligned} \quad (15)$$

в которой ν_k определяются выражениями (13) и усреднение проводится по флюктуациям поля u .

Как следует из этой формулы, при $n_1 = n_2 = \dots = n_N = 0$ условная функция когерентности $\tilde{\Gamma}$ совпадает с априорной функцией Γ . Если же $\sum n_k \geq 1$, то при разумном² выборе функций F_k в (12) $|\tilde{\Gamma}| > |\Gamma|$. Поэтому даже в случае небольших чисел фотонов, зарегистрированных в измерительных каналах, возможен выигрыш от применения адаптивной оптики, причем мера этого выигрыша описывается отношением $|\tilde{\Gamma}/\Gamma|$.

4. ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ С ГАУССОВСКИМИ ФЛЮКТУАЦИЯМИ ФАЗЫ

В качестве примера рассмотрим волновое поле вида

$$u(\rho, t) = \exp\{iS(\rho, t)\}, \quad (16)$$

где S — гауссовская случайная функция, для которой $\langle S \rangle = 0$, $\langle [S(\rho_1, t) - S(\rho_2, t)]^2 \rangle = D(\rho_1, \rho_2)$. Пусть величины $w_{1,2}$, формируемые в измерительном канале адаптивной системы, имеют вид

$$w_{1,2} = [u(\mathbf{R}_1, t) \pm iu(\mathbf{R}_2, t)]/2. \quad (17)$$

Предположим, что время измерения T мало по сравнению со временем когерентности поля u . Тогда, если $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, согласно (13) получим

$$\nu_{1,2} = \eta T [1 \pm \sin \xi]/2, \quad \xi = S(\mathbf{R}_1, t) - S(\mathbf{R}_2, t)/2.$$

Из этой формулы следует, что $\nu_1 + \nu_2 = \eta T = \text{const}$, поэтому формула (15) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2/n_1, n_2) = \\ = \langle e^{i\psi} (1 + \sin \xi)^{n_1} (1 - \sin \xi)^{n_2} \rangle / \langle (1 + \sin \xi)^{n_1} (1 - \sin \xi)^{n_2} \rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\psi = S(\rho_1, t) - S(\rho_2, t)$. Так как ψ и ξ — гауссовские случайные величины, усреднение в (18) легко может быть выполнено при небольших значениях n_1, n_2 . Например, при $n_1 + n_2 = 1, 2$

² Ясно, что если функции F выбрать так, что числа n не будут нести информации о фазе поля u , то в этом случае функция $\tilde{\Gamma}$ может оказаться по модулю равной $|\Gamma|$.

имеем следующие выражения для условных функций когерентности:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2/1, 0) &= \exp\left(-\frac{\langle \psi^2 \rangle}{2}\right) \left\{ 1 \pm i \exp\left(-\frac{\langle \xi^2 \rangle}{2}\right) / \operatorname{sh} \langle \psi \xi \rangle \right\}, \\ \tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2/2, 0) &= \exp\left(-\frac{\langle \psi^2 \rangle}{2}\right) [3 - \exp(-2\langle \xi^2 \rangle)]^{-1} \times \\ &\times \left[3 - \exp(-2\langle \xi^2 \rangle) \operatorname{ch}(2\langle \psi \xi \rangle) \pm 4i \exp\left(-\frac{\langle \xi^2 \rangle}{2}\right) \operatorname{ch} \langle \psi \xi \rangle \right], \\ \tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2/1, 1) &= \exp\left(-\frac{\langle \psi^2 \rangle}{2}\right) [1 + \exp(-2\langle \xi^2 \rangle)]^{-1} \times \\ &\times [1 + \exp(-2\langle \xi^2 \rangle) \operatorname{ch}(2\langle \psi \xi \rangle)], \end{aligned} \quad (19)$$

в которых $\langle \psi^2 \rangle$, $\langle \xi^2 \rangle$ и $\langle \psi \xi \rangle$ выражаются через функции $D(\rho_1, \rho_2)$, $D(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$, $D(\rho_\alpha, \mathbf{R}_\beta)$. Верхняя пара аргументов функции $\tilde{\Gamma}$ соответствует верхнему знаку в формуле, а нижняя пара — нижнему. Множитель $\exp\{-1/2 \langle \psi^2 \rangle\}$ в формулах (19) представляет собой Γ . Из (19) непосредственно следует, что $|\tilde{\Gamma}| \geq |\Gamma|$.

Если $n_1 + n_2 \gg 1$, то интегралы, входящие в (18), можно вычислить при помощи метода перевала, что при $\langle \xi^2 \rangle \ll 1$ приводит к формуле

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2/n_1, n_2) &\approx \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\langle \psi^2 \rangle - \frac{\langle \psi \xi \rangle^2}{\langle \xi^2 \rangle} \left(1 - \frac{2}{(n_1 + n_2) \langle \xi^2 \rangle}\right)\right]\right\} + \\ &+ i \frac{\langle \psi \xi \rangle}{\langle \xi^2 \rangle} \left(1 - \frac{2}{(n_1 + n_2) \langle \xi^2 \rangle}\right) \arcsin \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Главные члены в этой формуле, не содержащие $(n_1 + n_2)^{-1}$, соответствуют классическому случаю, когда в качестве параметра ξ выступает разность фаз $\arcsin [(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)]$. Поправочные члены порядка $(n_1 + n_2)^{-1}$ соответствуют аддитивному фазовому шуму с дисперсией

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = 2/(v_1 + v_2). \quad (21)$$

Эта формула соответствует соотношению неопределенностей *число частиц — фаза*, если под эквивалентным числом фотонов подразумевать $(n_1 + n_2)/2$.

С использованием формул типа (19), (20) может быть приближенно решено интегральное уравнение для оптимального фазового корректора, соответствующего фокусировке плоской волны в фокальную точку. Численные оценки содержатся в [5, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Дж. У. Активная оптика.— ТИИЭР, 1978, 66, № 6, с. 31—85.
2. Адаптивная оптика: Сб. статей / Под ред. Фрида Д. М.: Мир, 1980. 456 с.
3. Оптические телескопы будущего: Сб. статей / Под ред. Пачини Ф. В., Рихтера В., Вильсона Р. М.: Мир, 1981. 432 с.
4. Татарский В. И. Адаптивные системы и когерентность. I.— Изв. вузов. Радиофизика, 1981, 24, № 7, с. 861—871.
5. Татарский В. И. Там же. II, с. 872—883.
6. Татарский В. И. Квантовый шум в адаптивных оптических системах. Ч. I.— Там же, 1982, 25, № 8.

7. Татарский А. И. Квантовый шум в адаптивных оптических системах. Ч. II.— Там же, 1982, 25, № 9.
8. Muller R. A., Buffington A.— Journ. Opt., Soc. Am., 1974, 64, N 9, p. 1200—1210.
9. Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика фотонов.— В кн.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М.: Мир, 1966, с. 91—279.
10. Клаузер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970. 421 с.

УДК 538.576.452.1

АДАПТИВНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В РЕЗОНАТОРАХ С ЗЕРКАЛАМИ, ОБРАЩАЮЩИМИ ВОЛНОВОЙ ФРОНТ

В. И. БЕСПАЛОВ, В. Г. МАНИШИН, Г. А. ПАСМАНИК

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди исследований в области адаптивной оптики важное место занимает проблема формирования оптимальной поперечной структуры лазерного излучения, позволяющей передавать это излучение через оптически неоднородную среду с минимальными потерями мощности. Трудности формирования такой структуры связаны, в частности, с необходимостью компенсировать мелко-масштабные и быстро изменяющиеся во времени возмущения показателя преломления среды. Например, для оптического излучения, проходящего через турбулентную атмосферу, характерное время изменения неоднородностей показателя преломления составляет 10^{-2} с.

В настоящее время обсуждаются различные подходы к решению задачи передачи излучения через неоднородную среду. Широкое распространение получил подход, основанный на коррекции волнового фронта (ВФ) излучения заданной поперечной структуры. Такая коррекция может осуществляться, например, методом апертурного зондирования, заключающимся в поэлементной фазировке отдельных участков ВФ излучения источника для достижения максимальной мощности на приемнике [1]. (Если прямое измерение мощности на приемнике невозможно, то достигает максимума мощность волны, рассеянной этим приемником и попадающей на заданную апертуру.)

Другой метод коррекции ВФ заключается в предварительном освещении приемника первичной световой волной, последующем перехвате рассеянных этим приемником вторичных волн и отражении их обратно в направлении приемника с обращением волнового фронта (ОВФ).

Для решения проблемы оптимальной передачи излучения возможен еще один подход. Он основан на эффекте адаптивного возбуждения между источником и приемником такого светового пучка, поперечная структура которого обеспечивает наименьшие ди-

фракционные потери излучения при его распространении вдоль всей трассы.

Далее будет показано, что для возбуждения таких световых пучков на апертурах источника и приемника следует расположить ОВФ-зеркала, коэффициент отражения которых достаточен для возникновения генерации в резонаторе, образованном этими зеркалами. Исследуется работа сформированного указанными зеркалами адаптивного лазера, причем основное внимание уделяется нахождению условий самовозбуждения и селекции его продольных и поперечных мод. Поскольку основным элементом обсуждаемого адаптивного лазера являются беспороговые ОВФ-зеркала с большим коэффициентом отражения, то в начале кратко остановимся на их свойствах и только после этого перейдем к исследованию непосредственно адаптивных лазеров¹.

2. БЕСПОРОГОВЫЕ ГИПЕРЗВУКОВЫЕ ОВФ-ЗЕРКАЛА

Для того чтобы использование ОВФ-зеркал на трассах с большими оптическими потерями приводило к самовозбуждению образованного ими резонатора, коэффициенты отражения ОВФ-зеркал должны быть достаточно большими и слабо зависящими от амплитуды падающей на них световой волны. Самовозбуждение резонатора не должно сопровождаться генерацией шумового излучения, так как эффективность передачи излучения в этом случае может существенно снижаться. Поэтому ОВФ-зеркала, используемые для передачи излучения, должны удовлетворять ряду требований. Одно из них состоит в том, что реализация больших коэффициентов отражения не должна приводить к нарастанию волн, затравочными источниками которых служат паразитные компоненты, связанные с дифракцией накачек на краях кюветы, рассеянии их на оптических неоднородностях среды и т. п. Отсюда следует, что частота обращенной волны и, следовательно, частота волны, подвергающейся обращению, должны отличаться от частот мощных накачек.

Другое условие вытекает из того факта, что в оптических системах практически всегда имеется относительно слабое обратное рассеяние обращенной волны на какой-либо отражающей поверхности. Это рассеяние приводит к тому, что излучение на частоте обращенной волны возвращается в ОВФ-зеркало, в результате чего происходит его вторичное отражение. Если коэффициент отражения R от ОВФ-зеркала достаточно велик, то указанный процесс может привести к самопроизвольной генерации оптиче-

¹ Рассматриваемые здесь вопросы создания ОВФ-зеркал и проблема оптимальной передачи излучения представляют интерес не только для оптического, а также и для других диапазонов длин волн. Подобные же вопросы интересны и для волн другой физической природы, например звуковых, на возможность ОВФ которых методом вынужденного температурного рассеяния впервые указал Ф. В. Бункин в 1978 г. (об ОВФ-звука см. статью Бункина Ф. В., Власова Д. В., Кравцова Ю. А. в данном сборнике).

ского излучения между обращающим зеркалом и отражающей поверхностью. Для устранения такой генерации необходимо, чтобы вторичное отражение уже обращенной волны от ОВФ-зеркала было несущественным.

Обоим указанным условиям удовлетворяет процесс ОВФ при четырехволновом комбинационном взаимодействии. Наиболее характерным примером такого взаимодействия является ОВФ при четырехволновом комбинационном взаимодействии с участием гиперзвука. Здесь среда освещается с противоположных сторон двумя встречными пучками накачек с комплексными амплитудами E_0^+ и E_0^- и частотами ω_0^+ и ω_0^- . Частота ω_0^- накачки E_0^- отстроена от частоты ω_1^+ сигнальной волны E_1^+ на величину, равную собственной частоте гиперзвука Ω_0 .

Волна E_1^+ вводится в среду под углом, близким к 180° по отношению к волне E_0^- . В результате взаимодействия волн E_0^- и E_1^+ возбуждается гиперзвуковая волна, рассеяние на которой накачки E_0^+ приводит к излучению обращенной волны с частотой $\omega_1^- = \omega_0^+ + \omega_0^- - \omega_1^+$. Диаграмма волновых векторов, соответствующих этому процессу, приведена на рис. 1.

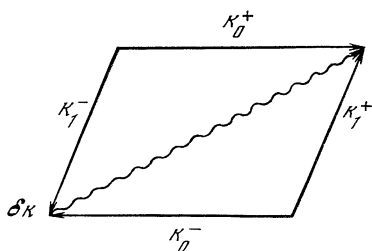


Рис. 1

В приближении заданного поля накачки процесс четырехволнового комбинационного взаимодействия описывается для линейно-поляризованных световых волн системой квазиоптических уравнений [2]

$$\frac{1}{v^+} \frac{\partial E_1^+}{\partial t} + \frac{\partial E_1^+}{\partial z} + \frac{i}{2k_1^+} \Delta_1 E_1^+ = - \frac{ik_1^+ (\partial \varepsilon / \partial q)}{2\varepsilon} E_1^+, \quad (1)$$

$$\frac{1}{v^-} \frac{\partial E_1^-}{\partial t} - \frac{\partial E_1^-}{\partial z} + \frac{i}{2k_1^-} \Delta_1 E_1^- = - \frac{ik_1^- (\partial \varepsilon / \partial q)}{2\varepsilon} E_1^- q^* e^{i\delta k z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{T_2} q = i\beta (E_1^+ E_0^{-*} + E_0^+ E_1^{-*} e^{-i\delta k z}). \quad (3)$$

Здесь q — комплексная амплитуда гиперзвуковой волны, с участием которой происходит процесс четырехволнового взаимодействия; звездочкой отмечены к.с. величины; $k^\pm = \omega^\pm / v^\pm$; $\delta k = k_0^+ + k_1^- - k_0^- - k_1^+$ — волновая расстройка; T_2 — время релаксации среды; v^\pm — скорости волны; β — коэффициент нелинейности.

Удобной для дальнейшего исследования характеристикой ОВФ-зеркал является функция отклика на короткий импульс сигнальной волны, т. е. значение $E_1^-(0, \mathbf{r}_1, t)$ при $E_1^+(0, \mathbf{r}_1, t) = \Psi(0, \mathbf{r}_\perp) \delta(t)$, где $\Psi(0, \mathbf{r}_\perp)$ — поперечная структура подвергающейся обращению волны на входе в среду.

Предположим для простоты, что накачки E_0^+ и E_0^- — плоские волны и длина дифракционного рассогласования $z_{\text{рас}} = \rho^2 [(k_1^+)^{-1} - (k_1^-)^{-1}]$ волн E_1^+ и E_1^- больше характерной длины нелинейного взаимодействия $z_{\text{н}}$ (ρ — масштаб поперечной неоднородности поля E_1^{\pm}). В этом случае можно положить $k_1^+ = k_1^-$. При указанных предположениях решение уравнений (1)–(3) удобно искать в виде

$$E_1^+ = c_1^+(z, t) \Psi_1(z, \mathbf{r}_{\perp}), \quad E_1^- = c_1^-(z, t) \Psi_1^*(z, \mathbf{r}_{\perp}), \quad q(z, t) = q(z, t) \Psi_1^*(z, \mathbf{r}_{\perp}). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1)–(3) и пренебрегая членами $(1/v^{\pm})(\partial c_1^{\pm}/\partial t)$, что допустимо, если время пробега световой волны вдоль масштаба нелинейного взаимодействия меньше характерного времени изменения ее амплитуды, получим

$$\frac{\partial c_1^+}{\partial t} = - \frac{ik_1^+ (\partial \varepsilon / \partial q)}{2\varepsilon} E_0^- \bar{q}^-, \quad (5)$$

$$\frac{\partial c_1^-}{\partial t} = \frac{ik_1^- (\partial \varepsilon / \partial q)}{2\varepsilon} E_0^+ \bar{q}^* \exp(-i\delta k z), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \bar{q} = i\beta (E_0^{*-} c_1^+ + E_0^+ c_1^{-*} \exp(i\delta k z)). \quad (7)$$

Применяя к (5)–(7) преобразование Лапласа, для образа Лапласа от функции отклика $L(p) = \int_0^{\infty} dt c_1^-(t) \exp(-pt)$ при $\delta k = 0$ находим

$$L(p) = \frac{E_0^+ E_0^- \{ \exp[(M^+ + M^-)/2 (1 + pT_2)] - 1 \}}{I_0^- \exp[(M^+ + M^-)/2 (1 + pT_2)] + I_0^+}. \quad (8)$$

Здесь $M^{\pm} = g I_0^{\pm} L$, $g = 2k (\partial \varepsilon / \partial Q) \pi \beta / \varepsilon^2 v$. Значения реальной и мнимой частей полюсов функции $L(p)$ определяются выражениями

$$\text{Re } p_k = \frac{(M^+ + M^-) \ln(I_0^+ / I_0^-)}{2T_2 [\ln^2(I_0^+ / I_0^-) + \pi^2 (2k + 1)^2]} - \frac{1}{T_2}, \quad (9)$$

$$\text{Im } p_k = \frac{\pi (M^+ + M^-) (2k + 1)}{2T_2 [\ln^2(I_0^+ / I_0^-) + \pi^2 (2k + 1)^2]}, \quad (10)$$

где значения $k = 0, \pm 1, \dots$ указывают номер продольной моды. Анализ выражений (8)–(10) показывает, что существуют два режима работы четырехволнового гиперзвукового ОВФ-зеркала. Один из них, неустойчивый, реализуется, если реальная часть полюсов функции $L(p)$, определяемая выражением (9), положительна. Граница области неустойчивости находится из условия $\text{Re } p_k = 0$. Это приводит к следующей зависимости пороговой величины $M^+ + M^-$ от соотношения между интенсивностями накачек I_0^+ / I_0^- :

$$M^{\text{пov}} = M^+ + M^- = 2 [\ln(I_0^+ / I_0^-) + \pi^2 (2k + 1)^2 \ln^{-1}(I_0^+ / I_0^-)]. \quad (11)$$

При превышении этой величины значение $c_1^-(0, t)$ экспоненциально нарастает во времени. Отраженная с обращением волнового фронта волна в этом случае состоит из нескольких мод с частотами, смещенными относительно ω_0^- на величину, определяемую выражением (10). Каждая мода нарастает со своим инкрементом, заданным выражением (9). Экспоненциальный рост $c_1^-(0, t)$ во времени означает, что в этом случае возможно самовозбуждение ОВФ-зеркала. Угловой спектр генерируемого в этом режиме излучения ограничивается значением D/L , где L — длина нелинейной среды, D — диаметр пучков накачек. Минимальное значение $M_{\text{пор}}$, при котором возможно самовозбуждение зеркала, достигается при $I_0^-/I_0^+ = \text{ехрл}$ и равно 4π .

Второй режим, устойчивый, реализуется при $\text{Re } p_k < 0$. Величина коэффициента отражения от ОВФ-зеркала зависит от соотношения интенсивностей накачек и частоты сигнальной волны. Допустим, например, что частоты накачек равны и сигнальная волна падает на среду со стороны мощной накачки. Наибольший коэффициент отражения в этом случае может быть получен, если сигнальная волна имеет антистоксов сдвиг частоты Ω_0 по отношению к частотам накачек. Гиперзвук распространяется при этом навстречу мощной накачке и рассеянная волна имеет стоксов сдвиг частоты относительно частоты накачки.

Если же на среду падает сигнальная волна с частотой, меньшей частоты накачки на стоксов сдвиг, то при рассеянии на гиперзвуке мощной накачки возбуждается волна с антистоксовым сдвигом частоты. В таком процессе ОВФ проходит с отбором энергии от гиперзвуковой волны, т. е. рассеяние мощной накачки сопровождается затуханием гиперзвука, возбуждаемого при взаимодействии сигнальной волны и второй накачки. Коэффициент отражения в этом случае меньше единицы. Если сигнальная волна со стоксовым смещением частоты падает на среду со стороны слабой накачки, то коэффициенты отражения могут быть существенно больше единицы. Дело в том, что при этом гиперзвук возбуждается при взаимодействии сигнальной волны с мощной накачкой и рассеяние на нем слабой накачки, приводящее к образованию обращенной волны с антистоксовым сдвигом частоты, не вызывает его существенного затухания. Однако здесь обращенная волна образуется при рассеянии слабой накачки, и поэтому ее интенсивность всегда меньше интенсивности этой накачки.

3. ПЕРЕДАЧА ИЗЛУЧЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕЗОНАТОРОВ, ОБРАЗОВАННЫХ ОВФ-ЗЕРКАЛАМИ

3.1. Оптимальная передача излучения и формирование поперечных мод в резонаторах с ОВФ-зеркалами

Перейдем теперь к исследованию вопросов оптимальной передачи излучения. Прежде всего покажем, что поперечная структура светового пучка, возбуждаемого в резонаторе с ОВФ-зеркалами,

оптимизирует передачу мощности излучения с одного зеркала на другое.

Для этого выразим в квазиоптическом приближении мощность излучения на приемной апертуре через амплитудно-фазовый профиль излучения на передающей апертуре

$$A = \int_{S_{\text{II}}} d^2r_{\perp} \int_{S_{\text{I}}} d^2r_{\perp}^{(1)} \int_{S_{\text{I}}} d^2r_{\perp}^{(2)} H(0, l, \mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, \mathbf{r}_{\perp}) H^*(0, l, \mathbf{r}_{\perp}^{(2)}, \mathbf{r}_{\perp}) \times \\ \times E(\mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, 0) E^*(\mathbf{r}_{\perp}^{(2)}, 0) \quad (12)$$

или

$$A = \int_{S_{\text{II}}} d^2r_{\perp}^{(1)} \int_{S_{\text{II}}} d^2r_{\perp}^{(2)} K(\mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, \mathbf{r}_{\perp}^{(2)}) E(\mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, 0) E^*(\mathbf{r}_{\perp}^{(2)}, 0), \quad (13)$$

где

$$K(\mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, \mathbf{r}_{\perp}^{(2)}) = \int_{S_{\text{II}}} d^2r_{\perp} H(0, l, \mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, \mathbf{r}_{\perp}) H^*(0, l, \mathbf{r}_{\perp}^{(2)}, \mathbf{r}_{\perp}).$$

Здесь S_{I} , S_{II} — апертуры источника и приемника излучения соответственно; $H(0, l, r_{\perp}^{(1)}, r_{\perp})$ — ядро квазиоптического оператора пересчета поля $E(r_{\perp}^{(1)}, z)$ из плоскости $z = 0$ в плоскость приемника $z = l$ (ось z выбирается вдоль направления распространения излучения):

$$E(\mathbf{r}_{\perp}, l) = \hat{H}E(\mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, 0) = \int_{S_{\text{II}}} d^2r_{\perp}^{(1)} H(0, l, \mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, \mathbf{r}_{\perp}) E(\mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, 0). \quad (14)$$

Пространственные и угловые характеристики источника и приемника излучения не входят в явном виде в (12). Однако их нетрудно учесть, если в функцию $H(0, l, \mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, \mathbf{r}_{\perp})$ включить члены, описывающие диафрагмы и пространственные фильтры, которые задают пространственно-угловые характеристики источника и приемника.

Функционал (13) достигает максимума, если амплитудно-фазовый профиль поля $E(\mathbf{r}_{\perp}, 0)$ совпадает с соответствующей минимальному собственному числу λ_{mn} собственной функцией $\Psi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp})$ уравнения [3, 4]

$$\Psi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp}) = \lambda_{mn} \int_{S_{\text{II}}} d^2r_{\perp}^{(1)} K(\mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, \mathbf{r}_{\perp}) \Psi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp}^{(1)}). \quad (15)$$

Значение λ характеризует ослабление ($\lambda > 1$) или усиление ($\lambda < 1$) излучения на трассе. Предположим, что все собственные числа отличаются друг от друга и минимальное из них λ_{00} . Тогда мода $\Psi_{00}(\mathbf{r}_{\perp})$ будет оптимизировать передачу мощности оптического излучения.

Рассмотрим теперь резонатор с двумя ОВФ-зеркалами. Если коэффициенты отражения от ОВФ-зеркал не зависят от времени и поперечной структуры падающего на них излучения, то в квазиоптическом приближении амплитудно-фазовый профиль собствен-

ных мод такого резонатора определяется интегральным уравнением

$$\varphi_{mn}(\mathbf{r}_\perp) = \nu_{mn} R_1 R_2 \int_{S_{\text{II}}} d^2 r_\perp^{(1)} \int_{S_{\text{И}}} d^2 r_\perp^{(2)} H^*(l, 0, \mathbf{r}_\perp^{(1)}, \mathbf{r}_\perp) \times \\ \times H(0, l, \mathbf{r}_\perp^{(2)}, \mathbf{r}_\perp^{(1)}) \varphi_{mn}(\mathbf{r}_\perp^{(2)}). \quad (16)$$

Здесь R_1, R_2 — коэффициенты отражения ОВФ-зеркал; $\varphi_{mn}(r_\perp)$ — амплитудно-фазовый профиль собственной моды резонатора; ν_{mn} — собственное число, характеризующее оптические потери в резонаторе для собственной моды. Если среда внутри резонатора взаимна, т. е. $H(0, l, \mathbf{r}_\perp^{(1)}, \mathbf{r}_\perp^{(2)}) = H(l, 0, \mathbf{r}_\perp^{(2)}, \mathbf{r}_\perp^{(1)})$, то (15) и (16) совпадают с точностью до множителя $R_1 R_2$, при этом $\lambda_{mn} = \nu_{mn} R_1 R_2$.

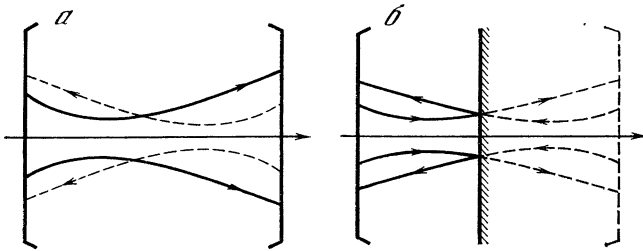


Рис. 2

Отсюда следует, что основная мода резонатора с ОВФ-зеркалами переносит излучение от источника к приемнику с минимальными потерями мощности.

Для однородной среды с гауссовыми диафрагмами на апертурах ОВФ-зеркал уравнение (16) допускает точное решение

$$\varphi_{00}(\mathbf{r}_\perp) = \exp\left(-\frac{ik}{2z} r_\perp^2\right) \exp\left[-\frac{r_\perp^2}{2} \left(\rho_{\text{И}}^{-1} + \frac{k^2 r_{\text{II}}^2}{4z^2 \rho_{\text{И}}^2}\right)\right]. \quad (17)$$

Здесь $\rho_{\text{И}}, \rho_{\text{II}}$ — ширина гауссовых диафрагм на апертурах источника и приемника.

Качественно структура основной моды такого резонатора изображена на рис. 2, а (сплошными линиями показано изменение радиуса пучка, распространяющегося от источника к приемнику, а штриховыми — изменение радиуса встречного пучка).

Интересно сравнить структуру поля в рассмотренном случае с двумя ОВФ-зеркалами со структурой поля, формируемой в резонаторе, образованном ОВФ-зеркалами и плоской отражающей поверхностью. Амплитудно-фазовый профиль собственных мод такого резонатора определяется уравнением

$$\varphi_{mn}^*(r_\perp) = \lambda_{mn} \int_{S_{\text{II}}} d^2 r_\perp^{(1)} \int_{S_{\text{И}}} d^2 r_\perp^{(2)} H(l, 0, \mathbf{r}_\perp^{(1)}, \mathbf{r}_\perp) \times \\ \times H(0, l, \mathbf{r}_\perp^{(2)}, \mathbf{r}_\perp^{(1)}) \varphi_{mn}(\mathbf{r}_\perp^{(2)}). \quad (18)$$

Это уравнение нелинейное, но, как нетрудно видеть, его решение удовлетворяет также линейному уравнению

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}(r_{\perp}) = & \lambda_{mn}^2 \int_{S_{\Pi}} d^2r_{\perp}^{(1)} \int_{S_{\Pi}} d^2r_{\perp}^{(2)} \int_{S_{\Pi}} d^2r_{\perp}^{(3)} \int_{S_{\Pi}} d^2r_{\perp}^{(4)} H^*(l, 0, \mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, \mathbf{r}_{\perp}) \times \\ & \times H^*(0, l, \mathbf{r}_{\perp}^{(2)}, \mathbf{r}_{\perp}^{(1)}) H(l, 0, \mathbf{r}_{\perp}^{(3)}, \mathbf{r}_{\perp}^{(2)}) H(0, l, \mathbf{r}_{\perp}^{(4)}, \mathbf{r}_{\perp}^{(3)}) \varphi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp}^{(4)}). \end{aligned} \quad (19)$$

Введем обозначение

$$H(0, 2l, \mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}_{\perp}^{(1)}) = \int_{S_{\Pi}} d^2r_{\perp}^{(2)} H(l, 0, \mathbf{r}_{\perp}^{(2)}, \mathbf{r}_{\perp}^{(1)}) H(0, l, \mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}_{\perp}^{(2)}). \quad (20)$$

Оператор пересчета \hat{H} с ядром (20) соответствует распространению волны в среде длиной $2l$ с возмущениями показателя преломления $n(\mathbf{r}_{\perp}, z)$, задаваемого выражением

$$n(\mathbf{r}_{\perp}, z) = \begin{cases} \bar{n}(\mathbf{r}_{\perp}, z) & \text{при } 0 \leq z \leq l, \\ n(\mathbf{r}_{\perp}, 2l - z) & \text{при } l < z \leq 2l. \end{cases} \quad (21)$$

Используя (20), можно преобразовать (19) к виду

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp}) = & \lambda_{mn}^2 \int_{S_{\Pi}} d^2r_{\perp}^{(1)} \int_{S_{\Pi}} d^2r_{\perp}^{(2)} H^*(2l, 0, \mathbf{r}_{\perp}^{(1)}, \mathbf{r}_{\perp}) \times \\ & \times H(0, 2l, \mathbf{r}_{\perp}^{(2)}, \mathbf{r}_{\perp}^{(1)}) \varphi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp}^{(1)}). \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (22) описывает моды в резонаторе с двумя обращаемыми зеркалами. Отсюда следует, что резонатор, образованный ОВФ-зеркалом и плоским отражателем, эквивалентен резонатору, составленному из ОВФ-зеркала и его изображения в плоском отражателе. Неоднородная среда в эквивалентном резонаторе также образуется отражением в плоском зеркале среды исходного резонатора. Качественно структура основной моды такого резонатора показана на рис. 2, б (сплошными линиями показано изменение радиуса световых пучков в резонаторе с ОВФ-зеркалом и плоским отражателем, а штриховыми — изменение радиуса световых пучков в эквивалентном резонаторе с двумя ОВФ-зеркалами).

Обсудим возможность построения эквивалентных резонаторов для оптических систем, содержащих ОВФ-зеркала, линзы и вогнутые или выпуклые отражатели.

Рассмотрим сначала резонатор, состоящий из двух ОВФ-зеркал и линзы с фокусным расстоянием F , расположенной между ними на расстоянии l_1 от левого ОВФ-зеркала. Уравнение для собственных мод такого резонатора следующее:

$$\begin{aligned} \varphi'_{mn}(r_{\perp}) = & \lambda_{mn} \int_{-\infty}^{\infty} d^2r_{\perp}^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} d^2r_{\perp}^{(2)} \int_{-\infty}^{\infty} d^2r_{\perp}^{(3)} \int_{-\infty}^{\infty} d^2r_{\perp}^{(4)} \times \\ & \times D_1(r_{\perp}) H^*(l_1, 0, r_{\perp}^{(1)}, r_{\perp}) \exp \left[i \frac{(r_{\perp}^{(1)})^2}{2F} \right] H^*(l, l_1, r_{\perp}^{(2)}, r_{\perp}^{(1)}) \times \\ & \times D_2^2(r_{\perp}^{(2)}) H(l_1, l, r_{\perp}^{(3)}, r_{\perp}^{(2)}) \exp \left[i \frac{(r_{\perp}^{(3)})^2}{2F} \right] H(0, l_1, r_{\perp}^{(4)}, r_{\perp}^{(2)}) D_1(r_{\perp}^{(4)}) \times \\ & \times \varphi_{mn}(r_{\perp}^{(4)}), \end{aligned} \quad (23)$$

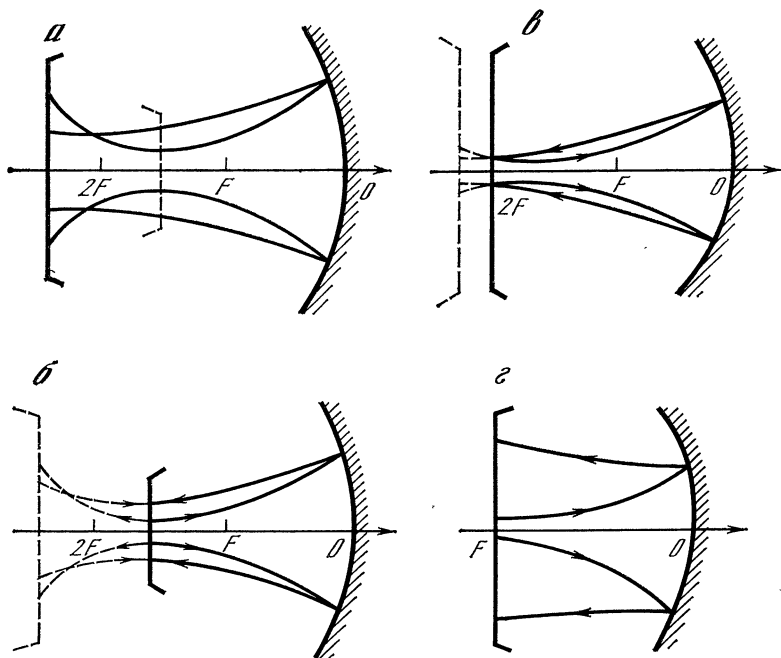


Рис. 3

где $D_1(r_{\perp})$, $D_2(r_{\perp})$ — амплитудно-фазовые маски ОВФ-зеркал.

Для однородной среды $H(0, l, r_{\perp}^{(1)}, r_{\perp}) = \frac{ik}{2\pi l} \exp\left[-\frac{ik(r_{\perp}^{(1)} - r_{\perp})^2}{2l}\right]$. Подставляя это выражение в (23), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}(r_{\perp}) = & \lambda_{mn} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_{\perp}^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_{\perp}^{(2)} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_{\perp}^{(3)} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_{\perp}^{(4)} \times \\ & \times D_1(r_{\perp}/a) \exp\left[\frac{ik(r_{\perp}^{(1)} - r_{\perp})^2}{2l_2}\right] \exp\left[\frac{ik(r_{\perp}^{(2)} - r_{\perp}^{(1)})^2}{2(l-l)}\right] \times \\ & \times D_2^2(r_{\perp}^{(2)}) \exp\left[-\frac{ik(r_{\perp}^{(3)} - r_{\perp}^{(2)})^2}{2(l-l)}\right] \exp\left[-\frac{ik(r_{\perp}^{(3)} - r_{\perp}^{(4)})^2}{2l_2}\right] \times \\ & \times D_1(r_{\perp}^{(4)}/a) \varphi_{mn}(r_{\perp}^{(4)}) \frac{k^4}{16\pi^4 l_2^2 (l-l)^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$1/F = 1/l_1 + 1/l_2, \quad a = l_1/l. \quad (25)$$

Эквивалентность уравнений (23) и (24) означает, что ОВФ-зеркало и линза могут быть заменены изображением ОВФ-зеркала в линзе, построенным по формулам геометрической оптики (25).

Покажем теперь, что таким же способом можно построить эквивалентный резонатор для резонатора из ОВФ-зеркала и вогнутого

или выпуклого отражателя. Для этого заметим, что выпуклый или вогнутый отражатель можно заменить линзой и плоским зеркалом. Произведя такую замену и последовательно построив изображение ОВФ-зеркала в линзе и плоском отражателе, получим изображение ОВФ-зеркала в выпуклом или вогнутом отражателе. Учитывая эквивалентность проведенных замен, заключаем, что резонатор, образованный ОВФ-зеркалом и его изображением в вогнутом или выпуклом отражателе, эквивалентен исходному. Таким образом, показано, что ОВФ-зеркало, внесенное в оптическую систему, состоящую из линз и вогнутых или выпуклых отражателей, может быть заменено его изображением, которое строится по формулам геометрической оптики.

Качественный характер структуры поля основных мод резонаторов с ОВФ-зеркалом и вогнутым отражателем показан на рис. 3, а — г. На рис. 3, а — $l_1 > 2F$, на рис. 3, б — $F < l_1 < 2F$, на рис. 3, в — $l_1 = 2F$ и на рис. 3, г — $l_1 = F$. На этих рисунках сплошными линиями показано изменение радиуса

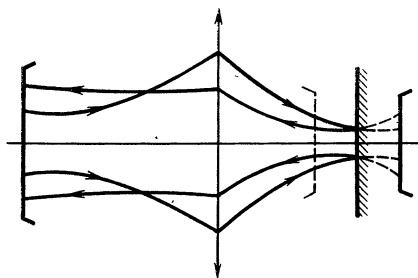


Рис. 4

световых пучков в резонаторе с ОВФ-зеркалом и вогнутым отражателем, а штриховыми — изменение радиуса световых пучков в эквивалентном ему резонаторе с двумя ОВФ-зеркалами.

Последовательным построением изображения ОВФ-зеркала в оптических элементах можно достаточно сложную оптическую систему преобразовать к эквивалентной ей ОВФ-зеркалу. Используя технику построения изображений, можно, в частности, показать, что мода, формируемая в резонаторе, состоящем из ОВФ-зеркала, линзы и плоского зеркала, размещенного в ее фокусе, оптимизирует передачу излучения на плоское зеркало, если фокусное расстояние линзы много меньше длины резонатора. Действительно, в этом случае изображение ОВФ-зеркала будет находиться вблизи фокуса линзы, т. е. вблизи плоского зеркала (см. рис. 4). Так как основная мода, формируемая в резонаторе с ОВФ-зеркалами, оптимизирует передачу энергии между апертурами этих зеркал, то мы заключаем, что между ОВФ-зеркалом и его изображением формируется мода, оптимизирующая передачу энергии в плоскость изображения ОВФ-зеркала. Поскольку изображение ОВФ-зеркала находится вблизи плоского зеркала, можно приблизительно считать, что сформированная мода оптимизирует передачу мощности излучения на плоское зеркало.

Если коэффициент отражения ОВФ-зеркал не зависит от поперечной структуры падающего на них излучения, то все сказанное ранее остается справедливым при таких мощностях излучения, когда ОВФ-зеркала работают в режиме, близком к насыщению.

Заметим также, не останавливаясь на этом подробно, что системы резонаторов с ОВФ-зеркалами, подобные описанным выше, могут использоваться для формирования коротких импульсов излучения, передаваемого через среду с межмодовой дисперсией. В этом случае зеркала ОВФ, осуществляющие «мгновенную» операцию комплексного сопряжения, должны включаться на короткие интервалы времени, определяемые требуемой длительностью импульсов, с периодом, равным среднему времени пробега излучения через резонатор.

3.2. Самовозбуждение резонаторов с ОВФ-зеркалами и формирование в них продольных мод оптического излучения

Обсудим теперь условия самовозбуждения резонатора с двумя ОВФ-зеркалами [5]. Предположим, что скорости распространения волн в резонаторе v^\pm одинаковы и не зависят от частоты и пространственной структуры излучения. В этом случае на границах резонатора справедливы уравнения

$$E_1^+(0, \mathbf{r}_\perp, t) = \hat{L}_+ [\hat{H} E_1^-(l, \mathbf{r}_\perp, t - \tau) \exp(i\omega_1^- \tau)]^* + G^+(\mathbf{r}_\perp, t), \quad (26)$$

$$E_1^-(l, \mathbf{r}_\perp, t) = \hat{L}_- [\hat{H} E_1^+(0, \mathbf{r}_\perp, t - \tau) \exp(i\omega_1^+ \tau)] + G^-(\mathbf{r}_\perp, t). \quad (27)$$

Здесь \hat{L}_+ и \hat{L}_- — операторы отражения от ОВФ-зеркал; E_1^+ , E_1^- — амплитуды встречных волн в резонаторе; ω_1^+ , ω_1^- — частоты волн E_1^+ и E_1^- ; $G^\pm(\mathbf{r}_\perp, t)$ — сторонние источники шумового излучения; τ — время пробега через резонатор; l — длина резонатора.

Подставив (27) в (26) и выполнив преобразование Лапласа для $E_1^+(0, \mathbf{r}_\perp, p)$, получим

$$E_1^+(0, \mathbf{r}_\perp, p) = L_+(p) L_-^*(p) \hat{H}^* \hat{H} E_1^+(0, \mathbf{r}_\perp, p) \exp[i(\omega_1^+ - \omega_1^-)r - 2p\tau] + G^+(\mathbf{r}_\perp, p) + L_+(p) \hat{H} G^-(\mathbf{r}_\perp, p) \exp(i\omega_1^- \tau). \quad (28)$$

Решение уравнения (28) будем искать в виде $E_1^+(0, \mathbf{r}_\perp, p) = \sum_{mn=1}^{\infty} C_{mn}(p) \Psi_{mn}(\mathbf{r}_\perp)$, где $\Psi_{mn}(\mathbf{r}_\perp)$ — ортогональные собственные функции оператора $\hat{H}^* \hat{H}$, удовлетворяющие уравнению (15).

Используя свойство (15), для $C_{mn}(p)$ получим выражение

$$C_{mn}(p) = \frac{G_{mn}(p)}{1 - \lambda_{mn}^{-1} L_+(p) L_-^*(p) \exp[i(\omega_1^+ - \omega_1^-) \tau - 2p\tau]}, \quad (29)$$

где

$$G_{mn}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_\perp [G^+(\mathbf{r}_\perp, p) + L_+(p) \hat{H} G^-(\mathbf{r}_\perp, p) \exp(i\omega_1^- \tau)] \Psi_{mn}(\mathbf{r}_\perp).$$

Применяя к выражению (29) обратное преобразование Лапласа, можно получить зависимость комплексной амплитуды поля в резонаторе от времени для произвольных источников $G^\pm(\mathbf{r}_\perp, t)$. Самовозбуждение такого резонатора возможно, если полюсы выраже-

ния (29) имеют положительную действительную часть. Поэтому для нахождения условий самовозбуждения резонатора с ОВФ-зеркалами нужно определить область параметров, где действительная часть $\text{Re} p_{mnk}$ корней дисперсионного уравнения

$$1 - \lambda_{mn}^{-1} L_+^* (p) L_-^+ (p) \exp [i (\omega_1^+ - \omega_1^-) \tau - 2p\tau] = 0 \quad (30)$$

больше нуля. В этой области параметров возбуждающееся в резонаторе поле нарастает во времени с инкрементом $\text{Re} p_{mnk}$, где k — индекс продольной моды резонатора, смещенной от основной частоты ω_1^+ на величину $\text{Im} p_{mnk}$.

Если характерные времена изменения амплитуды и фазы поля в резонаторе с ОВФ-зеркалами велики по сравнению с временем «срабатывания» этих зеркал, определяемым величиной T_2 , то произведение $L_+ (p)$ и $L_-^* (p)$ вблизи его максимума можно считать не зависящим от p и равным $(L_+ L_-^*)_{\text{max}}$. Нетрудно видеть, что с наибольшим инкрементом нарастает поле, поперечная структура которого соответствует минимальной величине λ_{mn} . Действительно, в этом случае (30) принимает вид

$$|\lambda_{mn}^{-1} | L_+ L_-^* |_{\text{max}} \exp (i\Psi - p\tau) = 1, \quad (31)$$

$$\text{где } \Psi = (\omega_1^+ - \omega_1^-) \tau + \arg (L_+ L_-^*)_{\text{max}}.$$

Корни этого уравнения

$$\text{Re } p_{mnk} = \tau^{-1} \ln (| L_+ L_-^* |_{\text{max}} \lambda_{mn}^{-1}), \quad (32)$$

$$\text{Im } p_{mnk} = \tau^{-1} (\Psi - 2\pi k). \quad (33)$$

Отсюда получаем условие самовозбуждения резонатора

$$| L_+ L_-^* |_{\text{max}} \lambda_{mn}^{-1} > 1. \quad (34)$$

Наибольшего значения величина $| L_+ L_-^* |_{\text{max}} \lambda_{mn}^{-1}$ достигает при минимальной величине λ_{mn} , т. е. соответствующая этому собственному числу мода будет нарастать с наибольшим инкрементом. При этом в резонаторе с ОВФ-зеркалами будет возбуждаться излучение, обладающее минимальными оптическими потерями.

При сравнимых величинах T_2 и τ зависимость инкремента от величины дифракционных потерь определяется конкретным видом функций $L_+ (p)$, $L_-^* (p)$, и в некоторых случаях возможно возбуждение моды с неминимальными потерями.

Условия самовозбуждения резонатора, состоящего из совокупности различных оптических элементов и включающего одно или два ОВФ-зеркала, могут быть получены заменой данного резонатора на эквивалентный. Эквивалентный резонатор строится с помощью последовательного построения изображений ОВФ-зеркала в оптических элементах, так как это описано в предыдущем разделе. Величина λ_{mn} не меняется при этих преобразованиях, поэтому условия самовозбуждения исходного резонатора и эквивалентного ему совпадают.

4. УСЛОВИЯ ГЕНЕРАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В РЕЗОНАТОРАХ С ЧЕТЫРЕХВОЛНОВЫМИ ОВФ-ЗЕРКАЛАМИ

Рассмотрим резонатор, образованный четырехволновыми гиперзвуковыми ОВФ-зеркалами. Предположим, что одно из ОВФ-зеркал, состоящее из комбинационно-активной среды с собственной частотой колебаний среды Ω_a , просвечивается накачками с частотами ω_a^+ , ω_a^- , а второе, состоящее из комбинационно-активной среды с собственной частотой Ω_b , просвечивается накачками с частотами ω_b^+ , и ω_b^- . Это означает, что ОВФ-зеркала преобразуют с ОВФ излучение с частотой $\omega_{a,b}^- + \Omega_{a,b} \pm \delta$ в излучение с частотой $\omega_{a,b}^+ - \Omega_{a,b} \pm \delta$, где δ — допустимое смещение частоты относительно точного резонанса. Для того чтобы было возможно самовозбуждение такого резонатора, необходимо выполнение следующих соотношений между частотами накачек:

$$\omega_a^- = \omega_b^+ + [(\Omega_b^+ + \Omega_a) + \Delta \pm 2\delta], \quad (35)$$

$$\omega_a^+ = \omega_b^- - (\Omega_b + \Omega_a) + \Delta \pm 2\delta. \quad (36)$$

Здесь Δ — смещение частоты излучения при его распространении внутри оптического резонатора.

Если величина Δ заранее неизвестна, то должны использоваться ОВФ-зеркала с малым временем релаксации T_2 , т. е. большой шириной линии спонтанного рассеяния. Так как широкополосные ОВФ-зеркала имеют низкий коэффициент отражения, то для трасс с высокими оптическими потерями в этом случае целесообразно использовать резонаторы, образованные широкополосным ОВФ-зеркалом и узкополосным ОВФ-зеркалом с большим коэффициентом отражения.

Предположим, что $\Delta = 0$ и частоты выбраны таким образом, что $\delta = 0$. Допустим также, что соотношение интенсивностей накачек выбрано так, что коэффициент отражения одного из зеркал на частоте $\omega_a^+ + \Omega_a$ равен коэффициенту отражения второго зеркала на частоте $\omega_b^+ - \Omega_b$. Дисперсионное уравнение (30) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} & \lambda_{mn}^{-1} \exp(i\Psi - 2p\tau) I_0^+ I_0^- \left[\exp \frac{M^+ + M^-}{2(1 + pT_2)} - 1 \right]^2 \times \\ & \times \left[I_0^- \exp \frac{M^+ + M^-}{2(1 - pT_2)} + I_0^+ \right]^{-2} + 1 = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь $\Psi = (\omega_1^+ - \omega_1^-) \tau + \arg(E_{0a}^+ E_{0a}^- E_{0b}^{+*} E_{0b}^{-*})$; E_{0a}^\pm , E_{0b}^\pm — амплитуды накачек каждого из ОВФ-зеркал. Если время τ пробега волны через резонатор мало по сравнению с характерным временем изменения амплитуды и фазы поля в резонаторе, то величину $\exp(-2p\tau)$ можно положить равной единице. Тогда корни диспер-

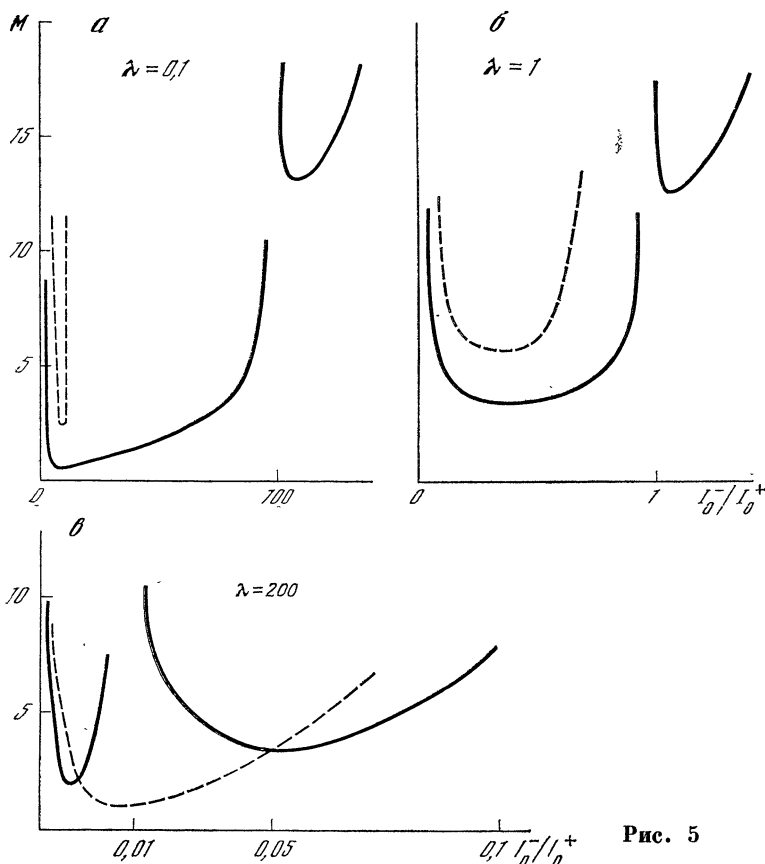


Рис. 5

сионного уравнения (37) определяются выражением

$$\text{Im } p_{mnk}^{1,2} = - \frac{(M^+ + M^-) (\arg x_{mn}^{1,2} + 2\pi k)}{2T_2 [\ln^2 |x_{mn}^{1,2}| + (\arg x_{mn}^{1,2} + 2\pi k)^2]}, \quad (38)$$

$$\text{Re } p_{mnk}^{1,2} = \frac{(M^+ + M^-) \ln |x_{mn}^{1,2}|}{2T_2 [\ln^2 |x_{mn}^{1,2}| + (\arg x_{mn}^{1,2} + 2\pi k)^2]} - \frac{1}{T_2}. \quad (39)$$

Здесь

$$x_{mn}^{1,2} = \frac{(\lambda_{mn} I_0^+ / I_0^-)^{1/2} \exp [(-i/2) (\Psi \pm \pi)] + 1}{1 - (\lambda_{mn} I_0^- / I_0^+)^{1/2} \exp [(-i/2) (\Psi \pm \pi)]}, \quad (40)$$

$k_{\pm}^n = 0, \pm 1, \dots$ — индекс продольной моды. Как легко видеть из выражения (39), порог самовозбуждения моды $\varphi_{mnk}^{1,2}$ задается соотношением

$$M_{mnk}^{\text{пор}} = M^+ + M^- = 2 \left[\ln |x_{mnk}^{1,2}| + \frac{(\arg x_{mnk}^{1,2} + 2\pi k)^2}{\ln |x_{mnk}^{1,2}|} \right]. \quad (41)$$

При превышении величиной $M^+ + M^-$ порогового значения амплитуда поля в резонаторе нарастает во времени с инкрементом $\text{Re } p_{mnk}^{1,2}$, смещение частоты от центра линии равно $\text{Im } p_{mnk}^{1,2}$.

Исследование зависимости $M_{mnk}^{\text{пор}}(\lambda_{mn}, I_0^-/I_0^+, \Psi)$ в общем случае достаточно трудоемко. Поэтому ограничимся частным случаем $\Psi = \pi + 2\pi n$, представляющим наибольший интерес с точки зрения поиска минимального порога самовозбуждения адаптивного резонатора. Из анализа выражений (38) — (39) видно, что при указанных предположениях близкие пороги самовозбуждения имеют моды с частотой, смещенной относительно частоты ω_1^- на величину

$$\text{Im } p_{mnk} = \pm \pi / \ln |x|, \text{ и } j \text{ мода с частотой } \omega_1^- \text{ (для нее } \text{Im } p_{mnk} = 0, k = 0).$$

На рис. 5, а—в приведены зависимости $M^{\text{пор}}(I_0^-/I_0^+)$ при различных значениях λ_{mn} . Сплошной линией на этих рисунках изображена величина $M^{\text{пор}}(I_0^-/I_0^+)$ для моды с $\text{Im } p_{mnk} = 0 (k = 0)$, а штриховыми — $M^{\text{пор}}(I_0^-/I_0^+)$ для мод с $\text{Im } p_{mnk} = \pm \pi / \ln |x|$. Моды с $\text{Im } p_{mnk} = +\pi / \ln |x|$ и $\text{Im } p_{mnk} = -\pi / \ln |x|$ имеют равные пороги самовозбуждения. Из приведенных зависимостей вид-

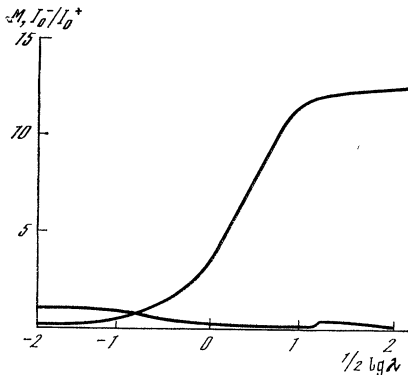


Рис. 6

но, что при низких оптических потерях ($\lambda_{mn} = 0,1$ и 1)¹ минимальный порог самовозбуждения имеет мода с частотой ω_1^- . При $\lambda > 200$ порог самовозбуждения моды с частотой ω_1^- становится выше порога самовозбуждения мод с частотами $\omega_1^\pm \pm \pi / \ln |x|$.

На рис. 6 приведена зависимость оптимального соотношения I_0^-/I_0^+ и соответствующей ему величины $M_{\text{min}}^{\text{пор}}$ от величины оптических потерь. Из рисунка видно, что при высоких оптических потерях порог самовозбуждения рассматриваемого резонатора стремится к порогу самовозбуждения зеркал ОВФ. При $\lambda \simeq 90$ порог самовозбуждения резонатора составляет 0,8 от порога самовозбуждения ОВФ-зеркала. Изменение характера зависимости $M_{\text{min}}^{\text{пор}}(\lambda)$ при $\lambda > 200$ связано с переходом резонатора на генерацию мод со смещенной относительно центра линией частотой. Этот переход обусловлен тем, что эффективность возбуждения гиперзвука в нелинейной среде ОВФ-зеркал существенно зависит от взаимной фазировки генерируемых волн E_1^+ и E_1^- . Например, порог самовозбуждения резонатора с $\lambda = 1$ при $\Psi = \pi + 2\pi n$ и оптимальном соотношении $I_0^\pm/I_0^\mp = 0,16$ равен $M^{\text{пор}} = 3,6$. Для сравнения

¹ Значения $\lambda < 1$ соответствуют дополнительному усилению внутри резонатора.

замечим, что при $\lambda = 1$ и $\Psi = 2\pi l$ порог самовозбуждения для оптимального соотношения $I_0^\pm/I_0^\mp = 0,05$ почти в два раза выше и равен $M^{\text{пор}} = 2\pi$.

Зависимость порога самовозбуждения от взаимной фазировки волн указывает на новые возможности создания ОВФ-зеркал с высокими коэффициентами отражения. Допустим, например, что два ОВФ-зеркала расположены одно за другим и расстояние между ними выбрано таким, чтобы фазовый набег излучения на этом отрезке был оптимальным для возбуждения гиперзвука в нелинейной среде. Как показывают расчеты, коэффициент отражения от такой системы зеркал будет выше, чем от одного зеркала с такими же интенсивностями накачек и длиной среды, равной сумме длин сред двух ОВФ-зеркал.

Для того чтобы при самовозбуждении резонатора с высокими дифракционными потерями не происходило самовозбуждения ОВФ-зеркал, можно использовать усилитель на трассе передачи излучения. Пороги самовозбуждения резонаторов в этом случае определяются выражениями (38), (39), но величина λ_{mn} в них должна быть заменена на $\lambda_{mn}K^{-2}$, где K — коэффициент усиления усилителя. Однако при этом внутри резонатора появляются дополнительные рассеивающие поверхности. Из-за обратного рассеяния на этих поверхностях при использовании ОВФ-зеркал с равными частотами накачек $\omega_0^- = \omega_0^+$, кроме описанного процесса самовозбуждения резонатора с ОВФ-зеркалами, может развиваться конкурирующий процесс генерации излучения между ОВФ-зеркалами и рассеивающей поверхностью.

Рассмотрим этот процесс подробнее. Предположим, у гиперзвукового ОВФ-зеркала частоты накачек равны $\omega_0^- = \omega_0^+$. В этом случае обратно рассеянная волна частоты $\omega_1^- = \omega_0^+ - \Omega_0$, вновь попадая на ОВФ-зеркало, преобразуется в волну частоты $\omega_1^+ = \omega_0^- + \Omega_0$. Эта волна, в свою очередь, рассеиваясь в обратном направлении, опять попадает на ОВФ-зеркало, и весь цикл отражений повторяется. Так как рассеивающие поверхности находятся, как правило, вблизи ОВФ-зеркала, то потери такого резонатора определяются в основном коэффициентом отражения от рассеивающей поверхности. Дисперсионное уравнение в этом случае имеет вид

$$\lambda_{mn}^{-1} \exp [2i(\omega_1^+ - \omega_1^-) \tau - 4\pi\tau] - 4\pi\tau L(p) L'(p) = 1. \quad (42)$$

Здесь функция $L(p)$ определяется выражением (8), а функция $L'(p)$ — той же формулой, но с заменой g на $-g$ и $E_0^+E_0^-$ на $(E_0^+E_0^-)^*$. Так же как для резонатора с двумя ОВФ-зеркалами, положим, что время τ пробега через резонатор меньше характерного времени изменения амплитуды и фазы поля в резонаторе и $\exp(-\pi\tau)$ можно считать равной единице. Величины инкрементов и порог самовозбуждения в этом случае определяются форму-

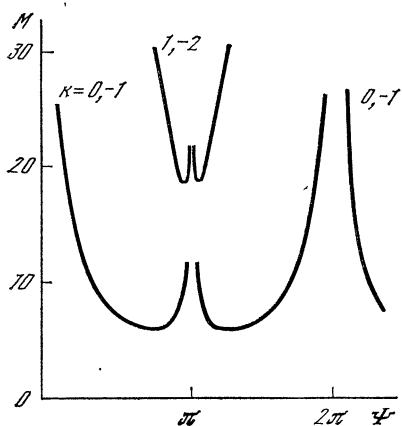


Рис. 7

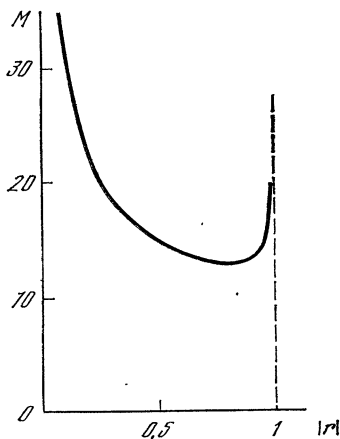


Рис. 8

лами (37) — (39), где $x_{mn}^{1,2}$ является решением уравнения

$$x_{mn}^{1,2} + \left[\frac{(I_0^-/I_0^+)^2 - 2\lambda_{mn} \exp(i\Psi) (I_0^-/I_0^+) + 1}{(I_0^-/I_0^+) (1 + \lambda_{mn} \exp(i\Psi))} \right] x_{mn}^{1,2} + 1 = 0, \quad (43)$$

где $\Psi = 2\pi (\omega_0^+ - \omega_0^-)$.

Рассмотрим несколько частных случаев. Предположим сначала, что $I_0^-/I_0^+ = \lambda = 1$. При этом $\arg x_{mn}^{1,2} = \pi/2$ и минимальное значение $M_{\text{ин}}^{\text{пор}} = 2\pi$ достигается при $|x| = \exp \pi$. Зависимость $M^{\text{пор}}$ от Ψ для $I_0^-/I_0^+ = \lambda = 1$ приведена на рис. 7. Из приведенной зависимости видно, что при $\Psi = \pi n$ самовозбуждение невозможно. На рис. 8 приведена зависимость $M^{\text{пор}}(\lambda)$ для значений $\Psi = \pi (2n + 1)$ при $I_0^-/I_0^+ = 1$. Интересно отметить, что в этом случае зависимость $M^{\text{пор}}(\lambda)$ носит немонотонный характер. Такое поведение связано с влиянием эффекта взаимной фазировки поля E_1^+ и E_1^- на возбуждение в нелинейной среде ОВФ-зеркала гиперзвука. Этот пример иллюстрирует возможность генерации излучения не с минимальными, а с некоторыми оптимальными для возбуждения гиперзвука оптическими потерями.

Для устранения эффектов самовозбуждения оптического излучения между ОВФ-зеркалом и рассеивающей поверхностью в гиперзвуковых ОВФ-зеркалах можно использовать накачки с разными частотами. Если $|\omega_0^+ - \omega_0^-| \gg T_2^-$ и $\|\omega_0^+ - \omega_0^- - 2\Omega_0\| \gg T_2^-$, то частота обращенной волны отличается от частоты ω_0^+ на величину, большую ширины линии среды. Вторичное отражение от ОВФ-зеркала в этом случае не существенно и самовозбуждения не происходит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Кандидов В. П. и др. Тепловое самовоздействие световых пучков и методы его компенсации.— Изв. вузов. Радиофизика, 1980, 23, № 1, с. 1—38.
2. Беспалов В. И., Бетин А. А., Кулагина С. Н. и др. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах. Горький: ИПФ АН СССР, 1979, с. 44—48.
3. Резников М. Г., Хижняк А. И. О свойствах резонатора с зеркалом, обращаемым волновой фронт.— Квантовая электроника, 1980, 7, № 5, с. 1105—1108.
4. Манишин В. Г., Пасманик Г. А. К вопросу об оптимальной коррекции оптического излучения, распространяющегося в линейной неоднородной среде.— Изв. вузов. Радиофизика, 1981, 24, № 8, с. 986—992.
5. Auyeung J., Fekete D., Pepper D., Yariv A. A theoretical and experimental investigation of modes of optical resonators with phase-conjugate mirrors.— IEEE J. Quant. Electron., 1979, QE-15, N 10, p. 1180—1187.

УДК 538.576.452.1

ОБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА АКУСТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

Ф. В. БУНКИН, Д. В. ВЛАСОВ, Ю. А. КРАВЦОВ

1. МЕХАНИЗМЫ ОБРАЩЕНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ПОЛЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРИРОДЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

1.1. Как известно, явление обращения волнового фронта (ОВФ) уже нашло широкие применения в оптике. Само явление ОВФ состоит в том, что падающая световая волна $E_{\text{пад}} = A(\mathbf{r}) \exp(iS_n(\mathbf{r}) - i\omega t)$ при определенных условиях порождает в нелинейной среде волну $E_{\text{обр}} = CA(\mathbf{r}) \exp(-iS_0(\mathbf{r}) - i\omega t)$ с обращенной фазой $S_0(\mathbf{r}) = -S_n(\mathbf{r})$. В результате обращения фазового фронта волна автоматически фокусируется на источник первичной волны, даже если на пути между источником и устройством ОВФ имеются оптические неоднородности среды. Именно эта способность обращенной волны компенсировать фазовые искажения и лежит в основе разнообразных применений устройств ОВФ в оптике (см. [1] и статью В. И. Беспалова, В. Г. Манишина, Г. А. Пасманика в данной книге [2]).

После реализации ОВФ световых волн естественно задаться вопросом о возможности осуществления ОВФ для волн произвольной физической природы. Ответ на этот вопрос очевиден: эффект ОВФ представляет собой общеволновое явление и в принципе может наблюдаться для радиоволн, звуковых и поверхностных волн на воде и других волновых процессов. Поэтому вопросы следует ставить иначе: во-первых, как конкретно реализовать ОВФ для тех или иных волновых процессов, а во-вторых, какие приложения могут найти устройства ОВФ в акустике, радиотехнике и т. д.

В данном разделе попытаемся провести классификацию уже предложенных и мыслимых схем ОВФ в нелинейных средах, а в последующих разделах рассмотрим возможности реализации устройств ОВФ в акустике.

Возможные способы ОВФ целесообразно разделить на три группы: электронные устройства ОВФ, устройства ОВФ с использованием вынужденного рассеяния и устройства, основанные на трех- и четырехволновых взаимодействиях.

1.2. При использовании электронных устройств ОВФ сигналы, принимаемые отдельными элементами антенной решетки, усиливаются и излучаются в противофазе. Такие устройства используются для создания адаптивных антенных систем в радиотехнике и акустике [3].

Устройства ОВФ, использующие вынужденные рассеяния (манделъштам-бриллюэновское, комбинированное или температурное), реализованы в оптике. Впервые эффект динамического ОВФ был установлен в работе [4], нынешнее состояние вопроса отражено в [1]. Проведенный анализ показал, что имеются возможности ОВФ и для звуковых пучков с использованием вынужденного температурного рассеяния звука.

1.3. Четырехволновые (или трехволновые) схемы ОВФ впервые были реализованы также в оптике (схема ОВФ сигнальной волны в поле двух встречных волн накачки предложена в [5, 6], поверхностный вариант описан в [7], трехволновые варианты с использованием квадратичной нелинейности — в [8]).

Предложенные и мыслимые схемы ОВФ с использованием четырехволновых взаимодействий можно разделить на два класса — голографические и параметрические.

При объемном голографическом ОВФ одна из волн накачки P_+ и сигнальная волна P_s образуют интерференционную картину, которая в нелинейной среде создает объемную дифракционную решетку. Встречная волна накачки P_- рассеивается на этой решетке и порождает обращенную волну (рис. 1, а). Соответствующая символическая четырехволновая диаграмма показана на рис. 1, б, где волнистой чертой обозначена пространственная модуляция коэффициента преломления среды $n(\mathbf{r})$. По существу волны P_+ и P_s записывают объемную голограмму $n(\mathbf{r})$, а волна P_- считывает ее, порождая волну с обращенным волновым фронтом $P_{обр}$.

При поверхностном голографическом ОВФ волна накачки P_+ (в этом варианте встречная волна не нужна) и сигнальное поле P_s создают голограмму $z = \zeta(x, y)$ на поверхности (рис. 2), при этом волна накачки, рассеиваясь на голограмме, порождает два дифракционных спектра, один из которых имеет обращенный волновой фронт по отношению к сигнальной волне. Все четыре волны при голографическом ОВФ могут иметь одинаковую частоту ω .

В оптике реализовано также ОВФ с изменением частоты [6] (так называемое резонансное четырехволновое ОВФ), при котором разностная частота двух основных взаимодействующих волн совпадает с резонансной частотой среды.

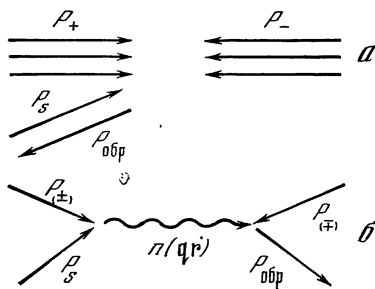


Рис. 1

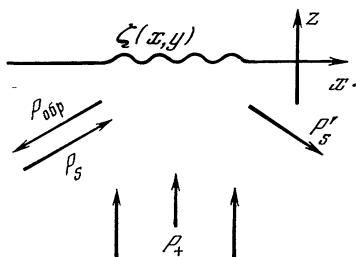


Рис. 2

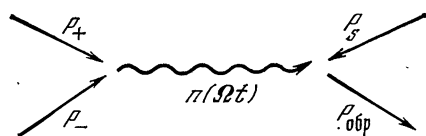


Рис. 3

При объемном параметрическом ОВФ параметры среды меняются с частотой 2ω под действием однородного внешнего поля (например, электрического или магнитного). Сигнальная волна P_s с частотой ω порождает в такой среде обращенную волну $P_{обр}$ с той же частотой ω , как это схематически представлено на рис. 3, где волна накачки изображена при помощи двух стрелочек P_+ и P_- , а волнистой линией обозначена временная однородная в пространстве модуляция показателя преломления среды $n(t)$, возникающая при действии встречных плоских (или комплексно-сопряженных) волн накачки на нелинейную среду.

Изменение фазы S на $-S$ происходит и в параметрических усилителях бегущей волны. В этом случае для полного обращения необходимо еще при помощи зеркал отразить усиленную волну назад к источнику [8].

Легко видеть, что в рассматриваемых диаграммах волны, участвующие в процессе, интерферируют попарно, а именно P_+ и P_s в голографической схеме, $P_{(-)}$ и $P_{(+)}$ в параметрической. Это позволяет осуществить указанные процессы для пар волн различной физической природы. Например, для параметрической схемы P_+ и P_- — электромагнитные волны, а для P_s и $P_{обр}$ — акустические. Подобно этому, в голографической схеме колебания P_+ и P_s могут быть акустическими, а колебания P_- и $P_{обр}$ — оптическими (акустическая голография).

Наконец, в поверхностном параметрическом варианте с частотой 2ω колеблется плоская поверхность S , а набегающая сигнальная волна P_s порождает (помимо зеркальной компоненты) обращенную волну $P_{обр}$.

К настоящему времени в оптике реализованы различные механизмы ОВФ. Ясно, что можно найти аналоги этих оптических схем

для волн иной физической природы. Ниже опишем возможности реализации устройств ОВФ в акустике, при этом ограничимся рассмотрением только четырехволновых нелинейных взаимодействий.

2. ГОЛОГРАФИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА ОВФ В АКУСТИКЕ (ГОФУЗЫ)

2.1. Подбирая нелинейные механизмы для ОВФ в акустике, с самого начала следует учитывать ограничения, связанные с гидродинамической нелинейностью, которая способствует нелинейной диссипации звука вследствие образования ударных волн. Предпочтительнее поэтому искать нелинейные процессы, обусловленные взаимодействием звука с «незвуковыми» модами и дающие нужный нелинейный эффект ранее, чем появятся ударные волны.

Простейший нелинейный процесс такого рода возникает при взаимодействии ультразвуковой волны накачки P_+ и сигнальной волны P_s с поверхностными волнами (см. рис. 2). Дифракционная решетка на поверхности жидкости появляется за счет радиационного давления. Такой поверхностный голографический механизм ОВФ предложен в [9]¹. Коэффициент усиления $K = |P_{обр}/P_s|$ в этом случае достаточно мал (на опыте менее 0,01), что связано с малостью модуляции поверхности $|\zeta| \ll \lambda$ и с искривлением ее формы под действием ограниченного пучка накачки.

2.2. При объемном голографическом ОВФ коэффициент усиления

$$K = \left| \operatorname{tg} \frac{\mu k L}{4} \right| \quad (1)$$

подобен полученному в оптике [11]. Здесь L — длина области взаимодействия сигнала с накачкой, μ — коэффициент модуляции скорости звука, $C = C_0 (1 + (\mu/2) \cos [(\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_+) \mathbf{V}])$, \mathbf{k}_s и \mathbf{k}_+ — волновые векторы полей сигнала P_s и накачки P_+ соответственно. Согласно (1) коэффициент усиления в принципе может обратиться в бесконечность при $L = L_\infty \equiv \lambda/\mu$. Потенциальная возможность получить большие усиления составляет главное достоинство объемных схем ОВФ, как голографической, так и параметрической (см. далее разд. 3).

Голографические устройства ОВФ, или голографические обращающие фазу усилители звука (ГОФУЗы), могут быть осуществлены при использовании температурного механизма [12]. В этом случае параметр модуляции μ пропорционален производной $(\partial C/\partial T)_p$ и коэффициенту поглощения звука. Поэтому для реализации ГОФУЗа подходят жидкости с большой диссипацией (уксусная кислота, охлажденное касторовое масло) или с сильной температурной зависимостью скорости звука от температуры (в частности, бинарные смеси, близкие к критической точке расслаивания) [12].

¹ Косвенным подтверждением поверхностного ОВФ звуковых пучков служат опыты по считыванию поверхностной акустической голограммы когерентным светом [10].

Другую возможность создания ГОФУЗа представляет жидкость с пузырьками или другими мелкими взвешенными частицами, концентрация которых может быть пространственно промодулирована совместным действием сигнала и накачки.

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА ОВФ В АКУСТИКЕ (ПОФУЗы)

3.1. При пространственно-однородной модуляции скорости звука в среде по закону $C = C_0 [1 + (\mu/2) \cos 2\omega t]$ коэффициент усиления дается выражением (1), при этом глубина модуляции μ определяется механизмом воздействия на среду.

В качестве модулирующего фактора можно использовать электрическую, магнитную или акустическую накачки. Соответственно можно говорить об электрических, магнитных или акустических параметрических обрабатывающих фазу усилителях звука (ПОФУЗах).

Параметрический механизм взаимодействия волн в акустике был рассмотрен в работе [13] и экспериментально исследован в [14]. Указание на то, что параметрическое усиление сопровождается ОВФ, содержится в статье [15].

3.2. Модуляцию скорости звука в жидкости с пузырьками можно осуществить при помощи переменного электрического поля (электрический ПОФУЗ на жидкости с пузырьками). Необходимая глубина модуляции μ в такой схеме оценена в [15]. В реальных экспериментальных условиях она может достигать значений 10^{-2} .

3.3. Другой вариант ПОФУЗа с электрической накачкой предполагает использование акустического аналога эффекта Керра, т. е. зависимости скорости звука в жидкости или твердом теле от электрического поля. Глубина модуляции μ выражается здесь как $\mu = (1/C)(\partial C/\partial E^2) \rho E^2$, где E — напряженность электрического поля. Данные о величине производной $(\partial C/\partial E^2)$ ρ практически отсутствуют. Эксперименты же дают для воды значение $(1/C)(\partial C/\partial E^2) = 2,5 \cdot 10^{-13}$ В/см², что позволяет рассчитывать на получение величины $\mu \sim 10^{-3}$ при $E \sim 100$ кВ/см. С практической точки зрения этот вариант ПОФУЗа может оказаться более предпочтительным, чем описанный выше электрический ПОФУЗ на пузырьках.

Как уже отмечалось выше, косвенным свидетельством реализуемости ПОФУЗов с электрической накачкой могут служить опыты по двухимпульсному акустическому эху² в твердых телах [16]. Появление второго импульса через время τ после импульсного воздействия на твердый образец можно интерпретировать как результат параметрического возбуждения акустической волны с обратной фазой (сходная интерпретация уже предлагалась в [17]).

3.4. Следует отметить аналогию между параметрическими и голографическими устройствами ОВФ. Используя эту аналогию, можно указать интересную возможность построения схемы парамет-

² Трехимпульсное эхо тоже может быть истолковано с позиций ОВФ, но как проявление голографического механизма запоминания звукового поля в среде.

рического ОВФ при отражении волны с частотой ω от колеблющейся с удвоенной частотой поверхности. Эквивалентность параметрической схемы ОВФ на поверхности и голографической «поверхностной» схемы (см. подразд. 2.1) следует из простого рассуждения «кажущейся» поверхности, возникающей при движении зеркала. Легко показать, что волна с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}_0 = \{k_{\parallel}, k_{\perp}\}$, падающая на зеркало, колеблющееся с частотой 2ω , «видит» на зеркале решетку с пространственной частотой $2k_{\parallel}$, где k_{\parallel} — компонент волнового вектора волны, параллельный плоскости зеркала. Очевидно, рассеяние на этой кажущейся решетке приводит к возникновению фурье-компоненты волны с волновым вектором $-\mathbf{k}$, т. е. обращенной волны. Указанная аналогия очевидным образом распространяется и на объемные параметрические процессы: волна, падающая на среду, в которой осуществляется модуляция скорости с удвоенной частотой, «видит» в среде фазовую решетку, характеризуемую волновым вектором $2\mathbf{k}_0$. С этой точки зрения расчет параметрической схемы ОВФ сводится к расчету дифракции на объемной фазовой решетке. В свете этих представлений совпадение формул параметрического и голографического объемного и поверхностного ОВФ представляется вполне естественным.

3.5. Еще одно параметрическое устройство ОВФ может быть основано на использовании накачки в виде стоячей звуковой волны в жидкости с пузырьками. Возможности этого варианта ПОФУЗа проанализированы в [15].

Разумеется, приведенные выше схемы не исчерпывают разнообразных возможностей построения ПОФУЗов и акустических зеркал с ОВФ. В частности, определенные надежды на реализацию таких устройств связаны с магнитными ПОФУЗами, т. е. устройствами ОВФ с магнитной накачкой, а также с ПОФУЗами рэлеевских волн.

4. ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ УСТРОЙСТВ ОВФ В АКУСТИКЕ

Большинство функций, которые могут выполнять устройства ОВФ в акустике, уже имеют свои аналоги в оптике [1, 2].

Прежде всего следует отметить задачи автоматической фокусировки волнового (в данном случае звукового) поля на источник сигнала или на «подсвеченную» часть объекта. Такие задачи возникают не только в аэро- и гидроакустике, но также в медицине (облучение почечных камней, акустическая голография и т. д.) и технологии (управление параметрами мощных ультразвуковых пучков).

Другая группа применений ориентирована на проблемы создания адаптивных акустических антенн [3] и визуализации акустических изображений [2, 10].

Разумеется, сходные применения смогут найти и устройства ОВФ в СВЧ-радиодиапазоне (основанные, скажем, на нелиней-

ных эффектах в плазме) и в диапазоне миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн (например, с использованием полупроводников).

Авторы выражают глубокую благодарность И. П. Андреевой и Е. А. Заболотской за сотрудничество, а также В. И. Беспалову и Г. А. Пасмануку за ценные советы и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах/Под ред. Беспалова В. И. Горький: ИПФ АН СССР, 1976. 206 с.
2. Беспалов В. И., Манишин В. Г., Пасманик Г. А. Адаптивное возбуждение оптического излучения в резонаторах с зеркалами, обращающими волновой фронт.— Наст. кн.
3. IEEE Transactions special issue on active and adaptive antennas, 1964, AP-12, N 2, 300 p.
4. Зельдович Б. Я., Поповичев В. И., Рагульский В. В., Файзуллоев Ф. С. О связи между волновыми фронтами отраженного и возбуждающего света при вынужденном рассеянии Манделштама — Бриллюэна.— Письма в ЖЭТФ, 1972, 15, № 3, с. 160—164.
5. Hellwarth R. W. Generation of time-reversed wave fronts by nonlinear refraction.— JOSA, 1977, 67, N 1, p. 1—3.
6. Беспалов В. И., Бетин А. А., Пасманик Г. А., Шилов А. А. Обращение волнового фронта при комбинационном преобразовании стоксовой волны в поле встречных пучков накачки.— Письма в ЖТФ, 1979, 5, № 4, с. 242—246.
7. Зельдович Б. Я., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта поверхностью.— ДАН СССР, 1980, 252, № 1, с. 92—95.
8. Yariv A. Compensation for atmosphere degradation of optical beam transition by nonlinear optical mixing.— Opt. Commun., 1977, 21, N 1, p. 49—50.
9. Бункин Ф. В., Власов Д. В., Кравцов Ю. А. Обращение волнового фронта и самофокусировка звука за счет нелинейного взаимодействия с поверхностью жидкости.— Письма в ЖТФ, 1981, 7, № 6, с. 325—329.
10. Introduction to acoustical holography/Ed. by B. P. Hilderbrand and V. V. Brenden. N. Y. London: Plenum press, 1972.
11. Yariv A., Pepper D. H. Amplified reflection phase conjugation and oscillation in degenerate four-wave mixing.— Opt. Lett., 1977, 1, N 1, p. 16—18.
12. Бункин Ф. В., Власов Д. В., Кравцов Ю. А., Заболотская Е. А. Температурный и пузырьковый механизмы четырехфотонного обращения волнового фронта звуковых пучков.— Письма в ЖТФ, 1981, 7, № 9, с. 560—563.
13. Чабан А. А. Неустойчивость упругих колебаний в пьезоэлектриках в переменном электрическом поле.— Письма в ЖЭТФ, 1967, 6, № 11, с. 967—970.
14. Thompson R. B., Quate C. F. Nonlinear interaction of microwave electric fields and sound in LiNbO_3 .— J. Appl. Phys., 1971, 42, N 3, p. 907—919.
15. Бункин Ф. В., Власов Д. В., Кравцов Ю. А. К вопросу об обращении волнового фронта звука с усилением обращенной волны.— Квантовая электрон., 1981, 8, № 5, с. 1144—1145.
16. Попов С. Н., Крайник Н. Н. Обнаружение аномального эха в сегнетоэлектрике.— ФТТ, 1970, 12, № 10, с. 3023—3027.
17. Fosshelm K., Holt R. H. Critical dynamics of sound in KMnF_3 .— Phys. Rev. Lett., 1980, 45, N 9, p. 730—733.

МАГНИТНОЕ ДИНАМО В СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, А. А. РУЗМАЙКИН, Д. Д. СОКОЛОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы усилился интерес к теории генерации магнитного поля при движении проводящей жидкости, или, кратко, теории гидромагнитного динамо [1—4]. Динамо называется экспоненциальное усиление магнитного поля с течением времени. Тем самым из этого понятия исключается временный рост поля, связанный с запутыванием силовых линий и заканчивающийся затуханием поля, а также слабый степенной рост. В стационарном движении, периодическом или стохастическом (турбулентном) стационарном в среднем нельзя требовать, чтобы динамо было строго экспоненциальным. В этих случаях естественно ограничиться условием экспоненциальности поля, усредненного по периоду или по интервалу времени, превышающему характерное время турбулентности. В случае периодического движения задача подобна квантовомеханической задаче для уравнения Шредингера с потенциалом, зависящим от времени. Как известно, эта задача приводит к понятию квазиэнергии [5]. Применительно к динамо можно искать решения, воспроизводящие пространственную форму с амплитудой, растущей в геометрической прогрессии за каждый период движения жидкости.

Важнейшую роль в теории динамо играет безразмерное магнитное число Рейнольдса $R_m = vL/\nu_m$, где v , L — характерные скорость и размер области соответственно; ν_m — коэффициент магнитной диффузии поля ($\nu_m = c^2/4\pi\sigma$, σ — проводимость). Для лабораторных задач, где магнитные числа Рейнольдса сравнительно невелики (менее 10^2) и точно определяются [6, 7], интересно вычисление критического числа, соответствующего началу генерации поля, и исследование решений вблизи этого порога, т. е. решений, пропорциональных $\exp(\gamma t)$, у которых действительная часть скорости роста $\text{Re } \gamma$ близка к нулю. В астрофизических условиях благодаря огромным масштабам магнитные числа Рейнольдса очень велики, причем обычно известны лишь по порядку величины (например, для солнечной конвективной зоны $R_m \sim 10^8$). Поэтому основная задача заключается в нахождении скорости роста и соответствующих пространственных структур поля при $R_m \rightarrow \infty$. Под этим предельным переходом понимается далее, что R_m очень велико, но фиксированно, т. е. $R_m \neq \infty$. Хотя в астрофизике часто осуществляется ситуация, соответствующая $\gamma = 0$ или $\text{Re } \gamma = 0$, $\text{Im } \gamma \neq 0$, как в теории солнечного цикла, однако она возникает не потому, что магнитное число Рейнольдса на линейной стадии эволюции было близко к критическому, а в результате обратного влияния поля на движение.

Предельный переход $R_m \rightarrow \infty$ в теории следует понимать как предельный переход $v_m \rightarrow 0$ при фиксированной амплитуде скорости и фиксированном L . Практически, конечно, v_m не мало (в космической плазме с температурой 10^4 К величина $v_m \simeq 10^7$ см²/с), а велики астрономические масштабы L . Но по сложившейся терминологии тем не менее говорят о пределе малой диффузии, имея в виду, скажем, малость характерного времени L/v по сравнению с L^2/v_m . Подчеркнем, что предельный переход $R_m \rightarrow \infty$ еще не означает вмороженности поля в плазму, поскольку соответственно может уменьшаться масштаб магнитного поля и диффузия сможет эффективно действовать и в асимптотическом режиме.

Ясно, что ответ на вопрос о динамо при $R_m \rightarrow \infty$ представляет особый интерес. Динамо в зависимости от поведения скорости экспоненциального роста при больших магнитных числах Рейнольдса могут быть разделены на быстрые и медленные. Динамо называется быстрым, если его скорость роста положительна и не стремится к нулю при $R_m \rightarrow \infty$. Если же асимптотически $Re\gamma \rightarrow 0$, например $Re\gamma \sim (v/L) R_m^{-p}$, $p > 0$, то динамо называется медленным.

Динамо возникает отнюдь не при всех полях скорости, поэтому при рассмотрении динамо надо исключить антидинамо-ситуации. Обычно считалось, что динамо невозможно при определенных симметриях скорости и магнитного поля. Именно в таком духе доказывались теоремы запрета, начиная с теоремы Каулинга 1934 г. В действительности в кинематическом динамо правильное накладывать ограничения только на поле скорости. Моффатом подчеркивалась роль спиральности как псевдоскалярной величины, характеризующей зацепление вихревых линий [1]. Нами было отмечено [8, 9], что произвольное трехмерное стационарное движение несжимаемой жидкости вдоль стационарных поверхностей даже при наличии вихревой спиральности ($\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$) исключает быстрое динамо. В двух частных случаях, когда поверхности являются параллельными плоскостями или концентрическими сферами, исключено, как известно, быстрое и медленное динамо, даже если скорость нестационарна. В периодических потоках, как показано В. И. Арнольдом и авторами, возможно стационарное поддержание поля. Здесь мы рассмотрим вопрос о поведении динамо в асимптотическом режиме $R_m \rightarrow \infty$. Стационарные поля скорости естественно разбиваются на два класса: 1) поля, лежащие на стационарных поверхностях; типично, что их линии тока заполняют всюду плотно инвариантные торы; в этом случае возможно только медленное динамо или динамо отсутствует; 2) линии тока всюду плотно заполняют пространственную область (области); в этом случае возможен начальный экспоненциальный рост магнитного поля (со скоростью роста, не зависящей от R_m), который приводит к образованию (в пределе $R_m \rightarrow \infty$) особенностей поля, из-за резкого измельчения масштаба. Однако дальнейшая судьба поля остается невыясненной.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ДИНАМО

Эволюция магнитного поля при заданном течении несжимаемой жидкости описывается уравнением индукции

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = -(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H} + (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v} + R_m^{-1} \Delta \mathbf{H}. \quad (1)$$

Здесь время измерено в единицах L/v_0 , пространственные координаты — в единицах L , где L — характерный размер системы, v_0 — масштаб скорости, $R_m = Lv_0/\nu_m$, ν_m — коэффициент магнитной диффузии. Как обычно, предположим, что внешние ЭДС отсутствуют и магнитное поле убывает на бесконечности. Это условие очевидно, когда поле скорости убывает на бесконечности. Для неубывающих, например периодических, полей скорости правильнее требовать отсутствие роста магнитного поля на бесконечности. В этом случае обычно имеется непрерывный спектр γ с соответствующими собственными функциями, не убывающими на бесконечности (типа $\exp i\mathbf{k}\mathbf{r}$), однако из таких функций можно строить ограниченные в пространстве волновые пакеты.

Задача кинематического динамо формулируется как вопрос об асимптотическом росте (или поддержании) магнитного поля при $t \rightarrow \infty$. Нас интересует случай очень больших магнитных чисел Рейнольдса. Вообще говоря, нельзя наивно положить вначале $R_m^{-1} = 0$, а затем решать задачу динамо. Дело в том, что с уменьшением вязкости при данном поле скорости могут возникать уменьшающиеся со временем масштабы, т. е. вклад диффузии окажется немалым. Поэтому правильный порядок предельных переходов $t \rightarrow \infty$, а затем $R_m \rightarrow \infty$.

Следует различать два топологических различных типа течений. Один из них соответствует движению по системе стационарных поверхностей¹. Фактически эти поверхности топологически эквивалентны торами [10] или склеиваются из них. Эти торы могут быть вложены друг в друга или зацеплены друг с другом. В частных случаях торы вырождаются в плоскости (оба радиуса тора стремятся к бесконечности), цилиндры (один из радиусов бесконечен), сферы (один из радиусов равен нулю), кольца или жгуты (другой способ обращения в нуль одного из радиусов). Линии тока на этих поверхностях могут быть либо замкнутыми, либо всюду плотно заполнять поверхность, как в известном примере всюду плотной обмотки тора с иррациональным соотношением числа оборотов линии тока вдоль двух окружностей, образующих тор.

При другом типе течения линии тока всюду плотно заполняют пространственные области (стохастическое течение). Мы начнем анализ с рассмотрения течения по стационарным поверхностям.

¹ Под поверхностями будем понимать многообразия, описываемые равенством $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$, где функция ψ гладкая или имеет конечное число особенностей. Из настоящего рассмотрения выпадают так называемые слоения, всюду плотно заполняющие пространство.

3. ДВИЖЕНИЕ ПО СТАЦИОНАРНЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ

Легко представить себе, как строится система поверхностей в окрестности произвольной точки заданного течения. С геометрической точки зрения для построения системы поверхностей, на которых лежат линии тока, достаточно провести в пространстве линию P_1 , касательный вектор τ которой не совпадает с направлением скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, т. е. $[\tau\mathbf{v}] \neq 0$. Выпустив линию тока из каждой точки линии P_1 , получим поверхность $S(P_1)$, на которой лежат линии тока. Повторяя такую процедуру с системой линий P_1, P_2, P_3, \dots , можно построить (в стационарной задаче) систему поверхностей $S(P_1), S(P_2), S(P_3), \dots$, на которых лежат линии тока. Эта система не единственна, поскольку условие $[\tau\mathbf{v}] \neq 0$ не определяет линии однозначно, а возможно построение различных наборов P_1, P_2, \dots и $S(P_1), S(P_2), \dots$. Однако при выходе из локальной окрестности такой способ может оказаться неприменимым, если глобально искомые поверхности зацепляются друг с другом или вырождаются. Удобнее подойти к вопросу о построении поверхностей с аналитической точки зрения, т. е. для нахождения поверхностей $\psi = \text{const}$ решать дифференциальное уравнение первого порядка

$$(\mathbf{v}\nabla)\psi = 0 \quad (2)$$

с заданными коэффициентами $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Характеристиками этого уравнения являются линии тока.

Достаточным условием существования поверхностей $\psi = \text{const}$ является обращение в нуль во всем объеме плотности потоковой спиральности [9]

$$\mathbf{v}\mathbf{a} \equiv \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{a} = 0, \quad (3)$$

где под $\mathbf{a} = \text{rot}^{-1}\mathbf{v}$ понимается векторный потенциал поля скорости ($\text{div } \mathbf{v} = 0$). Векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной функции. Благодаря этому произволу можно всегда удовлетворить условию (3) в локальной окрестности. Но лишь при движении жидкости по системе гладких поверхностей это условие выполняется глобально. Условие (3), другими словами, является достаточным условием интегрируемости (существования первых интегралов) уравнения (2). В этом случае существуют даже две системы поверхностей $\psi = \text{const}, \eta = \text{const}$, так что $\mathbf{v} = \nabla\psi \times \nabla\eta$. При выполнении условия (3) система поверхностей $\psi = \text{const}$ может вырождаться только там, где $\mathbf{v} = 0$. В геометрии [11] утверждение $\mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{a} = 0$ формулируется как необходимое и достаточное условие существования поверхностей, ортогональных вектору \mathbf{a} , т. е. $\mathbf{a} = \eta\nabla\psi$ (теорема Фробениуса). Отметим, что для величины $\mathbf{H}\mathbf{a}$ важен не вид поверхностей, а выполнение условия (3) [9].

Геометрический смысл условия (3) заключается в том, что линии тока не заузлены. В частности, обращается в нуль полная потоковая спиральность

$$\chi_v = \int \mathbf{v}\mathbf{a} d^3r. \quad (4)$$

Подчеркнем, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т. е. из равенства нулю χ_v во всем объеме не вытекает условие (3), поскольку конечные области рассматриваемого объема могут обладать спиральностями противоположного знака, так что сумма этих частичных спиральностей обращается в нуль.

В отличие от плотности потоковой спиральности полная потоковая спиральность калибровочно инвариантна при условии убывания на бесконечности поля скорости. Часто рассматривающиеся задачи с пространственно-периодическим или аксиально-симметричным полем скорости являются идеализацией квазипериодического убывающего на бесконечности или тороидального течения. Соответственно при вычислении потоковой спиральности этих течений нужно подбирать калибровки потенциала поля скорости так, чтобы результат соответствовал последовательным вычислениям для реалистических течений. Именно так мы и будем поступать далее. Разумеется, можно выбрать и такие калибровки потенциала цилиндрического течения, которые не соответствуют калибровкам потенциала тороидального течения.

Отметим, что представление о спиральности на примере вихревой спиральности $\int \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} d^3r$, характеризующей зацепление линий вихря, было развито в [1].

Строго говоря, представление о заузленных или сцепленных линиях относится только к замкнутым линиям. Однако топологические инварианты типа (4) годятся и для линий, приходящих из бесконечности и уходящих на бесконечность, или незамкнутых линий, всюду плотно заполняющих конечную двух- или трехмерную область. Арнольд [12] строго показал, что топологические инварианты Хопфа типа (4) и в этом случае имеют смысл коэффициента зацепления. Сущность доказательства заключается в построении коротких путей, замыкающих длинные незамкнутые линии, и доказательстве независимости результата от выбора этих путей.

Неформально топологический смысл (4) для незамкнутых линий тока можно понять на примере течения с линиями тока, навивающимися на тор. Действительно, пусть в цилиндрических координатах r, φ, z

$$\mathbf{v} = v_0 (0, I_1(r/r_0), I_0(r/r_0)), \quad (5)$$

где I — цилиндрические функции первого рода. При малых r и r_0 , т. е. вблизи оси цилиндра z имеем $v_\varphi = \omega r$, $\omega = v_0/2$, $v_z = v_0$. Легко проверить по формуле $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$, что потенциал \mathbf{a} в данном случае совпадает с $r_0 \mathbf{v}$, где r_0 — некоторый фиксированный масштаб. Так что $\mathbf{v} \mathbf{a} = r_0 v_0^2 (I_1^2 + I_0^2) \simeq r_0 v_0^2 I_0^2$, $r < r_0$. Вычислим количество зацеплений линий тока на единицу длины вдоль оси цилиндра. Интенсивности трубок тока радиуса $r_e \ll \ll r_0$, ориентированных вдоль оси и в азимутальном направлении, равны $F_z = \int v_z dS_z$, $F_\varphi = \int v_\varphi dS_\varphi$. Число зацеплений в объеме

радиуса r равно

$$\frac{1}{F_z F_\varphi} \int \mathbf{v} a d^3 r = \frac{v_z \omega \pi r^2}{F_z (F_\varphi / 2r_0)}.$$

Для произвольного течения локально всегда можно выбрать $\mathbf{v} a = 0$. Однако при выходе из этой локальной области для течения с зацеплением нам не удастся сохранить это равенство. Имеются линии, на которых потенциал a будет иметь особенности. Например, на только что рассмотренном цилиндре при $r \ll r_0$ можно выбрать $a_\varphi = a_z = 0$, $a_r = v_0 r z / 2r_0 - v_0 r \varphi$ так, что $\mathbf{v} a = 0$. Однако при этом потенциал a_r неоднозначен: $r = 0$ является линией ветвления потенциала. Разумеется, при правильном подсчете (провода разрезы) найдем, что число зацеплений отлично от нуля. Для поверхностей $\psi = \text{const}$ (в данном случае $r = \text{const}$), на которых лежит скорость, особенность потенциала соответствует вырождению этих поверхностей в линии. Подчеркнем, что на линии $r = 0$ скорость не обращается в нуль. Ясно, что можно задать также и такое течение, когда скорость на этой особой линии обращается в нуль, хотя зацепления будут и в этом случае. Обратим внимание также на то, что линии тока рассматриваемого течения могут всюду плотно заполнять целые поверхности, но, несмотря на такой сложный характер линий тока, сами поверхности $\psi = \text{const}$ устроены очень просто.

Теперь ясно, что уравнение (2) может быть разрешимо и для заузленных течений. Однако в этом случае некоторые из поверхностей $\psi = \text{const}$ вырождаются в линии, даже несмотря на гладкость функции ψ . Например, в приведенном примере с тором $\psi = r^2$ — гладкая функция, одна поверхность уровня которой $r = 0$ вырождается в линию (ось тора).

С другой стороны, известны течения, линии тока которых нельзя положить на поверхности. По-видимому, они редки в классе стационарных течений, хотя удобный для практической проверки критерий пока отсутствует. Для невязких течений несжимаемой жидкости в поле потенциальных сил необходимое условие отсутствия поверхностей указано Арнольдом [10]. Оно имеет вид $\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = 0$, т. е. стохастичность течения возможна там, где обращаются в нуль потенциальные силы. Это течения с зацеплениями типа Бельтрами, для которых $\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \sim \mathbf{v} \text{ rot}^{-1} \mathbf{v} \sim \mathbf{v}^2$.

4. НЕВОЗМОЖНОСТЬ ДИНАМО ПРИ ПОЛНОЙ ВМОРОЖЕННОСТИ В ЖИДКОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО ПОВЕРХНОСТЯМ

Перейдем теперь к задаче динамо. Прежде всего рассмотрим простейший случай $R_m^{-1} \equiv 0$. Пусть сначала выполнено условие (3). Тогда существует гладкое семейство поверхностей $\psi = \text{const}$, на которых лежит поле скорости. В силу вмороженности очевидно, что в фиксированной частице невозможен рост нормальной к этим поверхностям компоненты магнитного поля $\mathbf{H}_\psi = \mathbf{H} \nabla \psi$

[8]. Происходит лишь ее перенос

$$dH_\psi/dt = 0, \quad d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla.$$

Умножая это уравнение на H_ψ и учитывая, что $H_\psi (\mathbf{v}\nabla) H_\psi = 1/2 \operatorname{div} (\mathbf{v}H_\psi^2)$, находим

$$\frac{d}{dt} \int H_\psi^2 d^3r = \int H_\psi^2 \mathbf{v} dS.$$

Интеграл в правой части обращается в нуль, так как на удаленной граничной поверхности S скорость обращается в нуль. Поэтому для гладких экспоненциально-растущих решений $H_\psi = 0$.

При наличии заузленностей, т. е. нарушении условия (3) в конечной области, в правую часть последнего равенства войдет сумма интегралов по особым поверхностям $\psi = \text{const}$. Поскольку мы предполагаем магнитное поле и скорость в этих особенностях гладкими, то этот вклад также обращается в нуль. Итак, $H_\psi = 0$.

Для оставшихся компонент поля, лежащих на поверхностях $\psi = \text{const}$, вводится векторный потенциал ($\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{n}\Phi$), который, как легко убедиться стандартным способом, также не может расти экспоненциально.

При нарушении гладкости магнитного поля, т. е. появлении особенностей типа скин-слоев, жгутов и т. п., изложенная аргументация теряет силу. Вмороженность в особенностях невозможна, вступает в игру диффузия магнитного поля. Известно, что такие особенности естественно возникают в стационарных двумерных течениях, например, для периодических полей скорости [1, 13—15]. Как мы показали раньше [9], при возникновении скин-слоев возможно только медленное динамо. Далее мы покажем, что этот результат справедлив и при возникновении особенностей более высокого порядка, когда магнитное поле концентрируется в нити (жгуты) или сосредоточено в окрестности отдельных точек.

5. ЛОКАЛЬНАЯ ОСОБЕННОСТЬ

Прежде всего покажем, что не могут существовать конфигурации поля, сосредоточенные в малой области с диаметром, стремящимся к нулю при $R_m \rightarrow \infty$. Причина в том, что течение жидкости в локальной окрестности устроено таким образом, что поле разносится и усиливается по одним направлениям и одновременно уменьшает масштаб в других направлениях. Резкое уменьшение масштаба поля приводит к усиленной диссипации или стабилизации поля.

Предположим, что в центре окрестности концентрации магнитного поля $\mathbf{v}(0) = 0$, иначе при $R_m \rightarrow \infty$, когда сильно возрастают градиенты поля, произойдет быстрый разнос концентрации (благодаря переносу $(\mathbf{v}(0) \nabla) \mathbf{H}$). Подчеркнем, что в силу стационарности скорости мы рассматриваем магнитное поле, пропорциональное $\exp(\gamma t)$ и сохраняющее пространственную форму. В окрестности концентрации

$$v_i = c_{ik} x_k + \dots, \quad c_{ii} = 0. \quad (6)$$

В таком поле скорости жидкость стремится сжаться в «блин» или в нить в зависимости от того, по каким направлениям скорость будет положительна и отрицательна (при $c_{ik} \neq c_{ki}$ жидкость будет дополнительно вращаться). Ясно, что это приведет к размытию локальной концентрации магнитного поля в блин (скин-слой) или нить (жгут). Продемонстрируем это на простом примере, когда матрицу c_{ik} можно привести к диагональному виду ($c_{ik} = c_{ki}$). Учет вращения не изменит результат. Итак, рассмотрим

$$\mathbf{v} = (c_1x, c_2y, c_3z), \quad (7)$$

где постоянные коэффициенты в силу несжимаемости связаны соотношением $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Следовательно, по крайней мере один из них должен быть отрицательным, т. е. по соответствующему направлению жидкие частицы сближаются. Ищем решения уравнения (1) в виде $\mathbf{H} \sim \exp(\gamma t)$. В поле скорости (7) перенос каждой компоненты магнитного поля происходит независимым образом

$$(\partial/\partial t - c_1 - R_m^{-1}\Delta) H_x + (\mathbf{v}\nabla) H_x = 0 \quad (8)$$

и аналогичные уравнения справедливы для H_y и H_z с заменой c_1 на c_2 и соответственно на c_3 . Таким образом, магнитное поле переносится подобно скалярной величине (например, температуре), но со сдвинутой скоростью роста. Именно этот сдвиг не позволяет сделать вывод о $\text{Re } \gamma \leq 0$. Более того, уравнение (8) имеет частные экспоненциально-растущие решения. Действительно, одна или две из постоянных c_1, c_2, c_3 положительны. Выбирая в начальный момент соответствующую компоненту поля, скажем H_x , постоянной, а две другие равными нулю, находим $\gamma = c_1 > 0$. Если положительны c_1 и c_2 , то находим две моды, растущие со скоростями $\gamma = c_1, \gamma = c_2$. Однако эти решения не убывают на бесконечности и поэтому являются не собственными функциями, а входят в непрерывный спектр задачи.

Другие точки непрерывного спектра и соответствующие функции легко найти, переходя от (8) к уравнениям Шредингера $\Psi' = \mathbf{H} \exp\{-R_m/4(c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2)\}$ и потенциалам $U = R_m^2(c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2)/8$, соответствующим пространственному эллиптическому осциллятору. Разделяя переменные, находим ($\gamma = c_1 - 2E/R_m$)

$$\gamma_1 = c_1 - [|c_1| (n_1 + 1/2) + |c_2| (n_2 + 1/2) + |c_3| (n_3 + 1/2)], \\ n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$H_x(r) = \exp\left\{-\frac{R_m}{4}[|c_1| - c_1]x^2 + [|c_2| - c_2]y^2 + [|c_3| - c_3]z^2\right\} \times \\ \times H_{n_1}\left(\sqrt{\frac{|c_1|R_m}{2}}x\right) H_{n_2}\left(\sqrt{\frac{|c_2|R_m}{2}}y\right) H_{n_3}\left(\sqrt{\frac{|c_3|R_m}{2}}z\right), \quad (10)$$

где H_{n_i} — полиномы Эрмита. Мы выписываем только спектр и соответствующие ему решения для x -компоненты. Другие компо-

ненты получаются циклической заменой коэффициентов c_i . Известному решению Кларка с $\gamma = 0$ [1] соответствует жгут $H_y = H_z = 0$.

Другие решения описывают усиленную диссипацию поля со скоростью $\gamma < 0$, не зависящей от магнитного числа Рейнольдса. Причиной усиленной (не омической) диссипации поля является уменьшение одного из масштабов, соответствующего оси, вдоль которой происходит сближение частиц. С другой стороны, эффект растяжения расстояния между двумя близкими частицами вдоль перпендикулярной оси является причиной экспоненциального роста однородного поля. Этот пример имеет важное значение при рассмотрении стохастических течений (см. разд. 7). Нетрудно убедиться, что все полученные решения не локализованы, т. е. при $R_m \rightarrow \infty$ они имеют вид скин-слоев или жгутов.

Все функции (10) оказываются неограниченными. Это указывает на то, что фактически решение надо искать на «языке» задачи с непрерывным спектром. Таким способом легче определить временную эволюцию поля.

Рассмотрим магнитное поле, пространственно ограниченное в начальный момент времени. Ищем решение в виде интеграла

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{H}(\mathbf{k}, t) \exp[i\mathbf{x}(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{r}] d^3k.$$

Здесь $\mathbf{x}(\mathbf{k}, 0) = \mathbf{k}$ — безразмерный волновой вектор, а $\mathbf{H}(\mathbf{k}, 0)$ описывает начальное распределение поля. Подставив этот интеграл в (8), получим

$$\left(H_x^{-1}(\mathbf{k}, t) \frac{dH_x(\mathbf{k}, t)}{dt} - c_1 + R_m^{-1}k^2 \right) + i \left(\mathbf{r} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{v}\mathbf{x} \right) = 0.$$

Приравнивая нулю выражение в первой скобке, не зависящее от \mathbf{r} , и три выражения из второй скобки, стоящие перед соответственно x , y и z , находим

$$\begin{aligned} \kappa_x(\mathbf{k}, t) &= k_x \exp(-c_1 t), \quad \kappa_y(\mathbf{k}, t) = k_y \exp(-c_2 t), \\ \kappa_z(\mathbf{k}, t) &= k_z \exp(-c_3 t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} H_x(\mathbf{k}, t) &= H_x(\mathbf{k}, 0) \exp \left\{ c_1 t + \frac{1}{2R_m} \left[\frac{k_x^2}{c_1} [\exp(-2c_1 t) - 1] \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_y^2}{c_2} [\exp(-2c_2 t) - 1] + \frac{k_z^2}{c_3} [\exp(-2c_3 t) - 1] \right\} \end{aligned}$$

и аналогичное выражение для $H_y(\mathbf{k}, t)$, $H_z(\mathbf{k}, t)$.

Пусть для определенности $c_1 > 0$, $c_2, c_3 < 0$. Видим, что каждая гармоника поля с волновым вектором вначале экспоненциально растет со скоростью роста c_1 , не зависящей от вязкости, а затем для всех векторов, не параллельных оси x , происходит резкое затухание, пропорциональное $\exp\{- (1/2 R_m) (k_y^2 / |c_2|) \exp(2|c_2|t) + (k_z^2 / |c_3|) \exp(2|c_3|t)\}$. Характерное время роста

$$t_* \simeq \frac{1}{2c_1} \ln \frac{R_m}{k_y^2} + \ln(2|c_2|c_1 t_*), \quad (12)$$

т. е. дольше всего растут поля наибольшего масштаба. При $t \rightarrow \infty$ экспоненциально расти будет только постоянное поле (зависимость от x также экспоненциально исчезает). Таким образом, спектр этой задачи является непрерывным.

В каждый момент времени волновой пакет содержит экспоненциально-растущие и затухающие гармоники. Легко убедиться, что только для $\delta(k_y, k_z)$ -образного пакета остается экспоненциальный рост поля. В остальных случаях поле вытягивается в тонкий стационарный жгут шириной, пропорциональной R_m , ориентированный вдоль оси x или экспоненциально затухает со скоростью, не зависящей от R_m . Например, когда $c_1, c_2 > 0, c_3 < 0$, то поле диссипирует пропорционально $\exp\{-(|c_3| - c_1)t\}$.

В заключение отметим, что рассмотрение диагональной матрицы c_{ik} достаточно. Антисимметричная часть матрицы, как можно показать, не влияет на результат.

6. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЖГУТООБРАЗНОЙ ФОРМЫ

Покажем, что и при наличии нитевидных особенностей магнитного поля быстрый рост при $R_m \rightarrow \infty$ невозможен. Прежде всего поясним нетривиальность вопроса. Докажем, что при больших магнитных числах Рейнольдса в жгутах не обязан сохраняться известный топологический инвариант [16]

$$\chi_H = \int \mathbf{H} \mathbf{A} d^3r, \quad (13)$$

определяющий число заузленных магнитных силовых линий [1], где \mathbf{A} — векторный потенциал поля. Действительно,

$$\frac{d\chi_H}{dt} = -R_m^{-1} \int \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H} d^3r.$$

Очевидно, при $R_m \rightarrow \infty$ наибольший вклад в интеграл в правой части вносит область жгута. Оценим подынтегральные выражения, полагая, что толщина жгута $\delta \sim R_m^{-1/2} \rightarrow 0$ и жгут для определенности ориентирован вдоль оси x

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \mathbf{A} &= O(H_y H_z \delta, H_x H_y \delta), \\ \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= H_y \frac{\partial H_x}{\partial z} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial y} = O\left(\frac{H_x H_y}{\delta}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где (H_y, H_z) и H_x — нормальные и тангенциальная к оси жгута компоненты поля. Отсюда

$$\left| \frac{1}{\chi_H} \frac{d\chi_H}{dt} \right| \simeq R_m^{-1} \frac{H_n H_\tau / \delta}{H_n H_\tau \delta} = O(R_m^{-1} \delta^{-2}) = O(1).$$

Фактически это означает, что определение (13) надо изменить, чтобы учесть вклад жгутов поля. Интересно, что в скин-слое также выполнены оценки, подобные (14). Однако здесь компонента поля, нормальная к серединной поверхности слоя, нормальна и к его

поверхности и, следовательно, непрерывна. Поэтому

$$\int H_n \frac{dH_\tau}{dn} d^3r = O\left(\frac{H_n \tilde{H}_\tau}{L^2}\right),$$

где $H_\tau \sim H_\tau \delta$ берется вне слоя. В этом случае

$$\left| \frac{1}{\chi_H} \frac{d\chi_H}{dt} \right| = O(R_m^{-1} \delta^{-1}) = O(R_m^{-1/2}) \rightarrow 0.$$

Можно высказать предположение, что наличие зацеплений магнитных силовых линий является необходимым свойством любого динамо. Действительно, если во всей области $\mathbf{HA} = 0^2$, то существует семейство поверхностей, нормальная компонента поля к которым равна нулю. Отсюда вытекает, что $\mathbf{H} = \text{rot}(\mathbf{n}\Phi + \nabla f)$, где \mathbf{n} — нормаль к этим поверхностям. Для потенциала $\Phi = \Phi(r) \times \exp(\gamma t)$ из уравнения индукции получается скалярное уравнение, которое, как можно показать, не имеет собственных функций с $\text{Re } \gamma > 0$.

Рассмотрим сначала вопрос о возможности быстрой генерации поля жгутообразной формы для течения по гладким стационарным поверхностям ($\mathbf{va} = 0$). Центральная направляющая линия жгута должна совпадать с одной из линий тока, т. е. с линией пересечения поверхностей $\psi = \text{const}$ и $\chi = \text{const}$, определяемых условием (3), иначе нельзя получить пространственно-стационарный жгут. Очевидно, что максимальной будет составляющая поля вдоль жгута H_b . Из условия $\text{div } \mathbf{H} = 0$ вытекает, что нормальная к поверхности компонента H_n и лежащая на поверхности нормальная к жгуту компонента H_τ порядка $O(R_m^{-1/2} H_b)$. Рассмотрим составляющую уравнения (1)

$$\frac{\partial H_b}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) H_b = (\mathbf{H}\nabla) v_b + R_m^{-1} (\Delta \mathbf{H})_b.$$

Для гладкого поля скорости при $R_m \rightarrow \infty$ член $(\mathbf{H}\nabla) v_b \rightarrow (H_b \nabla_b) v_b$, а в диффузионном члене можно пренебречь членами, связанными с кривизной жгута, поскольку они содержат лишь первые производные поля. Следовательно, в этом уравнении останется только компонента H_b , т. е. оно будет подобно (8). Но поскольку в данном случае в силу условия (3) $v_n = 0$, то, как легко проверить (ср. (10)), невозможно получить решение с полем, убывающим в нормальном направлении. Таким образом, существование неподвижного в пространстве жгута оказывается (при $R_m \rightarrow \infty$) несовместимым с условием (3).

Пусть теперь условие (3) нарушено так, что некоторые поверхности скорости $\psi = \text{const}$ вырождаются в линии, которые являются центральными линиями жгутов магнитного поля. Очевидно,

² Величина \mathbf{HA} не сохраняется во времени. Но если рассматривать собственные функции $\mathbf{H} \sim \exp(\gamma t)$, то $\mathbf{HA} = \mathbf{HA}(0) \exp 2\gamma t$ и условие $\mathbf{HA} = 0$ сохраняется.

ситуация локально подобна поведению магнитного поля в поле скорости

$$v = (0, \omega r, v_z), \quad (15)$$

где, строго говоря, ω и v_z — падающие функции r , которые либо периодичны по z , например, когда жгут замкнут, либо убывают по $|z|$. Главной компонентой поля в жгуте является H_z , несосесимметричные компоненты H_r и H_φ порядка $O(R_m^{-1/2}H_z)$. Из (1) имеем

$$\left(\frac{d}{dt} - R_m^{-1}\Delta\right)H_z - H_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = H_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + H_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi}.$$

Для гладкого поля скорости правая часть этого уравнения порядка $O(R_m^{-1/2})$. На первый взгляд кажется, что большой вклад может внести осесимметричное поле H_φ . Однако, как легко убедиться из рассмотрения азимутальной компоненты уравнения (1), это поле не может поддерживаться другими составляющими на уровне $O(1)$. Итак, в главном порядке при $R_m \rightarrow \infty$ уравнение для H_z отделяется

$$\left(\gamma + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)H_z - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)H_z = H_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Здесь $r = R_m^{1/2}r$ и мы пренебрегли малым членом $R_m^{-1}(\partial^2 H_z / \partial z^2)$. Зависимость ω и v_z от φ в жгуте не существенна, поэтому решение этого уравнения можно искать в виде $\exp(im\varphi) f(r) h(z)$. После этого уравнение интегрируется явно, причем зависимость от r выражается через цилиндрические функции и нетрудно проверить, что у него нет решений со скоростью роста, не зависящей от R_m , и убывающих на бесконечности, или периодических по z решений. Далее, стандартным образом, переходя к векторному потенциалу оставшегося двумерного поля, показываем, что невозможен и быстрый рост остальных компонент поля.

Таким образом, в ламинарном стационарном поле скорости, лежащем на стационарных поверхностях, быстрое динамо невозможно.

Отметим, что в поле скорости (15) возможно медленное динамо с инкрементом $\text{Re } \gamma \rightarrow 0$ при $R_m \rightarrow \infty$ [17—19].

Другим примером динамо является модель Тверского [20] с течениями на торах, погруженных в проводящую жидкость. Простой пример двух незацепленных торов рассчитан Гайлитисом [1]. Хорошо известно динамо Герценберга для двух шаров (цилиндров, погруженных в проводящую жидкость) и его обобщения на случай нескольких шаров, сделанное Робертсом и Гибсоном. Квазистационарное динамо общего вида, построенное Брагинским [21], также является медленным.

Нетрудно качественно понять, почему быстрое динамо оказалось невозможным даже при отказе от гладкости магнитного поля. Действительно, в уравнении индукции

$$\partial H / \partial t - R_m^{-1} \Delta H + (\nabla \cdot) H = (H \nabla) v$$

негладкость магнитного поля при $R_m \rightarrow \infty$ не влияет на порядок члена, стоящего в правой части и дающего непосредственную генерацию поля. В противоположность этому негладкость поля приводит к усилению диффузионного и переносного членов. По этой причине в негладких полях легко возникает быстрая диссипация ($\text{Re } \gamma < 0$ и не зависит от R_m). Разумеется, такие рассуждения не имеют доказательной силы, но оправданы изложенным выше и известными нам примерами динамо.

Исследования поля скорости типа (15) со стационарным тангенциальным разрывом при $r \sim \delta = (v_m/\omega)^{1/2}$ показало, что благодаря измельчению масштаба будет происходить быстрая диссипация. Таким образом, быстрое динамо, по-видимому, невозможно и на особенностях стационарных поверхностей $\psi = \text{const}$.

7. ПОЛЯ СКОРОСТИ, НЕ ЛЕЖАЩИЕ НА СТАЦИОНАРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Рассмотрим течение проводящей жидкости, линии тока которого всюду плотно заполняют конечный объем. Траектории жидких частиц ведут себя запутанным стохастическим образом. Типично, что две соседние траектории экспоненциально быстро расходятся. При полной замороженности это ведет к экспоненциальному росту поля. Однако одновременно происходит экспоненциальное уменьшение некоторых масштабов поля, т. е. поле концентрируется в жгуты (нити) или слои. Внутри этих особенностей замороженность нарушается даже при высокой проводимости ($R_m \rightarrow \infty$). Магнитный поток по поперечному сечению жгута или слоя будет сохраняться. Поле в жгуте стабилизируется, а в слое падает. Однако магнитная энергия слоя или жгута продолжает экспоненциально расти за счет увеличения длины, а следовательно, объема жгута или слоя, поскольку из-за нарушения замороженности поперечные размеры остаются неизменными. Обсудим высказанные утверждения более подробно.

Локально поле скорости можно представить в виде ³

$$v_i = v_i(0) + c_{ik} x_k. \quad (16)$$

Очевидно, постоянную составляющую $v_i(0)$ можно исключить, переходя в движущуюся систему отсчета. При таком переходе магнитное поле не изменяется. Это соответствует лагранжеву подходу. Коэффициенты c_{ik} разложения (16) зависят в таком случае от времени даже для стационарного течения. Усреднение получающихся магнитных полей по времени эквивалентно усреднению по пространственным характеристикам в эйлеровом описании. Подчеркнем, что рассматриваемые поля скорости могут описываться гладкими стационарными функциями. Например, области

³ Такое представление заимствовано из теории турбулентности, где оно введено Д. Бэтчелором и Е. Новиковым [22].

стохастичности траектории возникают в поле скорости [10]

$$v_x = A \sin z + C \cos y, \quad v_y = B \sin x + A \cos z, \quad v_z = C \sin y + B \cos x.$$

Это показано в численных экспериментах Энона [23] для случая $A = \sqrt{3}$, $B = \sqrt{2}$, $C = 1$.

Таким образом, локально эволюция магнитного поля происходит так, как описано в разд. 5. Только теперь коэффициенты c_{ik} являются случайными величинами, в лагранжевом описании, случайным образом меняются во времени. Это приводит к тому, что направления сжатия и растяжения поля под действием течения (6) (или (16) с $v_i(0) = 0$) случайно меняются. Тем не менее эффект растяжения, как указал В. И. Арнольд, оказывается преобладающим. При растяжении частица шарообразной формы переходит в эллипсоид. Из-за сохранения объема (несжимаемость!) растяжению будет подвергаться большая часть поверхности шара. Поэтому эффект растяжения преобладает при случайных поворотах.

Одновременно с экспоненциальным ростом магнитного поля происходит экспоненциальное измельчение масштабов по закону (11). Пусть для определенности $c_1 > 0$, $c_2, c_3 < 0$, так что поле вытягивается в жгут. Включение диффузии, эффективное благодаря измельчению масштабов, приведет к тому, что поле будет экспоненциально расти лишь в течение времени $t_* \approx (L/v) \ln R_m$, $L/v \sim c_1^{-1}$ (см. (12)), а затем стабилизируется. Несмотря на это, при $t > t_*$ магнитная энергия жгута $\int H^2 d^3r$ растет пропорционально $\exp(c_1 t)$. Причина в том, что поперечные размеры жгута порядка $R_m^{-1/2}$ благодаря нарушению в замороженности остаются неизменными, а продольный размер растет пропорционально $\exp(c_1 t)$. Очевидно, магнитный поток через поперечное сечение жгута постоянен.

Очевидно, рост может продолжаться неограниченно только тогда, когда поле не убывает на бесконечности. В задаче динамо, где $\mathbf{H} \rightarrow 0$ на бесконечности, жгут обязан быть замкнутым или заполнять ограниченную область. Поэтому за время порядка c_2^{-1} отдельные части жгута начнут сближаться друг с другом. При этом в приближении (16) сближаться будут участки с противоположно направленными магнитными силовыми линиями, что приведет к перезамыканию, сопровождающемуся выделением энергии и уменьшением масштаба, остающихся после перезамыкания жгутов. Асимптотически при $t \rightarrow \infty$ начнет преобладать омическая диссипация пропорционально $\exp(-\nu_m t/L^2)$ и магнитное поле затухнет. Описанная картина качественно похожа на поведение магнитной энергии при двумерном случайном движении, где, как впервые показал Зельдович [24], временный рост магнитной энергии сменяется асимптотическим затуханием.

Для неограниченного роста магнитной энергии нужно течение, которое бы сближало жгуты с поворотом так, чтобы сливающиеся

силовые линии имели одинаковое направление. Это оказалось невозможным в приближении (16). Учет антисимметричной матрицы c_{ik} , как можно показать, не изменит результата.

Поведение магнитного поля в стохастическом поле скорости в противоположность случаю потока на стационарных поверхностях отличается двумя особенностями. Во-первых, имеется механизм экспоненциального наращивания поля со скоростью, не зависящей от магнитной диффузии. Во-вторых, этот процесс связан с экспоненциально-быстрым измельчением масштаба. Судьба поля зависит от конкуренции этих эффектов. Если поле могло бы расти без измельчения масштаба, то имело бы место быстрое динамо. Такой результат достигается при отказе от стационарности поля скорости. Примерами служат механизм генерации среднего поля в отражательно-несимметричной турбулентности ($\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle \neq 0$), предложенный Штейнбеком, Краузе и Рэдлером, и генерация магнитного поля в зеркально-симметричной в среднем турбулентности с коротким временем корреляции [25, 26]. В стационарном потоке удалось построить (В. И. Арнольду и соавторам [27]) пример быстрого динамо лишь в римановом пространстве. В обычном евклидовом пространстве вопрос о возможности быстрого динамо остается открытым.

Благодарим В. И. Арнольда, С. А. Молчанова и Т. Г. Каулинга за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морфат К. Х.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 340 с.
2. *Parker E. N.* Cosmic magnetic fields. Oxford: Univ. press, 1979. 841 p.
3. *Krause F., Rädler K.-H.* Mean field electrodynamics. B.: Spring.-Verl., 1980. 271 p.
4. *Зельдович Я. В., Рузмайкин А. А.* Проблемы динамо в астрофизике. — В кн.: Итоги науки и техники. Астрономия. М.: ВИНТИ, 1982, т. 21, с. 151—184.
5. *Зельдович Я. В.* Рассеяние и излучение квантовой системой в сильной электромагнитной волне. — УФН, 1973, 110, с. 139—151.
6. *Гайлитис А. К., Фрейберг Я. Г., Лиелаусис О. А.* О наблюдениях генерации магнитного поля в потоках жидкого натрия. Препринт № 78. Рига: Ин-т физики ЛатвССР, 1977. 36 с.
7. *Leorat J., Pouquet A., Frisch U.* Fully developed MHD turbulence near critical magnetic Reynolds number: Preprint. France Observatoire de Nice, 1980. 63 с.
8. *Зельдович Я. В., Рузмайкин А. А.* Магнитное поле в проводящей жидкости, движущейся в двух измерениях. — ЖЭТФ, 1980, 78, с. 980—986.
9. *Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.* Helicity, linkage and dynamo action. — Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 1980, 16, p. 73—82.
10. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
11. *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 354 с.
12. *Арнольд В. И.* Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения. — В кн.: Материалы Всесоюз. школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом переменных. Ереван, 1974. 229 с.

13. Weiss N. O. The expulsion of magnetic flux by eddies.— Proc. Roy. Soc. London A, 1966, 293, p. 310—328.
14. Childress S. Alpha-effect in flux ropes and sheets.— Phys. Earth and Planet. Inter., 1979, 20, blz. 172—180.
15. Galloway D. J., Proctor M. R. E., Weiss N. O. Formation of intense magnetic fields near the surface of the Sun.— Nature, 1977, 266, p. 686—688.
16. Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1958, 47, p. 489—491.
17. Пономаренко Ю. Б. К теории гидромагнитного динамо.— ПМТФ, 1976, 6, с. 47—50.
18. Гайлитис А. К., Фрейберг Я. Г. К теории винтового динамо.— Магнитная гидродинамика, 1976, 2, с. 3—6.
19. Гайлитис А. К. О генерации магнитного поля зеркально симметричной турбулентностью.— Там же, 1974, 2, с. 31—35.
20. Тверской Б. А. К теории гидромагнитного динамо.— Геомагнетизм и аэронавтика, 1966, 6, с. 11—17.
21. Брагинский С. И. К теории гидромагнитного динамо.— ЖЭТФ, 1964, 47, с. 1084—1278.
22. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965, 2. 20 с.
23. Непон М. М. Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier.— С. г. Acad. sci. A (Paris), 1966, 262, p. 312—314.
24. Зельдович Я. Б. Магнитное поле при двумерном движении проводящей жидкости.— ЖЭТФ, 1956, 31, с. 154—156.
25. Казанцев А. П. Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью.— ЖЭТФ, 1967, 53, вып. 5 (11), с. 1806—1813.
26. Румзайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитное поле в отражательно инвариантной турбулентности.— Письма в астрон. журн., 1981, 7, № 11, с. 701—704.
27. Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Румзайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитное поле в стационарном течении с растяжениями в римановом пространстве.— ЖЭТФ, 1981, 81, вып. 6 (12), с. 2052—2058.

АЛЬФВЕНОВСКИЕ МАЗЕРЫ

УДК 550.388.2

В. Ю. ТРАХТЕНГЕРЦ

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно,¹ Земля, а также другие планеты, у которых есть собственное магнитное поле, окружены радиационными поясами (РП), состоящими из энергичных электронов и протонов с энергиями от 10—100 кэВ до 10^2 — 10^3 МэВ. Эти пояса служат источником интенсивных электромагнитных колебаний, которые в условиях РП Земли попадают в диапазон от долей герц до десятков килогерц и соответствуют альфвеновским волнам и свистам (геликонам). Причиной возбуждения электромагнитных волн в РП является циклотронная² неустойчивость, обусловленная поперечной анизотропией в распределении энергичных частиц по скоростям. Эта анизотропия аналогична инверсии заселенностей энергетических уровней в мазерных системах. Альфвеновские волны и свисты обладают примечательным свойством: из-за особенностей группового распространения и переотражения от торцов геомаг-

нитной ловушки, погруженных в ионосферу, эти волны оказываются как бы запертыми в магнитосфере, как в резонаторе.

Таким образом, даже такой беглый взгляд на магнитосферу обнаруживает ее сходство с мазерными системами, с их необходимыми компонентами — активным веществом, стимулированным излучением и резонатором. Эта аналогия не только внешняя. Оказывается, что она далеко прослеживается и при количественном анализе работы альфвеновского мазера (АМ). В работе АМ удалось экспериментально обнаружить самые разнообразные режимы, характерные для мазерных систем, в частности, для оптических квантовых генераторов (ОКГ). Это и режим непрерывной генерации, и периодические и пиковые режимы, когда излучение генерируется в виде повторяющихся импульсов, и стохастические режимы, когда последовательность этих импульсов носит случайный характер. Каждому такому режиму в магнитосфере соответствует свой тип низкочастотного электромагнитного излучения: шипения; излучения, которые по звуковому восприятию напоминают утренние хоры и щебет птиц; шумовые квазипериодические излучения и др. Примеры спектрограмм таких излучений, взятые из [1], приведены на рис. 1, *а—в*. На рис. 1, *а* изображена спектрограмма «шипений», соответствующих стационарному режиму генерации АМ. На рис. 1, *б, в* приведены спектрограммы квазипериодических излучений, соответствующие различным типам пиковой генерации. На рис. 1, *в* прослеживается тонкая структура излучения АМ. Каждый пичок состоит из последовательности более коротких элементов с быстро растущей частотой — «хоров». Указанные излучения обычно занимают диапазон частот от 0,5 до 10 кГц и соответствуют волнам типа свистов, возбуждаемых энергичными электронами.

На рис. 2 изображены излучения из диапазона геомагнитных пульсаций — «жемчужины» [2]. Частота этих пульсаций $\omega = 0,1—10$ Гц, и они, по-видимому, соответствуют пиковому режиму генерации протонного АМ.

Физика явлений в АМ во многом сходна с физикой твердотельных лазеров. В частности, как и для ОКГ, важным свойством АМ является возможность реализации в нем режима релаксационных колебаний, который возникает при действии постоянного источника энергичных частиц в магнитосфере и сопровождается периодической модуляцией интенсивности электромагнитного излучения, потоков захваченных в РП и высыпающихся в ионосферу частиц. В реальных геомагнитных условиях эти колебания обладают высокой добротностью и могут возбуждаться под действием слабых периодических возмущений, модулирующих параметры АМ — добротность резонатора, концентрацию и анизотропию активного вещества. В некоторых случаях релаксационные колебания могут стать неустойчивыми из-за нелинейных свойств ионосферных зеркал или за счет нелинейной связи эффектов циклотронной неустойчивости с колебаниями магнитной силовой трубки в целом. При этом в АМ реализуются пиковые режимы генерации, с которыми,

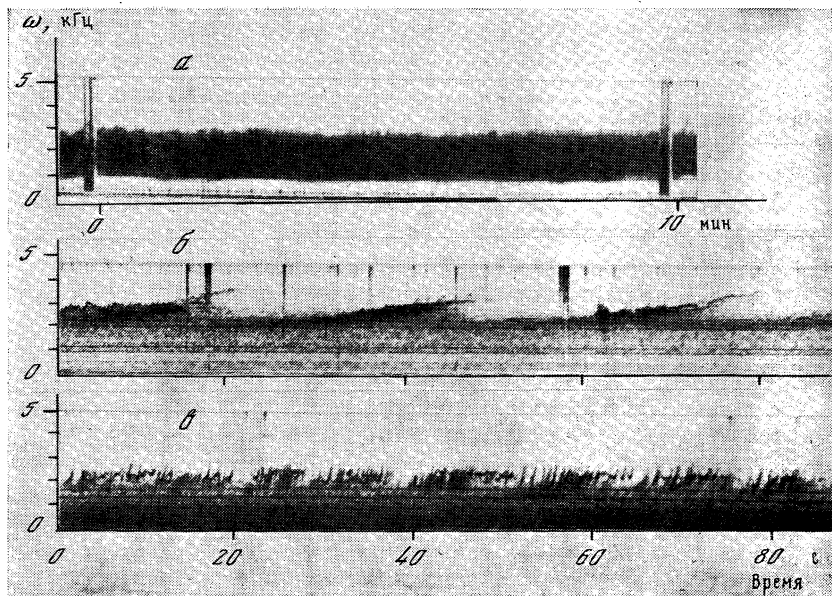


Рис. 1. Различные режимы генерации электронного альфвеновского лазера
 а — спектрограмма ОНЧ-излучения, соответствующая стационарному режиму генерации; б, в — спектрограммы квазипериодических ОНЧ-излучений, соответствующие пиковым режимам генерации АМ (прослеживается тонкая структура спектра с характерным временем $\tau_0 < 1$ с (е))

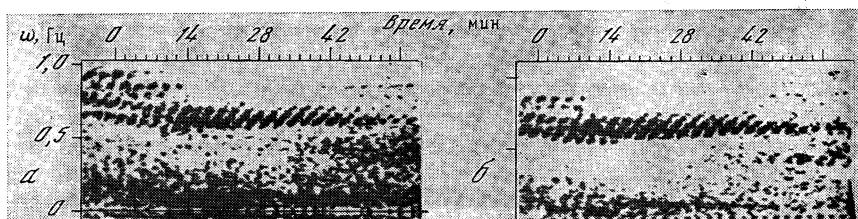


Рис. 2. Спектрограммы излучения протонного АМ
 а, б — сигналы, принимаемые в магнитосопреженных точках (на противоположных концах магнитной силовой трубки)

в частности, можно отождествить различные типы низкочастотных электромагнитных излучений, приведенные на рис. 1, 2. Специфика АМ проявляется в характере нелинейных связей в системе, например в возможности воздействия на зеркала потоков высыпающихся в ионосферу энергичных частиц.

Наряду с этим существует и ряд принципиальных отличий АМ от лабораторных лазеров. В первую очередь это касается многоуровневости АМ, которая обусловлена спецификой плазмы и существенной неоднородностью магнитного поля в АМ. Поэтому

в АМ для определенного класса источников частиц реализуется неустойчивость релаксационных колебаний, которая не имеет аналога в двухуровневых системах. В АМ возможно также появление нелинейных волн, соответствующих движению системы по уровням энергии частиц, со специфической зависимостью от времени частотного спектра излучения.

Далее более подробно остановимся на физических явлениях в АМ и на ряде примеров проиллюстрируем особенности математического описания работы АМ. Более детальный анализ можно найти в [3].

2. АМ В ДВУХУРОВНЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Генерация электромагнитных волн в АМ основана на циклотронной неустойчивости (ЦН) РП [4]. Условие циклотронного резонанса частицы с волной имеет вид

$$\omega - \omega_B = kv_{\parallel}, \quad (1)$$

где ω и k — частота и волновой вектор электромагнитной волны ($k \parallel \mathbf{B}$); v_{\parallel} — проекция скорости частицы v на направление магнитного поля \mathbf{B} ; ω_B — гирочастота.

Самосогласованную систему уравнений, описывающих ЦН, можно записать следующим образом [3]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \tau_B^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu} \langle \Delta \mu \rangle^2 \frac{\partial F}{\partial \mu} + \mathcal{I}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\omega}^{\pm}}{\partial t} \pm v_g \frac{\partial \mathcal{E}_{\omega}^{\pm}}{\partial z} = \gamma \mathcal{E}_{\omega}^{\pm} + a_{\omega}, \quad (3)$$

где $F(\mu, W, t)$ — функция распределения частиц РП по скоростям в переменных $\mu = (B_L/B) \sin^2 \theta$ и энергии $W = mv^2/2$; $\theta = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})$ — питч-угол частицы; индекс L характеризует величины в экваториальном сечении РП; $\tau_B = \oint dz/v_{\parallel}$ — период осцилляций частиц между магнитными пробками (баунс-период); \mathcal{I} — источник частиц, среднеквадратичное изменение $\langle \Delta \mu^2 \rangle$ за один баунс-период τ_B пропорционально плотности энергии волн \mathcal{E}_{ω} ($\langle \Delta \mu^2 \rangle = a_1(\mu, W) \tau_B^{1/2} \int d\omega (\mathcal{E}_{\omega}^+ + \mathcal{E}_{\omega}^-)$); в уравнении переноса интенсивности волн (3) v_g — групповая скорость, z — координата вдоль траектории распространения волн (вдоль \mathbf{B}), знаки, «плюс» и «минус» в (3) относятся к волнам, распространяющимся соответственно в положительном и отрицательном относительно z_0 направлениях. Инкремент циклотронной неустойчивости γ равен

$$\gamma = \int_{W_{\min}}^{\infty} dW \int_0^{\mu_{\max}} a_2(\mu, W) \mu \frac{\partial F}{\partial \mu} d\mu.$$

Здесь a_{ω} — излучательная способность единицы объема, коэффициенты $a_{1,2}$ определены в [3]. Систему (2), (3) следует

дополнить граничными условиями, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_k, F = 0, \mu = \mu_{\max}, \partial F / \partial \mu = 0, \\ z &= -l, \mathcal{E}_\omega^+ = R_1 \mathcal{E}_\omega^-, z_2 = l, \mathcal{E}_\omega^- = R_2 \mathcal{E}_\omega^+, \end{aligned} \quad (4)$$

где μ_k — граница конуса потерь, из которого энергичные частицы попадают в ионосферу и там гибнут; $R_{1,2}$ — коэффициенты отражения волн от ионосфер в сопряженных полушариях.

Для определенного класса источников $\mathcal{I}(\mu)$, близких к собственным функциям оператора диффузии по μ в (2), и при выполнении неравенства

$$2\gamma\tau_g + \ln R_1 R_2 \ll 1 \quad (5)$$

систему (2), (3) можно существенно упростить и свести к виду ($R_1 = R_2$) [3]

$$dN/dt = \bar{a}_1 N \mathcal{E} + \mathcal{I}_\Sigma, \quad (6)$$

$$d\mathcal{E}/dt = (\bar{a}_2 \sigma^{-1} N - \nu) \mathcal{E}, \quad (7)$$

где $\nu = |\ln R| \tau_g^{-1}$, $\tau_g = \int_{-l}^l dz/v_g$ — время группового распространения волн между сопряженными ионосферами; σ — объем магнитной силовой трубки единичного сечения у основания; $N = (\pi/\mu_k) \int \tau_B F v^3 d\mu dv$ — число энергичных частиц в этой трубке; $\mathcal{I}_\Sigma = (\pi/\mu_k) \int \tau_B F v^3 d\mu dv$, $\mathcal{E} = \int d\omega \mathcal{E}_\omega$. Черту над $a_{1,2}$, означающую значения коэффициентов в некоторой средней точке ($\bar{\mu}$, W), в дальнейшем опускаем.

Для указанного класса источников анизотропия функции распределения в процессе релаксации остается неизменной, а меняется полное число частиц, захваченных в ловушку. Вследствие сохранения анизотропии спектральные характеристики излучения также не меняются.

Система (6), (7) соответствует описанию динамики АМ в так называемом двухуровневом приближении и очень схожа с уравнениями двухуровневого ОКГ в балансном приближении [5]. Здесь, как и в случае ОКГ, наиболее характерным является наличие релаксационных колебаний интенсивности волн и плотности потоков высыпавшихся и захваченных частиц относительно состояния равновесия

$$N_0 = \sigma \nu / a_2, \quad \mathcal{E}_0 = a_2 \mathcal{I}_\Sigma / \sigma \nu a_1 \quad (8)$$

с частотой Ω_R и затуханием ν_R , равными

$$\Omega_R = \left(\frac{\mathcal{I}_\Sigma a_2}{\sigma} \right)^{1/2}, \quad 2\nu_R = \frac{\Omega_R^2}{\nu} = \frac{\mathcal{I}_\Sigma a_2}{\sigma \nu}. \quad (9)$$

При отсутствии внешних воздействий релаксационные колебания отражают переходные процессы в АМ. Роль релаксационных коле-

баний становится особенно существенной при воздействии на АМ периодических внешних сил, модулирующих параметры АМ — плотность и анизотропию активного вещества — либо характеристики магнитосферного резонатора, в частности прозрачность ионосферных зеркал. Примером такой внешней силы, модулирующей плотность и анизотропию энергичных частиц, могут служить гидромагнитные волны, возбуждаемые внешними источниками (солнечным ветром, ионосферными токовыми системами и т. д.). При этом волна даже малой амплитуды на частоте $\Omega \approx \approx \Omega_R$ может приводить к глубокой модуляции интенсивности циклотронных волн и потоков высыпавшихся в ионосферу частиц.

3. АВТОКОЛЕБАНИЯ МАГНИТНЫХ СИЛОВЫХ ТРУБОК В АМ

В АМ возможна ситуация, когда за счет внутренних связей в системе происходит самовозбуждение колебаний магнитной силовой трубки, содержащей энергичные частицы, в целом с одновременным переходом АМ в пиковый режим генерации. Причина этого состоит в том, что вследствие высыпания энергичных частиц в ионосферу при развитии ЦН начинает меняться давление плазмы в магнитной силовой трубке, что, в свою очередь, приводит к изменению магнитного поля. Количественно указанный эффект можно описать, включив в правую часть (6) члены, описывающие изменение N из-за вмороженности и диамагнитного дрейфа, и добавив уравнение для геомагнитных пульсаций. В итоге имеем

$$\frac{dN}{dt} = -a_1 N \mathcal{E} + N \frac{\partial \ln B_L}{\partial t} - \mathbf{v}_{дрL} \frac{\partial N}{\partial \rho} + \mathcal{Y}_\Sigma, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = a_2 \sigma^{-1} N - \nu, \quad B_L = B_{L0} + b, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial b}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{B} \frac{\partial P_\perp}{\partial \rho} \right), \quad (12)$$

где $\mathbf{v}_{дрL}$ — скорости электрического и магнитного дрейфов; ρ — координата поперек силовых линий в экваториальной плоскости; $P_\perp \approx NW_0$ — поперечное давление плазмы; W_0 — средняя энергия частиц в РП. В качестве примера рассматривается случай возбуждения аксиально-симметричных пульсаций магнитозвукового типа в сравнительно тонкой магнитной силовой трубке с повышенной плотностью, v_A — альфвеновская скорость. Исследуем поведение системы (10)–(12) вблизи состояния равновесия (8), соответствующего стационарной генерации АМ. Разлагая поле $b(\rho, z, t)$ по собственным функциям уравнения (12), для процесса $\sim \exp\{i\Omega t\}$ получим следующее характеристическое уравнение относительно комплексной частоты Ω :

$$(\Omega^2 + 2i\nu_A \Omega - \Omega_A^2)(\Omega^2 + 2i\nu_R \Omega - \Omega_R^2) = \beta \Omega_A^2 \Omega_R^2 (1 - s\Omega_*/\Omega), \quad (13)$$

где Ω_A и ν_A — собственные частота и затухание магнитных пульсаций, $\beta = 4\pi P_{\perp 0} / B_L^2 = 4\pi N_0 W_0 / B_L^2$; $\Omega_* = \Omega_A v_0^2 / \nu_A \omega_{BL}$ — частота диамантного дрейфа; l — характерный масштаб неоднородности горячей плазмы (поперечный размер магнитной силовой трубки); $s = 1, 2, \dots$ — целое число, $v_0 = (2W_0/m)^{1/2}$. Уравнение (13) описывает колебания двух связанных осцилляторов, причем характер обратной связи определяется знаком его правой части. Взаимодействие осцилляторов наиболее эффективно на частоте двойного резонанса, когда $\Omega \approx \Omega_A \approx \Omega_R$. При $s \Omega_* / \Omega > 1$ система становится неустойчивой и АМ переходит в пиковый режим генерации с одновременным возбуждением магнитных пульсаций.

4. ГЕЛИКОННЫЙ СВИП-МАЗЕР

Описание динамики АМ в двухуровневом приближении возможно далеко не всегда. В ряде случаев необходим анализ работы АМ в рамках более строгой системы уравнений (2), (3). При этом, как показано в [6], возможна специфическая неустойчивость, приводящая к пиковому режиму генерации АМ, которая обусловлена многоуровневостью активного вещества и рядом других особенностей АМ. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример [3]. Предположим, что источник поставляет частицы во всем интервале $0 \leq \mu \leq 1$ с некоторой средней анизотропией $\alpha \equiv \overline{W}_{\perp L} / 2\overline{W}_{\parallel L} > 1$. При этом, как известно [3, 4], возбуждаются циклотронные волны с максимальной частотой в спектре $\omega_m = (1 - \alpha^{-1}) \omega_{BL} < \omega_{BL}$. В соответствии с (1) частицы с $\mu > \mu_m = 1 - (\omega_{BL} - \omega_m)^2 k^{-2} (\omega_m)$ не взаимодействуют с волнами и накапливаются в геомагнитной ловушке. В результате функция распределения приобретает вид ступеньки, изображенной на рис. 3. Средняя анизотропия такой функции растет по мере накопления частиц в области II, где $\mu > \mu_m$. Вследствие этого возникнет дрейф ω_m в сторону высоких частот. При достижении границы $\mu = 1$ произойдет срыв неустойчивости и система вернется к состоянию ниже порога возбуждения, близкому к первоначальному. Количественно такой своеобразный пиковый режим со свипированием частоты внутри пичка можно описать с помощью следующей модели. Пусть амплитуда источника достаточно велика, так что на стадии генерации в области I ($\mu \leq \mu_m$) (см. рис. 3) происходит значительная изотропизация распределения частиц по пичуглам. Тогда можно записать следующие уравнения баланса для n_1 и n_2 , характеризующие высоту ступенек соответственно в областях I и II:

$$\frac{d}{dt} (\mu_m n_1) = n_2 \frac{d\mu_m}{dt} - \delta n_1 + \mu_m \mathcal{Y}_{\Sigma}, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} (1 - \mu_m) n_2 = -n_2 \frac{d\mu}{dt} + (1 - \mu_m) \mathcal{Y}_{\Sigma}, \quad (15)$$

где коэффициент $\delta = v_0 \mu k / l$ характеризует высыпание частиц в ионосферу через конус потерь.

В соответствии с (1) μ_m связано с частотой генерации следующим соотношением:

$$\mu_m = 1 - C_1 (\omega_{BL}/\omega) (1 - \omega/\omega_{BL})^3. \quad (16)$$

При записи (16) учтена зависимость $k(\omega)$ для геликонов (свистов), константа C_1 определяется плотностью холодной плазмы и величиной магнитного поля (см. [3]). В системе (14), (15) неизвестны: $n_{1,2}$ и $\mu_m(t)$. Третье уравнение получим из условия квазистационарной генерации внутри пичка, т. е. из равенства $\gamma(n_1, n_2) = \nu$

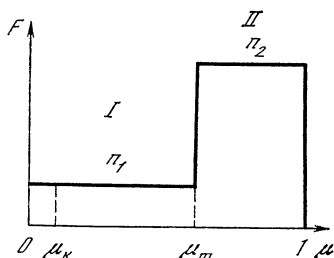


Рис. 3. Зависимость функции распределения F от пичк-угла в геликоновом свип-мазере в фиксированный момент времени

I — область резонанса частиц с волнами; II — нерезонансная область

(см. (7)). В случае ЦН геликонов это соотношение запишется в виде [3]

$$n_2 - n_1 = C_2 (1 - \omega/\omega_{BL})^{-3/2} (\omega/\omega_{BL})^{1/2}, \quad (17)$$

где C_2 — некоторая константа.

Нетрудно убедиться, что количественные характеристики пичка, вытекающие из соотношений (14)—(17), хорошо соответствуют описанной выше качественной картине генерации.

5. АЛЬФВЕНОВСКИЙ СВИП-МАЗЕР

До сих пор мы не рассматривали влияние на работу АМ изменения прозрачности ионосферных зеркал, обусловленного дополнительной ионизацией ионосферы под действием потоков высыпавшихся энергичных частиц. В случае электронных мазеров характерное время пичка излучения $\tau_{и}$ много меньше времени релаксации ионосферы τ_p и это влияние не существенно.

Ситуация резко меняется в случае протонных АМ, когда $\tau_{и} \geq \tau_p$. Роль ионосферы в случае протонного АМ усиливается еще и благодаря тому обстоятельству, что длина возбуждаемых в АМ альфвеновских волн сравнима с толщиной ионосферы. При этом коэффициент отражения альфвеновских волн от ионосферы как функция частоты носит ярко выраженный резонансный характер. Пример зависимости $R(\omega)$ альфвеновских волн для средних параметров ионосферы приведен на рис. 4. Там же изображена линия усиления $\Gamma(\omega)$ протонного АМ. Генерация волн будет происходить в узкой полосе вблизи частоты, где величина $\gamma + \nu \equiv \tau_g^{-1} (\Gamma + \ln R)$ максимальна. В процессе развития ЦН возникает связанная с высыпаниями энергичных протонов дополнительная

ионизация ионосферы, которая приводит к дрейфу кривой $R(\omega)$ относительно $\Gamma(\omega)$, а следовательно, к свипированию частоты генерации ω_m . В случае достаточно плавной кривой $\Gamma(\omega)$ по отношению к $R(\omega)$ изменение состояния ионосферы можно учесть, записав a_1 в (6), (7) в виде

$$a_1(\omega) = a_1(\omega_{m0}) + (\partial a_1 / \partial n_{\text{и}}) \Delta n_{\text{и}}, \quad (18)$$

где ω_{m0} соответствует состоянию равновесия (8).

Здесь изменение плотности ионосферной плазмы $\Delta n_{\text{и}}$ определяется уравнением баланса ионизации ($\Delta n_{\text{и}} < n_{\text{и}0}$)

$$\frac{d\Delta n_{\text{и}}}{dt} = -\frac{\Delta n_{\text{и}}}{\tau_p} + \chi(S - S_0), \quad (19)$$

где τ_p — время релаксации ионосферы. Плотность потока высыпавшихся протонов S определяется соотношением

$$S = 1/2 (\mathcal{I}_{\Sigma} - dN/dt) = 1/2 a_1 N \mathcal{E}, \\ S_0 = \mathcal{I}_{\Sigma} / 2. \quad (20)$$

В безразмерных переменных

$$\tau = \Omega_R t, \quad e = \mathcal{E} / \mathcal{E}_0, \quad n = N / N_0, \quad ne = \exp \{y\}$$

систему уравнений (6), (7), (18)–(20) можно представить в виде

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} - Q^{-1} \left(qn - \frac{1}{n} \right) e^y \frac{dy}{d\tau} + e^y - 1 = 0, \quad (21)$$

$$\frac{dn}{dt} = Q^{-1} (1 - \exp \{y\}). \quad (22)$$

Здесь $Q = \Omega_R / 2\nu_R \gg 1$, $q = |v| \tau_p \chi N_0 (\partial \ln a_1 / \partial n_{\text{и}})$. Система (21), (22) описывает колебания нелинейного маятника с отрицательным трением при $q > 1$. Проведенный в [7] детальный анализ этой системы показал, что таким колебаниям в АМ соответствует пиковый режим генерации с дрейфом частоты излучения внутри пика.

6. ТОНКАЯ СТРУКТУРА ИЗЛУЧЕНИЯ АМ

Выше речь шла о режимах пиковой генерации с временными масштабами, большими времени группового распространения электромагнитных сигналов между ионосферами сопряженных полушарий ($\tau_R > \tau_g$). На основе этих режимов удастся количественно объяснить комплекс наблюдаемых в магнитосфере явлений, включающих квазипериодические низкочастотные электромагнитные излучения, пульсирующие высыпания энергичных частиц и связанные с ними пульсации магнитного поля.

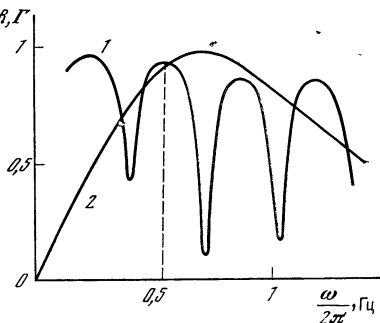


Рис. 4. Модуль коэффициента отражения альфвеновских волн от ионосферы (1) и усиление альфвеновских волн при одном прохождении РП (2).

В то же время в излучении АМ обнаруживается тонкая структура с характерным временем $\tau_0 < \tau_g$. Один из таких примеров изображен на рис. 1, в. По-видимому, в формировании тонкой структуры излучения АМ важную роль играют процессы, проявляющиеся на одной осцилляции частицы между магнитными пробками. Эти процессы характеризуются периодом баунс-осцилляций частиц ($\tau_b \ll \tau_g$). Возможно, что здесь существенными являются модуляционные эффекты на баунс-резонансе [8].

Важную роль в формировании тонкой структуры излучения АМ играют нелинейные эффекты, обусловленные захватом резонансных частиц потенциалом электромагнитной волны конечной амплитуды. Об этом, в частности, свидетельствуют теоретические оценки [9], а также экспериментальные факты возбуждения интенсивным квазимонохроматическим сигналом (свистящим атмосфериком) серии дискретных сигналов, сходных по свойствам с элементами тонкой структуры АМ [1]. Интересно, что тонкая структура излучения обнаруживается и в близких по природе к АМ лабораторных генераторах электромагнитного излучения — мазерах на циклотронном резонансе (МЦР) [10]. Теория наблюдаемой тонкой структуры излучения в МЦРах основана на нелинейных эффектах в поле монохроматической волны в сочетании с конечным временем пролета частицей резонатора [11, 12].

Наиболее существенное отличие АМ от МЦРов состоит в сильной неоднородности магнитного поля в альфвеновских мазерах, существенно влияющей на эффекты захвата резонансных частиц полем монохроматической волны и приводящей к появлению дополнительного резонанса на баунс-частоте. Объяснение тонкой структуры излучения АМ с учетом указанных выше факторов и является наиболее актуальной проблемой теории АМ в настоящее время.

ЛИТЕРАТУРА

- [1. *Helliwell R. A. Whistlers and related ionospheric phenomena. Stanford (Cal.): Stanford Univ. press, 1965. 349 с.*
- [2. *Гульельми А. В., Троицкая В. А. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. М.: Наука, 1973. 208 с.*
- [3. *Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. Циклотронная неустойчивость радиационных поясов Земли. — В кн.: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1980, вып. 10, с. 88—163.*
- [4. *Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле. — ЖЭТФ, 1960, 39, с. 181—184.*
- [5. *Ханин Я. И. Динамика квантовых генераторов. М.: Сов. радио, 1975. 496 с.*
- [6. *Беспалов П. А. Самомодуляция излучения плазменного циклотронного мазера. — Письма в ЖЭТФ, 1981, 33, с. 192—195.*
- [7. *Поляков С. В., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. Альфвеновский свип-мазер. Препринт № 23. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. 17 с.*
- [8. *Беспалов П. А., Грач С. М., Трахтенгерц В. Ю. О взаимодействии энергичных электронов с гидромагнитными волнами на баунс-резонансе. — Физика плазмы, 1977, 3, с. 1050—1061.*
- [9. *Будько Н. И., Карпман В. И., Похотелов О. А. Нелинейная теория монохроматических циркулярно поляризованных НЧ- и КНЧ-волн в магнитосфере. — Cosmic Electrodynamics, 1972, 3, p. 165—183.*

10. Гапонов А. В., Петелин М. И. Мазеры на циклотронном резонансе.— Наука и человечество: Международный ежегодник. М.: Знание, 1980, с. 283—297.
11. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. Теория лазеров и мазеров на свободных электронах: Лекции по электронике СВЧ и радиофизике I. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1981, с. 69—172.
12. Нусинович Г. С. Взаимодействие мод в МЦР-генераторах: Лекции по электронике СВЧ. III. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1978, с. 163—198.

УДК 551.465

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ЗАДАЧИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЖИДКОСТИ С СИЛЬНО УСТОЙЧИВОЙ СТРАТИФИКАЦИЕЙ

Г. И. БАРЕНБЛАТТ

1. ВВЕДЕНИЕ

В нашей обзорной статье [1] рассматривались специальные вопросы турбулентности в условиях сильно устойчивой стратификации жидкости, привлекающие в последнее время внимание в связи с проблемами океана. Предлагаемая работа представляет собой продолжение статьи [1].

Как известно [2—4], турбулентность в условиях сильно устойчивой стратификации обладает высокой перемежаемостью. Она сосредоточена в пятнах, которые (см. [1] и указанную там литературу) образуются в результате обрушения внутренних волн и (или) потери устойчивости возникающих сдвиговых течений. Пятна на последующих этапах быстро приобретают дискообразную форму и длительное время сохраняют свой объем. Однако на первых этапах после интенсивной вспышки турбулентности происходит захват жидкости турбулентными возмущениями. Исследования закономерностей такого захвата в простейших геометрических условиях составляют первую часть настоящей статьи. Именно, в этой части излагается частная задача о захвате окружающей жидкости турбулентностью, распространяющейся от мгновенного источника, который первоначально занимает горизонтальный плоский слой малой толщины. Рассмотрение ведется на основе уравнения баланса турбулентной энергии, замыкание которого достигается при помощи гипотез автомодельности колмогоровского типа и предположения о том, что масштаб турбулентности составляет определенную фиксированную долю мгновенной толщины турбулентного слоя. Асимптотическое решение задачи при больших временах (или малых начальных толщинах слоя) оказывается автомодельным. Но эта автомодельность — неклассическая автомодельность второго рода, так что показатель степени времени в автомодельных переменных одним анализом размерностей не определяется. Для определения этого показателя ставится и решается нелинейная задача на собственные значения.

Далее, пятнистая структура турбулентности обуславливает показательные особенности процесса нестационарного турбулентного тепло- и массообмена в сильно устойчиво стратифицированной жидкости. В настоящей статье предлагается «двухфазная» модель этого процесса. Жидкость представляется в виде совокупности двух взаимопроникающих фаз: фазы турбулентных пятен и фазы ламинарных прослоек (соответственно вводятся два поля температуры). Тепловой баланс и баланс массы составляются отдельно по фазам, учитывается обмен теплом и веществом между фазами. Предложенная модель применяется к полю температуры и концентрации в верхнем термоклине океана: области относительно резкого изменения температуры, подпирющей снизу верхний квазиоднородный слой. Показано, что модель объясняет, в частности, возникновение температурного скачка между верхним квазиоднородным слоем и термоклином.

2. ЗАДАЧА О ЗАХВАТЕ

Для упрощения решения задачи прибегнем к ее максимальной геометрической схематизации. Будем считать, что создавшееся в начальный момент пятно и распределение турбулентности в нем однородны по горизонтали. Таким образом, рассматривается пространство, заполненное несжимаемой и вначале однородной жидкостью, в котором в начальный момент создается плоский турбулентный слой (рис. 1). В последующие моменты времени слой турбулизированной жидкости расширяется, захватывая окружающую жидкость. Сдвиг скорости в жидкости отсутствует, поэтому генерации турбулентной энергии не происходит и турбулентность с течением времени диссипирует в тепло и затухает.

Уравнение баланса турбулентной энергии, на основе которого ведется дальнейшее рассмотрение, отражает тот простой факт, что изменение турбулентной энергии складывается из вклада турбулентной диффузии турбулентной энергии, работы пульсаций давления на пульсациях скорости и диссипации турбулентной энергии в тепло. Оно имеет вид

$$\partial_t b = -\partial_z \langle b'w' + p'w'/\rho \rangle - \varepsilon_t. \quad (2.1)$$

Здесь b, b' — средняя энергия турбулентности единицы массы и ее пульсация; p', w' — пульсации давления и вертикальной компоненты скорости соответственно; ε_t — средняя скорость диссипации турбулентной энергии единицы массы; ρ — плотность; t — время; координата z отсчитывается по вертикали от плоскости симметрии турбулентного слоя (распределение турбулентной энергии предполагается симметричным относительно этой плоскости). Угловые скобки означают осреднение по ансамблю.

Введем коэффициент турбулентной диффузии турбулентной энергии согласно соотношению $K_b = -\langle b'w' + p'w'/\rho \rangle / \partial_z b$. Примем в согласии с колмогоровской гипотезой автомодельности, что величины K_b и ε_t определяются средним размером вихрей в пото-

ке или пропорциональным ему внешним масштабом турбулентности l , а также средней энергией вихрей, в качестве меры которой можно взять ту же величину b . Анализ размерностей дает

$$K_b = l\sqrt{b}, \quad \varepsilon_t = cb^{3/2}/l, \quad (2.2)$$

где c — некоторая универсальная в рамках принятой модели постоянная. Уравнение баланса турбулентной энергии (2.1) с учетом (2.2) принимает вид

$$\partial_t b = \partial_z l \sqrt{b} \partial_z b - cb^{3/2}/l. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) также остается пока незамкнутым, поскольку неизвестен масштаб турбулентности l . Для его замыкания воспользуемся следующими соображениями.

В отличие от линейного уравнения теплопроводности это уравнение обладает свойством конечной скорости распространения возмущений в следующем смысле: при любом ограниченном l и финитном начальном распределении турбулентной энергии, когда турбулентная энергия в начальный момент равна нулю всюду вне некоторой ограниченной области, область распространения турбулентности остается ограниченной также и в любой другой момент времени.

Это свойство известно для уравнений типа теплопроводности со степенной нелинейностью [5, 6], и его доказательство легко переносится на (2.3). Таким образом, в силу симметрии задачи турбулентная область в произвольный момент t соответствует $-h(t) \leq z \leq h(t)$, где $h(t)$ — половина толщины турбулентного слоя — представляет собой неубывающую функцию времени. Мы принимаем для замыкания уравнения (2.3), что масштаб турбулентности l составляет фиксированную часть текущей толщины турбулентного слоя

$$l = \alpha h(t), \quad (2.4)$$

где $\alpha < 1$ — универсальная постоянная, остающаяся, так же как и предыдущая постоянная, в рамках предлагаемой модели неопределенной (для ее определения требуется специальный эксперимент).

Уравнение (2.3) дополняется начальным условием. Предполагается, что функция, определяющая начальное распределение турбулентной энергии, симметрична относительно срединной плоскости слоя $z = 0$ и равна нулю вне некоторой полосы $-a \leq z \leq a$, где $2a$ — начальная толщина турбулентного слоя. Начальное условие без потери общности можно записать в виде

$$b(z, 0) = (Q/a) u(\tau), \quad \tau = z/a, \quad (2.5)$$

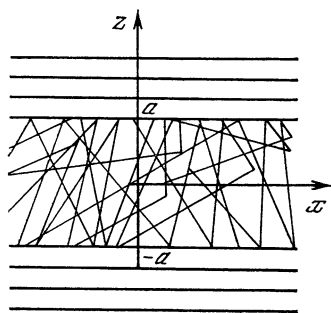


Рис. 1

где $u(\tau)$ — четная безразмерная функция своего безразмерного аргумента, равная нулю при $|\tau| \geq 1$, а Q — суммарная интенсивность источника турбулентности, так что

$$Q = \int_{-a}^a b(z, 0) dz, \quad \int_{-1}^1 u(\tau) d\tau = 1. \quad (2.6)$$

Таким образом, исследуемая задача привелась к построению решения задачи Коши для уравнения

$$\partial_t b = \partial_z \alpha h(t) \sqrt{b} \partial_z b - c b^{3/2} / \alpha h(t) \quad (2.7)$$

в области $-h(t) \leq z \leq h(t)$ при начальном условии (2.5). Сама функция $h(t)$ — полутолщина турбулентного слоя в момент t — заранее не известна и должна быть определена в ходе решения задачи.

3. АВТОМОДЕЛЬНАЯ ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ

Решение сформулированной задачи зависит от параметров Q , t , z , a , α , c . Анализ размерностей дает

$$b = Q^{2/3} t^{-2/3} f_b(\xi, \eta, \alpha, c), \quad h = Q^{1/3} t^{2/3} f_h(\eta, \alpha, c), \quad (3.1)$$

где $\xi = z/Q^{1/3} t^{2/3}$, $\eta = a/Q^{1/3} t^{2/3}$.

Основной интерес представляет асимптотика решения при толщине турбулентного слоя много больше начальной ($h \gg a$), т. е. $\eta \ll 1$. При этом конечного отличного от нуля предела функций f_b и f_h при $\eta \rightarrow 0$ не существует. Действительно, если бы этот предел существовал, то он представлял бы собой решение задачи, отвечающее мгновенному сосредоточенному источнику ($a = 0$) конечной интенсивности Q . При этом согласно (3.1) суммарная турбулентная энергия E -слоя оставалась бы неизменной во времени

$$E = \int_{-h}^h b(z, t) dz = Q \int_{-f_h(0, \alpha, c)}^{f_h(0, \alpha, c)} f_b(\xi, 0, \alpha, c) d\xi = \text{const}. \quad (3.2)$$

Но это невозможно ввиду наличия диссипации и отсутствия притока турбулентной энергии. Предположим поэтому, что по параметру η при $\eta \rightarrow 0$ имеет место неполная автомодельность (подробнее об этом понятии см. [7]), так что при $\eta \rightarrow 0$ справедливы степенные асимптотические представления функций f_b и f_h

$$f_b = \eta^\lambda f(\xi/\eta^\nu), \quad f_h = \xi_0(\alpha, c) \eta^\sigma. \quad (3.3)$$

Здесь $\xi_0(\alpha, c)$ — некоторая положительная безразмерная функция своих безразмерных аргументов; λ , ν , σ — постоянные числа. Но уравнение для функции f , получающееся при подстановке (3.1), (3.3) в (2.7), должно быть обыкновенным. Поэтому должны выполняться условия $\lambda = 2\nu$, $\sigma = \nu$. Полагая для удобства

$$\nu = (3\mu - 1)/2, \quad \zeta = \xi/\xi_0 = z/h(t), \quad \Phi(\zeta) = \xi_0^{-2} f, \quad (3.4)$$

получаем

$$\frac{d}{d\zeta} \alpha \sqrt{\Phi} \frac{d\Phi}{d\zeta} + (1 - \mu) \zeta \frac{d\Phi}{d\zeta} + 2\mu\Phi - \frac{c}{\alpha} \Phi^{3/2} = 0. \quad (3.5)$$

По определению границы турбулентной области $\Phi(\pm 1)$ должно быть равно нулю. Далее ввиду симметрии задачи $\Phi(\zeta) = \Phi(-\zeta)$ можно ограничиться построением решения уравнения (3.5) только при $\zeta \geq 0$. Наконец, ввиду непрерывности турбулентной энергии и ее потока $l\sqrt{b}\partial_z b$ искомое решение $\Phi(\zeta)$ уравнения (3.5) должно быть непрерывным и обладать непрерывной производной $d\Phi^{3/2}/d\zeta$. Итак, мы ищем нетривиальное решение уравнения второго порядка (3.5), удовлетворяющее трем граничным условиям

$$\left. \frac{d\Phi}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = 0, \quad \Phi(1) = 0, \quad \left. \frac{d\Phi^{3/2}}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} = 0. \quad (3.6)$$

При малых Φ последний член уравнения (3.5) мал по сравнению с предыдущим, и его можно не учитывать. Легко показать, что получающееся при этом уравнение инвариантно относительно группы преобразований $\Phi' = \lambda^4 \Phi$, $\zeta' = \lambda \zeta$ ($\lambda > 0$ — параметр группы). Поэтому порядок уравнения стандартным приемом понижается до первого, и получающееся уравнение легко исследуется. Исследование показывает, что нетривиальное решение уравнения (3.5), удовлетворяющее последним двум условиям (3.6), существует при любом μ и определяется единственным образом: для него при $\zeta \leq 1$ справедливо разложение

$$\Phi = \left(\frac{1-\mu}{2\alpha} \right)^2 (1-\zeta)^2 - \frac{1-\mu}{6\alpha^2} (1-\zeta)^3 + \dots \quad (3.7)$$

Однако, вообще говоря, при произвольном μ это решение не удовлетворяет первому условию (3.6). Мы пришли, таким образом, к классической ситуации нелинейной задачи на собственные значения: нужно построить нетривиальное решение уравнения (3.5) при условиях (3.6) и определить значение параметра μ , при котором такое решение существует. Можно показать, что решение этой задачи на собственные значения существует и единственно, она легко решается численно. Результаты численного решения, выполненного Е. С. Бениловым, представлены на рис. 2, 3.

Окончательно решение рассматриваемой задачи — распределение турбулентной энергии по толщине слоя — представляется в виде

$$b = A^2 t^{-2\mu} \Phi(z/At^{1-\mu}), \quad h = At^{1-\mu}, \quad (3.8)$$

где

$$A = \xi_0(\alpha, c) Q^{\frac{1-\mu}{2}} a^{\frac{3\mu-1}{2}} \quad (3.9)$$

— постоянная величина. Интегрируя уравнение (2.7) в пределах от $-h(t)$ до $h(t)$ и учитывая, что на границах турбулентной об-

ласти обращается в нуль как сама турбулентная энергия, так и ее поток, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{-h(t)}^{h(t)} b(z, t) dz = -\frac{c}{\alpha h(t)} \int_{-h(t)}^{h(t)} b^{3/2}(z, t) dz. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.8) в (3.10), имеем

$$\mu - \frac{1}{3} = c \int_{-1}^1 \Phi^{3/2} d\zeta / 3\alpha \int_{-1}^1 \Phi d\zeta, \quad (3.11)$$

откуда следует, что $\mu > 1/3$. Условие расширения слоя дает, очевидно, $\mu < 1$. Видим, что если устремить начальную толщину слоя

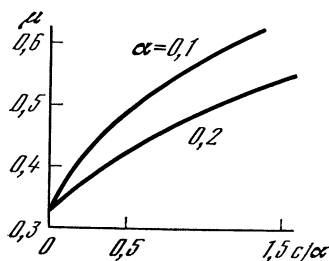


Рис. 2

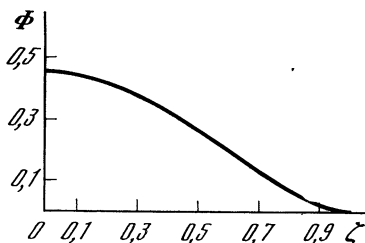


Рис. 3

α к нулю и при этом сохранить неизменной асимптотику решения при больших временах, то в таком случае нельзя сохранять суммарную интенсивность источника Q неизменной. Она должна возрастать и притом так, чтобы оставался неизменным момент M

$$M = Qa^{\frac{3\mu-1}{1-\mu}}, \quad (3.12)$$

или, что то же самое, постоянная A . Заметим, что величина A остается в построенном асимптотическом решении неопределенной. Дело в том, что закон сохранения турбулентной энергии принимает неинтегрируемую форму (3.10) и не позволяет определить эту постоянную. Единственный способ нахождения A , который можно сейчас указать, — это сшивка численного решения исходной неавтономной задачи, асимптотикой которого является решение (3.8) с этой асимптотикой. Известно [7], что это свойство является общим для всех автомоделных решений второго рода, основанных на степенных промежуточных асимптотиках.

4. ВЛИЯНИЕ СТРАТИФИКАЦИИ

В предыдущем рассмотрении жидкость считалась однородной. Стратификация жидкости может оказывать двойное влияние. Во-первых, в уравнение баланса турбулентной энергии входит дополнительный член, определяющий затрату турбулентной энергии на работу против сил плавучести. Оценки показывают, что авто-

модельного режима, при котором эта затрата существенна, не существует. Поэтому рассматриваемый автомодельный режим при наличии стратификации может осуществляться только в начале движения, когда затрата турбулентной энергии на работу против сил плавучести пренебрежимо мала. Однако и на этой начальной стадии движения стратификация может оказывать существенное воздействие на динамику турбулентного слоя. Дело в том, что часть энергии на границах слоя турбулизированной жидкости может передаваться внутренним волнам, возбуждаемым в негустой стратифицированной жидкости над и под турбулентным слоем. При этом автомодельность распространения и затухания турбулентности сохранится, только если энергия, передаваемая внутренним волнам за единицу времени, составит постоянную часть m ($0 < m < 1$) скорости уменьшения общей турбулентной энергии. Если передача энергии волнам происходит симметрично, то вместо условия обращения в нуль потока турбулентной энергии на границе турбулентного слоя получается условие

$$-(l\sqrt{b}\partial_z b)_{z=\pm h(t)} = \mp (m/2) dE/dt, \quad (4.1)$$

где E — суммарная энергия турбулентности, приходящаяся в момент t на единицу площади слоя ($E(t) = \int_{-h(t)}^{h(t)} b(z, t) dz$). Из условия (4.1) вместо последнего условия (3.6) с учетом (3.8) получаем

$$\frac{d\Phi^{3/2}}{d\xi} \Big|_{\xi=\pm 1} = \pm \frac{3m(1-3\mu)}{4\alpha} \int_{-1}^1 \Phi(\xi) d\xi \quad (4.2)$$

и, следовательно, вместо (3.11) — соотношение

$$\mu - \frac{1}{3} = \frac{c}{1-m} \int_{-1}^1 \Phi^{3/2}(\xi) d\xi / 3\alpha \int_{-1}^1 \Phi(\xi) d\xi. \quad (4.3)$$

Очевидно, что индекс μ будет расти с увеличением доли энергии, передаваемой внутренним волнам, так что затухание турбулентности в слое ускорится, а расширение слоя замедлится.

Далее, стратификация приводит к качественному изменению распределения турбулентной энергии вблизи края турбулентного слоя. Действительно, вблизи края турбулентной области в однородной жидкости интенсивность турбулентности спадает плавно. Формулы (3.8), (3.7) дают

$$b = \left(\frac{1-\mu}{2\alpha t}\right)^2 (h-z)^2 + \dots \quad (4.4)$$

Напротив, вблизи края турбулентной области в стратифицированной жидкости из (3.8), (4.2) следует

$$b \sim t^{-2(1+2\mu)/3} (h-z)^{2/3} + \dots, \quad (4.5)$$

так что интенсивность турбулентности вблизи края турбулентного слоя в стратифицированной жидкости спадает резко.

5. МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЁПЛО- И МАССОБМЕНА В ЖИДКОСТИ С СИЛЬНО УСТОЙЧИВОЙ СТРАТИФИКАЦИЕЙ

Перейдем к рассмотрению процессов нестационарного турбулентного переноса тепла и вещества в жидкости с сильно устойчивой стратификацией.

В согласии с пятнистым, «островным» характером турбулентности в условиях сильно устойчивой стратификации модель жидкости представляется в виде «кирпичной кладки» (рис. 4) (турбулентные пятна, имеющие форму сильно сплюснутых дисков, — «кирпичи», разделенные «цементом» — ламинарными прослойками). Как показали прямые измерения Вудса [2], а также косвенные

оценки (см. [1]), относительный объем ламинарных прослоек мал, порядка одной сотой. Введем в рассмотрение два поля температуры¹: поле температуры пятен T_s и поле температуры прослоек T_l , понимая под ними соответственно поля температуры, интерполированные и сглаженные по пространству отдельно для пятен и прослоек.

Составим уравнения баланса тепла отдельно для турбулентных пятен и ламинарных прослоек. Турбулентные

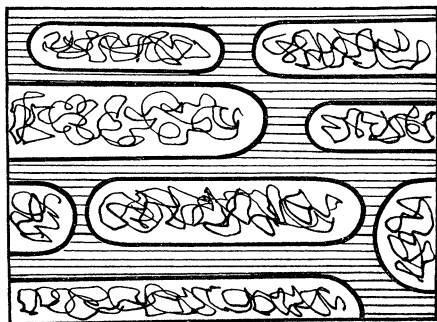


Рис. 4

пятна изолированы одно от другого, и внутри пятен градиент температуры мал. Поэтому в уравнении баланса тепла в пятнах вклад переноса тепла теплопроводностью отсутствует и скорость изменения теплосодержания в пятнах в единичном объеме жидкости $\partial_t s c T_s$ равна скорости оттока тепла от пятен к прослойкам в этом объеме

$$\partial_t s c T_s = -q, \quad (5.1)$$

где s — относительный объем пятен; c — теплоемкость жидкости; t — время. Предполагая, что оба поля температур горизонтально однородны и меняются только со временем и по глубине z , получаем уравнение баланса тепла в прослойках в виде

$$\partial_t (1 - s) c T_l = K \partial_{zz}^2 T_l + q, \quad (5.2)$$

где K — эффективный коэффициент теплопроводности в среде ламинарных прослоек. Простая оценка показывает, что $K = k/(1 - s)$, где k — коэффициент молекулярной теплопроводности. Величина k мала, как и параметр $1 - s$, но мы предполагаем величину K в сопоставимых единицах конечной. Вследствие малости па-

¹ Здесь и далее для определенности говорится о температуре и теплообмене, имея в виду, что все соотношения автоматически переносятся на концентрацию и массообмен.

параметра $1-s$ — относительного объема прослоек — левая часть (5.2) мала по сравнению с q и уравнение (5.2) упрощается

$$K\delta_{zz}^2 T_l + q = 0. \quad (5.3)$$

Естественно предположить, что интенсивность перетока тепла между фазами жидкости q пропорциональна разности температур пятен и прослоек

$$q = A (T_s - T_l). \quad (5.4)$$

Здесь A — постоянный для данной жидкости и поля турбулентности в ней коэффициент.

Соотношения (5.1)—(5.4) позволяют получить замкнутую систему уравнений для обеих температур T_s и T_l :

$$\partial_t T_s + (T_s - T_l)/\tau = 0, \quad (5.5)$$

$$\kappa\delta_{zz}^2 T_l + (T_s - T_l)/\tau = 0. \quad (5.6)$$

С помощью простых выкладок получаем для T_s и T_l одно и то же уравнение

$$L T_s = 0, \quad L T_l = 0, \quad L = \partial_t - \kappa\delta_{zz}^2 - \eta\partial_{zz}^3. \quad (5.7)$$

Коэффициенты в (5.5)—(5.7) определяются так:

$$\kappa = K/cs, \quad \tau = cs/A, \quad \eta = \kappa\tau. \quad (5.8)$$

Как видно, κ представляет собой составной коэффициент теплопроводности, отвечающий эффективной теплопроводности прослоек, но теплоемкости пятен; τ — характерное время тепловой релаксации пятен, равное по порядку величины, очевидно, $\tau \sim h^2/\kappa_s$, где h — средняя толщина пятна, а κ_s — коэффициент теплопроводности жидкости в пятнах. Коэффициент η имеет размерность площади.

Уравнения вида (5.5)—(5.7) рассматривались ранее в связи с другими физическими задачами [8—10].

Как видно, уравнение (5.7), которому удовлетворяют оба поля температуры, отличается от обычного уравнения теплопроводности. Введем характерное время процесса τ_0 и соответствующий ему пространственный масштаб $\lambda = \sqrt{\kappa\tau_0}$. Переходя к безразмерным переменным $\vartheta = t/\tau_0$ и $\xi = z/\lambda$, мы видим, что в выражении оператора L (5.7) появляется параметр τ/τ_0

$$L \sim \partial_\vartheta - \delta_{\xi\xi}^2 - (\tau/\tau_0) \delta_{\vartheta\xi\xi}^3. \quad (5.9)$$

Таким образом, для медленных процессов теплообмена, когда параметр τ/τ_0 мал, (5.7) переходит в обычное уравнение теплопроводности. Качественного отличия процессов турбулентной теплопроводности в условиях сильно устойчивой стратификации жидкости следует ожидать для процессов, характерное время которых совпадает по порядку величины с временем тепловой релаксации турбулентных пятен.

Следует отметить, что постановка краевых задач для системы (5.5), (5.6) отличается определенными особенностями, так как эта система вырождена, т. е. в ней отсутствует производная $\partial_t T_l$. Сохраняя член с малым параметром в уравнении теплового баланса прослоек (5.2) и проводя асимптотический анализ полной системы, можно показать, что для вырожденной системы (5.5), (5.6) можно произвольно задавать только начальное распределение температуры в пятнах $T_s(z, 0)$. Начальное же распределение температуры в прослойках $T_l(z, 0)$ получается по заданному $T_s(z, 0)$ решением уравнения

$$\eta \partial_{zz}^2 T_l(z, 0) - T_l(z, 0) = -T_s(z, 0), \quad (5.10)$$

которое имеет вид

$$T_l(z, 0) = c_1 \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{\eta}}\right) + c_2 \exp\left(\frac{z}{\sqrt{\eta}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \int_0^z T_s(\xi, 0) \operatorname{sh}\left(\frac{z-\xi}{\sqrt{\eta}}\right) d\xi. \quad (5.11)$$

Функция $T_l(z, 0)$ и ее первая производная непрерывны. Поэтому постоянные c_1, c_2 определяются из граничных условий в момент $t = 0$. Напротив, функция $T_s(z, 0)$ может быть разрывной и иметь разрывы производной $\partial_z T_s(z, 0)$. Учитывая порядок сингулярности уравнения (5.7) и применяя известную технику обобщенных решений линейных уравнений с частными производными (см. книгу И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [11]), можно получить соотношения для разрывов

$$[T_s] = [T_s]_{t=0} \exp(-t/\tau), \quad [\partial_z T_s] = [\partial_z T_s]_{t=0} \exp(-t/\tau). \quad (5.12)$$

Здесь введены обозначения для разрывов $[\varphi] = \varphi(z+0, t) - \varphi(z-0, t)$, $[\varphi]_{t=0} = \varphi(z+0, 0) - \varphi(z-0, 0)$. Таким образом, в отличие от решения классического уравнения теплопроводности скачки температуры в турбулентных пятнах (которая удовлетворяет уравнению (5.7)) и ее производной по глубине не исчезают мгновенно, а затухают по экспоненциальному закону.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛООБМЕНА В УСЛОВИЯХ СИЛЬНО УСТОЙЧИВОЙ СТРАТИФИКАЦИИ К СЕЗОННОМУ ТЕРМОКЛИНУ ОКЕАНА

В работах [12, 13] (см. также [1]) была независимо предложена модель сезонного термоклина океана (или, что то же, гало-клина) в виде бегущей тепловой (диффузионной) волны. В предположении, что процессы обмена, происходящие в сезонном термоклине, стационарны, однородны и мелкомасштабны для распределения избыточной температуры $\Theta(z, t)$ было получено обычное уравнение теплопроводности

$$\partial_t \Theta = \kappa \partial_{zz}^2 \Theta. \quad (6.1)$$

Под избыточной температурой здесь понимается разность между некоторым образом определенной температурой и средней температурой за большой промежуток времени порядка года. Решение уравнения (6.1) типа бегущей волны имеет вид $\Theta = \Theta(\xi)$, $\xi = z - ut - h_0$, где u — скорость опускания нижней границы верхнего квазиоднородного слоя (верхней границы сезонного термоклина), медленно меняющаяся функция времени; h_0 — глубина верхнего квазиоднородного слоя в некоторый условный момент времени $t = 0$. Удовлетворяя условиям $\Theta(0) = \Theta_0$, $\Theta(\infty) = 0$, где Θ_0 — избыточная температура верхнего квазиоднородного слоя, медленно меняющаяся функция времени, получаем распределение избыточной температуры — решение типа бегущей волны в виде

$$\Theta = \Theta_0 \exp(-u\xi/\kappa). \quad (6.2)$$

Эта модель, подробно обсужденная в [1], хорошо согласуется с данными лабораторных измерений, а также с данными натуральных наблюдений, осредненных за достаточно большой промежуток времени, порядка 10^6 с [9, 14]. Процессы теплообмена в верхнем термоклине в сильно нестационарных условиях должны, согласно предыдущему, описываться системой (5.5), (5.6). В частности, температура пятен T_s описывается уравнением (5.7). Легко видеть, что такое же уравнение справедливо для избыточной температуры в пятнах

$$\partial_t \Theta_s = \kappa \partial_{zz}^2 \Theta_s + \eta \partial_{izz}^3 \Theta_s. \quad (6.3)$$

Рассмотрим решение вида бегущей волны $\Theta_s = \Theta_s(\xi)$, $\xi = z - ut - h_0$ уравнения (4.3). Подставляя это выражение в (4.3), интегрируя один раз и используя граничное условие $\Theta_s(\infty) = 0$, получаем

$$u\eta \frac{d^2 \Theta_s}{d\xi^2} - \kappa \frac{d\Theta_s}{d\xi} - u\Theta_s = 0. \quad (6.4)$$

При $\xi > 0$ решение этого уравнения имеет вид

$$\Theta_s = \Theta_1 \exp(-\alpha \xi), \quad \alpha = [1/\kappa^2 + 4u^2\eta - \kappa]/2u\eta. \quad (6.5)$$

Однако постоянная Θ_1 из условия непрерывности температуры при $\xi = 0$ уже определена быть не может, поскольку избыточная температура в пятнах Θ_s не обязана быть непрерывной функцией координаты z . В отличие от температуры в пятнах температура в прослойках — непрерывная функция координаты, так что $\Theta_l(0) = \Theta_0$, где Θ_0 — избыточная температура верхнего квазиоднородного слоя. Возьмем первое уравнение системы (5.5), сохраняющее силу для избыточных температур

$$\partial_t \Theta_s = -(\Theta_s - \Theta_l)/\tau. \quad (6.6)$$

Подставляя в это уравнение $\Theta_s = \Theta_s(\xi)$, $\Theta_l = \Theta_l(\xi)$, имеем

$$-u\alpha \Theta_s/d\xi = -(\Theta_s - \Theta_l)/\tau. \quad (6.7)$$

Используя (6.5), непрерывность температуры в прослойках и полагая в последнем уравнении $\xi = +0$, получаем

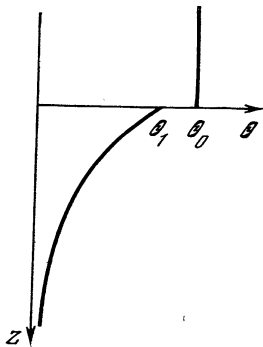
$$u\alpha\Theta_1 = -(\Theta_1 - \Theta_0)/\tau, \quad (6.8)$$

откуда находится величина избыточной температуры в пятнах на верхней границе термоклина

$$\Theta_1 = \frac{\Theta_0}{1 + u\tau\alpha} = \frac{2\kappa\Theta_0}{[V\kappa^2 + 4u^2\eta + \kappa]} = \frac{2\Theta_0}{1 + V1 + \beta}, \quad (6.9)$$

$$\beta = 4u^2\eta/\kappa^2 = 4u^2\tau/\kappa. \quad (6.10)$$

Как видно, при не очень малых β избыточная температура пятен на верхней границе термоклина Θ_1 не равна избыточной температуре квазиоднородного слоя Θ_0 . Имеет место конечный скачок температуры (рис. 5)



$$\frac{\Theta_0 - \Theta_1}{\Theta_0} = \frac{V1 + \beta - 1}{V1 + \beta + 1}. \quad (6.11)$$

Это обстоятельство и поясняет, почему натурные измерения малоинерционными приборами обнаруживают иногда заметный скачок температуры. Действительно, измеряется в основном температура пятен (их относительный объем на два порядка больше). При сравнительно больших мгновенных u параметр β может иметь ощутимую величину, а следовательно, будет ощутимым и скачок. Напротив, осредненные

Рис. 5

за большой промежуток времени скорости опускания малы, параметр β мал и при сравнении с данными таких измерений скачок проявляться не должен.

Приведем некоторые количественные оценки. Для коэффициента $\kappa = K/cs = k/(1 - s) cs$ получается сравнительно консервативная оценка $\kappa \sim 10^{-1} \text{ см}^2/\text{с}$. Поскольку турбулентность в пятнах несильно развита, для коэффициента температуропроводности в пятнах κ_s можно принять оценку в достаточно широких пределах $\kappa_s \sim 10^{-1} - 10 \text{ см}^2/\text{с}$. Толщины турбулентных прослоек h также меняются достаточно широко — от десятка до нескольких сот сантиметров. Поэтому для характерного времени тепловой релаксации пятен $\tau \sim h^2/\kappa_s$ также получается оценка в широких пределах $\tau \sim 10 - 10^5 \text{ с}$. Величина скорости опускания u , при которой рассмотренные здесь эффекты будут существенными, составляет $u \sim \sqrt{\kappa/\tau} \sim 10^{-3} \div 10^{-1} \text{ см/с}$, что лежит в диапазоне реальных скоростей опускания. Отметим, что альтернативная модель скачка температуры была предложена Г. И. Шапиро [15].

Заметим в заключение, что не представляет принципиальных трудностей учесть в изложенной схеме горизонтальную неоднородность, переменность относительного объема пятен и т. д. Одна-

ко при всей возможной важности этих обстоятельств для практических расчетов их учет не изменит качественной картины явления.

Поскольку коэффициенты молекулярной теплопроводности и диффузии для морской воды различаются на два порядка, скорость опускания квазиоднородного слоя, при которой рассмотренные выше эффекты становятся существенными, оказывается на порядок меньше для галоклина, нежели для термоклина. Поэтому вполне возможно наблюдение скачков солености в отсутствие скачков температуры.

Наконец, в определенных условиях относительный объем прослоек может оказаться немалым. В этом случае уже нельзя пренебрегать скоростью изменения теплосодержания в прослойках и уравнение для температуры в пятнах примет вид

$$\frac{(1-s)}{s} \tau \partial_{tt}^2 T_s + \frac{1}{s} \partial_t T_s = \kappa \partial_{zz}^2 T_s + \eta \partial_{izz}^3 T_s. \quad (6.12)$$

Аналогичное уравнение получается в этом случае и для температуры прослоек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И.— Некоторые явления турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией.— В кн.: Нелинейные волны: Стохастичность и турбулентность. Горький: ИПФ АН СССР, 1980, с. 89—114.
2. Woods J., Wave-induced shear instability in the summer thermocline.— J. Fluid Mech., 1968, 32, pt. 4, p. 791—800.
3. Мокин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г. Изменчивость Мирового океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 262 с.
4. Мокин А. С., Озмидов Р. В. Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 320 с.
5. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— В кн.: Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950, с. 61—71.
6. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— ПММ, 1952, 16, № 1, с. 67—78.
7. Баренблатт Г. И. Подobie, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 206 с.
8. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах.— ПММ, 1960, 24, № 5, с. 852—864.
9. Баренблатт Г. И. О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах.— ПММ, 1963, 27, № 2, с. 348—350.
10. Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением.— ПМТФ, 1960, № 1, с. 32—57.
11. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.; Л.: Физматгиз, 1958. 400 с.
12. Баренблатт Г. И. Об автомодельности распределений температуры и солености в верхнем термокLINE.— Изв. АН СССР. ФАО, 1978, 14, № 11, с. 1160—1166.
13. Turner J. S. The temperature profile below the surface mixed layer.— Ocean modelling, 1978, N 1, p. 6—8.
14. Ефимов С. С., Царенко В. И. К вопросу об автомодельности распределения температуры в верхнем термокLINE.— Изв. АН СССР. ФАО, 1980, 16, № 6, с. 620—627.
15. Шапиро Г. И. Влияние пульсаций в слое турбулентного вовлечения на теплообмен в верхнем термокLINE.— Там же, № 4, с. 433—435.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН С ТЕЧЕНИЯМИ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ В ОКЕАНЕ

Л. А. ОСТРОВСКИЙ, Ю. А. СТЕПАНЯНЦ, Л. Ш. ЦИМРИНГ

1. ВВЕДЕНИЕ

Внутренние гравитационные волны уже не раз обсуждались на Горьковских школах как один из объектов нелинейной теории волн. Для внутренних волн (ВВ) в океане при малых скоростях распространения (типичных, скажем, для пешехода и даже улитки) характерны разнообразные нелинейные эффекты, поскольку они имеют большие амплитуды, достигающие многих десятков метров и более. Обзор основных аспектов нелинейного распространения ВВ в океане был дан одним из авторов на предпоследней школе [1]. Однако в реальном океане ВВ редко можно отделить от таких движений, как сдвиговые течения и турбулентность. Более того, эти процессы не всегда можно различить. Мы, однако, будем рассматривать достаточно типичные ситуации, когда это возможно, благодаря различию пространственно-временных масштабов: течения — медленные во времени и крупномасштабные (по горизонтали) движения, турбулентность же как мелкомасштабный случайный процесс. В этих ситуациях ВВ занимают промежуточное место, причем длинные ВВ нередко можно рассмат-

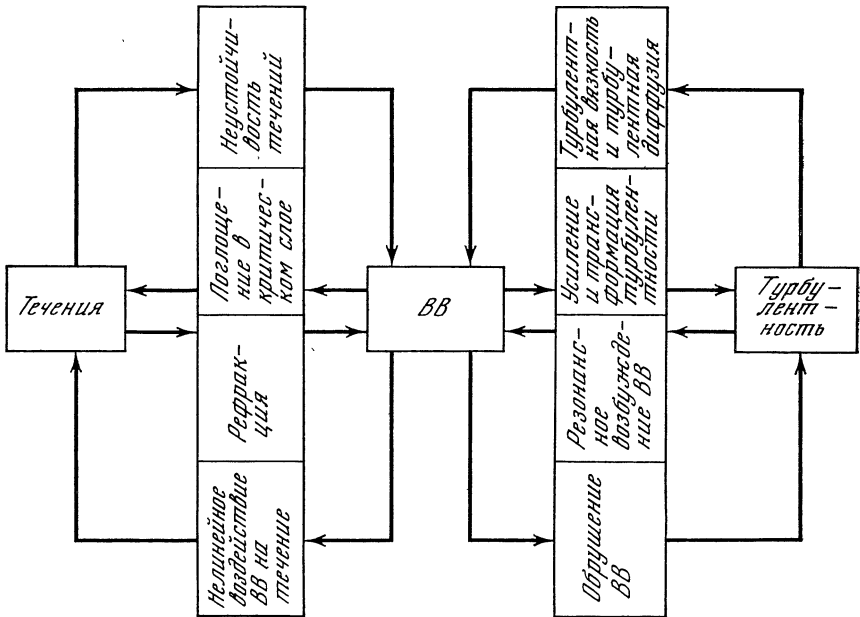


Рис. 1. Основные механизмы взаимодействия между ВВ, течениями и турбулентностью

ривать как течения для коротких ВВ (а иногда последние как турбулентность для первых) [2]. Отметим, что без рассмотрения таких взаимодействий нельзя ответить на вопрос об источниках и стоках энергии ВВ в океане. Вместе с тем взаимодействие ВВ с течениями и турбулентностью ставит очень сложные проблемы перед теорией уже потому, что механизмы этого взаимодействия очень разнообразны. На схеме, представленной на рис. 1, указаны лишь некоторые из них, причем стрелки показывают преимущественное направление взаимодействия (передачи энергии).

В данной работе рассматриваются сравнительно простые модели таких взаимодействий, которые, на наш взгляд, имеют существенное значение для понимания механизмов обмена энергией в толще океана. Одновременно это будет попытка построить хотя бы элементарную теорию нелинейной стадии гидродинамической неустойчивости, которая при слабой нелинейности должна быть основана на описании ламинарного движения жидкости, а при более сильной — на исследовании взаимодействия внутренних волн и турбулентности.

2. ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ И ТЕЧЕНИЯ

В данном разделе мы ограничимся моделями, в которых ВВ взаимодействуют с плоскопараллельными сдвиговыми течениями, а турбулентность либо отсутствует, либо описывается какими-либо заранее заданными простыми феноменологическими параметрами, например турбулентной вязкостью. Исходными служат уравнения гидродинамики несжимаемой среды, записанные в приближении Буссинеска [3]:

$$\begin{aligned} v_t + (v\nabla)v + \frac{1}{\rho_0} \nabla P - g \frac{\rho'}{\rho_0} - \nu \Delta v &= 0, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad \rho_t + (v\nabla)\rho = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $v = \{U(z) + u(x, z, t), w(x, z, t)\}$ — скорость; $\rho = \rho_0(z) + \rho'(x, z, t)$ — плотность; P — давление; z и x — вертикальная и горизонтальная координаты; t — время; g — ускорение силы тяжести; ν — кинематическая вязкость жидкости. Здесь $U(z)$ и $\rho_0(z)$ представляют собой заданные профили скорости и плотности, а u , w и ρ' относятся к ВВ.

Рассмотрение начнем со случаев, когда ВВ не влияют на среднее течение, а затем перейдем к более сложным процессам их взаимодействия.

2.1. Гидродинамическая неустойчивость стратифицированной жидкости

Здесь нельзя обойтись без хотя бы краткого обзора линейной теории устойчивости. Классический подход к вопросу об устойчивости течений состоит в линеаризации исходной системы (2.1) и исследовании возможности нарастания гармонических возму-

щений. Аналогичный подход используется, например, в физике плазмы, но в нашем случае принципиальна неоднородность, поэтому, как правило, приходится решать краевые задачи. Ввиду плоскостной геометрии решение можно искать в виде

$$w \sim f(z) \exp [ik(x - ct)] \quad (2.2)$$

(остальные переменные в волне имеют аналогичный вид). Подстановка такого решения в линеаризованные уравнения для идеальной жидкости (2.1) приводит к уравнению Тейлора—Гольдштейна [4]

$$f'' + \left[\frac{N^2}{(c-U)^2} + \frac{U''}{c-U} - k^2 \right] f = 0, \quad (2.3)$$

где $N^2 = - (g/\rho_0) (d\rho_0/dz)$ — квадрат частоты Брента—Вяйсяля, а штрихи обозначают дифференцирование по z . Это уравнение должно быть дополнено граничными условиями, например $f = 0$ при $z = 0$, H (приближение жестких стенок)¹. В такой постановке фазовая скорость c является собственным значением при заданном волновом числе k . Если $c = c_r + ic_i$, то ясно, что устойчивому случаю соответствует $c_i = 0$, неустойчивость же возникает для волн с $c_i \neq 0$ (ввиду самосопряженности (2.3), если c — собственное значение, то при $c_i \neq 0$ уравнению (2.3) удовлетворяет как $c_i > 0$, так и $c_i^* = -c_i < 0$). Это уравнение изучалось многими авторами. Один из основных выводов состоит в том, что если всюду в течении $U \neq c$, то течение устойчиво [4]. Это означает, что в неустойчивом потоке должны присутствовать как «сверхволновые» ($U > c$), так и «субволновые» ($U < c$) частицы, и лишь их связь через волну может породить неустойчивость. В этом случае существует, по крайней мере, один критический слой $z = z_c$, где $U(z_c) = c$, и уравнение (2.3) имеет особенность. Подобная особенность в соответствующем уравнении Рэля для однородной жидкости достаточно много исследовалась, однако из (2.3) сразу видно, что наличие стратификации принципиально, поскольку при $N \neq 0$ особенность оказывается более сильной — типа $(c - U)^{-2}$ вместо $(c - U)^{-1}$. Поэтому характер движения в окрестности критического слоя будет другим.

Интенсивное изучение устойчивости стратифицированных течений началось на рубеже 60-х годов, когда Майлс и Ховард получил ряд важных физических результатов. Прежде всего было показано (теорема Майлса [5]), что достаточным условием устойчивости является выполнение во всем потоке простого неравенства

$$\text{Ri}(z) = N^2(z)/U_z'^2 \geq 1/4, \quad (2.4)$$

где Ri называется числом Ричардсона.

¹ Для возмущений, бегущих в горизонтальной плоскости под углом φ к основному потоку, в уравнении (2.3) вместо $U(z)$ стоит величина $U(z) \cos \varphi$, а k имеет смысл модуля волнового вектора.

Это удивительное по своей универсальности неравенство часто используется в океанологии для оценки возможной неустойчивости течений и внутренних волн (правда, нередко без учета того важного обстоятельства, что условия $Ri < 1/4$ еще недостаточно для неустойчивости).

Другое важное утверждение — теорема Ховарда о полукруге [5]: если имеет место неустойчивость, то значение c находится на комплексной плоскости в пределах области, удовлетворяющей соотношению

$$[c_r - 1/2(U_{\max} + U_{\min})]^2 + c_i^2 \leq 1/4(U_{\max} - U_{\min})^2, \quad (2.5)$$

где U_{\max} и U_{\min} — максимальное и минимальное значения U .

Таким образом, c лежит в полукруге с радиусом $1/2(U_{\max} - U_{\min})$. Эта теорема позволяет оценить лишь верхнюю возможную границу инкремента нарастания волн. Можно ожидать, что эта граница зависит также от значения Ri . Действительно, как показали недавно Кочар и Джейн [6], результат Ховарда можно уточнить, заменив его теоремой о полуэллипсе:

$$[c_r - 1/2(U_{\max} + U_{\min})]^2 + \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4Ri_{\min}}} c_i^2 \leq 1/4(U_{\max} - U_{\min})^2. \quad (2.6)$$

Здесь Ri_{\min} — минимальное значение Ri в области течения. Согласно (2.6) комплексные значения c ограничены полуэллипсом с полуосями $1/2(U_{\max} - U_{\min})$ и $1/\sqrt{8}(U_{\max} - U_{\min}) \times [1 + \sqrt{1 - 4Ri_{\min}}]^{1/2}$, так что при $Ri_{\min} = 0$ отсюда следует теорема Ховарда, а при $Ri_{\min} = 1/4$ верхняя граница c_i сжимается в $\sqrt{2}$ раз.

Насколько просты и универсальны эти теоремы, настолько сложно, как правило, получать решения уравнения (2.3) в конкретных случаях. Аналитически это удается сделать обычно только для кусочно-однородных или кусочно-линейных профилей скорости и плотности, для плавных же профилей чаще всего приходится использовать ЭВМ. В результате был рассчитан ряд простых модельных профилей, причем основное внимание уделялось так называемым сингулярным² нейтральным модам (СНМ), соответствующим границе неустойчивости на плоскости (Ri, α) , где α — безразмерное волновое число. Эти результаты подробно обсуждаются в вышедших в последние годы монографиях Тернера [4] и Госсарда и Хука [7], а также в обзоре Дразина и Ховарда [8].

Здесь мы используем несколько иной подход, связанный с рассмотрением волн отрицательной энергии.

² Сингулярными называются моды, фазовая скорость которых лежит в диапазоне скоростей потока; следовательно, такие волны имеют, по крайней мере, один критический слой.

2.2. Волны отрицательной энергии в гидродинамике

Понятие волн отрицательной энергии (ВОЭ) впервые введено Чу в 1951 г. применительно к волнам в электронных потоках (см. об этом в [9]). Физический смысл этого понятия состоит в том, что при возбуждении ВОЭ полная энергия системы поток—волна уменьшается. Это означает, что отбор энергии у волн за счет диссипации или связи с другой волной, имеющей положительную энергию, приведет к ее нарастанию (условия $\dot{W} < 0$ и $W < 0$ означают рост модуля W , а значит, амплитуды волны). Отсюда ясно, что такие волны могут существовать лишь в неравновесных системах, каковыми являются, например, электронный пучок, пучок заряженных частиц в плазме и т. д. На возможность существования ВОЭ в плазме впервые указано в 1964 г. в работе Кадомцева, Михайловского и Тимофеева [10]. Впоследствии была подробно изучена их роль в возникновении плазменных неустойчивостей и выявлена связь с аномальным эффектом Доплера [11]. Что же касается гидродинамики, то до недавнего времени ВОЭ здесь не вызывали интереса. Любопытно, что среди физиков существовало даже мнение о невозможности ВОЭ в механике обычных жидкостей³. В связи с этим необходимо отметить, что ВОЭ в стратифицированных сдвиговых потоках были рассмотрены Бенджамином еще в 1963 г. [13]. В своей работе он предложил классификацию гидродинамических неустойчивостей, в которой ВОЭ отведена важная роль (в частности, к ВОЭ в [13] отнесены волны Толлмина—Шлихтинга в пограничном слое). Эта классификация проиллюстрирована на уравнении осциллятора, в котором масса, упругость и трение могут иметь любой знак. Более современный подход основан на усредненном вариационном принципе, согласно которому энергия волны может быть представлена в виде $E = \omega \partial L / \partial \omega$, где L — средний лагранжиан системы, введенный Уиземом [14]. В линейном случае $L = D(\omega, k)A^2$, где A — амплитуда, а $D(\omega, k) = 0$ представляет собой дисперсионное уравнение для данной волны. Поэтому $E = A^2 \omega \partial D / \partial \omega$. Отсюда видно, что на дисперсионной плоскости (ω, k) энергия может изменить знак в двух случаях [15] — при изменении знака частоты ω или знака действия (адиабатического инварианта) $I = dL/d\omega$. Поскольку в волне $L = 0$, то $\partial L / \partial \omega = -(dL/dk) / (\partial \omega / \partial k)$, и в последнем случае групповая скорость волны обращается в бесконечность, что означает появление на дисперсионной плоскости точек ветвления, связанных со слиянием двух ветвей. Такое слияние создает условия для обмена энергией между волнами с энергией разного знака, в результате чего и возникает неустойчивость.

Необходимо иметь в виду, что знак энергии волны зависит от системы отсчета благодаря замене $\omega \partial L(\omega, k) / \partial \omega$ на

³ «В динамике плазмы имеется гораздо большее разнообразие физических явлений, чем в механике жидкостей. Одним из примеров, подтверждающих это, является возможность существования волн с отрицательной энергией» [12].

$\Omega \partial L(\Omega k) / \partial \Omega$, где $L_{\Omega} = L_{\omega}$ — адиабатический инвариант, а $\Omega = \omega - kU$, U — скорость системы отсчета. Однако факт устойчивости или неустойчивости, разумеется, инвариантен. Это означает, что вместе со знаком энергии нарастающей волны одновременно изменяется знак диссипативной функции или знак энергии второй волны, если неустойчивость обусловлена взаимодействием волн разного знака энергии. В результате критерии неустойчивости, основанные на рассмотрении ВОЭ в удобной для исследования системе отсчета, часто оказываются очень полезными для выяснения механизма неустойчивости.

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных примеров, необходимо заметить, что приведенное выше выражение для энергии волны, полученное из линейного решения, в общем случае неполно — оно не содержит всего изменения энергии системы, вносимого волной. В связи с этим заслуживает упоминания вопрос об индуцированных течениях, порождаемых ВВ. Хорошо известно, что волны индуцируют в жидкости средние течения со скоростью порядка квадрата амплитуды волны: результаты расчета таких течений во ВВ и их влияния на самовоздействие волн приводятся в [16]. В связи с обсуждением ВОЭ целесообразно обратить внимание на вклад течений в энергию волновых движений. Этот вклад в движущейся жидкости имеет тот же порядок (квадрата амплитуды волны), что и непосредственный вклад колебательных движений. Действительно, пусть в жидкости существует некоторое периодическое волновое движение, распространяющееся вдоль оси x в присутствии постоянного сдвигового течения $U(z)$. Ввиду нелинейности уравнений гидродинамики (или граничных условий) поле скорости в общем случае не может быть строго гармоническим, а имеет вид

$$v(x, z, t) = U(z) + A \{f_1(z) \exp [i(\omega t - kx)] + \text{к. с.}\} + A^2 \{f_0(z) + f_2(z) \exp [2i(\omega t - kx)] + \text{к. с.}\} + \dots,$$

где A — амплитуда волны; $A^2 f_0(z)$ описывает квадратичную поправку к средней скорости течения; а к. с. — комплексно сопряженные величины. Средняя плотность кинетической энергии, связанная с волной, по определению равна

$$W_k(z) = \frac{1}{2}\rho \langle v^2 \rangle - U^2(z) = \rho |A|^2 (|f_1|^2 + U_0 f_0). \quad (2.7)$$

Таким образом, энергия волны состоит из слагаемых $W_{\text{л}} = |f_1|^2$ и $W_{\text{нл}} \sim U_0 f_0$, имеющих один и тот же порядок $|A|^2$. Ясно, что $W_{\text{нл}}$ не может быть найдено из преварительно линеаризованных уравнений движения. Вместе с тем при обсуждении ВОЭ мы рассматривали только линейную часть энергии, которая получается из квадратичной по амплитуде части лагранжиана; и именно она определяет критерий неустойчивости в системе. Полная же энергия, получаемая с учетом индуцированных течений, может не совпадать с $W_{\text{л}}$ и даже быть положительной, когда $W_{\text{л}} < 0$. Более того, при безымпульсном возбуждении волны (возбуждение в среднем неподвижным волнопродуктором, нарастание однородного

в пространстве возмущения в результате неустойчивости и т. д.), как легко показать, полная энергия волны вообще инвариантна по отношению к системе отсчета. Более подробно эти вопросы обсуждаются в [17].

2.3. Пример сдвигового течения, содержащего ВОЭ

Рассмотрим сначала одну из самых простых моделей — классическую модель Кельвина — Гельмгольца (КГ), представляющую собой двухслойное течение жидкостей различной плотности в поле тяжести с тангенциальным разрывом скорости на границе раздела слоев. Учтем для общности поверхностное натяжение между слоями. Тогда в системе отсчета, в которой нижний слой покоится, дисперсионное уравнение для волн на границе раздела имеет следующий вид [18]:

$$\omega_{1,2} = \frac{a}{1+a} \pm \sqrt{\frac{1-a}{1+a} gk + \frac{\sigma k^3}{\rho_2(1+a)} - \frac{aU_0^2 k^2}{(1+a)^2}}, \quad (2.8)$$

где U_0 — скорость движения верхнего слоя с плотностью ρ_1 ; ρ_2 — плотность нижнего слоя; $a = \rho_1/\rho_2$, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

При $U_0 = 0$ уравнение (2.8) описывает две ветви (а) дисперсионной кривой, симметричные относительно оси k и соответствующие волнам, бегущим в противоположных направлениях (рис. 2). При $U_0 \neq 0$ дисперсионные кривые становятся несимметричными из-за сноса волн течением. При $U_0 > U'_c = \sqrt[4]{[(1-a)/a^2](g\sigma/\rho_2)}$ на нижней ветви (б) дисперсионной кривой (см. рис. 2) частота меняет знак и становится положительной на участке $k'_1 \leq k \leq k'_2$, где $k'_{1,2} = (aU_0^2 \rho_2 / 2\sigma) (1 \pm \sqrt{1 - U_c^4 / U_0^4})$. Согласно изложенному в подразд. 2.2, этому участку соответствуют ВОЭ. При дальнейшем увеличении U_0 обе ветви продолжают сближаться, и, наконец, при $U_0 \geq U_{КГ} = U'_c \sqrt{1+a}$ происходит перезамыкание (см. рис. 2, ветвь в) и возникает известная неустойчивость КГ в диапазоне $k_1 \leq k \leq k_2$, где $k_{1,2} = [aU_0^2 \rho_2 / 2 (1+a) \sigma] (1 \pm \sqrt{1 - (1+a)^2 U_c^4 / U_0^4})$. Такое перезамыкание типично для волн противоположных знаков энергии [19]. Существенно также, что и при наличии неустойчивости КГ в рассматриваемой системе остаются устойчивые ВОЭ, заключенные в интервалах между точками, где $\omega_2 = 0$ и $d\omega_2/dk = \infty$. Как легко видеть из выражений для U'_c и $U_{КГ}$, эти скорости практически совпадают, если a мало, как это имеет место для границы раздела вода—воздух, где $a \simeq 10^{-3}$. Если, однако, $a \simeq 1$, что характерно для внутренних волн, то $U'_c \simeq U_{КГ} / \sqrt{2}$ (на это обстоятельство впервые обратил внимание Бенджамин [13]). Для внутренних прослоек в океане поверхностное натяжение обычно отсутствует ($\sigma = 0$), поэтому в рамках рассматриваемой идеальной модели неустойчивость КГ име-

ет место при любом значении U_0 для волн $k > k_1 = (1 - a^2)g/aU_0^2$ (в действительности при больших k неустойчивость подавляется из-за вязкости и конечности толщины слоя сдвига), область же ВОЭ расположена при меньших значениях k : $k'_1 = k_1(1 + a) < k < k_1$, т. е. в области более длинных волн.

Таким образом, возникновение неустойчивости КГ можно рассматривать как результат взаимодействия волн разного знака энергии: ВОЭ, соответствующие нижней ветви дисперсионной кривой, отдают свою энергию волнам положительной энергии, соответствующим верхней ветви, и при этом амплитуды обеих волн растут. Неустой-

чивость ВОЭ вне интервала неустойчивости КГ могут обеспечивать и другие механизмы, отбирающие у них энергию. Так аналогично плазменной диссипативной неустойчивости [11] учет вязкости в неподвижном слое приводит к нарастанию ВОЭ [19]. Важно подчеркнуть, что для усиления ВОЭ вязкость должна приводить к «положительным» потерям. Например, в рассматриваемой модели ВОЭ затухают, если вязок верхний движущийся слой. Однако в этом случае нарастают волны положительной энергии на верхней ветви, поскольку в движущемся верхнем слое вязкость соответствует отрицательному затуханию. При переходе в систему отсчета, где покоится верхний слой, отрицательную энергию имеют уже волны на верхней ветви, что вполне согласуется с высказанными выше соображениями об относительности знака энергии и потерь при инвариантности знака их отношения. Здесь важно, что «потенциально-неустойчивые» волны на обеих ветвях являются замедленными по отношению к потоку, т. е. их фазовая скорость $c = \omega/k$ меньше U_0 . В общем случае критическое значение скорости для верхней ветви $U'_c = \sqrt[4]{(1 - a)g/\rho_2}$ отличается от U'_c . Эта разница мала при $a \simeq 1$ (внутренние волны), но весьма существенна при $a \ll 1$. Например, для границы раздела вода—воздух оценки дают $U_{КГ} = U'_c \simeq 6,5$ м/с, тогда как $U'_c \simeq 0,23$ м/с, что соответствует минимальной фазовой скорости для волн на воде. При этом неустойчивость могла бы возникнуть, если бы динамическая вязкость воды была пренебрежимо малой по сравнению с вязкостью воздуха. В действительности последняя примерно на порядок [меньше первой, но если учесть, что движение воздуха быстро турбулизуется даже

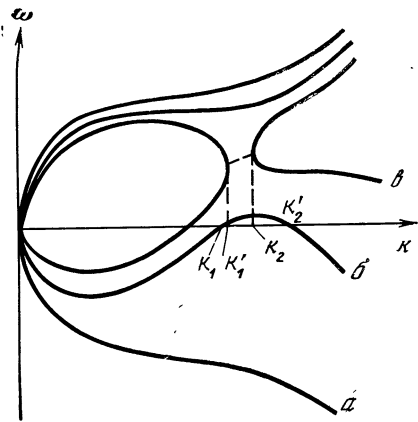


Рис. 2. Дисперсионные кривые волны в модели КГ с поверхностным натяжением при скоростях относительного движения слоев $U_0 = 0$ (а) $U'_c < U_0 < U_{КГ}$ (б) и $U_0 \geq U_{КГ}$ (в)

при небольшой скорости, то молекулярную вязкость воды разумно сравнивать с турбулентной вязкостью воздуха, которая может превышать молекулярную на несколько порядков. При этом получается значение пороговой скорости ветра, которое дает и теория Майлса, т. е. 0,23 м/с. Это позволяет считать, что рассмотренная простая модель качественно соответствует гораздо более сложному описанию, данному Майлсом для возбуждения ветровых волн плавным профилем скорости ветра, в случае, когда критический уровень находится в вязком подслое вблизи поверхности воды [20].

2.4. Излучательная неустойчивость

Отдельного упоминания заслуживает случай, когда механизм, создающим сток энергии для ВОЭ, служит излучение ВВ от сдвиговых слоев в толщу стратифицированной жидкости. Этот механизм рассмотрен в работе [21] на примере слегка усложненной модели КГ, в которой нижний слой предлагался плавно стратифицированным. При этом показано, что соответствующее дисперсионное уравнение для волн, бегущих вдоль слоя, имеет вид

$$\rho_1 (\omega - kU)^2 + \rho_2 \omega \sqrt{\omega^2 - N^2} - gk\Delta\rho = 0, \quad (2.9)$$

где N — частота Брента — Вайсяля в нижнем слое; $\Delta\rho$ — скачок плотности на границе раздела.

Из рис. 3 следует, что для волн с частотами $0 \leq \omega \leq N$, лежащими на нижней ветви дисперсионной кривой, имеет место

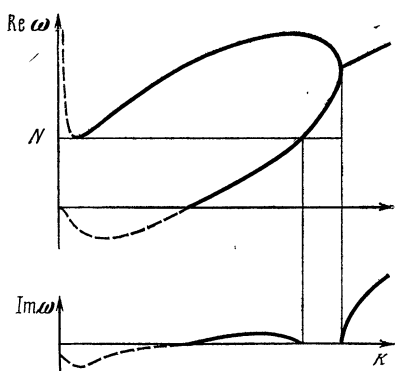
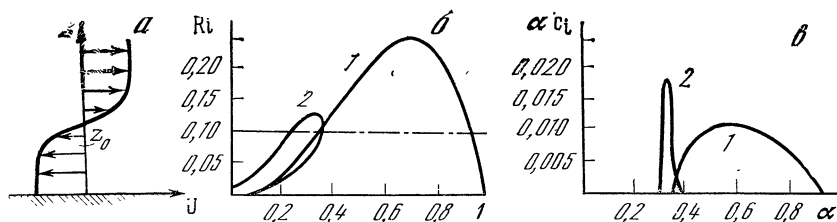


Рис. 3. Дисперсионные кривые волны в модели КГ с плавно стратифицированным нижним слоем

Рис. 4. Модель сдвигового течения $U(z) = U_0 \text{th} [(z - h)/d]$ (а), соответствующая ей диаграмма устойчивости (б) и инкременты неустойчивостей при $Ri = 0,1$ (в)

1 — неустойчивость КГ;
2 — излучательная неустойчивость [22]

Инкремент неустойчивости КГ (1) уменьшен в десять раз



излучательная неустойчивость, которая, вообще говоря, может быть отделена от области неустойчивости КГ (которую стратификация в нижнем слое несколько отодвигает в сторону больших k) конечным диапазоном прозрачности. Здесь видно, что в стратифицированной среде сильная неустойчивость КГ проявляется для коротких волн (в реальных профилях она существенно ограничивается конечностью толщины слоя сдвига), тогда как неустойчивость ВОЭ оказывается существенно более длинноволновой (это еще сильнее выражено в модели, рассмотренной далее, в разд. 3).

В [22] подобного рода неустойчивость, связанная с излучением ВВ, рассчитана с помощью ЭВМ для плавного профиля скорости (рис. 4, а). На рис. 4, б приведена диаграмма устойчивости (Ri, α) для этого случая (Ri — число Ричардсона в центре слоя сдвига; α — волновое число, нормированное на толщину переходной области). На диаграмме показаны две нейтральные кривые. Одна из них ограничивает область неустойчивости КГ, другая (в области меньших k) — соответствует излучательной неустойчивости. Инкременты неустойчивостей обоих типов представлены на рис. 4, в.

Сказанное выше, по-видимому, представляет интерес не только с океанографической точки зрения, но и для общей теории гидродинамической неустойчивости. Так, обычные диаграммы (Ri, α), обозначающие границы неустойчивости, зачастую не учитывают «потенциально» неустойчивых ВОЭ, которые фактически расширяют область неустойчивости на диапазон длинных волн.

2.5. Плавные профили. Критические слои

Как уже говорилось, задачи с плавными профилями редко удается решить точно аналитическими методами. Но при наличии критических слоев много можно сделать с помощью метода двух масштабов, рассматривая отдельно окрестность критического слоя (внутренняя задача) и внешнюю область. Вблизи критического слоя уравнение (2.3) можно решить, линеаризуя профили $U(z)$ и $\rho(z)$. Это решение имеет вид [5]

$$f(z) = A [k | z - z_c |]^{1/2+i\mu} + B [k | z - z_c |]^{1/2-i\mu}, \quad (2.10)$$

где $\mu = [Ri - 1/4]^{1/2}$, а A и B — произвольные постоянные. Оно пригодно как при $Ri > 1/4$, так и в случае $Ri \leq 1/4$. Это решение отличается от соответствующего решения для однородной жидкости, которое имеет логарифмическую особенность [23]. Качественный вид линий тока и в этом случае имеет вид «кошачьих глаз» (рис. 5), которые, однако, несколько сплюснуты из-за влияния стратификации. Как видно из (2.10), при $z = z_c$ решение имеет особенность: амплитуды возмущений плотности и горизонтальной скорости в критическом слое обращаются в бесконечность. Из-за этого решение (2.10) допускает произвольные скачки амплитудных коэффициентов A и B при $z = z_c$. Этот произвол устраняется

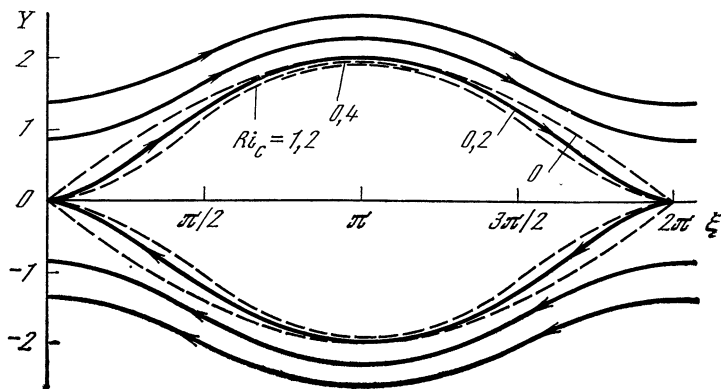


Рис. 5. Линии тока в окрестности критического слоя при различных числах Ричардсона

при учете диссипации (вязкости, теплопроводности) или нестационарности (о роли нелинейности речь пойдет ниже). Все эти факторы учитываются методом сращиваемых асимптотических разложений [24], как в теории пограничного слоя [25] (вблизи $z = z_c$ выделяется узкая область, где решение непрерывно и ограничено, внешнее же решение не отличается от (2.10)). Исследование внутренней структуры критического слоя дает возможность сформулировать правило Линя [23]: связь решений (2.10) по обе стороны от критического слоя производится обходом особой точки в комплексной плоскости z снизу, при $kU' > 0$ и сверху при $kU' < 0$, т. е. как для нарастающей волны. Таким образом, при переходе через критический слой в решении (2.10) необходимо заменить $z - z_c$ на $|z - z_c| e^{i\beta}$ с $\beta = -\pi$ (величину β принято называть фазой решения). Этого обычно достаточно знать для того, чтобы решать внешние задачи. Так, хорошо известна задача о падении коротких внутренних волн на критический слой [26]. Лучи, по которым распространяется энергия внутренних волн, асимптотически приближаются к уровню z_c , где скорости течения и волны сравниваются. Пользуясь правилом Линя, нетрудно рассчитать коэффициенты отражения и прохождения ВВ. При $Ri \gg 1/4$ они оказываются экспоненциально малыми, т. е. в окрестности критического слоя происходит диссипация волны с передачей энергии среднему течению. Некоторые примеры решения внешних задач обсуждаются в следующем разделе.

Таким образом, в ряде случаев исследование взаимодействия внутренних волн с течениями можно существенно упростить, либо рассматривая кусочно-линейные модели, либо сводя роль критического слоя к созданию некоторых эффективных граничных условий. Оказывается, что аналогичные приемы позволяют существенно продвинуться и при изучении нелинейных эффектов в сдвиговых течениях.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Нелинейные задачи, связанные с неустойчивостью сдвиговых течений и нарастанием ВВ, очень сложны, но и, как правило, особенно актуальны, поскольку в неустойчивых случаях переход к нелинейному этапу принципиален. В связи с этим нельзя не вспомнить задачу о подветренных волнах, возникающих в течениях за препятствием. Эта задача рассматривалась многими авторами начиная с 30-х годов. Особенность ее состоит в том, что в случае $N = \text{const}$ в однородном потоке стационарные волны удовлетворяют линейным уравнениям, что позволяет найти установившиеся волны произвольной амплитуды. Подобный процесс, возможно, является основным механизмом образования приливных внутренних волн за счет взаимодействия поверхностного (баротропного) прилива с неоднородностями дна или краем континентального шельфа [27]. Например, цуги сильно нелинейных внутренних волн, близких по структуре к последовательности солитонов, регулярно (с периодичностью 12 ч) возникают в Андаманском море, где они обнаруживаются как контактными, так и дистанционными методами [28] (рис. 6).

Упомянутая выше особенность гидродинамических возмущений вблизи критических слоев позволяет выделить два типа нелинейностей — «внешнюю», проявляющуюся во всем потоке, и «внутреннюю», ограниченную узкой окрестностью критического слоя, где поля особенно велики. Относительно простой пример проявления внешней нелинейности — резонансный триплет гармонических ВВ на течении. Такой триплет обсуждался Воронови-

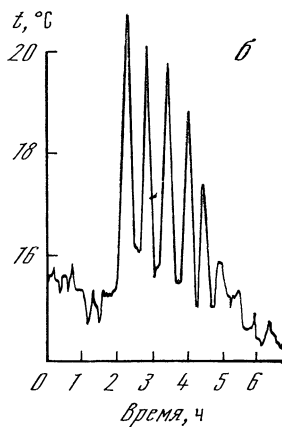
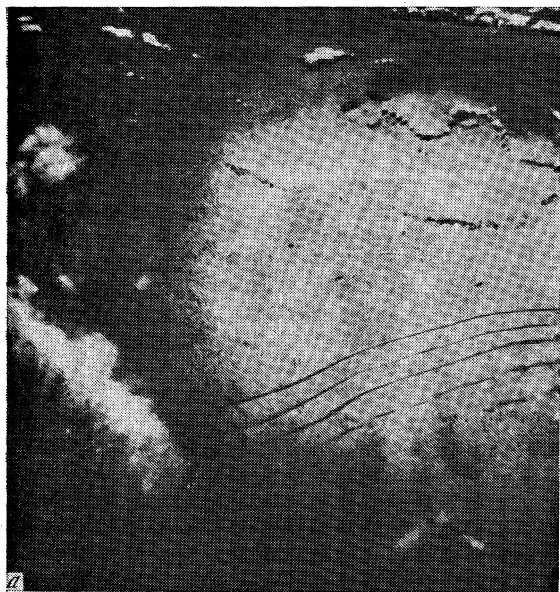


Рис. 6. ВВ в Андаманском море (фотография из космоса) (а) и осциллограмма температуры на глубине 164 м (б) [28]

чем и Рыбаком [14] для течения типа плоской струи со скачком плотности на оси и более подробно — Крайком и Адамом [30] для аналогичной модели. Дисперсионные соотношения таких систем допускают выполнение условий синхронизма для тройки волн, причем одна из них (с наибольшей частотой) имеет отрицательную энергию. В этом случае, как известно, возможна взрывная неустойчивость, когда амплитуды всех волн растут как $(t - t_{\text{взр}})^{-\xi}$, где $\xi > 0$, и обращаются в бесконечность за конечное время $t_{\text{взр}}$ [29]. Исследование ограничения этого роста требует учета других факторов (включая возможность обрушения ВВ).

3.1. Длинноволновое приближение

Рассмотрим несколько подробнее другой подход к задаче о неустойчивости сдвиговых течений. Хорошо известно, что в жидкости конечной глубины достаточно длинные слабонелинейные ВВ удовлетворяют уравнению Kortwega—де Вриза (КДВ), а в стратифицированном слое, находящемся в бесконечной или полубесконечной жидкости, — уравнению Бенджамина—Оно (БО)⁴. Вопросы построения таких уравнений для неподвижной жидкости обсуждались на предыдущих школах [1, 32] (см. также [33]). Естественно попытаться обобщить эти построения на случай движущейся жидкости. Такая задача относительно проста (хотя и громоздка) для устойчивого случая, когда нигде в потоке не возникает критических слоев. Применительно к этому случаю получены общие выражения для коэффициентов в уравнениях КДВ и БО [34, 35], причем в последней работе учтена также возможность излучения ВВ от сдвигового слоя в толщу стратифицированной жидкости с $N \neq 0$. Для устойчивых течений, как и для случая неподвижной жидкости [36], такое излучение приводит к затуханию нелинейных волн.

Значительно более интересны случаи неустойчивости. Они рассмотрены в [37, 38] применительно к моделям с разрывными профилями скорости течений: исследованы диссипативная неустойчивость двухслойной жидкости конечной глубины и излучательная неустойчивость в бесконечно глубокой жидкости с тонким верхним слоем. Обсудим следующую модель [38]. Пусть слой жидкости с плотностью ρ_1 и глубиной h движется со скоростью U_0 относительно неподвижного бесконечного глубокого нижнего слоя с плотностью ρ_2 , который предполагается плавно стратифицированным с постоянной частотой Брента—Вяйсяля N . Кроме того, считаем, что верхний слой характеризуется турбулентной вязкостью δ_t , нижний же слой считаем идеальным, что грубо соответствует реальным условиям. Дисперсионное уравнение для

⁴ В последние годы получено обобщенное эволюционное уравнение для тонкого пикноклина, находящегося в жидкости произвольной глубины. В предельных случаях малой и большой глубин оно переходит в уравнения КДВ и БО и, как и два последних, обладает солитонными решениями, бесконечным набором интегралов движения и т. д. [31].

такой модели при условии $\delta_\tau k^2 \ll \omega$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a(\omega - kU_0)^2 + \omega\sqrt{\omega^2 - N^2} \operatorname{th} kh - (1 - a)gh \operatorname{th}^2 kh &= \\ = -4ia\delta_\tau k^2(\omega - kU_0) \operatorname{th} mh, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $m^2 = k^2 - i(\omega - kU_0)/\delta_\tau$.

Пренебрегая вязкостью и стратификацией нижнего слоя ($\delta_\tau = 0, N = 0$), легко найти корни этого дисперсионного уравнения

$$\omega_{1,2} = [akU_0 \pm \sqrt{[(1 - a)gh(a + \operatorname{th} kh) - ak^2U_0^2] \operatorname{th} kh}] (a + \operatorname{th} kh)^{-1}. \quad (3.2)$$

Эта формула обобщает приведенную выше формулу Кельвина—Гельмгольца (2.9) на случай конечной глубины верхнего слоя.

Как и следует ожидать, достаточно короткие волны (в отсутствие поверхностного натяжения на границе раздела слоев) нарастают при любой скорости течения U_0 , причем инкремент нарастания (мнимая часть ω) при $k \rightarrow \infty$ пропорционален k (при учете вязкости инкремент ограничен величиной $\rho_1 U_0^2 / 2\rho_2 \delta_\tau$) [39]. Как и в случае слоев бесконечной глубины, рассмотренном в подразд. 2.3, существует нижняя граница волновых чисел $k_{\text{КГ}}$, такая, что более длинные волны не нарастают. В области значений $k < k_{\text{КГ}}$ данная система

содержит ВОЭ, волновые числа которых заключены в пределах $k_c \leq k \leq k_{\text{КГ}}$. Значение k_c , при котором $\omega = 0$, также определяется из (3.2). Если $U_0 > U_c = \sqrt{(1 - a)gh/a}$, то ВОЭ занимает весь интервал волновых чисел от нуля до $k_{\text{КГ}}$ (рис. 7).

Учитывая теперь вязкость и стратификацию, можно получить из (3.1) приближенное выражение для $\omega(k)$ на нижней ветви дисперсионной кривой, справедливое при малых k :

$$\omega_2 \simeq \varphi k + \psi k^3 - 2i\delta_\tau k^2, \quad (3.3)$$

где

$$\varphi = U_c(c - 1) + i\frac{Nh}{2a}(c - 1), \quad (3.4)$$

$$\psi = U_c h^2 \left[\frac{1}{6} + \frac{(c - 1)^2}{2} - \frac{(c - 1)^3}{4} \right] - i\frac{U_c^2 h}{2N}(c - 1)^3. \quad (3.5)$$

Здесь $c = U_0/U_c$.

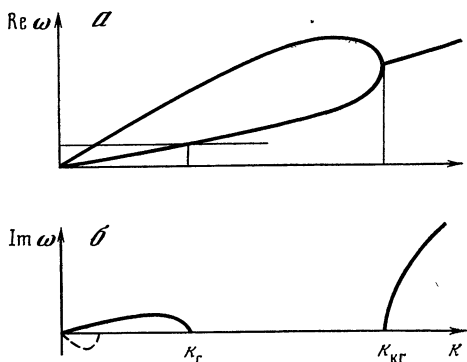


Рис. 7. Дисперсионные кривые в модели КГ с тонким верхним и бесконечным плавно стратифицированным нижним слоями

Исходя из вида дисперсионной кривой (3.3), можно записать эволюционное уравнение, описывающее распространение длинных волн. Как известно, для этого достаточно в действительных членах (3.3) заменить формально $i\omega$ на $-\partial/\partial t$, ik на $\partial/\partial x$, а мнимые поправки к частоте, пропорциональные k и k^3 , — на преобразование Гильберта для первой и третьей производных от соответствующей величины [40]. Нелинейное слагаемое (в случае слабой нелинейности) нетрудно вывести отдельно, пренебрегая эффектами дисперсии, вязкости и стратификации. В результате для смещения границы раздела от положения равновесия получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + v \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \eta}{\partial x'} \frac{dx'}{x-x'} +$$

$$+ 2\delta_T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\nu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x'^3} \frac{dx'}{x-x'}, \quad (3.6)$$

где $v = \text{Re } \varphi$, $\beta = \text{Re } \psi$, $\mu = \text{Im } \varphi$, $\nu = \text{Im } \psi$, $\alpha = 3/2 U_c/h$.

Точных решений уравнения (3.6) найти не удастся, однако если правая часть (3.6) мала по сравнению с каждым членом в левой, то, как известно, можно построить приближенные квазистационарные решения, пользуясь тем, что в отсутствие правой части (3.6) переходит в уравнение КДВ, для которого хорошо известны периодические и уединенные стационарные решения. Будем считать, что решения остаются близкими к соответствующим стационарным решениям уравнения КДВ, но с параметрами (амплитудой, длительностью и т. д.), медленно зависящими от времени [31]. Конкретный вид этих зависимостей определяется из уравнения баланса энергии волны, которое следует из (3.6) после его умножения на η и интегрирования по x (подобная процедура неоднократно использовалась ранее; см., например, [40]):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \eta^2 \rangle = \frac{\mu}{\pi} \left\langle \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \eta}{\partial x'} \frac{dx'}{x-x'} \right\rangle - \delta_T \left\langle \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right\rangle -$$

$$- \frac{\nu}{\pi} \left\langle \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x'^3} \frac{dx'}{x-x'} \right\rangle, \quad (3.7)$$

где для периодической волны с пространственным периодом λ

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \dots dx, \text{ а для солитона } \langle \dots \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots dx.$$

Ограничимся здесь случаем солитона, когда в уравнение (3.7) можно подставить решение в виде

$$\eta(x, t) = A \text{sch}^2 \frac{x - V_c t}{\Delta}, \quad (3.8)$$

где $V_c = v(1 + \alpha A/3)$, $\Delta = \sqrt{12\beta/\alpha A}$.

После интегрирования это уравнение приобретает следующий вид:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2,92}{\pi} \mu \left(\frac{\alpha}{12\beta} \right)^{1/2} A^{3/2} - \frac{16}{5} \frac{\alpha \delta_T}{12\beta} A^2 - \frac{5,11}{\pi} \nu \left(\frac{\alpha}{12\beta} \right)^{3/2} A^{5/2}. \quad (3.9)$$

Анализ решений уравнения (3.9) показывает, что в случае преобладания первого члена в правой части солитоны усиливаются взрывным образом, а именно

$$A = \frac{A_0}{(1 - t/t_{\text{взр}})^2}, \quad (3.10)$$

где A_0 — начальная амплитуда солитона, а $t_{\text{взр}} = (\pi/1,46\mu) \sqrt{12\beta/\alpha A_0}$. Это решение всегда справедливо на начальном этапе для солитона любой малой амплитуды, поскольку учитываемый член имеет наименьшую степень A . В дальнейшем, однако, происходит ограничение взрывного роста за счет влияния двух последних слагаемых в (3.13), и решение стремится к стационарному значению $A_{\text{ст}}$. Солитоны с амплитудами, большими $A_{\text{ст}}$, монотонно затухают до стационарного уровня.

Можно предполагать, что ВОЭ вносят заметный вклад в механизмы неустойчивости в условиях океана, поскольку скорости течений в океане нередко достигают величин порядка метра в секунду, которые типичны и для фазовых скоростей внутренних волн, а различные диссипативные факторы — турбулентность, стратификация и др. — также характерны для реальных океанических условий. Сделаем одну оценку. Положим $\Delta\rho/\rho = 10^3$, $N = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $U_0/U_c = 1,1$. Тогда излучательная неустойчивость наиболее эффективно проявляется при $h \simeq 10 \div 50$ м для волн с длинами $10^2 - 10^3$ м и временным масштабом 20—200 мин. Характерное время развития неустойчивости в этом случае порядка 10^5 с (20 ч).

Достоинством подобных теорий является то, что они дают возможность получить аналитические результаты для нелинейного этапа гидродинамической неустойчивости. Вместе с тем имеется ряд очевидных ограничений. В частности, при рассмотрении неустойчивости ВОЭ, по существу, игнорируется неустойчивость КГ в коротковолновой области, где инкремент формально растет до бесконечности. Однако учет вязкости и конечности толщины переходного слоя d приводит к ограничению неустойчивости КГ на масштабах порядка d . Более того, как уже отмечалось выше, результаты численных расчетов [22] показывают, что инкремент излучательной неустойчивости в модели с плавным профилем скорости может быть одного порядка с максимальным инкрементом КГ. Другое ограничение связано с условием малости нелинейности, которое выполняется при достаточно малых значениях $A_{\text{ст}}$. В противном случае рост амплитуды солитона приводит к обрушению волны, и тогда приходится считать за возможность образования турбулентности; дальнейшее продвижение здесь может быть связано с полуэмпирическим подходом, который рассматривается в разд. 4.

3.2. Нелинейный критический слой

Исследованию структуры критических слоев (КС) в нелинейном приближении посвящено довольно много работ, хотя лишь сравнительно малая их часть (см., например, [41—43]) относится к стратифицированной жидкости. Параметром нелинейности здесь служит величина [42] $\Lambda = (\alpha \text{Re} \varepsilon^{3p})^{-1}$, где $p = (3/2 + \sqrt{1/4 - \text{Ri}_c})^{-1}$ при $\text{Ri}_c < 1/4$ и $p = 2/3$ при $\text{Ri}_c \geq 1/4$; Ri_c — число Ричардсона внешнего потока в критическом слое; Re — число Рейнольдса; α — безразмерное волновое число; ε — безразмерный параметр, характеризующий амплитуду волны. При больших Λ критический слой можно считать линейным, и его структура определяется только вязкими силами, а при малых Λ , наоборот, основную роль играет нелинейность (нестационарность, которая, вообще говоря, также является конкурирующим фактором, здесь не обсуждается). Во многих важных для практики случаях, когда число Рейнольдса велико, а амплитуда волны вне области критического слоя (толщина которого порядка ε^p) мала, то во внешней области справедливы линейные невязкие уравнения, а решение внутренней задачи необходимо для сшивки внешних решений через критический слой. В линейном вязком критическом слое справедливо уже упоминавшееся правило обхода Линя; однако нелинейность приводит к изменению правила обхода: фазовый скачок, введенный в подразд. 2.5 и равный в линейном случае $-\pi$, уменьшается по абсолютной величине, и при $\Lambda \rightarrow 0$ имеем $\beta \rightarrow 0$ [42]. Изменение правила обхода может повлиять на устойчивость всего течения, поскольку, например, вывод критерия Майлса фактически основан на использовании правила Линя. Для иллюстрации того, что в течении с нелинейным критическим слоем неустойчивость может возникнуть и при $\text{Ri} > 1/4$, остановимся кратко на следующем примере.

Пусть профиль плотности совпадает с использованным при рассмотрении излучательной неустойчивости (см. подразд. 3.1), а профиль скорости уже не разрывный: верхний слой однородно движется со скоростью U_0 , а в нижнем слое скорость плавно (по сравнению с длиной ВВ) меняется от U_0 на границе раздела до нуля в глубине нижнего слоя ($z \rightarrow -\infty$). Число Ричардсона всюду больше $1/4$. Дисперсионное уравнение для внутренних волн, полученное при использовании ВКБ-приближения в нижнем слое, граничных условий при $z = 0$ и h , условия излучения при $z \rightarrow -\infty$, а также сшивки ВКБ-решений в критическом слое, имеет вид

$$\rho_1 k (U_0 - c)^2 \text{cth} kh \pm \rho_2 i \sqrt{N^2 - U_0'(U_0 - c) - k^2 (U_0 - c)^2 - \rho_2 U_0' (U_0 - c) - g \Delta \rho} = 0, \quad (3.11)$$

где U_0' и U_0'' — первая и вторая производные профиля скорости при $z = -0$; c — фазовая скорость ВВ; знаки «плюс» и «минус» соответствуют $\beta = 0$ и $\beta = -\pi$. При $\Delta \rho = 0$ уравнение (3.11)

легко решается аналитически. При $\beta = 0$ для экспоненциального профиля скорости под скачком $U(z) = U_0 e^{z/L}$ в длинноволновом приближении решение (3.11) имеет вид

$$c_1 = U_0, \quad c_2 = U_0 (1 - h/L) + iNh. \quad (3.12)$$

Таким образом, длинные волны нарастают с инкрементом Nkh . Отметим, что формула для c_2 справедлива при $h < L$. В противном случае волна бежит против течения, критический слой отсутствует и знак мнимой части c_2 должен быть заменен на обратный, так же как и в случае линейного критического слоя.

Рассмотренный пример весьма прост, но он наглядно демонстрирует роль критического слоя для эволюции волны: нелинейность критического слоя позволяет «обойти» критерий Майлса и получить неустойчивость ($\text{Im } c_2 > 0$) и при $\text{Ri} > 0,25$. Об этом же свидетельствуют попытки построения слабонелинейных уравнений для амплитуды монохроматической волны в сдвиговых потоках различной конфигурации. Линейное слагаемое способствует поглощению волн при $\text{Ri} > 1/4$, нелинейный же член приводит к надкритической ($\text{Ri} \gtrsim 1/4$) неустойчивости при конечной амплитуде начальных возмущений.

3.3. Воздействие внутренних волн на структуру течения (квазилинейная теория)

До сих пор, обсуждая критические слои, мы имели в виду гармонические или по крайней мере стационарные периодические волны. Если волновые возмущения имеют непрерывный спектр, то при наличии дисперсии для каждой спектральной компоненты возникает, вообще говоря, свой критический слой. Ситуация здесь во многом похожа на ту, которая существует в физике плазмы [43] при резонансном взаимодействии волн с частицами, а также при генерации ветровых волн сдвиговым потоком воздуха [44]. Для описания обратного воздействия волн на распределение частиц по скоростям в первом случае или на профиль скорости ветра во втором используется так называемое квазилинейное приближение, когда спектральные составляющие считаются невзаимодействующими между собой и удовлетворяют каждая в отдельности линеаризованным уравнениям. Аналогичная ситуация возникает и при взаимодействии внутренних волн с течениями.

В качестве примера остановимся на задаче о воздействии цуга объемных ВВ, распространяющихся под углом к горизонту, на сдвиговое течение [45—47]. Численные эксперименты [45, 46] указывают на то, что в области критического слоя профиль потока сильно деформируется, однако их результаты, основанные на прямом решении уравнений Эйлера, не дают возможности детально исследовать этот процесс. Квазилинейный же подход [47], однако, позволяет получить в явном виде уравнение, описывающее деформацию профиля скорости течения. Исходными здесь служат

усредненные по горизонтальной координате уравнения движения и непрерывности

$$\dot{U} + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{uw}) = 0, \quad (3.13)$$

$$\dot{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho w}) = 0, \quad (3.14)$$

где u, w — волновые возмущения горизонтальной и вертикальной скоростей, а $U(z, t), \bar{\rho}(z, t)$ — средние профили скорости и плотности. Пользуясь уравнением Тейлора — Гольдштейна (2.3), можно показать, что вне области, где присутствуют критические слои, величина (\overline{uw}) , пропорциональная вертикальному потоку горизонтальной проекции импульса волны, не зависит от z . Но внутри этой области вертикальный поток импульса меняется. Действительно, для монохроматической волны он терпит скачок на критическом уровне, здесь же этот скачок размывается. Изменение потока горизонтальной проекции импульса вызывает деформацию профиля скорости течения. Несложные вычисления приводят к следующему квазилинейному уравнению для скорости течения [47]:

$$\dot{U} = \frac{1}{\rho} \frac{S(U)}{U} U'_z \left\{ 1 + \exp \left[-\pi \sqrt{4 \frac{N^2}{U'^2} - 1} \right] \right\}. \quad (3.15)$$

Здесь $S(U), S(c)$ при $c = U$ — спектральная плотность вертикальной составляющей потока энергии падающей волны, которая может быть выражена через спектры частот и волновых чисел. Аналогичные преобразования уравнения непрерывности (3.14) показывают, что в квазилинейном приближении профиль плотности не деформируется. Любопытно отметить, что при больших числах Ричардсона уравнение (3.15) описывает простую волну (последний член в фигурных скобках экспоненциально мал), и по истечении некоторого времени в решении уравнения появляется особенность ($U_z \rightarrow \infty$). В качестве примера на рис. 8 показана деформация первоначально линейного профиля течения с постоянной частотой Брента — Вьяйсяля под действием падающей снизу внутренней волны с гауссовой формой спектра

$$S(c) = S_0 \exp [-(c - c_0)^2 / \Delta c^2]. \quad (3.16)$$

В процессе квазилинейной деформации скорость потока в критическом слое возрастает (см. рис. 8, а), при этом число Ричардсона уменьшается в нижней части критического слоя и возрастает вверх (см. рис. 8, б). Аналогичная деформация профиля потока отмечалась и в вышеупомянутых численных экспериментах [45, 46]. Основное различие состоит в том, что в [45, 46] рассматриваются монохроматические ВВ, и толщина слоя деформации определяется амплитудой волны, тогда как в нашем случае она определяется шириной спектра ВВ. Приближенное решение уравнения (3.15) позволяет оценить время, за которое число Ричард-

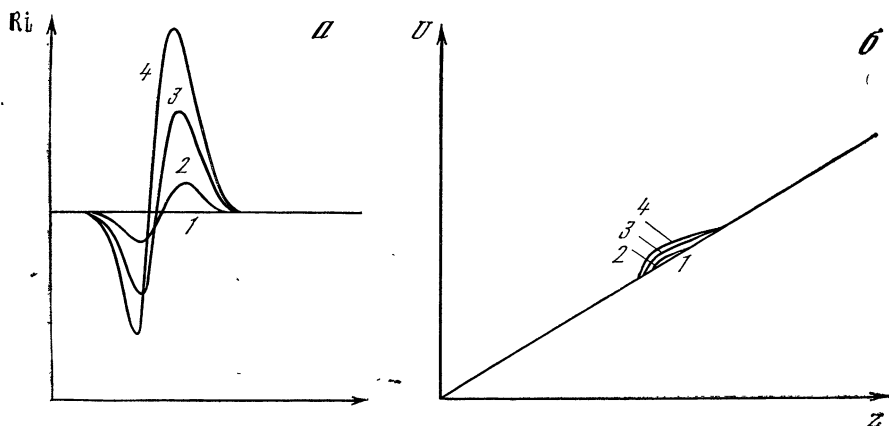


Рис. 8. Квазилинейная деформация течения под действием ВВ

a — профили скорости; *b* — профили числа Ричардсона
 1 — $t_1 = 0$, 2—4 — $t_2 < t_3 < t_4$ соответственно

сона на заданном уровне достигнет критического значения, равного 0,25:

$$t_{\text{хар}} \simeq \frac{c\Delta c}{S_0 U_0'} \left(1 - \sqrt{\frac{0,25}{\text{Ri}_0}} \right). \quad (3.17)$$

Эта величина дает оценку времени возникновения гидродинамической неустойчивости в области критического слоя, что может привести к разрушению волны и образованию турбулентных пятен. На наш взгляд, такой механизм разрушения внутренних волн интересен тем, что он не связан с наличием сильных первоначальных сдвигов и больших амплитуд волн (эффект накапливается за несколько периодов), и для его реализации достаточны типичные условия, имеющиеся в океане. Об этом свидетельствует, например, следующая оценка. Для $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $U_0' = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ (что соответствует начальному числу Ричардсона $\text{Ri}_0 = 100$) и параметров волны $\omega = 6 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $k = 3 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}$, $k_z = 4 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}$, $c = 0,2 \text{ м/с}$, $\Delta c/c = 0,1$, $u = w = 0,012 \text{ м/с}$, $S_0 = 5 \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, величина $t_{\text{хар}}$ составляет 10^4 с (около десяти периодов ВВ).

4. ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Процессы, относящиеся к заглавию этого раздела, очень существенны для обмена энергией в океане. Предполагают, что ВВ осуществляют сток энергии более крупномасштабных движений типа синоптических вихрей и передают ее мелкомасштабной турбулентности [48]. Прежде всего, как уже отмечалось, обрушение сильных ВВ (при всей неопределенности, точнее, многозначности термина *обрушение*) приводит к образованию турбулентных «пятен», что влечет за собой существенную потерю энергии ВВ (этот процесс может стимулироваться наличием сдвигового течения

или другими сопутствующими факторами). Конкретные механизмы обрушения ВВ могут быть различными, однако наиболее вероятным сейчас считается механизм сдвиговой гидродинамической неустойчивости. Между тем необходимое условие неустойчивости $Ri < 1/4$ по различным оценкам выполняется во внутренних волнах не так уж часто — в 2—30% случаев (см. далее разд. 5).

Здесь мы основное внимание уделим механизмам взаимодействия ВВ с «готовой» турбулентностью. Последняя всегда присутствует в океане, во-первых, в верхнем слое (благодаря атмосферным воздействиям) и, во-вторых, в глубине из-за обрушения других внутренних волн. Как будет видно из дальнейшего, это взаимодействие приводит как к эффективному затуханию ВВ, так и к своеобразному усилению и перестройке турбулентности. На важность такого рода процессов для океана указывает известный эксперимент Канты и Филлипса (см. [49, 50]), в котором исследовалось заглублиение турбулизованного слоя, создаваемого вращающимся диском на поверхности жидкости, и воздействие этой турбулентности на ВВ, возбуждаемые волнопродуктором на границе раздела двух слоев.

Математический аппарат, с помощью которого анализируются подобные процессы, основан на уравнениях полуэмпирической теории турбулентности. Этот аппарат, в сущности, развит уже довольно давно (см., например, монографию Монина и Яглома [51]), однако до недавнего времени он почти не применялся к анализу волновых движений стратифицированной жидкости.

Исходные уравнения имеют вид

$$u_t + (\mathbf{u}\nabla) \mathbf{u} + [f\mathbf{u}] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) - \frac{\nabla p}{\rho_0} + g \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (4.1)$$

$$\rho_t + (\mathbf{u}\nabla) \rho = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{\rho i} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right), \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (4.3)$$

$$b_t + (\mathbf{u}\nabla) b = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{bi} \frac{\partial b}{\partial x_i} \right) + K_i \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)^2 + K_{\rho z} \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} - \frac{K_i}{l_i} b c^4. \quad (4.4)$$

Здесь \mathbf{u} (u, v, w), p, ρ — соответственно скорость, давление и плотность жидкости, осредненные по турбулентным флюктуациям; b — турбулентная энергия единицы массы; $x_1 = x, x_2 = z$ — горизонтальная и вертикальная координаты; l_i — масштабы турбулентности; f — параметр Кориолиса. Согласно простейшим гипотезам замыкания Колмогорова [51], $K_i = l_i \sqrt{\bar{b}}$, $K_{\rho i} = K_i \kappa_\rho$, $K_{bi} = \kappa_b K_i$. Параметры $c^4, \kappa_\rho, \kappa_b$ не определяются в данной теории. Для океана обычно принимаются следующие значения [52]: $c^4 \simeq 0,05$, $\kappa_\rho \simeq 0,1$, $\kappa_b \simeq 0,7$.

Возможность разделения уравнений для регулярной и турбулентной компонент связана с различием их временных и пространственных масштабов, о котором упоминалось во введении.

Как и все полуэмпирические уравнения, эта система не имеет строгого обоснования, но она, по-видимому, хорошо отражает многие важные черты реальных движений.

4.1. Затухание ВВ в верхнем слое океана

Ясно, что присутствие турбулентной вязкости (по крайней мере в неподвижной жидкости) приводит к затуханию ВВ. Этот процесс обсуждал Леблон [53] для случая однородной по глубине турбулентности. Согласно его расчетам, турбулентность приводит к заметному затуханию только самых коротких ВВ ($\lambda \lesssim 100$ м), и то лишь при весьма больших величинах коэффициента турбулентной вязкости воды ($K \simeq 10^2 \div 10^3$ см²/с), вряд ли характерных для океанской толщи. В этой модели предполагается полное перемешивание (плотность жидкости постоянна в турбулизованной области) и в результате не возникает влияния силы плавуности на поведение турбулентности. Это влияние, которое может быть существенно, по крайней мере, в области пикноклина, учитывалось в [52] для простейшей модели верхнего слоя. Обсудим эту задачу в более общей постановке.

Пусть заданы стационарные профили $\rho_0(z)$ и $b_0(z)$ (об их структуре см. далее подразд. 4.2). Внутренние волны создают малые возмущения, описание которых можно, исходя из системы (4.1)–(4.4), свести в линейном приближении к одному уравнению для вертикальной компоненты скорости во внутренней волне вида $w' \exp[i(kx - \omega t)]$ (ср. [52])

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w'}{dz^2} + k^2 \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} w' = &+ (i\omega)^{-1} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} \left(K_z^0 \frac{d^2 w'}{dz^2} \right) - \right. \\ &- \frac{k^2}{\omega^2 - f^2} \frac{d}{dz} (K_{\rho x}^0 + K_{\rho z}^0) \frac{dw'}{dz} - \frac{k^2}{\omega^2 - f^2} \frac{dK_{\rho z}^0}{dz} \frac{d}{dz} (N^2 w') - \\ &\left. - \frac{k^2 N^2}{\omega^2 (\omega^2 - f^2)} \frac{d}{dz} \left(K_{\rho z}^0 \frac{db_0}{dz} w' \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Предположим, что затухание внутренних волн мало на длине волны (такое предположение может нарушаться лишь для очень коротких волн). В этом случае решение (4.5) можно построить с помощью асимптотической схемы теории возмущений, полагая $w' = w_0 + w_1 + \dots$, $k = k_0 + k_1 + \dots$, где k_0 , w_0 обращают в нуль левую часть (4.5). Тогда для k_1 , w_1 получается уравнение с заданными правыми частями. Условие ограниченности w_1 дает уравнение для k_1 , причем мнимая часть k_1 определяет затухание внутренних волн. Такую схему можно построить для произвольных $\rho_0(z)$ и $b_0(z)$. Мы рассмотрим простейшую модель вида

$$N(z) = \begin{cases} N_1, & -h < z < 0, \\ N_2, & -H < z < -h, \quad N_1 \ll N_2, \end{cases}$$

причем на глубине залегания термоклина $z = -h$ имеется скачок плотности $\Delta\rho$. Полагаем, что под термоклином уровень тур-

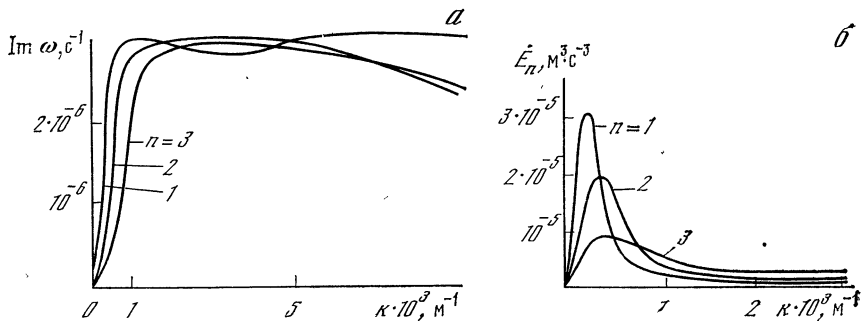


Рис. 9. Зависимость декремента затухания ВВ от волнового числа для первых трех мод (а) и поток энергии в турбулентность верхнего слоя для спектра Гарретта—Манка [54] (б)

Графики построены при следующих параметрах: $h = 50$ м, $H = 10^3$ м, $\Delta\rho/\rho = 10^{-3}$, $N_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ с $^{-1}$, $N_2 = 3 \cdot 10^5$ с $^{-1}$

булентности мал, тогда при $z < -h$ справедливо уравнение (4.5) с нулевой правой частью.

В качестве граничных условий для внутренних волн примем приближение твердой крышки на поверхности и дне и обычные условия непрерывности вертикальной компоненты скорости на границе раздела $z = -h$. Не выписывая общей формулы для k_1 , приведем выражение для декремента затухания ВВ, длинных по сравнению с глубиной океана H , в диапазоне $f \ll \omega \ll N_2$

$$\text{Im } \omega = \frac{V_{\text{гр}}}{V_{\phi}} \left[k_0^2 \frac{K_{\rho x}(0)}{(\Delta\rho/\rho)g} + \frac{(\omega^2 - f^2) \Pi(0) k_0^2}{(\Delta\rho/\rho)gh [f^2 + k_0^2(N_1 H/n\dot{\lambda})^2]} \left(\frac{N_1 H}{n\lambda} \right)^2 \right], \quad (4.6)$$

где $\Pi(z) = k_{\rho z}^0 d\rho_0/dz$ — так называемый вертикальный поток плавучести; n — номер моды ВВ; $V_{\text{гр}}$ и V_{ϕ} — групповая и фазовая скорости ВВ.

Первое слагаемое, пропорциональное квадрату волнового числа ВВ, обусловлено турбулентной вязкостью верхнего слоя, а второе связано с конечностью потока плавучести через поверхность океана. Нетрудно видеть, что для достаточно длинных волн вклад последнего слагаемого становится преобладающим, поскольку обусловленный им декремент слабо зависит от волнового числа.

На рис. 9, а приведена зависимость $\text{Im } \omega$ от k в длинноволновом диапазоне, а на рис. 9, б — вычисленная по этой зависимости скорость диссипации энергии $\dot{E}_n(k)$ для спектра Гарретта—Манка [54]. Известно [27], что для ВВ приливного периода характерна ярко выраженная многомодовость. Как видно из рис. 9, б, одна из причин этого, возможно, заключается в том, что затухание преобладает для низших мод.

Таким образом, в стратифицированной жидкости в присутствии турбулентности, помимо обычной вязкой диссипации ВВ, существует и дополнительное затухание, декремент которого про-

порционален турбулентному потоку плавучести в верхнем слое. Физическая причина затухания связана с затратой энергии ВВ на увеличение потенциальной энергии жидкости в результате перемешивания.

4.2. Воздействие ВВ на турбулентность верхнего слоя

Ранее мы считали, что ВВ представляет собой сравнительно слабое возмущение, не меняющее средних характеристик поля турбулентных пульсаций. Но реальные ВВ способны существенно деформировать невозмущенные распределения $\rho_0(z)$ и $b_0(z)$. Этот процесс рассмотрим в приближении заданного поля ВВ. Если, кроме того, пренебречь диффузией, из уравнения баланса турбулентной энергии (4.4) следует [55, 56]

$$b_t = l_z \sqrt{\bar{b}} [u_z^2 + v_x^2 - \kappa_p N^2] - \frac{c^4 b^{3/2}}{l_z} \quad (4.7)$$

(здесь и ниже предполагается $l_x = l_z$).

Отсюда ясно, что уже в постоянном сдвиговом потоке ($v_x = 0$, $u_z \neq 0$) достаточно слабая турбулентность нарастает при условии $Ri = (u_z^2/N^2) < \kappa_p^{-1}$ (см. также [51]). Согласно имеющимся данным [4, 51], величина κ_p зависит от Ri и имеет порядок 0,1, так что это условие оказывается значительно более мягким, чем условие $Ri < 1/4$, необходимое для появления неустойчивости в нетурбулентной жидкости. Для осциллирующих течений, создаваемых внутренней волной, ситуация несколько сложнее. Зависимость $b(t)$, соответствующая синусоидальной во времени ВВ, показана на рис. 10. Помимо среднего роста турбулентной энергии $b_0(t)$, здесь присутствуют также осцилляции b' , обусловленные нестационарностью ВВ. Отметим, что если амплитуда ВВ

Рис. 10. Усиление турбулентности под действием синусоидальной ВВ

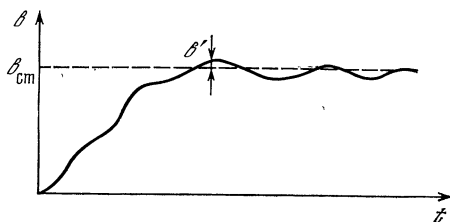
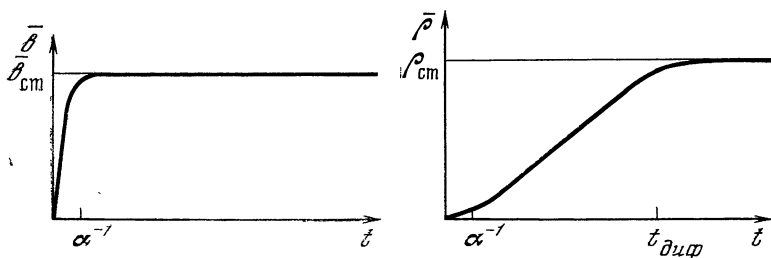


Рис. 11. Зависимость амплитуд деформаций плотности и турбулентной энергии от времени



велика ($v_0 \lesssim \omega/k$), то размах осцилляций становится порядка стационарного значения $b_{ст}$, так что режим генерации турбулентности может стать качественно иным (в течение одного периода ВВ турбулентность заметно усиливается, а потом полностью затухает). Для новой «вспышки» турбулентности нужна еще одна турбулентная «затравка».

В использованном приближении изменение турбулентной энергии под действием внутренних волн не приводит к изменению плотностной стратификации, которая деформируется только при учете диффузии плотности. Чтобы показать это, рассмотрим несколько другой случай [56], когда амплитуда внутренней волны задана, но достаточно мала, так что ВВ лишь сравнительно слабо возмущает равновесное распределение турбулентности, которая поддерживается сдвиговым течением, ветровым перемешиванием или за счет какого-либо другого внешнего источника. Считаем величины u и w в (4.1)–(4.4) соответствующими некоторой заданной моде внутренней волны (для простоты не рассматриваем течение), а величины ρ и b — возмущенными этой модой, т. е.

$$u = \tilde{u}(x, z, t), \quad w = \tilde{w}(x, z, t), \quad b = b_0(z) + \bar{b}(z, t) + \tilde{b}(x, z, t), \quad (4.8)$$

$$\rho = \rho_0(z) + \bar{\rho}(z, t) + \tilde{\rho}(x, z, t).$$

Такая постановка задачи весьма похожа на рассмотренную в подразд. 4.2 применительно к затуханию ВВ на турбулентности верхнего слоя, только здесь ВВ предполагается заданной и, главное, учтены средние за период добавки $\bar{\rho}$ и \bar{b} , вызванные волной. Считая эти добавки малыми по сравнению с невозмущенными значениями ρ_0 и b_0 , усредним систему (4.1)–(4.4) по t и затем линеаризуем ее по b и $\bar{\rho}$. В результате получаются следующие уравнения, описывающие деформацию средних профилей плотности и турбулентной энергии:

$$\begin{aligned} \bar{b}_t + \alpha \bar{b} - \kappa_\rho l_z g \rho_0^{-1} b_0^{1/2} \bar{\rho}_z - \kappa_b l_z b_0^{1/2} \bar{b}_{zz} &= F(z), \\ \bar{\rho}_t - 1/2 \kappa_\rho l_z \frac{d\rho_0}{dz} b_0^{-1/2} \bar{b}_z - \kappa_\rho l_z b^{1/2} \bar{\rho}_{zz} &= 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $\alpha = \kappa_\rho l_z N_0^2 b^{-1/2} + 3/2 c^4 l_z^{-1} b_0^{1/2}$, а $F(z)$ — «вынуждающая сила», пропорциональная квадрату амплитуды внутренней волны (ее явный вид приведен в [56]). Процесс изменения структуры полей плотности и турбулентности состоит из нескольких этапов (см. рис. 11). Сначала при $t \ll \alpha^{-1}$ величина \bar{b} растет со временем линейно, а $\bar{\rho}$ — пропорционально t^2 . Спустя время порядка α^{-1} рост возмущений турбулентной энергии прекращается, а неоднородность стратификации продолжает усиливаться (уже линейно со временем). При $t \sim t_{диф} \simeq d_z^2 / \kappa_\rho l_z b_0^{1/2}$ (d_z — вертикальный масштаб ВВ) существенную роль начинают играть диффузионные эффекты и распределение плотности выходит на стационарный режим.

На рис. 12 показан характерный вид распределений для трехслойной модели стратификации со стратифицированным промежуточным слоем и постоянным по глубине уровнем турбулентной энергии под действием главной моды ВВ. Внутренняя волна усиливает турбулентность и обостряет градиент плотности в районе пикноклина, где сдвиг скорости во ВВ максимален.

Мы рассматривали распространение ВВ на фоне стационарных распределений плотности и турбулентности. Однако, вообще говоря, эти распределения сами должны следовать из исходной системы уравнений (4.1)—(4.4). Каковы же возможные стационарные решения полуэмпирических уравнений?

Отыскивая все величины в виде функций z , после двукратного интегрирования (4.1)—(4.4), получим

$${}^2/3\kappa_b l_z^{-2} \frac{d^2 R}{dz^2} + C_1^2 R^{-1/3} - \kappa_\rho g \rho_0^{-1} C_2 - c^4 l^{-4} R = 0, \quad (4.10)$$

$$R^{1/3} \frac{dU}{dz} = C_1, \quad R^{1/3} \frac{d\rho}{dz} = -C_2, \quad (4.11)$$

где $R = l_z^3 b^{3/2}$.

На рис. 13 показаны фазовые портреты уравнения (4.10) (см. рис. 13, *a, б*) и соответствующие вертикальные профили турбулентной энергии, плотности и скорости течения (см. рис. 13, *в, г*). Из рисунка видно, что поведение решения качественно различно в отсутствие течения ($C_1 = 0$) и при его наличии ($C_1 \neq 0$). В первом (хорошо известном) случае (см., например, [57]) решение существует только с соответствующей «подпиткой» сверху и описывает структуру верхнего квазиоднородного слоя (см. рис. 13, *a, в*). Во втором случае ($C_1 \neq 0$) (см. рис. 13, *б, г*), помимо решений такого рода, существуют локализованные турбулентные слои, причем границы слоев оказываются резкими ($b_z \rightarrow \infty$). Из уравнений (4.10), (4.11) можно получить соотношение, связывающее толщину слоя с величиной турбулентной энергии B , приходящейся на единицу его площади:

$$d \simeq \frac{c^4}{\kappa_\rho} \frac{B}{N_0^2 l_z^2 (1 - \kappa_\rho Ri)}. \quad (4.12)$$

Здесь N_0 , Ri_0 — частота Брента — Вэйсяля и число Ричардсона во внешнем потоке.

Как видно из (4.12), при $Ri_0 \rightarrow \kappa_\rho^{-1}$ вертикальный размер слоя возрастает, а плотность турбулентной энергии в нем стремится к нулю. Положим $N_0 = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $Ri_0 = 8$, $B = 1 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$, $l_z = 0,1 \text{ м}$. При этом толщина слоя составит $d \simeq 2,5 \text{ м}$. Отметим, что множество подобных турбулентных образований, разделенных ламинарными прослойками, может служить одной из возможных моделей тонкой структуры океана [58].

Рассмотренные выше механизмы взаимодействия внутренних волн с турбулентностью в толщине океана могут приводить к тому, что турбулентные образования, эпизодически возникающие

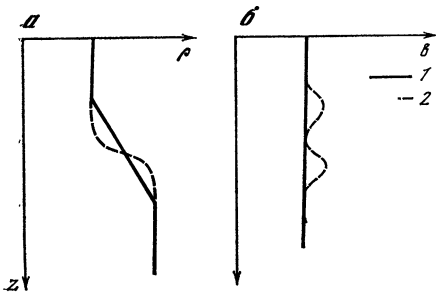
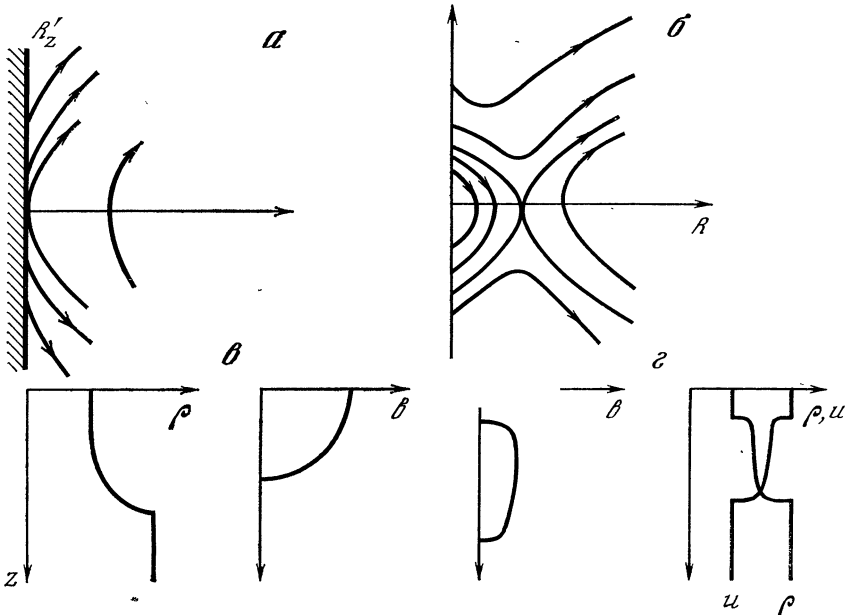


Рис. 12. Профили плотности и турбулентной энергии

1, 2 — невозмущенные и деформированные под действием внутренней волны распределения соответственно

Рис. 13. Фазовые портреты уравнения (4.10) при $c_1 = 0$ (а), $c_1 \neq 0$ (б) и соответствующие профили турбулентной энергии, плотности и скорости (в, г)



в результате обрушения наиболее сильных внутренних волн или по другим причинам, затем поддерживаются обычными, более слабыми волнами, расширяясь при этом за счет диффузии и формируя турбулентные слои. С другой стороны, работа ВВ на поддержание турбулентности в условиях устойчивой стратификации является, по-видимому, одним из основных стоков энергии ВВ, особенно в длинноволновой области.

5. ОБ ИСТОЧНИКАХ И СТОКАХ ЭНЕРГИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ОКЕАНЕ

В заключение целесообразно хотя бы кратко остановиться на вопросе о возможной роли рассмотренных выше процессов в энергетике океанских ВВ. Решающее слово в выяснении подобных вопросов должно оставаться за экспериментом, который, однако, пока дал весьма немного прямых данных. Некоторые случаи неустойчивости стратифицированных сдвиговых течений, ге-

нерации турбулентности при опрокидывании ВВ и др. наблюдались в лабораторных экспериментах (см., например, книгу Тернера [4]), правда, остается неясным, возможно ли прямое перенесение их результатов в условия океана.

Наиболее существенное значение имеют прямые наблюдения в океане. Среди них наибольшую известность получил эксперимент Вудса [59], в котором автор «подкрашивал» Средиземное море (в мелководном (глубиной 18 м) районе) и наблюдал генерацию и последующее разрушение мелкомасштабной (с длиной порядка 5 м) ВВ на гребне длинной (длиной 100 м) ВВ, приводя к образованию турбулентных пятен. Этот эксперимент вошел во все книги по данной проблеме и стал сильным аргументом в пользу волнового происхождения турбулентности в толще океана. К сожалению, за прошедшие годы метод Вудса не получил значительного развития. Вместе с тем в последнее время благодаря совершенствованию измерительной аппаратуры начали проводиться более или менее систематические исследования вертикальной структуры течений, позволившие оценить величину числа Ричардсона и, следовательно, возможность сдвиговой неустойчивости в различных районах океана. Так, по данным работы [80] при учете течений, создаваемых ВВ, условие устойчивости Майлса, т. е. $Ri \geq 1/4$, может нарушаться в 30% случаев, в основном в верхнем 300-метровом слое океана. Эта величина находится в хорошем согласии с оценкой Брезертонна [61], предсказывающей вероятность выполнения условия $Ri < 1/4$, равную 21%. Пантелеев и Коротаев [62] зафиксировали прямую корреляцию между локальным уменьшением числа Ричардсона и развитием мелкомасштабных ВВ. Кроме того, им удалось наблюдать каскадный процесс генерации все более мелких ВВ на гребне более длинной волны (рис. 14).

Эти и другие экспериментальные данные свидетельствуют о том, что совместное действие течений и длинных внутренних волн является, по-видимому, важным фактором образования коротких ВВ и турбулентности в верхнем слое океана. Однако повсеместное распространение турбулентности и большое время жизни отдельных турбулентных пятен в толще океана заставляют думать, что условие $Ri < 1/4$ не является обязательным для существования турбулентности и что рассмотренные выше нелинейные процессы жесткого возбуждения ВВ и особенно процесс поддержания «готовой» турбулентности (возникающей эпизодически за счет обрушения особенно сильных ВВ) внутренними волнами умеренной амплитуды могут быть основной причиной существования турбулентности. Действительно, для спектра Гарретта—Манка [54] по формуле (4.7) можно определить, что средний стационарный уровень турбулентности составляет примерно $1 \text{ см}^2/\text{с}^2$, что по порядку величины согласуется с океанографическими данными [63].

Следует признать, что обычных локальных методов измерения параметров океана (температуры и др.) вряд ли достаточно для

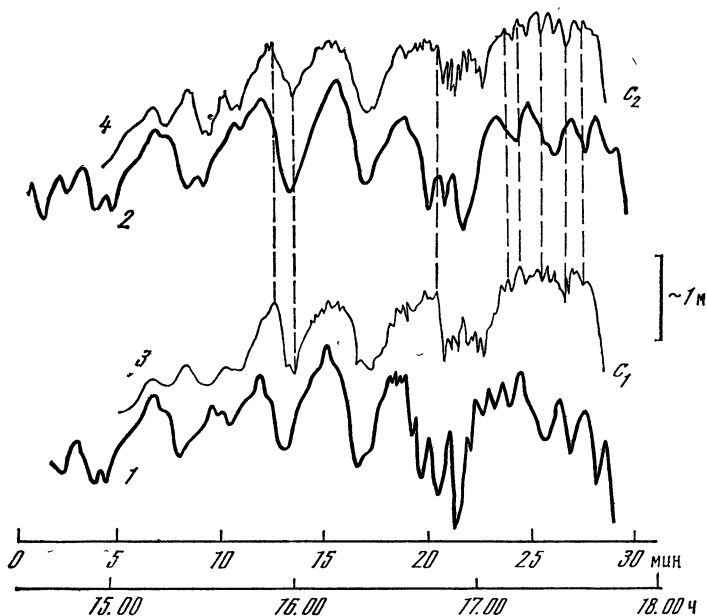


Рис. 14. Флюктуации скорости звука c_1 и c_2 на двух горизонтах, различающихся на 1 м

1, 2 — развитие мелкомасштабных ВВ на последнем гребне основного цуга ВВ

Кривым 1, 2 соответствует верхняя шкала времени; 3, 4 — нижняя

Вертикальный отрезок справа указывает масштаб вертикальных смещений, относящийся к 1, 2 [62]

убедительного выяснения вклада тех или иных механизмов в энергообмен между ВВ и другими факторами. Более перспективными выглядят методы дистанционного зондирования океана, позволяющие быстро измерять пространственные характеристики волн на больших акваториях. Так, метод космической океанографии дает возможность, фотографируя сверху «слики» от ВВ на поверхности моря, судить об их происхождении и, возможно, дальнейшей «судьбе». Метод акустической локации позволяет наблюдать за движениями глубинных слоев воды под действием ВВ. В отдельных случаях с помощью акустических эхограмм, по-видимому, удалось зафиксировать процессы генерации ВВ течениями. Например, на рис. 15, изображена эхограмма подветренных волн, образующихся при обтекании приливом уступа дна. На рис. 16 показаны ВВ, вызванные штормом в Тихом океане. Обращает на себя внимание ярко выраженный несинусоидальный характер ВВ (возможно, здесь происходит генерация солитонов).

Итак, имеющиеся экспериментальные данные пока отрывочны и дают мало информации. Вместе с тем вопрос об энергетике океана — один из центральных в океанологии. Чтобы правильно оценить баланс энергии в океане, необходимо знать, откуда энергия поступает в движения данного типа, как она перераспределяется

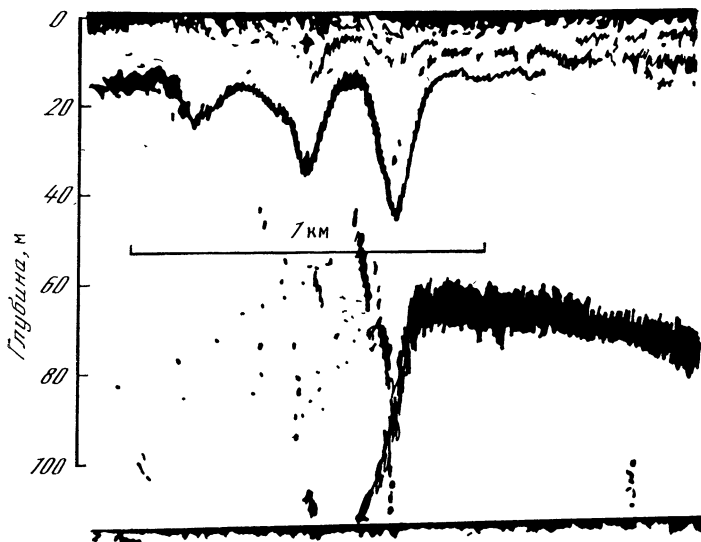


Рис. 15. Эхограмма подветренных ВВ, образующихся при обтекании приливом уступа дна у берегов Британской Колумбии в Канаде [64]



Рис. 16. Эхограмма, полученная Д. А. Селивановским для ВВ, вызванных штормом в Тихом океане

между различными формами движений и как поглощается. В частности, по современным представлениям, именно ВВ осуществляют передачу энергии от крупномасштабных движений (в том числе синоптических вихрей) к мелкомасштабной турбулентности [48].

В такой ситуации полезно построение различного рода балансных схем, опирающихся на теоретические оценки и косвенные данные наблюдений. Одной из первых таких схем была «инерционная» модель Озмидова [65], основанная на представлениях теории турбулентности. Согласно этой модели в диапазоне масштабов океанических движений имеется лишь несколько сравнительно узких интервалов, в которых поступает энергия; в остальных же интервалах (инерционных) она перераспределяется за счет нелинейного переноса по спектру. Один из этих интервалов

охватывает так называемые мезомасштабные движения, к которым относятся ВВ. Впоследствии представление о каскадной передаче энергии ВВ от крупных масштабов к мелким стало общепринятым. Наиболее подробно энергообмен между ВВ в спектре Гарретта—Манка (ГМ) рассматривался Мюллером и Олберсом [66, 67]. Из более поздних расчетов [68] следует, что происходит нелинейный перенос энергии из низших мод в высшие (во взаимодействиях ВВ принципиально принимают участие различные моды, поскольку закон дисперсии отдельной моды является нераспадным). В работе [66] также оценена эффективность генерации ВВ крупномасштабными течениями и составлена примерная схема баланса энергии. Следует заметить, однако, что в этой схеме не учтен ряд, по-видимому, важных источников и стоков (см. далее) и, кроме того, баланс энергии не сходится. В каскадных моделях имеются и другие трудности. Так, даже сама возможность переноса всей энергии крупномасштабных волн к волнам с масштабами, на несколько порядков меньшими, и ее «сброс» в турбулентность за счет обрушения коротких ВВ представляются сомнительными, тем более что, как уже отмечалось, условия обрушения типа $Ri < 1/4$ выполняются в толще океана не так уже часто. Кроме того, о величине нелинейности существуют противоречивые представления. Скажем, по оценкам Маккомаса и Брезертона [68], характерное время нелинейности в спектре ГМ порядка периода ВВ, а в то же время сам спектр ГМ может быть получен на основе представлений о суперпозиции линейных цугов ВВ [69]. Наконец, оценки различных механизмов генерации и диссипации ВВ показывают, что их интенсивность в различных участках спектра может быть, по крайней мере, сравнима со скоростью нелинейного переноса энергии.

В связи с этим в ИПФ АН СССР была разработана другая модель баланса энергии ВВ, основанная на предположении о том, что энергия поступает к ВВ и отбирается от них во всем спектральном интервале [52, 70, 71]. Построение подобных моделей требует анализа многочисленных механизмов взаимодействия ВВ с другими движениями в океане и атмосфере. При этом наряду с литературными данными были использованы изложенные выше результаты. Среди источников, действующих в различных диапазонах ВВ, учтены следующие: а) генерация ВВ атмосферными воздействиями (пульсациями давления воздуха, тангенциального напряжения трения ветра и потока тепла через поверхность океана). Согласно оценкам Торпа [72], наиболее эффективным среди этих источников является воздействие пульсаций тангенциального напряжения трения, создаваемого ветром; б) генерация ВВ поверхностным волнением. Согласно теоретическим оценкам [73], ВВ, взаимодействуя с поверхностными волнами, могут как усиливаться, так и затухать, т. е. поверхностные волны играют роль одновременно источника и стока энергии внутренних волн в зависимости от характеристик ветрового волнения и диапазона ВВ; в) генерация ВВ за счет неустой-

чивости сдвиговых течений. Этот механизм, возможно, ответствен за формирование высокочастотных пиков в спектре ВВ, типичных для многих районов Мирового океана. По последним данным [74], частоты этих пиков в термоклине заметно меньше локальной частоты Брента — Вьяйсяля и близки к ее значению непосредственно под слоем скачка. Не исключено, что причиной этого факта является рассмотренная выше излучательная неустойчивость (согласно теории она приводит к генерации волн с частотами, несколько меньшими частоты Брента — Вьяйсяля в нижнем стратифицированном слое).

В этот список мы не включили механизм генерации ВВ потоком, обтекающим неровности дна, поскольку возникающие при этом волны, по-видимому, не распространяются выше километрового придонного слоя — их область локализации ограничена критическими слоями [27]. Близким к этому является механизм генерации внутренних приливов за счет трансформации поверхностного (баротропного) прилива на материковом склоне. Эти внутренние приливы образуют заметный пик в спектрах ВВ, возвышающийся над спектром ГМ [74].

Механизмы стока энергии ВВ тоже достаточно разнообразны. Среди них: а) затухание в верхнем турбулизованном слое, рассмотренное в разд. 4 и существенное для длинных волн на низших модах; б) рассеяние на неровностях дна, поверхностных волнах, тонкой структуре и мезомасштабной турбулентности [70]. Эти механизмы нельзя в полной мере отнести к стокам энергии ВВ, поскольку она частично перераспределяет энергию по пространственному спектру самих ВВ; в) поглощение в критическом слое. Этот механизм, по-видимому, существует в районах с сильными сдвиговыми течениями и преимущественно на больших глубинах, например, как уже отмечалось, для приливов, генерируемых топографией дна; г) обрушение коротких ВВ, создающее сток энергии к турбулентности, рассматривается как основной механизм в «каскадных» моделях.

На рис. 17 изображена схема локального баланса, учитывающая перечисленные факторы. На ней указаны характерные времена действия источников и стоков, а также соответствующие потоки энергии. Схема ограничена непрерывным диапазоном спектра, к которому относится модель Гарретта — Манка. В ней не учтены инерционный и приливный пики, имеющие свои источники. Следует подчеркнуть, что данная схема не претендует на роль жесткой альтернативы инерционным схемам (нелинейная передача, возможно, тоже существенна, особенно для обмена энергией по вертикальным масштабам, и способствует универсализации спектра). Этот механизм также учтен на рис. 17, и в этом смысле можно говорить о комбинированной схеме баланса энергии ВВ. Важно, однако, что локальные механизмы нельзя сбрасывать со счета. Подчеркнем еще раз, что для проверки этой и других схем необходимо гораздо больше количественных экспериментальных данных, чем имеется в нашем распоряжении сей-

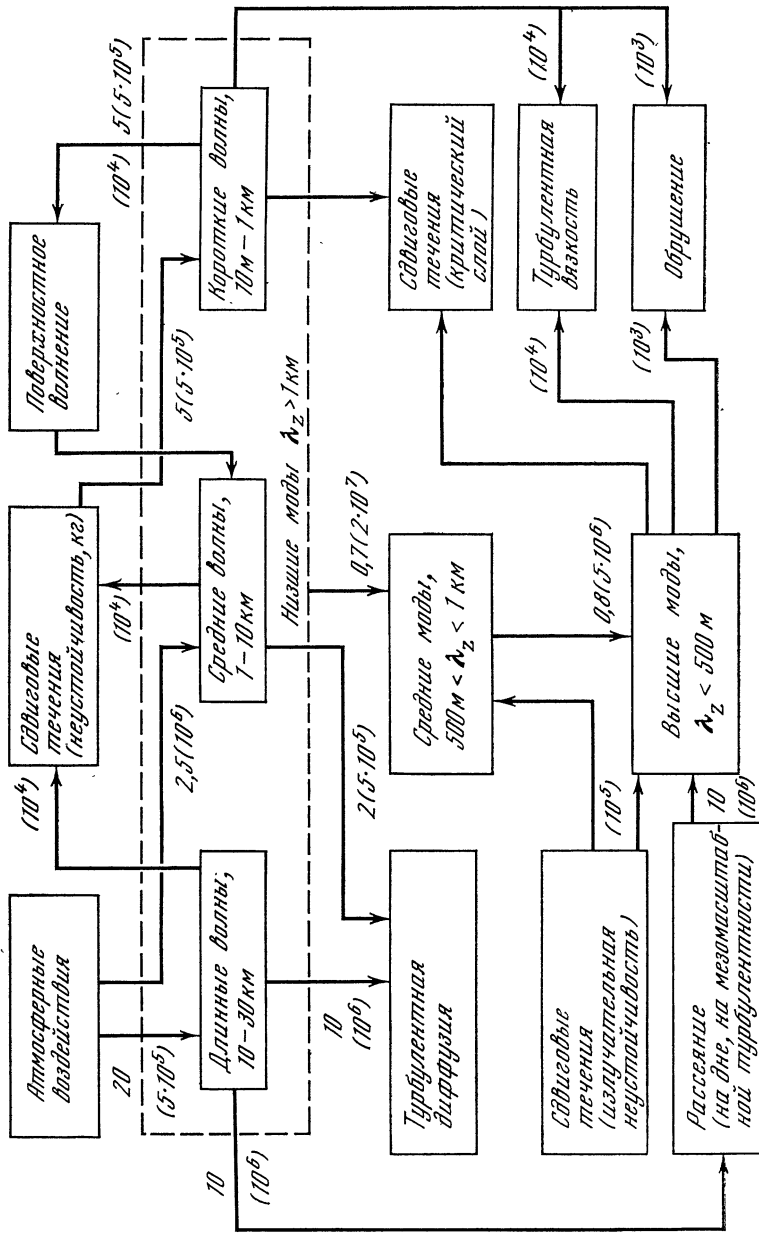


Рис. 17. Комбинированная схема баланса энергии ВВ в верхнем слое океана (спектр ВВ разделен на три диапазона по вертикальным масштабам; нижние моды — на три поддиагона по горизонтальным масштабам)

Стрелки указывают направление переноса энергии, цифры у стрелок — поток энергии в единицах 10^{-6} эрг/(см²·с²); в скобках даны характерные времена переноса процессов в с

час. Можно надеяться, что благодаря развитию дистанционных океанографических методов эти данные будут получены в ближайшем будущем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Островский Л. А.* Нелинейные внутренние волны в океане.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 292—329.
2. *Конторович В. М.* Возможная роль внутренних волн в возникновении мелкомасштабной турбулентности в стратифицированном океане.— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, № 5/6, с. 872—879.
3. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего-слоя океана. Л.: Гидрометеоздат, 1980. 320 с.
4. *Гернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
5. *Йи Чиа-Шун.* Волновые движения в слоистых жидкостях.— В кн.: Нелинейные волны: Пер. с англ. / Под ред. Гапонова А. В., Островского Л. А. М.: Мир, 1977. 271 с.
6. *Kochar G. T., Jain R. K.* Note on Howard's semicircle theorem.— J. Fluid Mech., 1979, 91, pt. 3, p. 489—491.
7. *Госсард Э., Хук У.* Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.
8. *Drazin P. G., Howard L. N.* Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid.— Adv. Appl. Mech., 1966, 9, p. 1—89.
9. *Пирс Дж.* Почти все о волнах. М.: Мир, 1976. 176 с.
10. *Кадошцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В.* Волны с отрицательной энергией в диспергирующих средах.— ЖЭТФ, 1964, 47, № 6, с. 2266—2275.
11. *Незлин М. В.* Волны с отрицательной энергией и аномальный эффект Доплера.— УФН, 1974, 120, вып. 3, с. 481—496.
12. *Галева А., Сагдеев Р. З.* Нелинейная теория плазмы.— В кн.: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1973, вып. 7, с. 3—145.
13. *Benjamin T. B.* The threefold classification of unstable disturbances.— J. Fluid Mech., 1963, 16, pt 3, p. 436—450.
14. *Воронович А. Г., Рыбак С. А.* Взрывная неустойчивость стратифицированных течений.— ДАН СССР, 1978, 239, № 6, с. 1457—1460.
15. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
16. *Брезовский Л. М., Гончаров В. В., Куртенов В. М., Наугольных К. А.* Резонансное возбуждение внутренних волн при нелинейном взаимодействии поверхностных волн.— Изв. АН СССР. ФАО, 1972, 8, № 2, с. 192—203.
17. *Езерский А. Б., Островский Л. А., Степанянц Ю. А.* Индуцированные течения и их вклад в энергию волновых движений жидкости.— Изв. АН СССР, ФАО, 1981, 17, № 11, с. 1201—1208.
18. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Наука, 1953. 725 с.
19. *Cairns R. A.* The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flow.— J. Fluid Mech., 1979, 92, pt 1, p. 1—14.
20. *Miles J. W.* On the generation of the surface waves by shear flows. Pt 5.— J. Fluid Mech., 1967, 30, pt. 1, p. 163—175.
21. *Островский Л. А., Цимринг Л. Ш.* Излучательная неустойчивость сдвиговых течений в стратифицированной жидкости.— Изв. АН СССР. ФАО, 1981, 17, № 7, с. 766—768.
22. *Fritts D. C.* Simple stability limits for vertically propagating unstable modes in a tanh(z) velocity profile with a rigid lower boundary.— J. Atmos. Sci., 1980, 37, № 7, p. 1642—1648.
23. *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностран. лит., 1958. 175 с.
24. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
25. *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
26. *Booker J. R., Bretherton F. P.* The critical layer for internal gravity waves in a shear flow.— J. Fluid Mech., 1967, 27, pt. 3, p. 513—539.

27. *Bell T. H.* Topographically generated internal waves in the open ocean.— *J. Geophys. Res.*, 1975, 80, N 3, p. 320—327.
28. *Osborn A. R., Burch T. L.* Internal solitons in the Andaman sea.— *Science*, 1980, 208, N 4443, p. 451.
29. *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.* Нелинейные волны в неравновесных средах.— *Изв. вузов. Радиофизика*, 1976, 19, № 5/6, с. 721—766.
30. *Craik A. D., Adam J. A.* «Explosive» resonant wave interactions in a three-layer fluid flow.— *J. Fluid Mech.*, 1979, 92, pt. 1, p. 15—34.
31. *Joseph R. J., Egri R.* Multi-soliton in a finite depth fluid.— *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1978, 11, N 5, p. L97—L102.
32. *Островский Л. А.* Приближенные методы в теории нелинейных волн.— *Изв. вузов. Радиофизика*, 1974, 17, № 4, с. 454—476.
33. *Левиков С. П.* О неустановившихся слабонелинейных внутренних волнах в глубоком океане.— *Океанология*, 1976, 16, вып. 6, с. 962.
34. *Lee Ch.-J., Beardsley R. C.* The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified flow.— *J. Geophys. Res.*, 1974, 79, N 3, p. 453.
35. *Maslowe S. A., Redekopp L. G.* Long nonlinear waves in stratified shear flow.— *J. Fluid Mech.*, 1980, 101, pt 2, p. 321—348.
36. *Романова Н. Н.* Обобщение уравнения Бенджамина—Оно для слабостратифицированной атмосферы.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1981, 17, № 2, с. 131—137.
37. *Островский Л. А., Степаняц Ю. А.* Нелинейная стадия сдвиговой неустойчивости в стратифицированной жидкости конечной глубины.— *Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа*, 1982, № 4, с. 63—70.
38. *Островский Л. А., Степаняц Ю. А., Цимринг Л. Ш.* Излучательная неустойчивость в стратифицированном сдвиговом потоке: Препринт № 33. Горький: ИПФ АН СССР, 1981.
39. *Кикина Н. Г.* Влияние вязкости на неустойчивость тангенциального разрыва в несжимаемой жидкости.— *Акуст. журн.*, 1967, 13, № 2, с. 213.
40. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
41. *Kelly R. E., Maslowe S. A.* The nonlinear critical layer in slightly stratified shear flows.— *Stud. Appl. Math.*, 1970, 49, p. 302—326.
42. *Maslowe S. A.* The generation of clear air turbulence by nonlinear wave.— *Stud. Appl. Math.*, 1972, 51, N 1, p. 1—16.
43. *Haberman R.* Wave induced distortions of a slightly stratified shear flow.— *J. Fluid Mech.*, 1973, 58, p. 727—735.
44. *Фабрикант А. Л.* Квазилинейная теория генерации ветровых волн.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1976, 12, № 8, с. 858—862.
45. *Breeding R. J.* A nonlinear investigation of critical levels for internal atmospheric gravity waves.— *J. Fluid Mech.*, 1971, 50, p. 545—565.
46. *Tanaka H.* Turbulent layers associated with a critical levels in the planetary boundary layer.— *J. Meteorol. Soc. Jap.*, 1975, 53, N 6, p. 425—439.
47. *Цимринг Л. Ш.* Дестабилизация первоначально устойчивого сдвигового течения под действием внутренних волн.— *Океанология*, 1982, 22, с. 540.
48. *Woods J. D.* Do waves limit turbulent diffusion in the ocean? — *Nature*, 1980, 288, p. 219—225.
49. *Баренблатт Г. И.* Сильное взаимодействие гравитационных волн с турбулентностью.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1977, 13, № 8, с. 845—849.
50. *Kantha L. H.* Laboratory experiments on attenuation of internal waves by turbulence in the mixed layer.— In: *Trans. of 2nd Intern. Symp. on stratified flow*. Trondheim, Norway, 1980, S. 731—741.
51. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1965. 639 с.
52. *Островский Л. А., Соустова И. А.* Верхний перемешанный слой океана как сток энергии внутренних волн.— *Океанология*, 1979, 19, № 6, с. 973—981.
53. *LeBlond P. H.* On the damping of internal gravity waves in a continuously stratified ocean.— *J. Fluid Mech.*, 1966, 25, pt 1, p. 121—142.
54. *Garrett C., Munk W.* Space-time scales of internal waves: A progress report.— *J. Geophys. Res.*, 1975, 80, N 3, p. 291—297.

55. *Пелиновский Е. Н., Соустова И. А.* Возбуждение мелкомасштабной турбулентности внутренними волнами в присутствии тонкой микроструктуры.— В кн.: Тонкая структура и синоптическая изменчивость морей. Таллин: ИТЭФ АН СССР, 1980, с. 136—139.
56. *Островский Л. А., Соустова И. А., Цимринг Л. Ш.* Воздействие внутренних волн на мелкомасштабную турбулентность в океане: Препринт № 31. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. 16 с.
57. *Китайгородский С. А., Миропольский Ю. В.* К теории турбулентного обмена в верхнем пограничном слое океана.— Изв. АН СССР. ФАО, 1967, 3, № 11, с. 1196—1209.
58. *Федоров К. Н.* Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеоздат, 1976. 184 с.
59. *Woods J. D.* Wave-induced shear instability in the summer thermocline.— *J. Fluid Mech.*, 1968, 72, p. 791—800.
60. *Беляев В. С., Гезенцевой А. Н.* Вертикальная перемежаемость флуктуаций скорости течения в верхнем слое океана.— *Океанология*, 1981, 19, № 2, с. 222—228.
61. *Bretherton S. P.* Waves and turbulence in stably stratified fluids.— *J. Radio Science*, 1969, 4, N 12, p. 1279—1287.
62. *Коротаев Г. К., Пантелеев Н. А.* Гидродинамическая неустойчивость внутренних волн в океане при нестационарном сдвиге.— Изв. АН СССР. ФАО, 1977, 13, № 10, с. 1044—1054.
63. *Монин А. С., Озмидов Р. В.* Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеоздат, 1981. 310 с.
64. *Farmer D. M., Smith J. D.* Tidal interaction of stratified flow with a sill in Knight Inlet.— *Deep-Sea Res.*, 1980, 27A, N 3/4, p. 239—254.
65. *Озмидов Р. В.* О распределении энергии по разномасштабным движениям в океане.— Изв. АН СССР. ФАО, 1965, 1, № 4, с. 439—448.
66. *Müller P., Olbers D.* On the dynamics of internal waves in the deep ocean.— *J. Geophys. Res.*, 1975, 80, N 27, p. 3848—3860.
67. *Olbers D. I.* Nonlinear energy transfer and the energy balance of the internal wavefield in the deep ocean.— *J. Fluid Mech.*, 1976, 74, pt 2, p. 375—399.
68. *McComas C. H., Bretherton F. P.* Resonant interaction of oceanic internal waves in the deep ocean.— *J. Geophys. Res.*, 1975, 80, N 27, p. 3848—3860.
69. *Коротаев Г. К.* О спектральной плотности волновых пакетов.— *Морские гидрофиз. исслед.*, 1977, № 2 (77), с. 41—47.
70. *Ермаков С. А.* О локальности баланса энергии океанических внутренних волн низших мод: Препринт № 27. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. 18 с.
71. *Голицын Г. С., Островский Л. А., Чунгузов Е. П.* Внутренние волны в океане и атмосфере.— Изв. АН СССР. ФАО, 1982, 18, № 7, с. 351—368.
72. *Thorpe S. A.* The excitation, dissipation and interaction of internal waves in the deep ocean.— *J. Geophys. Res.*, 1975, 80, N 3, p. 328—338.
73. *Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н.* Об усилении внутренних волн ветровым волнением.— В кн.: Теория дифракции и распространения волн. М.: ИРЭ АН СССР, 1977, 2, с. 257—260.
74. *Сабинин К. Д., Шулепов В. А.* К модели частотного спектра внутренних волн в океане.— Изв. АН СССР. ФАО, 1981, 17, № 1, с. 67—75.

ВОЗДЕЙСТВИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НА МОРСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

С. А. ЕРМАКОВ, Е. Н. ПЕЛИНОВСКИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Внутренние волны (ВВ) в океане — одно из интереснейших и пока еще мало изученных природных явлений. Исследование ВВ традиционными контактными океанографическими средствами весьма трудоемко и дорого. В то же время выявление связи аномалий физических характеристик морской поверхности с параметрами ВВ дает возможность изучения последних с помощью дистанционных средств исследования океана, интенсивно разрабатываемых в настоящее время. Оптические, радиолокационные, ИК-наблюдения показывают принципиальную возможность такого изучения и тем самым создания систем оперативного сбора информации о ВВ.

Далее дается обзор современного состояния проблемы воздействия ВВ на морскую поверхность. Вначале приведены результаты натуральных наблюдений, затем теоретически рассмотрены известные механизмы проявления ВВ на поверхности и, наконец, описаны результаты имеющихся лабораторных экспериментов.

2. НАТУРНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Одним из наиболее ярких проявлений ВВ на морской поверхности является «выглаживание» мелкомасштабных ветровых волн, т. е. появление участков с пониженной интенсивностью поверхностного волнения, получивших название сликов. Стики, вообще говоря, могут вызываться различными причинами: течениями, конвективными движениями, ВВ и т. д. — и иметь соответственно самую разную структуру [1]. Стики от ВВ — это системы длинных параллельных полос (при визуальном наблюдении темных или светлых, в зависимости от условий освещенности) (см. рис. 1), отстоящих друг от друга на сотни метров.

Начало их систематического изучения было положено в 50-х годах работами [2, 3]. На основе наблюдений сликов с берега и с корабля и измерения ВВ была показана их взаимосвязь и предложен механизм образования сликов, связанный с гашением ряби поверхностно-активными веществами (ПАВ), концентрирующимися над подошвами ВВ. Впоследствии были выполнены многочисленные наблюдения с кораблей, а также с самолетов и из космоса как в видимом оптическом, так и в ИК- и радиодиапазонах (см., например, [4—10]). Проведенные одновременно с этими наблюдениями контактные измерения [4, 6—8, 10] позволили сделать следующие основные выводы:

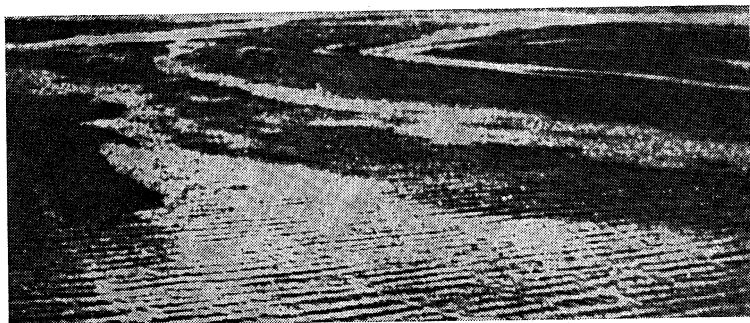


Рис. 1. Сликвые полосы на морской поверхности [2]

выглаживание обычно наблюдается при слабом ветре (до скоростей $v \lesssim 5$ м/с), причем ширина полос с усилением ветра уменьшается;

расстояние между сликами соответствует длинам ВВ, скорость перемещения сликов совпадает со скоростью распространения ВВ; амплитуды сликообразующих ВВ меняются от 1,5 м (при наблюдении с корабля [3]) до 8 м (наблюдение со спутника [7]), расчет горизонтальных скоростей частиц на поверхности для этих ВВ дает значения порядка 0,05—0,10 м/с;

положение сликов изменяется в довольно широких пределах положения фазы ВВ: максимум распределения числа сликов приходится на задний склон ВВ [4], хотя они могут располагаться над подошвой [3], гребнем и над передним склоном ВВ [10];

формирование изображений полос выглаживания в оптике [11] и СВЧ-диапазоне [9] свидетельствует об уменьшении в слике среднеквадратичного наклона ветровых волн, и, в частности, подавлении волн сантиметровых длин.

Наиболее полное натурное исследование сликов от ВВ проведено к настоящему времени в рамках комплексного эксперимента [10]. Измерения проводились в одном из заливов у берегов Канады, специфика стратификации воды в котором позволила возбуждать достаточно интенсивные ВВ за медленно движущимся кораблем (глубина слоя скачка, осадка судна и скорость его движения соответствовали условиям возникновения явления «мертвой» воды). Были выполнены измерения высот и наклонов ветровых волн, скорости ветра, пульсаций горизонтальной скорости частиц в ВВ на нескольких горизонтах (от 1 до 10 м), фотографирование поверхности моря. В результате предложена эмпирическая связь дисперсии уклонов поверхности δ^2 с горизонтальной скоростью U частиц на поверхности [10, 11].

$$\ln \delta^2 / \delta_0^2 = RU/c, \quad R \simeq -5,1 \lg v/c + 6,5, \quad (1)$$

где c — фазовая скорость ВВ; v — скорость ветра. Максимумы дисперсии уклонов, согласно [10], при слабом ветре ($V \sim 1 \div 2$ м/с) располагались вблизи подошвы ВВ с некоторым сме-

щением к заднему склону ВВ; с усилением ветра это смещение увеличивалось, а при $v \sim 4-6$ м/с максимумы δ располагались над задним склоном ВВ ближе к ее гребню. В этой же работе представлена единственная реализация спектра поверхностного волнения в максимуме δ , в слике и при отсутствии ВВ (рис. 2).

Последние исследования сликов выполнены Институтом прикладной физики АН СССР в ходе 26-го рейса НИС «Дмитрий Менделеев» в Индийском океане [12]. Основной задачей было установление связи между параметрами ВВ и высокочастотными составляющими спектра волнения. Измерялись спектральные составляющие на пяти длинах волн: $\lambda = 1,6$ см (с помощью радиолокатора бокового обзора), $\lambda = 3,5; 7; 10; 17$ см (с помощью оптического спектроволнографа), и параметры ВВ с помощью акустического локатора. Как показала предварительная обработка результатов в ходе эксперимента ($V \simeq 3$ м/с, ВВ длиной 0,4 — 1 км распространялись навстречу ветру, пикноклин располагался на глубинах 60—120 м), слик — вблизи гребней ВВ, а относительный спектр K («контраст») пропорционален амплитуде смещений пикноклина ζ_m

$$K = 1 + \alpha(\lambda) \zeta_m/h, \quad (2)$$

где h — глубина залегания пикноклина.

Для $\lambda = 1,6$ см имеем $\alpha = 19,4$, для $\lambda = 3,5$ см — $\alpha = 28,3$, а для $\lambda = 7$ и 10 см имеем $\alpha = 14$ и 6,6 соответственно. Отсюда видно, что ВВ оказывает наиболее сильное воздействие на волнение с длинами волн 1—4 см.

Другим проявлением ВВ на морской поверхности является их влияние на радиационную температуру поверхности воды в ИК-диапазоне. Изучению этого эффекта был посвящен комплексный эксперимент, выполненный Морским гидрофизическим институтом АН УССР в 18-м рейсе НИС «Академик Вернадский» [13]. Синхронные наблюдения ВВ с помощью распределенных датчиков температуры и измерения радиационной температуры $T_{\text{рад}}$ поверхности моря ИК-радиометром показали подобие спектров ВВ и $T_{\text{рад}}$ в диапазоне частот ВВ. При этом колебания термоклина находятся почти в фазе с колебаниями $T_{\text{рад}}$, т. е. ИК-слики (участки с пониженной радиационной температурой) находятся над впадинами ВВ.

Следует, наконец, упомянуть еще об одном экспериментально наблюдаемом проявлении ВВ на поверхности — колебаниях льдин под действием ВВ. Распространение ВВ сопровождается сравнительно небольшими (порядка 1 см) колебаниями поверхности, которые, в свою очередь, приводят к колебаниям ледового покрова. Последние сейчас измеряются прецизионными наклономерами, их связь с ВВ надежно установлена экспериментально [14]. Заметим, что в полярных широтах, где практически отсутствует ветровое волнение, низкочастотные колебания льда от ВВ могут быть одним из основных индикаторов внутренних волн.

Проведенные натурные наблюдения, таким образом, показали следующее. ВВ приводит к изменчивости характеристик ветрового волнения (его спектра и среднеквадратичного наклона), что, в свою очередь, формирует изображение ВВ в радио- и оптическом диапазонах в виде сликовых полос. ВВ изменяет излучательные свойства морской поверхности, что дает ИК-изображение ВВ. Наконец, ВВ приводят к низкочастотным колебаниям уровня моря, проявляющимся, в частности, в колебаниях льда.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

НЧ-колебания поверхности от внутренних волн. Остановимся вначале, как на более простом, анализе связи ВВ с НЧ-колебаниями поверхности моря. Исследование длинных волн с периодами от нескольких минут до нескольких часов ведется довольно давно. Как отмечается в [15], наиболее удивительное в этих волнах — их «отсутствие»: среднеквадратичная амплитуда колебаний поверхности с периодами от 1 мин до 12 ч оказывается порядка 1 см. Естественно ожидать, что ВВ могут дать существенный (а иногда, возможно, и основной) вклад в спектры НЧ-колебаний поверхности этого диапазона.

Смещение поверхности ζ во внутренней волне n -й моды с частотой Ω_n и волновым числом l в линейном приближении можно найти из граничного условия на свободной поверхности $z = 0$ [16]

$$\zeta = -(\Omega_n^2/gl^2) (d\zeta(z)/dz), \quad z = 0. \quad (3)$$

«Коэффициент передачи» ВВ на поверхность ζ/ζ_m порядка перепада плотности морской воды $\Delta\rho/\rho \sim 10^{-3}$ и спадает с ростом номера моды и частоты [17]. Характерные смещения и наклоны поверхности от ВВ при типичных значениях амплитуды и длины волны ($\zeta_m \sim 10$ м, $\Lambda = 2\pi/l \sim 500$ м) порядка 1 см и 10^{-4} (именно такие величины наклонов регистрировались в колебаниях льда [14]). Рассчитав структуру мод ВВ для данной стратификации, можно вычислить коэффициент передачи и связать спектры колебаний поверхности со спектрами колебаний пикноклина. Пример такого расчета [18] показывает, что спектр колебаний поверхности на частотах порядка частоты Вейселя согласуется по порядку величины с имеющимися натурными данными и, следовательно, спектр колебаний пикноклина может быть восстановлен по спектрам НЧ-колебаний поверхности от ВВ.

Воздействие ВВ на ветровое волнение. Более сложно построение теории воздействия ВВ на ветровые волны.

Исходным является уравнение баланса для спектра энергии поверхностных волн, распространяющихся на фоне крупномасштабных горизонтальных течений $U(x, t)$, создаваемых ВВ [10, 19]:

$$\frac{d}{dt} \frac{E}{\omega_k} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial k} \right) \frac{E}{\omega_k} = Q, \quad (4)$$

где $E(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$ — пространственный спектр возвышений морской поверхности; $\omega_k = \sqrt{gk + \sigma\rho k^3}$ — собственная частота поверхностных волн, $\omega = \omega_k + \mathbf{kU}$, $Q(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$ описывает действие источников и стоков ветровых волн, а также нелинейные взаимодействия спектральных компонент волнения. Одна из основных трудностей заключается в том, что в настоящее время механизм установления спектра ветровых волн не является надежно установленным и имеющиеся теории в общем случае очень грубы. Поэтому при анализе используются различные, в зависимости от рассматриваемого диапазона длин поверхностных волн, приближения и соответственно разные аппроксимации для Q .

1. Метровый и дециметровый диапазоны. Для поверхностных волн этого диапазона наиболее сильное воздействие ВВ имеет место при выполнении условий синхронизма — совпадении фазовой скорости ВВ с групповой скоростью c_g поверхностных волн¹. При $Q = 0$ из (4) следует сохранение $E(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)/\omega_k$ вдоль характеристик-траекторий движения волновых пакетов

$$\dot{\mathbf{x}} = d\omega/d\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{k}} = -d\omega/d\mathbf{x}. \quad (5)$$

При этом значительные изменения в спектре $E(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$ наблюдаются в области захвата поверхностных волн $k - k_* \sim k_* \sqrt{U/c}$ (резонансное волновое число $k_* = g/4c^2$ находится из условия $c = c_g(k)$) на временах порядка характерного времени $\tau \sim (\Lambda/c) (\sqrt{c/U})$ движения захваченных волновых пакетов по фазовым траекториям [21]. Пренебрегать, однако, действием ветра и диссипацией, полагая в (3) $Q = 0$, можно лишь для поверхностных волн с длинами в несколько метров и более ($c_g > 1$ м/с), так как характерное время разгона и затухания этих волн превышает время τ . Как правило, скорость ВВ $c \lesssim 1$ м/с, поэтому выполнение условия резонанса приходится на волнение дециметрового и частично метрового диапазонов ($\lambda > 10$ см). Масштабы возбуждения и затухания волн этого диапазона сравнимы с длиной ВВ, поэтому учет действия ветра становится принципиальным. В [10] выполнены расчеты изменчивости волнения в рамках модели, для которой правая часть уравнения (4) аппроксимируется выражением

$$Q = \beta(k) E/\omega_k (1 - E/E_0), \quad (6)$$

где E_0 — невозмущенный спектр в отсутствие ВВ.

Последнее выражение описывает майлсовский механизм генерации ветровых волн с нелинейным ограничением спектра E , механизм генерации Филлипа при этом не учитывается. Решение (4) с учетом (6) имеет вид [10]

$$\omega_k/E = \omega_k/E_0 - \int_0^t \frac{\partial}{\partial k} \omega/E_0 \frac{dk}{dt} \exp \left[- \int_{t_1}^t \beta(k) dt_2 \right] dt_1. \quad (7)$$

¹ Подробное изложение особенностей такого воздействия содержится в [20, 21].

При расчетах E по формуле (7) с учетом (5) в [10] не учитывался захват поверхностных волн; более корректные расчеты выполнены в [22]. В частности, в [22] проведены численные расчеты изменений спектров $E(k, x, t)$ в области резонансных значений волновых чисел. При расчетах в качестве невозмущенного выбирался эмпирический спектр Ролла — Фишера, а для инкремента $\beta(k)$ использовалась аппроксимация Майлса — Филлипса [16]. Было получено, что минимум дисперсии уклонов волнения (слик) несколько смещен от гребня ВВ к ее переднему склону, соответственно максимум δ находится вблизи подошвы ВВ (рис. 3). Наибольшие изменения в спектре наблюдаются в области захвата, величины контрастов растут с ростом амплитуды ВВ и убывают с усилением ветра. При этом в области волновых чисел $k > k_*$ контрасты над впадиной ВВ больше единицы, т. е. волны усиливаются; при $k < k_*$ волнение ослабляется. Расчет при $U/c = 0,05$ и $V = 2$ м/с представлен на рис. 4. Полученные результаты находятся в качественном согласии с натурными наблюдениями [10].

2. Сантиметровый диапазон. Для волн сантиметрового диапазона ($\lambda \leq 10$ см) резонансное условие $c = c_g(k)$ для океанических ВВ, как правило, не выполняется и захвата волн не происходит. Величины изменений в спектрах ряби в сантиметровом диапазоне под действием ВВ в рамках описанной выше модели становятся незначительными и не позволяют объяснить наблюдавшуюся в этой области в [10] весьма сильную изменчивость спектра (см. рис. 2). Однако в этой модели не учитывался один из важнейших факторов, действующих на сантиметровые поверхностные волны — пленки ПАВ, практически повсеместно присутствующие на поверхности моря и оказывающие сильное гасящее действие на сантиметровую рябь.

Коэффициент затухания ряби γ существенно зависит от величины параметра упругости пленки $P = -(\Gamma/\sigma) (d\sigma/d\Gamma)$ (σ (Γ) — изотерма пленки, т. е. зависимость коэффициента поверхностного натяжения от концентрации ПАВ). Величина γ на чистой воде ($P = 0$) равна $2\nu k^2$; с ростом P затухание увеличивается, достигая максимума $\gamma_m = \sqrt{1/2 \nu k^2 \overline{\omega_k}}$ при $P_m = (\rho/\sigma k^2) \sqrt{2\nu \omega_k^3}$, и затем приближается к значению $\gamma_\infty = \gamma_m/2$ при $P \rightarrow \infty$ [23].

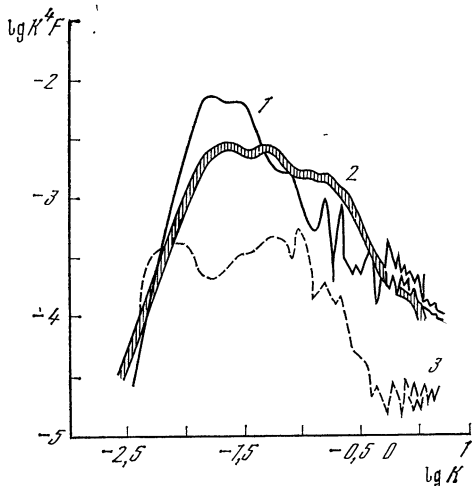


Рис. 2. Спектры уклонов ветрового волнения ($v = 2,1$ м/с, $U = 0,06$ м/с, $c = 0,80$ м/с [10]) вне слика (1), без ВВ (2) и в слике (3)

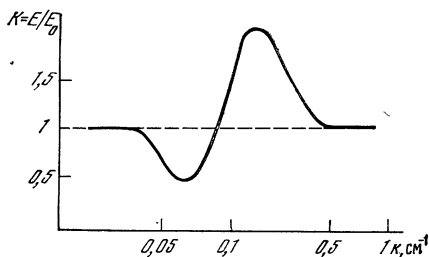
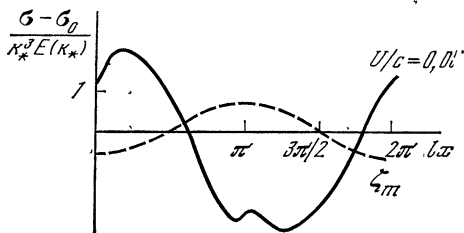


Рис. 3. Изменения среднеквадратичного уклона ветровых волн над ВВ ($c = 0,60$ м/с, $U = 0,03$ м/с, $v = 2$ м/с) [22]

Рис. 4. Контраст в дециметровом диапазоне в области, соответствующей максимуму δ (по результатам [22]), $c = 0,60$ м/с, $U/c = 0,05$

Изотермы морских пленок исследовались в [24], при этом одновременно фиксировалось наличие или отсутствие сливок. В свободном (несжатом) состоянии сликообразующие пленки растекаются до некоторого минимального значения Γ_{\min} , при котором упругость $P = 0$. Справа от точки Γ_{\min} на изотерме имеется узкая переходная область шириной порядка $0,1\Gamma_{\min}$, в которой производная $d\sigma/d\Gamma$, а следовательно, упругость P и декремент γ резко возрастают. Пример расчета декремента ряби сантиметрового диапазона для типичного образца пленки представлен на рис. 5 [25]. Видно, что величина γ при увеличении Γ (сжатие пленки) в пределах переходной области резко возрастает почти на порядок, достигая своего максимального значения, и затем сравнительно медленно убывает, приближаясь к γ_{∞} . Отметим, что для волн с $\lambda > 10$ см декремент с ростом Γ растет очень медленно и его изменения на масштабах порядка переходной области незначительны.

При распространении ВВ происходит сжатие и растяжение пленки в поле горизонтальной скорости $U(x, t)$. Соответствующие изменения концентрации могут быть найдены из уравнения неразрывности

$$d\Gamma/dt + \text{div}(\Gamma U) = 0, \quad (8)$$

стационарное решение которого для плоской волны имеет следующий вид:

$$\Gamma/\Gamma_0 = \left[1 - \frac{U(x-ct)}{c} \right]^{-1} \simeq 1 + U/c, \quad (9)$$

где Γ_0 — концентрация ПАВ в отсутствие ВВ.

Связав таким образом концентрацию, а при известной изотерме $\sigma(\Gamma)$ и величину γ со скоростью U , перейдем к анализу изменчивости спектров ветровой ряби. В правой части (4) учтем, кроме Майлсовского, механизм Филлипса, а также затухание из-за ПАВ. Имеем тогда

$$\omega_k Q = \frac{k^2}{4\rho^4 \omega^2} \Pi(\mathbf{k}, \omega) + \beta E (1 - E/E_*) - 2\gamma(\Gamma) E, \quad (10)$$

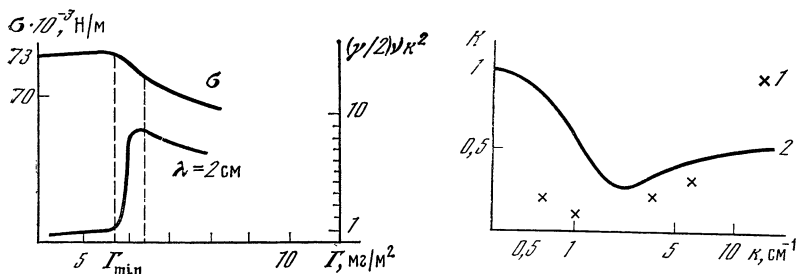


Рис. 5. Изотерма одного из образцов морских пленок [24] и соответствующий коэффициент затухания ряби в сантиметровом диапазоне ($\lambda = 2$ см) [25]

Рис. 6. Контраст в сантиметровом диапазоне над впадиной ВВ ($U/c = 0,05$) [25]

Точки — экспериментальные данные [10]

где Π — пространственно-временной спектр пульсаций атмосферного давления.

Контраст нетрудно найти, приравнявая Q (10) нулю, т. е. предполагая, что масштабы установления спектра E малы по сравнению с длиной ВВ и рябь успевает подстраиваться под поле течения $U(x, t)$ [26]. Пренебрегая изменениями спектра из-за доплеровского сдвига частоты в $\Pi(k, \omega)$, получим следующие выражения для контраста:

при слабом ветре, $v < 2 \div 5$ м/с ($\beta < \gamma(\Gamma_0)$, работает механизм Филлипса),

$$K = \frac{E}{E_0} \simeq \frac{2\gamma(k, \Gamma_0) - \beta}{2\gamma(k, \Gamma) - \beta}, \quad (11)$$

при умеренном ветре, $v > 2 \div 5$ м/с ($\beta > \gamma(\Gamma_0)$, доминирует механизм Майлса),

$$K \simeq \frac{\beta - 2\gamma(k, \Gamma)}{\beta - 2\gamma(k, \Gamma_0)}. \quad (12)$$

Для проведения конкретных расчетов требуется знание равновесного состояния пленки, т. е. значение Γ_0 . Если пленка не сжата, то равновесное значение находится слева от скачка $\gamma(\Gamma)$ (Γ_0 совпадает с Γ_{\min}). Увеличение γ происходит при сжатии пленки над подошвой ВВ, соответственно слики находятся над подошвами ВВ. Над гребнями ВВ спектр практически не меняется и $K = 1$. Рассчитанная зависимость $K(k)$ для рассмотренной выше пленки при $U/c = 0,05$ и $v \rightarrow 0$ изображена на рис. 6. Видно, что подавление спектра над подошвой ВВ весьма значительное, причем максимальное выглаживание приходится на рябь с длиной волны 2—4 см. С ростом скорости ветра K уменьшается (при слабых ветрах), т. е. эффект выглаживания усиливается, при переходе к умеренным ветрам контраст приближается к единице.

Если пленка сжата слабо, так что Γ_0 находится на левом крутом склоне кривой γ (Γ) (см. рис. 5), то контраст уже может быть как меньше единицы (над подошвой или склоном ВВ), так и больше единицы (над гребнем ВВ), т. е. рябь может не только выглаживаться, но и усиливаться. Величины $|K - 1|$ в данном случае должны быть порядка тех же, что и для несжатой пленки. Наконец, если пленка сжата сильно, что возможно при скоростях ветра в несколько метров в секунду, так что Γ_0 попадает на правый пологий склон кривой γ (Γ), то рябь усиливается над подошвой ВВ и гасится над гребнем. Однако в последнем случае, фактически соответствующем случаю умеренных ветров, контрасты близки к единице и рассматриваемый механизм выглаживания малоэффективен.

Рассчитанные на основе данной модели контрасты в сантиметровом диапазоне согласуются по порядку величины с данными [10] (см. 1 на рис. 6), согласия же с [10] по фазе сликa нет. К сожалению, в [10] не измерялись параметры пленок ПАВ, поэтому в дальнейшем при исследовании сликoв от ВВ было бы весьма желательно проведение специальных измерений характеристик ПАВ. Это необходимо еще и по той причине, что ПАВ, по-видимому, ответственны также за формирование ИК-изображения ВВ.

4. ЛАБОРАТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Исследования НЧ-колебаний поверхности, индуцируемых ВВ, представлены в [27]. Установлено, что волновые числа и частоты колебаний поверхности удовлетворяют дисперсионному уравнению для ВВ нижней моды, возбуждаемой в лабораторном лотке, а коэффициент передачи на поверхность хорошо описывается формулами линейной теории. При этом последний вывод справедлив и для ВВ достаточно больших амплитуд, при которых имеют место значительные нелинейные искажения профиля.

Лабораторные исследования, относящиеся к взаимодействию внутренних и поверхностных волн, весьма немногочисленны. Воздействие ВВ на регулярные квазимонохроматические волны вблизи резонанса изучалось в [28—31]. Было показано, что ВВ приводит к модуляции поверхностной волны по амплитуде, длине волны и частоте, нарастающей с расстоянием и приводящей к разбиению волны на цуги (рис. 7, а), чередующиеся с участками гладкой воды и движущиеся со скоростью ВВ. В спектре поверхностной волны при этом появляются сателлиты, смещенные относительно центральной компоненты на частоты, кратные частоте ВВ. Расчеты развития модуляции [28, 29] показали хорошее соответствие с результатами измерений. Были также проведены эксперименты по выглаживанию для ветровых волн [30, 31]. При небольших скоростях ветра ($v \lesssim 3$ м/с) в лотке формировалось установившееся волнение и при прохождении ВВ ($U/c \sim 0,03 \div 0,05$) можно было наблюдать достаточно хорошо выраженные

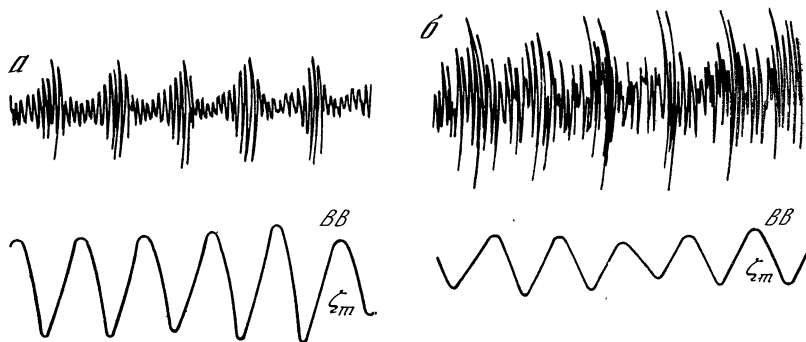


Рис. 7. Записи регулярных ($f = 4$ Гц, $U/c = 0,04$, $c = 0,2$ м/с) (а) и ветровых ($V = 1,5$ м/с, $U/c = 0,03$, $c = 0,21$ м/с) (б) поверхностных волн в присутствии ВВ, полученные в лабораторных экспериментах [29, 30]

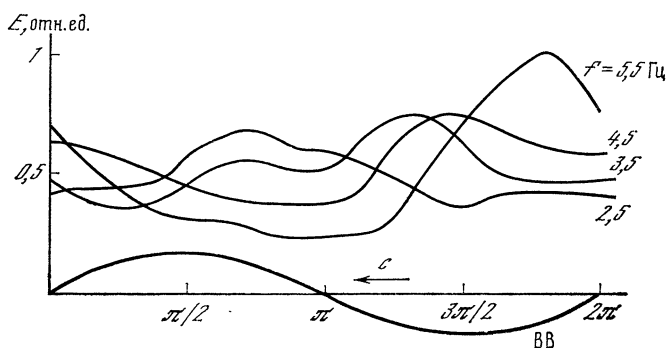
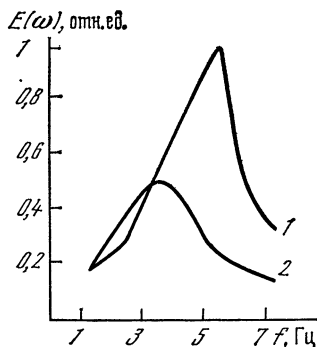


Рис. 8. Изменение спектральных компонент ветровых волн по фазе ВВ [31]

Рис. 9. Спектры ветрового волнения в лабораторном лотке ($v = 2,1$ м/с) над впадиной (1) и гребнем (2) ВВ [31]



слики (рис. 7, б). В [31] выполнены специальные исследования положения сликов, (цугов) по отношению к фазе ВВ как для регулярных, так и для ветровых поверхностных волн (ПВ). Для регулярных ПВ цуги формируются над впадиной ВВ и смещаются при $c/c_g > 1$ на передний склон, а при $c/c_g < 1$ — на задний, ближе к гребню ВВ, т. е. положение цуга (слика) существенно зависит от соотношения c и c_g . Результаты аналогичных исследо-

ваний для ветровых волн показаны на рис. 8, где приведены величины спектральных компонент на разных частотах. Для $f = 4,5$ Гц ($c \simeq c_g$) максимум спектральной интенсивности соответствует впадине ВВ, с ростом частоты ($f = 5,5$; $c > c_g$) максимум смещается к переднему склону ВВ, на низких частотах ($f = 3,5$ и $2,5$ Гц; $c < c_g$) смещается на задний склон, приближаясь к гребню ВВ. Таким образом, в одной и той же фазе ВВ для одних частот в спектре может происходить выглаживание, для других, наоборот, увеличение спектральной интенсивности. Вопрос о положении слага поэтому достаточно сложен, изменение интегральных характеристик, например среднеквадратичного наклона, по фазе ВВ, вообще говоря, не совпадает с изменением отдельных компонент спектра и точнее было бы говорить о положении «спектрального слага».

Спектры волнения над впадиной ВВ (в максимуме среднеквадратичного смещения) и над гребнем ВВ (в минимуме смещения) при $v = 2,1$ м/с приведены на рис. 9. Видно, что наблюдаются значительные (в два—три раза) различия спектров над впадиной и над гребнем ВВ, причем выглаживание наблюдается в широком частотном диапазоне не только в области резонанса, но и при больших отстройках c/c_g от 1. Отсутствие сколько-нибудь значительного резонанса при $c/c_g = 1$ наблюдается и в эксперименте с регулярными ПВ, если отстраиваться от резонанса по скорости c_g (при отстройке по скорости c резонанс при $c/c_g = 1$ ярко выражен). Это обстоятельство требует дальнейшего теоретического анализа.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в этой сравнительно краткой статье теоретические и экспериментальные результаты в настоящее время находятся до некоторой степени в отрыве друг от друга, связь теории и эксперимента еще очень слаба. Для построения адекватных теоретических моделей необходимы специальные эксперименты, включающие исследование изменчивости спектров ветрового волнения, поля ветра над морем, свойств пленок ПАВ и т. д. Желательно проведение более детальных расчетов контрастов как в дециметровом, так и в сантиметровом диапазонах при различных аппроксимациях спектра, с учетом двумерности, сжатия пленок ветром с целью более хорошего качественного и количественного согласия с экспериментами. Наконец, требуется изучение других механизмов воздействия ВВ на поверхностные волны. В качестве примера можно указать на возможный эффект воздействия внутренней волны на генерацию капиллярной ряби на склонах крутых гравитационных волн. Рассмотрение в дальнейшем всех этих вопросов позволит значительно продвинуть наше понимание механизмов воздействия ВВ на морскую поверхность.

Авторы благодарят А. Я. Басовича, В. В. Баханова, В. И. Таланова за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ролль Г. У.* Физика атмосферных процессов над морем. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 399 с.
2. *Ewing G.* Slicks, surface films and internal waves.— *J. Marine Res.*, 1950, 9, N 3, p. 161—187.
3. *Dietz R. S., La Fond E. C.* Natural slicks on the ocean.— *J. Marine Res.*, 1950, 9, N 2, p. 69—76.
4. *La Fond E. C., La Fond K. G.* Sea surface features.— *J. Marine Biol. Assoc. India*, 1972, 14, N 1, p. 1—23.
5. *Apel J. R.* Ocean science from space.— *Trans. Amer. Geophys. Union*, 1976, 57, N 9, p. 612—625.
6. *Apel J. R., Byrne H. M., Proni J. R.* et al. Observations of oceanic internal and surface waves from the ERTS.— *J. Geophys. Res.*, 1975, 80, N 6, p. 865—881.
7. *Apel J. R., Byrne H. M., Proni J. R.* et al. Near-simultaneous observations of intermittent internal waves on the continental shelf from ship and space craft.— *Geophys. Res. Lett.*, 1975, 2, N 4, p. 128—131.
8. *Curtin T. B., Mooers N. K.* Observation and interpretation of a high-frequency internal wave packet and surface slick pattern.— *J. Geophys. Res.*, 1975, 80, N 6, p. 882—894.
9. *Brown W. E., Elachi Jr. C., Thompson T. W.* Radar imaging of ocean surface patterns.— *J. Geophys. Res.*, 1976, 81, N 15, p. 2657—2667.
10. *Hughes B. A., Grant H. L.* The effect of internal waves on surface wind waves. 1. Experimental measurements.— *J. Geophys. Res.*, 1978, 83, N C1, p. 443—454; *Hughes B. A.* The Effect of internal waves on surface wind waves. 2. Theoretical analysis.— *Ibid.*, p. 455—465.
11. *Луцинин А. Г., Тимов В. И.* О возможности дистанционной оптической регистрации параметров внутренних волн по их проявлениям на океанической поверхности.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1980, 16, № 12, с. 1284—1290.
12. *Браво-Животовский Д. М., Володина Н. И., Гордеев Л. Б.* и др. Исследование воздействия океанских внутренних волн на поверхностное волнение дистанционными методами.— *ДАН СССР*, 1982, 256, № 4, с. 883—886.
13. *Нелепо Б. А., Куфтарков Ю. М.* Экспериментальные исследования характеристик внутренних волн в океане дистанционными методами.— *ДАН СССР*, 1979, 249, № 4, с. 980—983.
14. *Смирнов В. Н.* Колебания ледяного покрова, обусловленные внутренними волнами Ледовитого океана.— *ДАН СССР*, 1972, 206, № 5, с. 1106—1108.
15. *Munk W. H.* The Sea. Vol. 1. Physical oceanography. N. Y., 1962, 657 p.
16. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 267 с.
17. *Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н.* К теории низкочастотного поверхностного волнения, индуцированного внутренними волнами в океане.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1976, 12, № 3, с. 313—317.
18. *Ермаков С. А.* Статистические эффекты при распространении внутренних волн в океане: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. 178 с.
19. *Контарович В. М., Синицын Ю. А., Цукерник В. М.* Взаимное влияние длинных волн и турбулентности на поверхности жидкости.— *ПМТФ*, 1973, № 1, с. 100—112.
20. *Воронович А. Г.* Распространение внутренних и поверхностных гравитационных волн в приближении геометрической оптики.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1976, 12, № 8, с. 850—857.
- 20а. *Басович А. Я., Таланов В. И.* О трансформации спектра коротких поверхностных волн на неоднородных течениях.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1977, 13, № 7, с. 766—773.
21. *Басович А. Я.* Трансформация спектра поверхностного волнения под действием внутренних волн.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1979, 15, № 6, с. 655—661.

22. *Басович А. Я., Баханов В. В.* О действии внутренних волн на ветровое волнение.— В кн.: Волны и дифракция. М.: 1981, 1, с. 197—200.
23. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 365 с.
24. *Jarvis N. L., Garrett W. D., Scheiman M. A. et al.* Surface chemical characterization of surface-active material in seawater.— J. Marine Res., 1969, N 1/2, p. 88—96.
25. *Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г.* О влиянии пленок поверхностно-активных веществ на изменения спектров ветрового волнения под действием внутренних волн.— Изв. АН СССР. ФАО, 1980, 16, № 10, с. 1068—1076.
26. *Пелиновский Е. Н.* Линейная теория установления и изменчивости ветрового волнения при слабом ветре.— Изв. АН СССР. ФАО, 1978, 14, № 11, с. 1167—1177.
27. *Долина И. С., Ермаков С. А., Папко В. В., Пелиновский Е. Н.* Экспериментальное исследование колебаний свободной поверхности, вызванных внутренними волнами.— Изв. АН СССР. ФАО, 1978, 14, № 11, с. 1216—1218.
28. *Lewis J. E., Lake B. M., Ko D. R. S.* On the interaction of internal waves and surface gravity waves.— J. Fluid Mech., 1974, 63, N 4, p. 773—800.
29. *Ермаков С. А., Козлов С. И., Показеев К. В., Розенберг А. Д.* Лабораторное исследование влияния внутренней волны на регулярные поверхностные волны.— Океанология, 1982, 22, № 2, с. 125—133.
30. *Ермаков С. А., Козлов С. И.* О влиянии внутренних волн на характеристики поверхностного волнения.— В кн.: Тр. I Всесоюз. конф. «Метрология гидрофизических измерений». М.: Наука, 1980, с. 197—199.
31. *Салашин С. Г.* Экспериментальное исследование взаимодействия внутренних и поверхностных волн в лабораторном лотке: Дипломная работа. Горький: ГГУ, 1981. 58 с.

УДК 532.541.591

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ МОДЕЛИ СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ОКЕАНА

С. Д. БОГАТЫРЕВ, В. А. БРАЙЛОВСКАЯ,
В. Р. КОГАН, В. И. ТАЛАНОВ, И. Ю. ФЕОКТИСТОВ

Важной особенностью океана, учет которой необходим при изучении его динамики, является вертикальная плотностная стратификация, связанная в первую очередь с неоднородным по глубине распределением температуры. Типичным для стратификации океана в умеренных и тропических широтах является наличие на некоторой глубине слоя быстрого (до нескольких градусов на метр) изменения температуры, ниже которого, в так называемом термоклине, температура монотонно уменьшается, а в верхнем перемешанном (квазиоднородном) слое — практически постоянна.

Изучение динамики верхнего слоя океана является сейчас одной из наиболее важных задач океанологии. Эта задача решается преимущественно в ходе сложного и дорогостоящего натурального эксперимента. Альтернативным ему является модельный эксперимент, важность и актуальность которого начинают признавать океанологи. Однако модельные исследования, выполненные на небольших лотках [1] (длина 1,5—20 м, ширина 0,1—2,4 м, глубина 0,1—1 м) со стратификацией, лишь отдаленно напоми-

нающей стратификацию реального океана, могут претендовать в лучшем случае на воспроизведение некоторой качественной картины моделируемых явлений или лишь отдельных их деталей, чего на современном уровне исследований океана совершенно недостаточно.

В данной работе определим необходимые и достаточные условия масштабного моделирования верхнего слоя океана и покажем пути их реализации.

Известными критериями подобия течений стратифицированной по плотности ρ и горизонтальной скорости U идеальной жидкости является [2] внутреннее или денситометрическое число Фруда

$$Fr = \frac{U}{(g\Delta\rho/\rho L)^{1/2}}$$

и градиентное число Ричардсона

$$Ri = - \frac{g\partial\rho/\partial z}{\rho(\partial u/\partial z)^2}.$$

В приведенных критериях $\Delta\rho/\rho$ — характерное относительное изменение плотности; L — характерный линейный размер; g — ускорение силы тяжести.

Масштабное моделирование течений стратифицированной жидкости по указанным критериям может быть осуществлено в одной и той же жидкости с любым коэффициентом подобия $K_L = L/L'$ (L — натуральный; L' — модельный размер) при одновременном изменении временного масштаба в $T/T' = K_L^{-1/2}$ раз и сохранении характерного перепада плотности $\Delta\rho$.

Для верхнего слоя океана, где стратификация обусловлена в основном изменением температуры, масштабное моделирование по указанным критериям означает вертикальное сжатие температурного распределения в K_L раз при сохранении полного перепада температуры ΔT , свойственного океану (рис. 1).

Важно отметить, что для внутренних движений соблюдение указанных масштабных коэффициентов означает сохранение неизменными абсолютных перепадов плотности и температуры, возникающих в этих движениях. В частности, внутренние волны в сопоставимых условиях будут иметь те же самые амплитуды колебаний температуры и плотности, что и в натуральных условиях, но перенесенные в более высокочастотную область временных и пространственных масштабов. Однако, имея дело с реальной жидкостью, необходимо учитывать вязкость и поверхностное натяжение. Так, волновые движения на поверхности океана могут быть масштабно смоделированы лишь в пределах гравитационного участка дисперсионной зависимости. Например, для волн с $\lambda \geq 1$ м в натуральных условиях коэффициент подобия не может превышать $K_L \simeq 25$, так как, начиная с $\lambda = 4 \div 5$ см, гравитационные волны переходят в гравитационно-капиллярные.

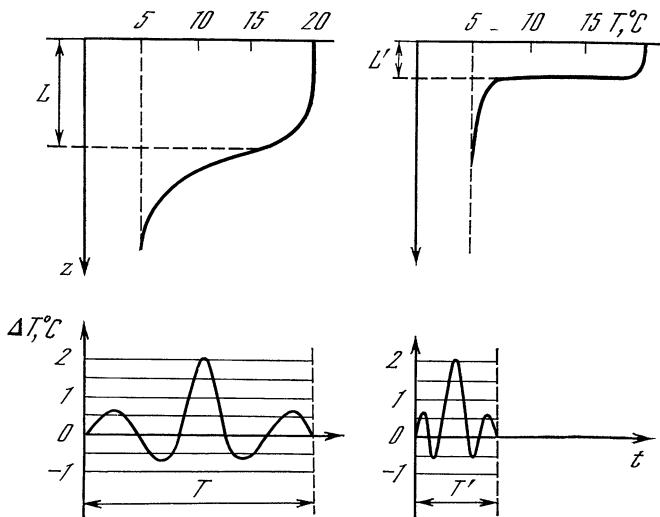


Рис. 1. Масштабное моделирование

В вязкой жидкости к уже введенным критериям подобия необходимо добавить число Рейнольдса

$$Re = vd/\nu,$$

где d — характерный масштаб потока; ν — кинематический коэффициент вязкости.

Очевидно, что одновременно удовлетворить критериям Fr и Re практически невозможно. В судостроительных опытовых бассейнах при изучении движения моделей, имеющих значительное волновое сопротивление, принято выдерживать критерий Fr , обеспечивая при этом размер и скорость моделей соответствующими участку автомодельности. При этом необходимо условие $Re' > Re_{кр} \sim 3 \cdot 10^6$. В аэродинамических трубах принимают $Re_{кр} = 10^5$. Практически учет поверхностного натяжения и вязкости означает, что стратифицированный бассейн должен строиться по типу и размерам судостроительных опытовых бассейнов с $K_L \approx 25$. При таком масштабе геометрические характеристики гидроканала будут более чем на порядок больше размеров существующих лотков с искусственно созданной стратификацией.

В настоящее время стратификация гидрлотков достигается в основном двумя общепринятыми способами: на основе водных растворов соли, сахара, глицерина и т. п. и на основе несмешивающихся жидкостей. Недостатки обоих способов довольно очевидны и не позволяют применять их для создания стратификации в больших бассейнах.

Предлагаемый способ термостратификации иллюстрируется принципиальной схемой, изображенной на рис. 2. Жидкий фреон (хладоагент) из конденсатора 5 поступает в испаритель 4, где

отбирает тепло от хладоносителя (соляного раствора), циркулирующего в трубопроводе 9 и теплообменниках 6, 8, охлаждающих нижние слои воды. Пары фреона из испарителя, сжатые компрессором 3, поступают в конденсатор 5, где и отдают тепло воде, циркулирующей в теплообменниках 8, подогревающих верхние слои бассейна. Использование в области скачка специальных секций теплообменников (на рис. 2 не показано), подключаемых по мере надобности к верхнему (теплому) или нижнему (холодному) контурам, позволяет регулировать глубину слоя скачка, а выбор режима работы теплового и холодного контуров дает возможность регулировать характер стратификации.

Использование обоих (теплого и холодного) контуров холодильной машины сильно снижает энергозатраты на стратификацию, что делает метод термостратификации вполне экономичным. В качестве холодильных машин могут быть применены промышленные холодильные установки. Например, одна машина марки ХМ-22-ФУУ-400/1, имеющая установленную электрическую мощность 144 кВт и холодопроизводительность 0,32 Гкал/ч, т. е. коэффициент холодопроизводительности $M = Q_x/W$ (где Q_x — количество отбираемого машиной тепла от испарителя, а W — потребляемая ею электрическая мощность), близкий к 2,5, может без учета потери тепла обеспечивать за трое суток полную стратификацию бассейна глубиной 7,5 м на площади 450 м² при глубине залегания слоя скачка в 2 м и начальной температуре воды 10° С. При этом достигается полный перепад температур 14—16° С при температуре нижних слоев 4° С.

В описываемой конструкции высокая теплоотдача с поверхности стенок и дна, необходимая для реализации мощности холодильных машин, достигается за счет свободной конвекции, возникающей у стенок бассейна. Весьма существенно, что свободная конвекция обеспечивает и высокую однородность стратификации по всей площади бассейна при значительных градиентах температуры в области скачка. Подобное заключение вытекает из приближенного аналитического рассмотрения режима установления стратификации в объеме жидкости с неоднородно нагретыми стенками, а также изучения математи-

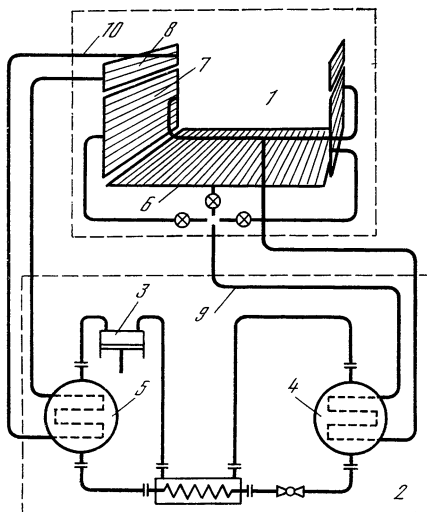


Рис. 2. Схема создания термостратификации в бассейне

1 — бассейн; 2 — холодильная машина; 3 — компрессор; 4 — испаритель; 5 — конденсатор; 6—8 — теплообменники; 9, 10 — трубопроводы

ческой и экспериментального исследования физической модели бассейна.

Приближенный аналитический расчет режима установления температурной стратификации в бассейне может быть выполнен на основе известных представлений о свободной конвекции жидкости около вертикальной нагретой (охлажденной) стенки [3, 4]. При этом приходится различать режимы ламинарного и турбулентного конвективного движения жидкости в пристеночном слое у охлажденной (нагретой) стенки. Если длина бассейна велика по сравнению с его шириной, можно ограничиться при этом двумерной моделью (рис. 3).

Рассмотрим для определенности нижнюю часть бассейна, где

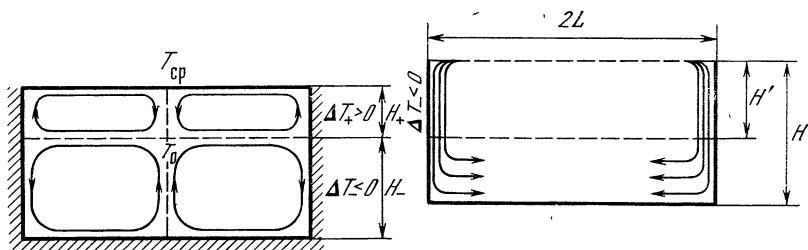


Рис. 3. Установление температурной стратификации

изменение температуры стенок $\Delta T_{\pm} = T_{\text{ст}} - T_0$ (T_0 — начальная температура жидкости в бассейне). При достаточной ширине бассейна развитие свободной конвекции у его противоположных стенок происходит независимо, а сам процесс установления стратификации до определенного момента представляет собой наполнение бассейна холодной жидкостью, стекающей с его стенок. Характер течения у стенок определяется критерием Рэлея $Ra \propto \propto H^3$ (H — высота стенок): при $Ra < 10^9$ течение ламинарно, при $Ra > 10^9$ — турбулентно.

Используя автомодельные решения для свободной конвекции у вертикальной стенки [3], нетрудно показать, что в ламинарном режиме движение верхнего уровня H' (рис. 3) охлажденной жидкости будет происходить по закону

$$H'(t) = H_- (1 - t/t_n)^4,$$

где время t_n , характеризующее скорость наполнения бассейна охлажденной жидкостью, пропорционально $LH_-^{1/4}$.

В режиме турбулентной конвекции наполнение бассейна можно описать приближенно законом

$$H' = \frac{1}{4} H_- \left[7 \exp\left(-\frac{t}{t_x}\right) - 3 \right],$$

где $t_x = \frac{7}{8} \frac{\rho C_p L \Delta T}{r}$ — некоторое характерное время, определяющее темп охлаждения бассейна. Здесь ρ — плотность жид-

кости; C_p — ее удельная теплоемкость; r — значение коэффициента турбулентного теплообмена [4] в начальный момент времени. Время наполнения бассейна t_n , найденное из условия $H' = 0$

$$t_n = 4,9L \text{Pr}^{2/3} / (g\beta\Delta T\nu)^{1/3}$$

в отличие от ламинарного режима не зависит от высоты стенок бассейна H .

Приближенную оценку достижимого при свободной конвекции предельного градиента температуры можно получить из сравнения времени горизонтального конвективного теплопереноса $t_k = L/V_k$ (где V_k — скорость конвекции) и времени молекулярной диффузии тепла поперек слоя $t_{\text{диф}} \simeq h^2/\chi$ (где h — толщина слоя скачка). Сравнение приводит к приближенному выражению

$$\frac{h}{L} \simeq \frac{4}{(\text{Pr Cr})^{1/6}} \sim \frac{1}{L^{1/2}},$$

где критерий Грасгофа Gr отнесен к полурешине бассейна L . Из последнего выражения следует, что при пропорциональном росте размеров бассейна относительная толщина слоя скачка уменьшается.

Для проверки правильности идеи термостратификации была разработана и построена физическая модель бассейна с размерами гидроканала $5 \times 0,7 \times 0,4 \text{ м}^3$ и положения слоя скачка на глубине $0,1 \text{ м}$. В ходе разработки и исследования этой модели создана и реализована на ЭВМ ЕС-1040 математическая программа, позволяющая описать процессы массо- и теплопереноса, приводящие к возникновению температурной стратификации. Расчет выполнен на двумерной модели (рис. 4).

Система уравнений свободной конвекции в приближении Буссинеска имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \Delta \omega - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \Delta \psi = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T,$$

где U, v — проекции скорости на оси x и y ; $\omega = dU/dy - dv/dx$ — завихренность; ψ — функция тока; $\text{Gr} = g\beta H^3 \Delta T / \nu^2$ — число Грасгофа; $\text{Pr} = \nu / \chi$ — число Прандтля.

В расчетах предполагалось, что все физические свойства жидкости постоянны и не зависят от температуры [5]. Конкретный расчет был выполнен для лабораторной модели бассейна, характеризующейся следующими параметрами: $\text{Gr} = 0,9 \cdot 10^9$, $H = 0,383 \text{ м}$, $H_1 = 0,23 \text{ м}$, $L = 0,345 \text{ м}$, $T_1 = 4^\circ \text{ С}$, $T_0 = 10^\circ \text{ С}$,

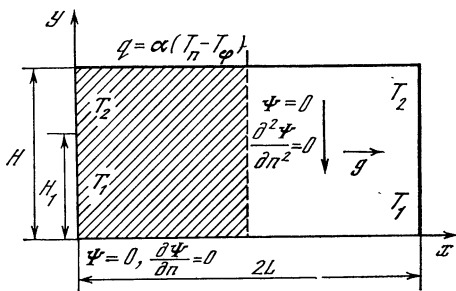


Рис. 4. Численное моделирование конвекции

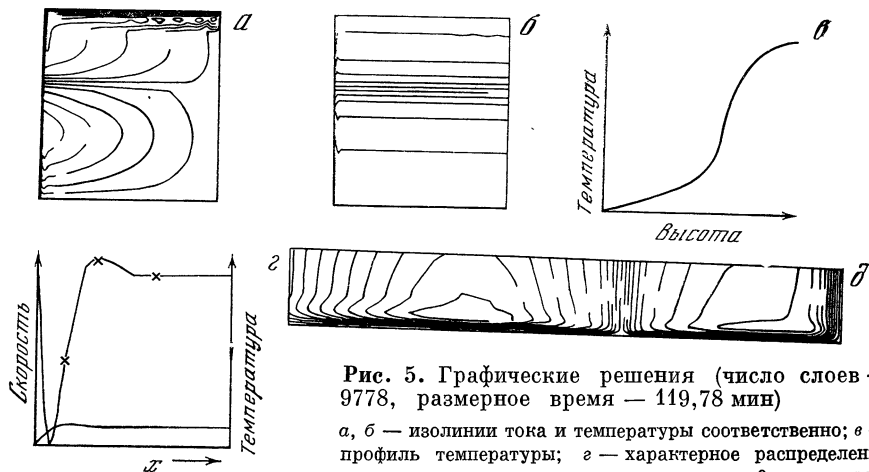


Рис. 5. Графические решения (число слоев — 9778, размерное время — 119,78 мин)
 а, б — изолинии тока и температуры соответственно; в — профиль температуры; д — характерное распределение скорости и температуры в погранслое

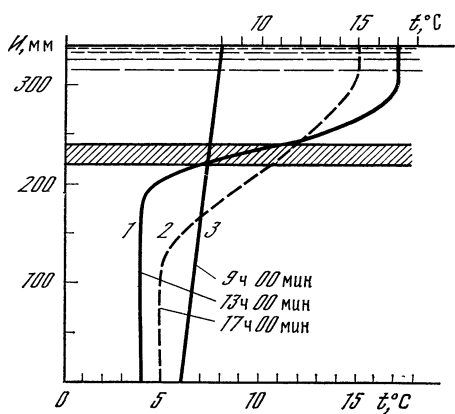


Рис. 6. Распределение температуры по глубине бассейна для 134 (1), 174 (2) и 94 мин (3) работы контуров

$T_{\text{ср}} = 18^\circ\text{C}$, $\alpha = 5 \text{ Вт/м}^2$. Использовалась неравномерная сетка 43×34 и монотонная дивергентная схема.

Анализ рассчитанной реализации (119,78 мин — время счета 70 ч на ЭВМ ЕС-1040) показал, что после включения холодильной машины в бассейне, как и ожидалось, возникают вихревые движения с различным средним направлением циркуляций жидкости выше и ниже температурного скачка. Эти движения носят нерегулярный пульсирующий характер, однако создаваемый ими конвективный перенос тепла обеспечивает устойчивую вертикаль-

ную температурную стратификацию жидкости, которая на стадии установления медленно и монотонно меняется, оставаясь все время практически однородной по ширине бассейна, включая тонкие погранслои. На рис. 5 приведена реализация для $t = 119,78$ мин, где изотермы, несмотря на нерегулярный характер течения внутри бассейна, практически горизонтальны, за исключением тонких погранслоев у боковых стенок, где изгиб соответствует пристеночной циркуляции жидкости. Это наиболее важный вывод, который можно сделать из приведенного расчета.

Преимущественный вклад в теплообмен, за исключением нескольких первых минут, дают боковые стенки. Роль днаца в установлении термостратификации незначительна, и оно в принципе может быть просто хорошо термоизолировано.

Эксперименты, проведенные на лабораторной модели, показали, что за время порядка одного часа в жидкости устанавливается стратификация, близкая к линейной. Установление такой же стратификации в режиме чисто диффузионного теплообмена потребовало бы несравненно большего времени (порядка 20—25 ч). Изменение уровня охлажденной жидкости во времени хорошо согласуется с теоретической зависимостью для ламинарного закона теплообмена. Выход на стационарную стратификацию с резко выраженным слоем скачка происходит примерно через три часа после включения холодильной машины и зависит от начальной температуры и остаточной стратификации жидкости.

На рис. 6 показан характерный профиль температуры воды в бассейне, который получается при одновременной работе теплового и холодного контуров. В зависимости от момента и продолжительности включения теплового и холодного контуров могут быть получены различные профили: либо с сильно выраженным скачком (см. рис. 6) и практически отсутствием стратификации в придонном и приповерхностных слоях, либо типа термоклина с плавно меняющейся температурой ниже слоя температурного скачка и слабой стратификацией в приповерхностном слое и др. Максимальный градиент температуры в эксперименте равен 1,8—2 град/см, что согласуется с цифрой 1,84 град/см, полученной в установившемся режиме при численном моделировании.

Эксперимент подтвердил, что в установлении стратификации основную роль играют бортовые секции теплообменников, роль днищевой секции практически незначительна. Во всех экспериментах наблюдалось постоянство профилей температуры по всей ширине бассейна. Характеризуя результаты экспериментов, можно сказать, что они полностью подтвердили теоретические предположения, заложенные в конструкцию и принцип работы модели.

Таким образом, проведенные теоретические и экспериментальные исследования подтверждают возможность масштабного моделирования структуры верхнего слоя стратифицированного океана и открывают пути к созданию больших стратифицированных бассейнов. Уже сейчас устройства, подобные описанной выше модели бассейна, могут быть использованы в качестве экспериментальных стендов для научно-исследовательских и учебных гидрофизических лабораторий вместо традиционных гидролотков, заполненных водными растворами спирта, соли, глицерина, сахара, несмешивающимися жидкостями и т. п. Устройствами для стратификации можно оснастить имеющиеся гидролотки при условии их хорошей термоизоляции. Описанный принцип позволяет также решать задачу термостратификации акустических бассейнов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глинский Н. Т. Внутренние волны в океанах и морях. М.: Наука, 1973.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 398 с.
3. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.
4. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1973.
5. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье—Стокса в переменных вихрь, функция тока.— ДАН СССР, 1974, 219, № 2, с. 301—302.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Ю. А. Данилов, Б. Б. Кадомцев. Что такое синергетика?	5
А. М. Жаботинский. Автоволны в биофизике	16
М. Л. Тай. Динамика процессов самосборки	25
Ю. М. Свирижев, А. А. Гизаури, В. Н. Разжевайкин. Волны в экологии	32
В. И. Таланов. Стимулированная диффузия и кооперативные эффекты в распределенных кинетических системах	47
М. И. Рабинович, М. М. Суцук. Когерентные структуры в турбулентных течениях	56
С. С. Моисеев, В. Г. Пунгин, Р. З. Сагдеев, Н. В. Сулязов, А. В. Тур, В. В. Яновский. Вторичные и корреляционные неустойчивости в распределенных системах	85
Г. М. Заславский. Стохастичность квантовых систем	96
В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов. Вихри в мелкой вращающейся атмосфере	107
К. А. Горшков, В. А. Миронов, А. М. Сергеев. Связанные стационарные солитонные образования	112
В. М. Елеонский. Солитоны в магнитных средах	129
В. И. Татарский. Адаптивные системы и когерентность	135
В. И. Беспалов, В. Г. Манишин, Г. А. Пасманик. Адаптивное возбуждение оптического излучения в резонаторах с зеркалами, отражающими волновой фронт	142
Ф. В. Бункин, Д. В. Власов, Ю. А. Крацов. Обращение волнового фронта акустических пучков	159
Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов. Магнитное динамо в стационарном потоке	166
В. Ю. Трахтенгерц. Альфвеновские мазеры	181
Г. И. Баренблатт. Некоторые новые задачи турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией	191
Л. А. Островский, Ю. А. Степаняц, Л. Ш. Цимринг. Взаимодействие внутренних волн с течениями и турбулентностью в океане	204
С. А. Ермаков, Е. Н. Пелиновский. Воздействие внутренних волн на морскую поверхность	240
С. Д. Богатырев, В. А. Брайловская, В. Р. Коган, В. И. Таланов, И. Ю. Феоктистов. Принципы построения лабораторной модели стратифицированного океана	252

УДК 536.75

Д а н и л о в Ю. А., К а д о м ц е в Б. Б. **Что такое синергетика?** — В кн.: **Нелинейные волны: Самоорганизация**, М.: Наука, 1983.

В работе сделана попытка очертить контуры нового «синергетического» направления. Рассмотрены особенности синергетики как науки и связь ее с теорией диссипативных структур, теорией автоволновых процессов, кибернетикой, со случайными процессами в динамических системах, идеями симметрии, с аксиоматическим подходом. Отмечена необходимость поиска универсального класса моделей, которые бы воспроизводили требуемый тип поведения изучаемых активных систем.

Библиогр. 32 назв.

УДК 536.75

Ж а б о т и н с к и й А. М. **Автоволны в биофизике.** — В кн.: **Нелинейные волны: Самоорганизация**, М.: Наука, 1983.

В статье показано, что в ряде ключевых биологических систем, связанных с управлением, передачей и переработкой информации, автоволны играют решающую роль. Нарушение работы таких систем часто связано с возникновением разнообразных автоволновых режимов, проявляющихся, например, при некоторых сердечных аритмиях, эпилепсии и т. д.

Ил. 5, библиогр. 20 назв.

УДК 531.391.1 : 519.272

Т а й М. Л. **Динамика процессов самосборки.** — В кн.: **Нелинейные волны: Самоорганизация**. М.: Наука, 1983.

Рассматривается модель процесса самосборки, предложенная А. М. Леонтовичем, в связи с моделированием процесса самосборки вирусов. Основная особенность модели заключается в детальном описании строения всех компонент, возникающих при самосборке, включая составляющие каждую компоненту элементы и связи между элементами в ней. Считая справедливой «гипотезу хаоса» о столкновениях, изучаются общие свойства соответствующих систем дифференциальных уравнений. Полученные результаты выражают характерные особенности систем кинетических уравнений, описывающих процессы самосборки отрезков и линейных цепей, которые представляют собой типичные самоорганизующиеся процессы. Поэтому результаты могут оказаться полезными для изучения динамики процессов в различных физических системах. В статье подчеркивается связь с кинетическими расчетами процессов сополимеризации в химической физике.

Библиогр. 9 назв.

УДК 574.91 + 518.1 + 577. 4.

С в и р е ж е в Ю. М., Г и г а у р и А. А., Р а з ж е в а й к и н В. Н. **Волны в экологии.** — В кн.: **Нелинейные волны: Самоорганизация**. М.: Наука, 1983.

Рассмотрены задачи возникновения нелинейных волн в так называемых «экологических средах», популяционные волны и волны в системе ресурс — потребитель. Проведено обобщение классической модели Колмогорова — Петровского — Пискунова для случая сложных состояний равновесия. Показано, что и в этих случаях существует ограниченный снизу спектр скоростей, но критическая скорость отличается от классической. Это обобщение позволило выделить новые динамические режимы для популяции с гиперболическим законом роста.

В системе невозобновимый ресурс — потребитель получены выражения для асимптотической скорости распространения волны. Машинные эксперименты для системы возобновимый ресурс — потребитель показали, что в ней возможно возникновение так называемых «волновых поездов», когда начальное возмущение типа вспышки потребителя приводит к появлению целой серии волн.

Табл. 1, ил. 7, библиогр. 13 назв.

УДК 530.182

Т а л а н о в В. И. **Стимулированная диффузия и кооперативные эффекты в распределенных кинетических системах.** — В кн.: **Нелинейные волны: Самоорганизация**. М.: Наука, 1983.

Обсуждаются возможности феноменологического описания кооперативных эффектов в нелинейных распределенных кинетических системах. Для систем, характеризующихся ближним (по сравнению с масштабом структурной неоднородности) взаимодействием элементов, вводится представление о стимулированной диффузии, связанной с потоками, пропорциональными концентрациям компонент. Показано, что стимулированная диффузия может приводить к дифференциации и кооперации компонент, если их концентрации превышают пороговые значения. Обсуждается связь стимулированной диффузии с принципами термодинамики.

Библиогр. 8 назв.

УДК 532.536 + 530.182

Рабинович М. И., Сушик М. М. **Когерентные структуры в турбулентных течениях.** — В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983.

Рассматриваются основные явления, связанные с существованием крупномасштабных когерентных образований в гидродинамических турбулентных течениях со сдвигом скорости. Обсуждаются простейшие механизмы возникновения и установления таких структур в двумерных (в среднем) течениях, строятся достаточно грубые модели двухмерных когерентных структур (КС) в виде квазистационарных волн или дискретных вихрей. При анализе нелинейной динамики КС основное внимание уделяется их элементарным взаимодействиям друг с другом и с мелкомасштабной турбулентностью, а также коллективным эффектом в вихревых следах и пепочках. В частности, предсказывается эффект стохастизации регулярных цепочек внешним полем, возникновение стохастических стационарных волн в модели «замороженной» турбулентности и др. Обсуждается большое число физических и численных экспериментов.

Ил. 19, библиогр. 68 назв.

УДК 532.501.34 + 533.9

Моисеев С. С., Пунгин В. Г., Сагдеев Р. З., Суязов Н. В., Тур А. В., Яновский В. В. **Вторичные и корреляционные неустойчивости в распределенных системах.** — В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983.

Работа посвящена вторичным неустойчивостям и каскадным процессам в некоторых гидродинамических моделях плазмы и жидкости. Изучен механизм перекачки энергии в дрейфовой турбулентности, возникающей в слабоионизированной ионосферной плазме с немагнитными ионами. Такая турбулентность возникает в электроструе вследствие развития градиентной неустойчивости. Найден спектр турбулентности. В качестве примера корреляционной неустойчивости рассмотрена неустойчивость в корреляторе второго порядка для системы поверхностных волн, распространяющихся в «мелкой» воде над дном со случайной топографией. При этом неустойчивость в первом корреляторе отсутствует. Эти неустойчивости могут быть полезными при анализе неравновесных систем. Рассмотрено также влияние волн конечной амплитуды на устойчивость сдвиговых течений идеальной стратифицированной жидкости. Для волнового мод, близких к определенной в линейном приближении границе устойчивости, найден тип взрывной неустойчивости, описываемой укороченными уравнениями второго порядка.

Библиогр. 22 назв.

УДК 530.145.1; 534.2.

Заславский Г. М. **Стохастичность квантовых систем.** — В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983.

Рассматриваются квантовые N -системы, т. е. такие системы, которые в классическом пределе обладают свойством стохастичности (перемешивания траекторий в фазовом пространстве). Анализируются условия и особенности возникновения стохастичности в квантовых системах. Обсуждаются два типа задач: задача о случайном распределении энергетических уровней при стохастическом разрушении интегралов движения и задача о стохастичности квантового нелинейного осциллятора, возмущаемого внешней периодической силой.

Ил. 5, библиогр. 19 назв.

УДК 532.59

Петвиашвили В. И., Похотелов О. А. **Вихри в мелкой вращающейся атмосфере.** — В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983.

Из уравнений длинных волн в мелкой вращающейся атмосфере выводятся упрощенные уравнения, описывающие волны Россби и инерционные волны. Показано, что эти колебания могут образовывать единичные вихри антициклонического и циклонического типов. Полученные решения имеют качественное сходство с красным пятном Юпитера и тайфунами на Земле.

Ил. 4, библиогр. 6 назв.

УДК 621.372.22

Горшков К. А., Миронов В. А., Сергеев А. М. **Связанные стационарные солитонные образования.** — В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983.

Рассматриваются локализованные образования в различных неинтегрируемых системах нелинейных уравнений в частных производных. Показано, что существуют стационарные связанные состояния одиночных солитонов, объединенных вполне определенным образом (синфазно либо противфазно). В ряде систем возможны солитоны дискретного спектра. Приведены результаты экспериментального исследования мультисолитонов.

Ил. 12, библиогр. 17 назв.

УДК 538.116 : 534.143

Елеонский В. М. Солитоны в магнитных средах.— В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983.

На основе уравнений Ландау — Лифшица, описывающих динамику волн в ферромагнетиках, дана полная классификация уединенных стационарных волн, распространяющихся нормально к оси анизотропии. Рассмотрено своеобразие эффектов, возникающих в одноосных ферромагнетиках при учете диссипации и внешнего поля («накачки»). Обращается внимание на задачи, не получившие в настоящее время своего полного решения. Приведены результаты численных расчетов по столкновению солитонов друг с другом и с доменными границами.

Ил. 1, библиогр. 16 назв.

УДК 535.416.3

Татарский В. И. Адаптивные системы и когерентность.— В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983.

Обобщается понятие когерентности, удобное для статистического описания адаптивных волновых систем. Вводится функция условной когерентности, зависящая от статистических свойств поля и состояния адаптивной системы. Использование функции условной когерентности позволяет определить возможный выигрыш от использования адаптивной системы и построить для нее оптимальный алгоритм управления. В первой части работы рассматриваются адаптивные системы, в которых можно пренебречь квантовыми шумами. Полученные результаты применимы к волновым полям любой физической природы. Вторая часть посвящена рассмотрению квантовых шумов в адаптивной оптической системе.

Библиогр. 10 назв.

УДК 538.576.452.1

Беспалов В. И., Манишин В. Г., Пасманик Г. А. Адаптивное возбуждение оптического излучения в резонаторах с зеркалами, обращающими волновой фронт.— В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983.

Рассматриваются свойства четырехволновых гиперзвуковых зеркал, обращающих волновой фронт падающего на них излучения. Найдены области параметров этих зеркал, при которых процесс обращения волнового фронта является устойчивым.

Обсуждаются возможности использования обращающих волновой фронт зеркал для оптимальной передачи излучения через неоднородные среды. Показано, что излучение, возбуждающееся в резонаторе, образованном такими зеркалами, имеет минимальные потери мощности при его распространении от одного зеркала к другому. Найдены условия самовозбуждения подобных резонаторов и исследована зависимость этих условий от параметров резонатора и характеристик лазерного излучения, накачивающего обращающие четырехволновые зеркала.

Ил. 8, библиогр. 5 назв.

УДК 538.576.452.1

Бункин Ф. В., Власов Д. В., Кравцов Ю. А. Обращение волнового фронта акустических пучков.— В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983.

Дана классификация предложенных к настоящему времени способов обращения волнового фронта (ОВФ) волновых полей различной физической природы за счет тех или иных нелинейных взаимодействий, к которым относятся процессы вынужденного рассеяния, трех- и четырехволновые взаимодействия. Среди последних целесообразно выделить голографические (объемные и поверхностные) и параметрические схемы ОВФ, позволяющие обращать волну с усилением.

Рассмотрены возможности создания устройств ОВФ-звуковых пучков с использованием различных нелинейных эффектов.

Описаны результаты некоторых экспериментов по обращению волнового фронта звуковых полей и указаны основные области возможного применения акустических устройств ОВФ.

Ил. 3, библиогр. 17 назв.

УДК 533.952

Зельдович Я. Б., Румайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитное динамо в стационарном потоке.— В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация, М.: Наука, 1983.

Исследованы условия возникновения и свойства экспоненциально растущего по времени магнитного поля в заданном стационарном поле скорости (кинематическое динамо) при больших магнитных числах Рейнольдса. При движении проводящей жидкости по произвольному семейству стационарных поверхностей скорость поля может быть отрицательной или положительной, но стремящейся к нулю при $R_m \rightarrow \infty$.

Библиогр. 27 назв.

УДК 550.388.2

Трахтенгерц В. Ю. **Альфвеновские мазеры.** — В кн.: **Нелинейные волны: Самоорганизация.** М.: Наука, 1983.

Рассмотрены физические процессы в альфвеновских мазерах (АМ), действующих в магнитосфере Земли. Исследованы различные режимы генерации АМ, проанализирована динамика спектров излучения АМ. Рассмотрена связь пиковых режимов генерации АМ с автоколебаниями магнитных силовых трубок. Исследована динамика протонного АМ с учетом резонансных свойств и нелинейности ионосферных зеркал.

Ил. 4, библиогр. 12 назв.

УДК 551.465

Баренблатт Г. И. **Некоторые новые задачи турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией.** — В кн.: **Нелинейные волны: Самоорганизация.** М.: Наука, 1983.

Рассматриваются задачи, возникающие в связи с турбулентностью в сильно устойчиво стратифицированной жидкости: задача о захвате жидкости сформировавшимся турбулентным пятном и задача о нестационарном турбулентном тепло- и массообмене в условиях сильно устойчивой стратификации.

Задача о захвате рассматривается для мгновенного источника турбулентности, занимающего в начальный момент горизонтальный плоский слой малой толщины. Рассмотрение ведется на основе уравнения баланса турбулентной энергии. Асимптотическое решение задачи оказывается автомоделльным, но эта автомоделльность — второго рода, так что показатель степени времени в автомоделльных переменных определяется решением нелинейной задачи на собственные значения.

Предложена двухфазная модель нестационарного турбулентного тепло-массообмена в сильно устойчиво стратифицированной жидкости. Жидкость представляется в виде совокупности двух взаимно проникающих фаз: турбулентных пятен и ламинарных прослоек.

Ил. 5, библиогр. 15 назв.

УДК 551.466

Островский Л. А., Степаняц Ю. А., Цимринг Л. Ш. **Взаимодействие внутренних волн с течениями и турбулентностью в океане.** — В кн.: **Нелинейные волны: Самоорганизация.** М.: Наука, 1983.

Обзор посвящен обсуждению теоретических моделей процессов взаимодействия внутренних волн с течениями и турбулентностью в океане. Представлено современное состояние теории гидродинамической неустойчивости сдвиговых течений в стратифицированной жидкости. В связи с этим рассмотрен, в частности, вопрос о волнах с отрицательной энергией и их роли в дестабилизации течений. Взаимодействие внутренних волн с мелкомасштабной турбулентностью рассматривается на основе полумпирической теории турбулентности. Описаны эффекты затухания внутренних волн на турбулентности верхнего слоя, а также усиления и перестройки турбулентности в заданном поле внутренней волны. В заключение обсуждается вопрос о роли различных источников и стоков энергии в формировании поля внутренних волн в океане.

Ил. 17, библиогр. 74 назв.

УДК 551.461

Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н. **Воздействие внутренних волн на морскую поверхность.** — В кн.: **Нелинейные волны: Самоорганизация.** М.: Наука, 1983.

Дан обзор современного состояния проблемы воздействия внутренних волн на морскую поверхность. Приведены результаты натуральных наблюдений и теоретический анализ известных механизмов воздействия внутренних волн на поверхностные волны, описаны результаты имеющихся лабораторных экспериментов.

Ил. 9, библиогр. 31 назв.

УДК 432.541.591

Богатырев С. Д., Брайловская В. А., Коган В. Р., Таланов В. И., Феоктистов И. Ю. **Принципы построения лабораторной модели стратифицированного океана.** — В кн.: **Нелинейные волны: Самоорганизация.** М.: Наука, 1983.

Обсуждаются вопросы масштабного моделирования структуры верхнего слоя океана и предложен способ создания термостратификации, позволяющий получать устойчивую, сильно выраженную температурную стратификацию в лабораторных бассейнах. Результаты применения этого способа проиллюстрированы на математической и физической моделях.

Ил. 7, библиогр. 5 назв.