

INTERNATIONAL
SCHOOL IN
NONLINEAR
SCIENCE

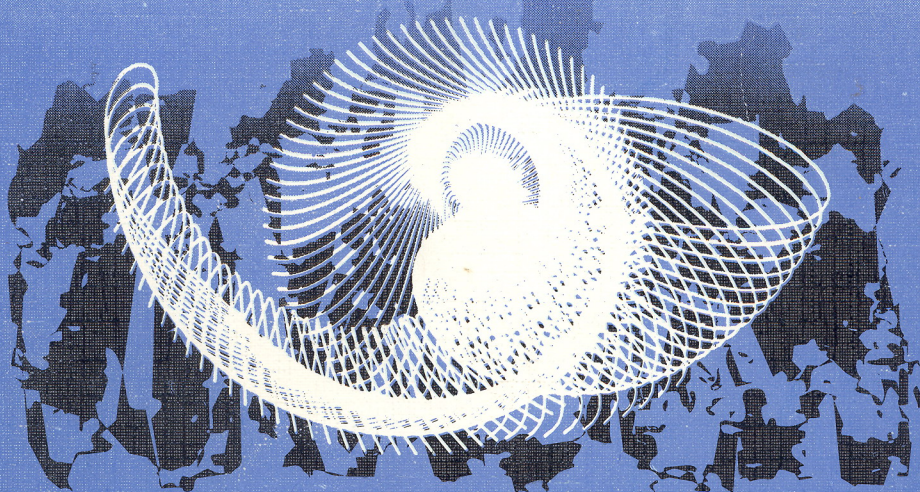


September 5-16, 1995

NONLINEAR WAVES

Synchronization and Patterns

P a r t 2



Nizhny Novgorod, Russia

1 9 9 5

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

синхронизация и структуры

Под редакцией М. И. Рабиновича,
М. М. Сушика,
В. Д. Шалфеева

Издательство Нижегородского университета
Нижегород
1995

ББК 22.3

H 44

H 44 Nonlinear Waves. Synchronization and Patterns. Part 2.

Edited by M. I. Rabinovich, M. M. Sushchik, and V. D. Shalfeev

Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Press, 1995 - 162 pp.

This book includes the reviews lectures, and communications presented at the International School in Nonlinear Science held in Nizhny Novgorod in September 1995. Problems of dynamical chaos, synchronization and pattern formation are considered in applications to hydrodynamics, biology, electronics, and other branches of science. The Proceedings are published in two volumes, each containing papers arranged alphabetically.

The book is intended for specialists involved with investigations of nonlinear phenomena.

H $\frac{1604010000-319}{M 137(03)-95}$

ISBN 5 - 85746 - 173 - 1

©Nizhny Novgorod University Press, 1995
©Institute of Applied Physics of RAS, 1995

ББК 22.3

Н 44

- Н 44 Нелинейные волны. Синхронизация и структуры. Ч.2.
Под редакцией М. И. Рабиновича, М. М. Сушика, В. Д. Шалфеева.
Нижний Новгород: Издательство Нижегородского
университета, 1995. – 162 с.

Сборник содержит обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на Международной школе по нелинейным колебаниям (Нижний Новгород, сентябрь, 1995 г.), а также по материалам семинаров, состоявшихся на этой школе. Проблемы динамического хаоса, синхронизации, образования структур обсуждаются в связи с различными приложениями в гидродинамике, биологии, электронике и др. Материал сборника условно разделен на две части и публикуется в виде двух отдельных томов; в каждой из частей работы расположены в алфавитном порядке.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся проблемами нелинейных явлений.

Н $\frac{1604010000-319}{М 137(03)-95}$

ISBN 5 – 85746 – 173 – 1

©Нижегородский университет, 1995
©Институт прикладной физики РАН, 1995

The Organizing Committee of The International School in Nonlinear Science
highly appreciates the support of

The Russian Ministry of Science and Technical Policy,
The State Committee of Higher Education of the Russian Federation,
The Russian Foundation for Basic Research,
The International Soros Science Education Program,
The Nizhny Novgorod Regional Administration

Оргкомитет Международной школы по нелинейным явлениям приносит
глубокую признательность спонсорам школы:

Российскому Министерству науки и технической политики,
Государственному комитету по высшему образованию Российской Федерации,
Российскому фонду фундаментальных исследований,
Международному научному фонду Дж. Сороса,
Нижегородской областной администрации

EVIDENCE OF NONEQUILIBRIUM BOSE CONDENSATION OF PHONONS IN ANTIFERROMAGNET UNDER MICROWAVE NOISY PUMPING

A. V. Andrienko and V. L. Safonov

Institute of Molecular Physics, RRC "Kurchatov Institute",
Moscow 123182, RUSSIA

Magnetoelastic waves and their quanta – quasiphonons describe normal modes of coupled elastic and magnetic subsystems in magnets. We observed the parametric excitation of (quasi)phonons in the antiferromagnet FeBO_3 by a noisy microwave magnetic field (parallel pumping) at temperatures $T = 77$ and 293 K in the static magnetic fields $80 - 400$ Oe [1]. The pump spectrum had the Gaussian form with the central frequency $\nu_p \simeq 1.2$ GHz. Note that the spectral width $\Delta\nu \simeq 3$ MHz was much greater than the linear relaxation rate ($\simeq 0.1$ MHz) of phonons. Two characteristic critical pump powers were detected. The first threshold corresponds to the onset of nonlinear absorption of microwave field (i.e. the mean number of nonequilibrium phonons $\neq 0$). However the response from the system still has noisy character. Above the second threshold strong phase correlations arise between the excited phonons. This means that the nonequilibrium phonons generate a coherent state. The new state (nonequilibrium Bose condensate of phonons as we call it) is analogous to that one which appears in the case of monochromatic pumping. The coherent response from the nonequilibrium Bose condensate was detected independently by 1) the excitation of its collective oscillations (using so-called modulation method [2] which is a powerful tool for studying monochromatic forced oscillations in nonlinear media) and by 2) the characteristic electromagnetic irradiation from the sample after microwave pulse. The mechanism of the observed self-organization of nonequilibrium phonons is supposed to be a kind of synchronization of waves in nonlinear system.

This work was supported by the International Science Foundation (grant N94300) and Russian Fund of Fundamental Investigations (grant 95-02-03960).

References

- [1] A. V. Andrienko, V. L. Safonov, "Observation of nonequilibrium Bose condensation of quasiphonons excited by a noisy microwave pump", *Pis'ma ZhETF*, 1994, Vol.60, No.6, pp.446–451, [English transl.: *JETP Lett.*, 1994, Vol.60, No.6, pp.464–469].
- [2] A. V. Andrienko, V. L. Safonov, A. Yu. Yakubovskii, "Modulation–method investigation of the steady state of parametric spin waves in antiferromagnets", *ZhETF*, 1987, Vol.93, No.3, pp.907–917, [English transl.: *Sov. Phys. JETP*, 1987, Vol.66, No.3, pp.511–516].

НАБЛЮДЕНИЕ НЕРАВНОВЕСНОЙ БОЗЕ КОНДЕНСАЦИИ ФОНОНОВ В АНТИФЕРРОМАГНЕТИКЕ ПРИ ШУМОВОЙ НАКАЧКЕ

А. В. Андриенко, В. Л. Сафонов

Магнитоупругие волны и их кванты – квазифоны описывают нормальные моды связанных упругой и магнитной подсистем в магнетиках. Мы наблюдали параметрическое возбуждение (квази) фононов в антиферромагнетике FeVO_3 под действием СВЧ магнитного поля (методом параллельной накачки) при температурах $T = 77$ и 293 К в статических магнитных полях $80 - 400$ Э [1]. Спектр накачки имел гауссову форму с центральной частотой $\nu_p \simeq 1.2$ ГГц. Следует отметить, что спектральная ширина $\Delta\nu \simeq 3$ МГц была много большей чем скорость релаксации ($\simeq 0.1$ МГц) фононов. Было обнаружено две характерных мощности накачки. Первый порог соответствует началу нелинейного поглощения микроволнового поля (т.е. среднее число неравновесных фононов уже $\neq 0$). Однако отклик системы имел шумовой характер. При превышении же второго порога возникали сильные фазовые корреляции в системе возбужденных фононов. Это означает, что неравновесные фононы образуют когерентное состояние. Новое состояние (неравновесный бозе конденсат фононов) аналогично состоянию, возникающему в случае монохроматической накачки.

Когерентный отклик от неравновесного бозе конденсата независимо был обнаружен 1) возбуждением его коллективных колебаний (так называемым, модуляционным методом [2], который служит мощным средством исследования вынужденных монохроматических колебаний в нелинейных средах) и посредством 2) характерного электромагнитного излучения из образца после микроволнового импульса. Мы предполагаем, что наблюдаемая самоорганизация в системе неравновесных фононов обусловлена синхронизацией.

OBSERVATION OF COUPLED PHOTON-PHONON OSCILLATIONS AT MICROWAVE PUMPING OF ANTIFERROMAGNET

A. V. Andrienko and V. L. Safonov

Institute of Molecular Physics, RRC "Kurchatov Institute"
Moscow 123182, RUSSIA

We studied the parametric excitation of magnetoelastic waves in antiferromagnet FeBO_3 by a monochromatic microwave magnetic field (parallel pumping) with the frequency $\nu_p \simeq 800$ MHz at temperatures $T = 77$ and 293 K in the static magnetic fields $\simeq 140$ Oe. The sample was placed in the helix resonator (the filling factor was $\simeq 0.05$). In order to study the absorption line of the system "resonator-sample" an additional small microwave signal was applied.

Below the threshold of parametric resonance the absorption curve had the Lorentz line shape (the quality factor $Q \simeq 300$). However just above the threshold of pumping we observed the lineshape splitting which is typical for a system with coupled oscillations. We interpret this "two-hump" absorption curve as the spectrum of new normal "photon-phonon" modes in the "resonator-sample" system. The first oscillator is the resonator electromagnetic mode and the second oscillator is the resonant pair of magnetoelastic waves of half frequency of pumping field with equal but oppositely directed wave vectors. The coupling coefficient between these oscillators is equal to zero till the threshold of parametric instability and it increases with the increasing of the overthreshold parameter. This fact follows from the dependence of the distance between the absorption maxima on pumping power. Obtained experimental results are in agreement with the predictions of theoretical model [1]. Preliminary results have been published in [2].

Traditionally the experiments on parametric pumping in magnets are considered on the base of approximation of small sample which weakly changes electromagnetic fields in the resonator and its Q -factor. However our experiment shows that this approximation is not correct due to lineshape splitting. As far as the specificity of magnetoelastic waves is not important, one can expect analogous lineshape splitting for other resonance experiments.

This work was supported by the International Science Foundation (grant N94300) and Russian Fund of Fundamental Investigations (grant 95-02-03960).

References

- [1] A. V. Andrienko, V. L. Safonov, "Electromagnetic emission by a system of nonequilibrium quasiphonons in an antiferromagnet", *Pis'ma ZhETF*, 1994, Vol.60, No.11, pp.787-791, [English transl.: *JETP Lett.*, 1994, Vol.60, No.11, pp.800-804].
- [2] A. V. Andrienko, V. L. Safonov, "Observation of coupled photon-phonon oscillations at parametric excitation of magnetoelastic waves in antiferromagnet", *Pis'ma ZhETF*, 1995, Vol.62, No.2, pp.147-151, [English transl.: *JETP Lett.*, 1995, Vol.62, No.2].

НАБЛЮДЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ФОТОН–ФОНОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ СВЧ НАКАЧКЕ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКА

А. В. Андриенко, В. Л. Сафонов

Исследовалось параметрическое возбуждение магнитоупругих волн в антиферромагнетике FeVO_3 магнитным СВЧ полем (метод параллельной накачки) с частотой $\nu_p \simeq 800$ МГц при температурах $T = 77$ и 293 К в статическом магнитном поле $\simeq 140$ Э. Образец был помещен в спиральный резонатор (фактор заполнения $\simeq 0.05$). Для изучения линии поглощения системы "резонатор–образец" использовалось дополнительное слабое микроволновое поле.

Кривая поглощения до порога параметрического резонанса имела лоренцеву форму (добротность $Q \simeq 300$). Однако сразу же за порогом накачки наблюдалось расщепление линии типичное для системы со связанными колебаниями. Эта "двугорбая" кривая поглощения интерпретируется как спектр новых нормальных "фотон–фононных" мод в системе "резонатор–образец". Первым осциллятором является электромагнитная мода резонатора, а вторым осциллятором служит резонансная пара магнитоупругих волн половинной частоты поля накачки с равными, но противоположно направленными волновыми векторами. Коэффициент связи между этими осцилляторами равен нулю до порога параметрической неустойчивости и он возникает и возрастает с ростом параметра неустойчивости. Этот факт следует из зависимости расстояния между максимумами поглощения мощности накачки. Полученные результаты согласуются с предсказаниями теоретической модели [1]. Предварительные результаты опубликованы в работе [2].

Традиционно эксперименты по параметрической накачке в магнетиках рассматриваются с точки зрения приближения малого образца, который слабо изменяет распределение электромагнитных полей в резонаторе и его добротность. В нашем эксперименте, однако, из-за расщепления линии поглощения видно, что это приближение некорректно. Поскольку здесь специфика магнитоупругих волн не имеет принципиального значения, то можно ожидать подобного расщепления кривых поглощения и в других резонансных экспериментах.

THE STATIONARY AND QUASISTATIONARY SOLUTIONS OF COMPLEX GINZBURG-LANDAU EQUATION

M.Bazhenov¹, T.Bohr², K.Gorshkov¹ and M.Rabinovich¹

¹Institute of Applied Physics, 46 Uljanov Str., 603600 Nizhny Novgorod, RUSSIA

²The Niels Bohr Institute, Blegdamsvej 17, 2100 Copenhagen, DENMARK

Abstract

The structure of the phase space of stationary and quasi-stationary (moving with a constant velocity v_0) solutions of 1D CGLE is investigated by the methods of ODE qualitative theory. The existence of a countable set of double-loop heteroclinic trajectories is proved. The complex "shock-hole-shock" structures moving with constant velocity v_0 along the x -axis correspond to the double-loop trajectories.

Introduction

We consider the complex Ginzburg-Landau equation in the form

$$\partial_t s = s - (1 + i\beta)|s|^2 s + (1 + i\alpha)\partial_x^2 s \quad (1)$$

Equation (1) has a family of hole solutions in the form [1]

$$s_h(x - v_0 t, t) = (A_h(x - v_0 t) + \eta v_0) e^{i\Theta_h(x - v_0 t) + ipv_0(x - v_0 t) - i\Omega t}, \quad (2)$$

where

$$A_h(\xi) = \lambda \tanh(k\xi)$$

$$d\Theta_h/d\xi = \kappa \tanh(k\xi)$$

Here η , λ , κ , and v_0 are constant coefficients, η being a complex one, and $p = 1/2(\alpha - \beta)$. The frequency Ω meets the dispersion relation

$$\Omega(Q, v_0) = \omega(Q) - v_0 Q \quad (3)$$

$$\omega(Q) = \beta + (\alpha - \beta)Q^2$$

For $\xi = x - v_0 t \rightarrow \pm\infty$, the solution (2) tends asymptotically to solutions in the form of plane waves

$$s_{ai}(\xi, t) = \sqrt{1 - Q_i^2} e^{-i\Omega t + iQ_i \xi}, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

with asymptotic wave numbers Q_1 (for $\xi \rightarrow -\infty$) and Q_2 (for $\xi \rightarrow +\infty$). Using the dispersion relation (3) one can readily find that

$$\omega(Q_1) - v_0 Q_1 = \omega(Q_2) - v_0 Q_2 \quad (5)$$

The condition (5) is, actually, the condition of conservation (in a moving reference frame) of constant phase difference between the asymptotic (for $\xi \rightarrow \pm\infty$) limits of the solution (2).

1 Qualitative Analysis of the Structure of Phase Space

Let us make a substitution of variables $s(x, t) = a(x, t)e^{-i\Omega t}$ in eq. (1) and pass to the reference frame moving with constant velocity v_0 . We obtain

$$\partial_t a = v_0 \partial_\xi a + (1 + i\Omega)a - (1 + i\beta)|a|^2 a + (1 + i\alpha)\partial_\xi^2 a \quad (6)$$

Stationary solutions of the evolution problem (6) satisfy a system of ordinary differential equations in \mathbf{R}^4 :

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\xi} &= b \\ \frac{db}{d\xi} &= -\frac{1 + i\Omega}{1 + i\alpha} a + \frac{1 + i\beta}{1 + i\alpha} |a|^2 a - \frac{v_0}{1 + i\alpha} b \end{aligned} \quad (7)$$

The system (7) has two single-parametric families of solutions that are periodic along x :

$$a_1(\xi) = A_{a1}e^{iQ_1\xi+i\varphi_1}, \quad b_1(\xi) = iQ_1A_{a1}e^{iQ_1\xi+i\varphi_1}; \quad (8)$$

$$a_2(\xi) = A_{a2}e^{iQ_2\xi+i\varphi_2}, \quad b_2(\xi) = iQ_2A_{a2}e^{iQ_2\xi+i\varphi_2}, \quad (9)$$

where $A_{ai} = \sqrt{1 - Q_i^2}$, and a singular point

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0 \quad (10)$$

1.1 The case $v_0 = 0$

Statement. In the case $v_0 = 0$, the system of equations (7) is conservative and reversible (in the sense that x and $-x$ are interchangeable, i.e., $x \Rightarrow -x$). There exist two involutions:

$$a \Rightarrow -a \quad (11)$$

and

$$b \Rightarrow -b \quad (12)$$

which map the phase flow of eq. (7) into itself with the change $x \Rightarrow -x$. Besides, the system (7) is invariant to the transformation

$$a \Rightarrow ae^{i\varphi_0}, \quad b \Rightarrow be^{i\varphi_0}, \quad \varphi_0 = \text{const} \quad (13)$$

The validity of the statement is readily verified by direct calculations. It is also easy to check that each of the above mentioned involutions maps the families of the solutions (8) and (9) into each other. It follows immediately from the statement that the phase flow is symmetric with respect to the plane $a = 0$ or $b = 0$, with the change $x \Rightarrow -x$ taken into account, and invariant to a simultaneous turn by an angle φ_0 in the planes $a = 0$ and $b = 0$.

Let us rewrite (7) for $v_0 = 0$ in a slightly different form. Supposing $a(x) = u(x)e^{i\varphi(x)}$ and using relation $\omega = \beta + (\alpha - \beta)Q^2$ we find

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= u(\psi^2 - Q^2) + B(u^2 - A_a^2)u \\ u\psi' &= -2v\psi + C(u^2 - A_a^2)u, \end{aligned} \quad (14)$$

where $\psi = d\varphi/dx$, $B = (1 + \alpha\beta)/(1 + \alpha^2)$, $C = (\beta - \alpha)/(1 + \alpha^2)$. The system (14) has the dimension smaller than that of (7) but it contains a singularity at the plane $u = 0$. The involutions

$$u \Rightarrow -u, \quad \psi \Rightarrow -\psi, \quad x \Rightarrow -x \quad (15)$$

$$v \Rightarrow -v, \quad \psi \Rightarrow -\psi, \quad x \Rightarrow -x \quad (16)$$

of the system (14) correspond to the involutions (11) and (12) of the system (7).

The fixed points

$$u = A_a, \quad \psi = Q \quad (17)$$

$$u = A_a, \quad \psi = -Q \quad (18)$$

of the system (14) correspond to the periodic solutions (8) and (9) of the system (7) for $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Note that the two other points

$$u = -A_a, \quad \psi = Q \quad (19)$$

$$u = -A_a, \quad \psi = -Q \quad (20)$$

correspond to the same periodic solutions (8) and (9) but with $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi$. Thus, in passing from (7) to (14) there arises a degeneration due to the fact that only two singular points (17), (19) or (18), (20) corresponds to each family of periodic solutions (8) or (9).

The types of the singular points (17) and (18) were investigated in [2]. Both of these points are saddles, but one of them has a 1D unstable S_2^u and a 2D stable S_2^s manifolds, while the other one vice

versa. The type of the singular point on 2D manifolds is determined by parameters of the system. The spectrum of each singular point is purely real if

$$D = B_1^3 - \left(\frac{27}{2} \left(\frac{C_1}{A_1} \right)^2 + 6 \right) B_1^2 + 12B_1 - 8 > 0 \quad (21)$$

and complex if $D < 0$, where $B_1 = B(A_a/Q)^2$, $C_1 = C(A_a/Q)^2$. Due to the symmetry of the phase flow of eq. (14) with respect to $u = \psi = 0$ and $v = \psi = 0$ (with $x \Rightarrow -x$), the singular point (19), (20) has a spectrum of eigenvalues coinciding with the spectrum of the point (17), (18).

The intersection of the 2D stable S_2^s and 2D unstable S_2^u manifolds of the singular points (17), (18) ((19), (20)) is structurally stable in \mathbf{R}^3 . This means that the heteroclinic trajectory $\Gamma_s(\bar{\Gamma}_s)$ connecting the equilibrium states (17), (18), ((19), (20)) is structurally stable in a general class of dynamical systems and, as was shown in [T. Bohr et al.], the shock solution

$$a_s(x) = A_s(x)e^{i\theta_s(x)+i\varphi_s} \quad (22)$$

of the basic equation (1) corresponds to this trajectory.

Consider now the solution (2) of eq. (1). Investigation of the hole solution (2) for $x \rightarrow \pm\infty$ verifies that a hole solution in the phase space of the system (14) corresponds to the heteroclinic trajectory $\Gamma_h(\bar{\Gamma}_h)$ connecting the singular points (17) and (20) ((19) and (18)). One of the trajectories belonging simultaneously to the 2D stable and 2D unstable manifolds of the points (17)–(20) cannot be such a trajectory because the hole solution is monotonic both for $x \rightarrow +\infty$ and $x \rightarrow -\infty$ for any values of the parameters. Thus, the only possibility is the intersection of 1D stable S_1^s and unstable S_1^u manifolds of the equilibrium states (17) and (20) ((19) and (18)). In a general case, however, such an intersection is structurally unstable, moreover, it has co-dimension two in \mathbf{R}^3 .

Let us come back again to the system (7). It is clear from the considerations presented above for the stability points (17)–(20) that one of the periodic solutions, (8) or (9), has a 2D stable, W_2^s , and a 3D unstable, W_3^u , manifolds and the other solution vice versa. A shock solution in the phase space of the system (7) corresponds to a structurally stable intersection of 3D stable and unstable manifolds of the periodic solutions (8) and (9). The intersection of 2D manifolds W_2^s and W_2^u in \mathbf{R}^4 is, on the contrary, structurally unstable.

Let us recall that the phase flow of eq. (7) is symmetric (with $x \Rightarrow -x$) to the involution plane $a = 0$. Each of the 2D manifolds of periodic motions (8) and (9) generally, intersects the plane $a = 0$ at the same point by virtue of this symmetry. On the other hand, the intersection of the manifolds W_2^s and W_2^u at one point means that they intersect along the trajectory that connects the periodic solutions (8) and (9). The situation described is structurally stable in the class of the systems having only the involutions (11) and (12). The invariance of the phase flow to the turn by an angle φ_0 in the planes $a = 0$, $b = 0$, in its turn, gives instead of a single heteroclinic trajectory a whole family of such trajectories. This means that the intersection of the plane $a = 0$ with the manifolds W_2^s and W_2^u occurs not at one point but around a closed curve. Such a situation, however, is no longer structurally stable in \mathbf{R}^4 and has the co-dimension one in the class of the systems having two involutions (11) and (12) and invariant to the transformation (13).

It was assumed above that the parameters α , β and Q of the system (7) (or (14)) can change independent of each other. In this case the intersection of the manifolds W_2^s and W_2^u (S_1^s and S_1^u) in the phase space of the system (7) ((14)) is really structurally unstable and is broken with a small perturbation of the parameters. However, the situation will change if we assume that only two parameters α and β are independent and choose the value of Q depending on α and β . It's clear that the dynamical systems possessing such a property will form a film of co-dimension one.

Proposition 1: For any values of the parameters α and β giving the real solution $Q(\alpha, \beta)$ of the equation

$$Q^4(1 - B - (2/9)C^2) + Q^2(B + (4/9)C^2) - (2/9)C^2 = 0 \quad (23)$$

there exists a heteroclinic trajectory $\Gamma_h(\bar{\Gamma}_h)$ moving from the point (17) ((19)) to the point (20) ((18)) and lying in the plane $P = \{u, v, \psi : \psi = (Q/A_a)u\}$ ($\bar{P} = \{u, v, \psi : \psi = (Q/A_a)u\}$).

Proof: Let us consider the plane P which contains the points (17) and (20). If the 1D manifolds S_1^s and S_1^u of the points (17) and (20) belong completely to the plane P and intersect the axis $u = \psi = 0$, they will intersect each other and there will exist a heteroclinic trajectory connecting these points. This supposition follows immediately from the symmetry of the phase flow (see(15)). The trajectories which

belong completely to the plane P have no singularity in the plane $u = 0$ as $\lim_{u \rightarrow 0}(\psi/u) = \text{const}$ for any curve lying in the plane P and intersecting the axis $u = \psi = 0$.

Obviously, the phase trajectory will belong completely to the plane P only if the derivative of the phase flow with respect to the normal to the plane P equals zero at all points of this trajectory. The latter condition determines the curve

$$C = \{u, v, \psi : v = \frac{CA}{3Q}(u^2 - A_a^2), \psi = \frac{Q}{A_a}u\} \quad (24)$$

So, the phase flow of the system (14) is tangent to the plane P at the points lying on the curve C . Now it is necessary to verify that the curve C is really the solution of the system (14) (C is the phase trajectory). Direct substitution of (24) into (14) shows that the curve C is the solution of the system (14) for all values of Q complying with equation (23). The determinant of equation (23) is strictly positive and it is easy to check that the set of values α and β giving the real solution of the equation (23) is not empty. The proposition is proved.

Consequence: Any phase trajectory of the system (14) moving from the halfspace $u > 0$ ($u < 0$) to the halfspace $u < 0$ ($u > 0$) intersects the axis $u = \psi = 0$.

Note that the analytical expression of the heteroclinic trajectory Γ_h (equation (24)) was obtained in the proof of the proposition. The hole solution of the basic equation (1) correspond to this trajectory.

1.2 Multiloop trajectories

We now consider the existence of multiloop heteroclinic trajectories, i.e., the trajectories to which the solutions containing several hole and shock structures correspond.

Definition: The heteroclinic trajectories belonging simultaneously to the manifolds W_3^s and W_3^u of the periodic solutions (8) and (9) and passing $(n - 1)$ times near the heteroclinic trajectory Γ_h corresponding to the intersection of the manifolds W_2^s and W_2^u are called n -loop trajectories.

According to this definition a solution containing n shocks and $(n - 1)$ holes lying between them corresponds to the n -loop trajectory.

Proposition 2: Let there exist in the phase space of the system (7) a heteroclinic contour, i.e., there co-exist two types of heteroclinic trajectories connecting the periodic solutions (8) and (9). Then there exists a countable set of double-loop trajectories.

Proof: Apparently, a double-loop trajectory existing in the phase space of the system (7) corresponds to an analogous trajectory in the phase space of the system (14) and vice versa. It is easier to investigate these trajectories in \mathbf{R}^3 , therefore we consider the phase space of the system (14). Suppose that the fixed points (17)–(20) are saddle-foci and (17) has a two-dimensional stable and a one-dimensional unstable manifolds. Then, to a shock solution corresponds a structurally stable heteroclinic trajectory Γ_s along which the unstable S_2^u and stable S_2^s manifolds of the points (17), (18) intersect. By virtue of the phase space symmetry with respect to $u = \psi = 0$, an analogous intersection (trajectory $\bar{\Gamma}_s$) occurs for the manifolds \bar{S}_2^u and \bar{S}_2^s of the singular points (19), (20).

The simplest double-loop heteroclinic trajectory $\bar{\Gamma}_{shs}$ originates at the singular point (20), moves along the unstable manifold \bar{S}_2^u near the trajectory $\bar{\Gamma}_s$, enters the vicinity of the point (19), then passes along the curve $\bar{\Gamma}_h$ to the vicinity of the point (18), and, finally, moving along Γ_s , it ends at the point (17). Clearly, there exists still another double-loop trajectory Γ_{shs} that is symmetric to $\bar{\Gamma}_{shs}$ and connects the points (18) and (19).

Let us designate through T_h a global map of a secant in the neighbourhood of the heteroclinic trajectory Γ_h and through T_0 a local map in the neighbourhood of saddle-focus.

Consider the singular point (19). The system (14) may be linearized in the neighbourhood of saddle-focus and, on certain transformations of coordinates, it may be transformed to

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= \lambda \bar{z}, & \lambda > 0 \\ \dot{\bar{\varphi}} &= \omega, & \omega > 0 \\ \dot{\bar{\rho}} &= -\bar{\rho}, \end{aligned} \quad (25)$$

where $(\bar{z}, \bar{\varphi}, \bar{\rho})$ are the variables in the local cylindrical reference frame in the neighbourhood of the point (19). Consider the set $\bar{R} = \{(\bar{z}, \bar{\varphi}, \bar{\rho}) : \bar{z} \in (0, \bar{z}_1], \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0, \bar{\rho} = \bar{\rho}_0\}$ lying in the vicinity of the saddle-focus (19). We take the secant $\bar{Z} = \{\bar{z} : \bar{z} = \bar{z}_1\}$ and find the set $T_0\bar{R}$ on it.

From the first equation in the system (25) we have $\bar{z} = \bar{z}_1 = \bar{z}e^{\lambda t}$, $\bar{z} \in (0, \bar{z}_1]$. Then,

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}^{(1)} &= \bar{\varphi}_0 + \frac{\omega}{\lambda} \ln \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}}, \\ \bar{\rho}^{(1)} &= \bar{\rho}_0 \left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}_1} \right)^{1/\lambda}\end{aligned}\quad (26)$$

Apparently, eqs. (26) describe the spiral connecting the points $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0$ and $\bar{\rho} = 0$.

Consider the cylindrical surface $\bar{K} = \{\bar{z}, \bar{\varphi}, \bar{\rho} : \bar{z} \in (0, \bar{z}_1], \bar{\varphi} \in [0, 2\pi), \bar{\rho} = \bar{\rho}_0\}$ in the vicinity of the singular point (19). The intersection of the two-dimensional manifold \bar{S}_2^u of the singular point (20) with the surface \bar{K} occurs along the curve \bar{C} originating from the point $\bar{z} = 0$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0$ on the trajectory $\bar{\Gamma}_s$, that is directed along K towards larger values of the variable \bar{z} .¹ The curve $\bar{C} \in \bar{K}$ is topologically equivalent to the section $\bar{R} \in \bar{K}$. Consequently, its image on the secant \bar{Z} is also a spiral moving to the point $\bar{\rho} = 0$.

Thus, the spiral \bar{G} originating from the point $\bar{\gamma} = \{\bar{z}, \bar{\varphi}, \bar{\rho} : \bar{z} = \bar{z}_1, \bar{\rho} = 0\}$ is the image of the element \bar{D} ($\bar{D} \cap \bar{\Gamma}_s \neq 0$) of the manifold \bar{S}_2^u on the secant $\bar{Z} = \bar{z} : \bar{z} = \bar{z}_1$ in the vicinity of the point (19).

Repeating the same procedure we can show that the spiral G originating from the point $\gamma = \{z, \varphi, \rho : z = z_1, \rho = 0\}$ is the image of the element D ($D \cap \Gamma_s \neq 0$) of the manifold S_2^s of the singular point (17) on the secant $Z = \{z : z = z_1\}$, where (z, φ, ρ) are the local coordinates in the neighbourhood of the saddle-focus (18).

The global map T_h transforms the point $\bar{\gamma}$ to γ , and the spiral \bar{G} to $\bar{G}^{(1)}$ with the center at the point γ . One can readily verify that the spirals G and $\bar{G}^{(1)}$ rotate in opposite directions due to phase space symmetry. Consequently, they have a countable number of intersections. Each intersection corresponds to a double-loop heteroclinic trajectory connecting the points (20) and (17). Thus, the proposition is proved.

Note that the centers of the spirals G and $\bar{G}^{(1)}$ do not coincide in the absence of the heteroclinic trajectory Γ_h . However, if the manifolds S_1^s and S_1^u of the singular points (19), (18) are sufficiently close to each other, the spirals intersect, although the number of intersections is now finite rather than countable.

It is clear that more complicated n -loop ($n > 2$) heteroclinic trajectories may exist too. But the proof of this statement is much more complicated than that presented above. Therefore numerical investigation of the phase space of the system (14) is of great interest. A heteroclinic trajectory corresponding to one of the shock structures was found numerically in [2].

1.3 The case $v_0 \neq 0$

For $v_0 \neq 0$, the system of equations (7) is not reversible, like was in the case $v_0 = 0$. But the phase flow is also invariant to the transformation (13).

Suppose as before that $a(x) = u(x)e^{i\varphi(x)}$ and transform the system (7) to the form

$$\begin{aligned}u' &= v \\ v' &= u(\psi^2 - Q_1^2) + B(u^2 - A_{a1}^2)u + \alpha v_0 D(Q_1 - \psi)u - v_0 Dv \\ u\psi' &= -2v\psi + C(u^2 - A_{a1}^2)u + v_0 D(Q_1 - \psi)u + \alpha v_0 Dv,\end{aligned}\quad (27)$$

where $\psi = d\varphi/dx$, $D = 1/(1 + \alpha^2)$, and $A_{ai} = \sqrt{1 - Q_i^2}$. The system (27) has the fixed points

$$u = A_1, \quad \psi = Q_1 \quad (28)$$

$$u = -A_1, \quad \psi = Q_1 \quad (29)$$

$$u = A_2, \quad \psi = Q_2 \quad (30)$$

$$u = -A_2, \quad \psi = Q_2 \quad (31)$$

¹We analyse the half-space $\bar{z} \geq 0$.

and the straight line $v = u = 0$. Note that the asymptotic wave numbers Q_1 and Q_2 are related by $Q_2 + Q_1 = v_0/(\alpha - \beta)$. Consequently, for $v_0 \rightarrow 0$, the equilibrium states (28)–(31) transform to (17)–(20). The system (27) is degenerate relative to (7). The condition of invariance to (13) reduces for the system (27) to the condition of phase flow invariance to the transformations $u \Rightarrow -u$, $v \Rightarrow -v$.

The stability of the singular points (28)–(31) may be found directly from analysis of the linearized system (27). However, by virtue of continuous dependence of the roots of algebraic equation on its coefficients, we can state that the character and stability of the singular points (28)–(31) and (17)–(20) coincide for sufficiently small v_0 . If there exists, for $v_0 = 0$, a structurally stable heteroclinic trajectory connecting the points (17), (18), (19) and (20), then, for small enough v_0 , there exists a structurally stable heteroclinic trajectory corresponding to the intersection of two-dimensional stable and unstable manifolds of the singular points (28) and (30) ((29) and (31)). A shock solution moving with constant velocity v_0 along the x -axis corresponds to this trajectory in the frames of the initial evolution equation (1). The intersection of one-dimensional stable and unstable manifolds of the singular points (28) and (31) ((29) and (30)) corresponds to the hole solutions moving with constant velocity v_0 in the phase space of the system (27). Like in the case $v_0 = 0$, the heteroclinic trajectory corresponding to this intersection is structurally unstable in the general class of dynamical systems. However, the problem disappears if we assume that one of the parameters of the system (27), namely Q_1 , depends on the other parameters.

Thus, analysis of the phase space of the system (27) indicates that, besides fixed (motionless) structures, there must exist moving hole and shock structures. Moreover, results of the **Proposition 2** about multiloop trajectories are completely true for the case $v_0 \neq 0$. Indeed, the proof of this statement is based on the supposition of the existence of structurally stable heteroclinic trajectories connecting the singular points and on the local analysis of phase flow in the neighborhood of the saddle-focus. Complex shock-hole-shock structures moving with constant velocity v_0 correspond to such trajectories in the frames of the original evolution problem.

Acknowledgments

M.B. and M.R. wish to thank the Russian Foundation for Basic Research (project code N 94-02-03263-a). M.B., K.G. and M.R. wish to thank the International Science Foundation (grant N NOU 300) for the support of this research.

References

- [1] K.Nozaki, N.Bekki, *Phys.Lett.A*, 1985, Vol.110, p.133.
- [2] T. Bohr, G. Hubert, E. Ott, "The structure of spiral patterns", *Unpublished*, 1995.

СТАЦИОНАРНЫЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ

М. Баженов, Т. Бор, К. Горшков, М. Рабинович

Методами качественной теории ОДУ в фазовом пространстве одномерного комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау исследуются стационарные и квазистационарные (движущиеся с постоянной скоростью) решения. Доказано существование счетного множества двухобходных гетероклинических траекторий, которым соответствуют сложные двугорбые квазистационарные решения.

CHAOS IN QUANTUM SEMICONDUCTOR STRUCTURE IN TILTED MAGNETIC FIELD

V. Ya. Demikhovskii, V. A. Denisyuk

Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin av., Nizhny Novgorod 603600, RUSSIA
E-mail: pfm@nnucnit.nnov.su

Abstract

The quantum and classical dynamics of a charged particle moving in a thin film (heterostructure) placed in a tilted magnetic field is investigated. Isolated and overlapped nonlinear resonances between cyclotron frequency and longitudinal oscillation frequency are studied. The eigenvalues and eigenfunctions, the nearest - neighbor level spacing distribution, Δ_3 - statistics and the condition of chaos have been calculated. This model was applied to the explanation of some experimental results.

Introduction

In recent years much effort has been devoted to the investigation of quantum systems which classical counterparts display chaotic behavior. At the same time it is known that there is an essential progress in manufacturing and carrying out the experiments in low dimensional semiconductor microstructures. From this point theoretical investigation of nature of quantum chaos in heterostructures and the conditions of its appearance seems to be very important. In this work we study the dynamics of a charged particle moving in the thin film placed in a tilted magnetic field. First of all, we investigate this problem in a classical frame and then based on the obtained prediction we will make some theoretical and numerical observations of our system in the quantum limit.

1 Classical model

We model our thin film as a one-dimensional infinite potential well. Set of coordinates is defined so that the plane (x, y) is parallel to the film boundaries. Magnetic field lies in the plane (x, z) and is tilted with respect to the z - direction by a rotation angle θ around the y - axis. Our Hamiltonian is as follows,

$$H = \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + V(z), \quad (1)$$

where

$$V(z) = \begin{cases} 0, & |z| < \frac{a}{2}; \\ \infty, & |z| > \frac{a}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

e is the charge, m is the mass of an electron, c is the light velocity, a is the film thickness. Vector potential is chosen in this way $\mathbf{A} = (-H \cos \theta y, -H \sin \theta z, 0)$. When the magnetic field is perpendicular to the film plane our system is integrable and particle motion consists of two independent ones: the oscillation between the well walls and the rotation in the magnetic field. When we tilt the magnetic field we have a non-integrable system with a complex motion. It is convenient to rewrite our Hamiltonian in action-angle variables [1]. Then using the resonance perturbation theory we found the first order resonances between the cyclotron frequency ω defined for the normal component of the magnetic field and the odd harmonics of the longitudinal oscillation frequency $\Omega(J_1)$

$$\omega = n \Omega(J_1), \quad (3)$$

where $\omega = eH \cos \theta / mc$, $n = 1, 3, 5, \dots$. The well frequency depends upon the canonical variable action J_1 , which defines the energy of the motion in the well. Another canonical variable J_2 defines the cyclotron radius [1]. In a resonance domain, which has a width

$$\Delta J_{1p} = \frac{\omega_f}{G} n, \quad (4)$$

where ω_f is the frequency of the phase oscillation on the resonance [1] and $G = n^2\pi^2/ma^2$, the particle executes its motion changing radius and longitudinal energy. When nearest resonances are overlapped the motion becomes chaotic. Overlap parameter K is follows

$$K = 2\frac{\omega_f}{\omega}n = 2^{7/4}\frac{c^{1/4}}{e^{1/4}a^{1/2}}\frac{\tan^{1/2}\theta}{\cos^{1/4}\theta}\frac{J_2^{1/4}}{H^{1/4}}n. \quad (5)$$

With increasing angle θ the resonance widths grow and K becomes of the order of unity (Chirikov criterion of chaos is fulfilled). One can see from equation (5), because K is directly proportional to the resonance number n, the Chirikov criterion is satisfied first of all for resonances of higher harmonics. So, chaos domain goes from higher harmonics resonances to lower ones.

Later the same result for parameter K was obtained by Shepelyansky and Stone [2] which used non-linear map for this system in the case of the presence of electric field directed along z - axis.

2 Quantum description

The Hamiltonian operator of our system is given by

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{eH \sin \theta}{mc} \hat{p}_y z, \quad (6)$$

where \hat{H}_0 is the unperturbed Hamiltonian of the particle moving in the film in the perpendicular magnetic field. The spectrum of \hat{H}_0 is

$$E_{m_1, m_2}^0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} m_1^2 + \hbar\omega(m + \frac{1}{2}), \quad (7)$$

where m_1 is the well level number, m_2 is the Landau Level number. Let's write wave function of \hat{H} as an expansion over the unperturbed Hamiltonian eigenfunctions

$$\psi(x, y, z) = \int \sum_{m_1'} \sum_{m_2'} C_{m_1' m_2' p_x'} \psi_{m_1' m_2' p_x'}^0 dp_x', \quad (8)$$

Substituting (8) into the stationary Schrödinger equation we obtain the system of algebraic equations for expansion coefficients C_{m_1, m_2} [1]

$$E_{m_1, m_2}^0 C_{m_1, m_2} + iF \sum_n \left(\frac{m_1(m_1 - n)}{n^2(2m_1 - n)^2} \sqrt{m_2 + 1} C_{m_1 - n, m_2 + 1} - \frac{m_1(m_1 + n)}{n^2(2m_1 + n)^2} \sqrt{m_2} C_{m_1 + n, m_2 - 1} \right) = EC_{m_1, m_2}, \quad (9)$$

where $F = 4aeH \sin \theta \sqrt{2\hbar m \omega} / mc\pi^2$, n is the odd number, $\omega = eH \cos \theta / mc$. Resonance condition in quantum case has the form

$$\frac{\hbar\pi^2}{ma^2} m_1 n = \omega, \quad (10)$$

and it means that if electron moves down (up) on n levels in the well and up (down) on one Landau level it will have the same energy as it had before. When we take into consideration only one isolated resonance after some transformation system (9) reduces to Mathieu equation, so the spectrum in the isolated resonance domain has the form of Mathieu spectrum.

We have made some numerical investigation of our model. Firstly, it is well known from Random Matrix Theory (RMT) that for integrable system the nearest - neighbor level spacing distribution $P(S)$ has the form of Poisson distribution [3]

$$P(S) = \frac{1}{d} \exp(-\frac{S}{d}), \quad (11)$$

where d - the average spacing between levels. We calculate $P(S)$ for the spectrum of \hat{H}_0 : $m_1^2 + \gamma m_2$, where γ is irrational number, and we have the distribution "Poisson-like" (see Fig.1). For perturbed

Hamiltonian \hat{H} from Random Matrix Theory (RMT) we should expect the statistics of Gaussian Unitary Ensemble [3] (matrix elements in (9) are complex)

$$P(S) = \frac{32s^2}{\pi^2 d^3} \exp\left(-\frac{4s^2}{\pi d^2}\right). \quad (12)$$

We examine numerically the system (9) for the case when $\theta = 20^\circ$, $H = 11.4$, the heterostructure width $a = 120$, and $m = 0.067m^e$. The function $P(S)$ was computed and we obtain the intermediate nearest - neighbor level spacing distribution (see Fig.2). From this picture one can see the decreasing of small distance probability as compare with "Poisson-like" statistics so, there is level repulsion. Then we calculate the spectral rigidity for our system, i.e. Δ_3 - statistics (Fig.3). We see that it also has intermediate character between Δ_3 - statistics for integrable system $\Delta_3 = L/15$ [3] and for GUE system $\Delta_3 = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \ln(2\pi L) + \gamma - \frac{5}{4} \right\}$ [3], where L is the number of energy levels, $\gamma = 0.577216$ is Euler's constant.

We also compute the coefficients squares $|C_{m_1 m_2}|^2$ when Chirikov criterion is of the order of unity (Fig.4). One can see the chaotic delocalization of wave function in Hilbert space of the Hamiltonian \hat{H}_0 . When Chirikov parameter is much less than unity we will see the localized state with one non-zero coefficient or with resonance line of non-zero ones.

Why does we not have a good accordance with RMT prediction? At parameters used here the classical phase space consists of chaotic and regular domains. Thus in quantum limit we have as delocalized wave functions as well as localized ones. So the ergodicity of eigenfunctions that was assumed in RMT is not carrying out here. Also, in our matrix equation (9) we have no random distribution of matrix elements because the average amplitude of diagonal elements is overwhelmingly larger than that of off-diagonal ones and the magnitude of off-diagonal elements is decayed with the distance from diagonal.

3 Discussion

We can use our results to explain some experimental observations. Fromhold, Eaves et al [4] used resonant tunneling spectroscopy to study the energy - level spectrum of such system: an electron in a trapezoidal potential well in the presence of a high magnetic field tilted relative to the confining barriers. Distinct series of quasiperiodic resonances are observed in the current - voltage characteristics which change with tilt angle. The authors of work [4] interpret the two types of dependence of the voltage period ΔV of the oscillatory structure from V - square root dependence and linear ones - as the existence characteristic of unstable closed orbits. We interpret the square root dependence ΔV vs V as manifestation of well levels which are not in the resonance domain, because this dependence exists in perpendicular magnetic field also when system is integrable and there is no chaos. The linear dependence ΔV vs V we interpret as manifestation of resonance domain.

We try to model tunnel current as a function of potential V . Tunneling occurs when the energy of discrete emitter state coincides with the energy of a subband in the quantum well, and the magnitude of current depends upon the overlap of wave functions in the quantum well and emitter states. The overlap of wave functions in its turn is defined by the coefficients $C_{m_1 m_2}$. So we compute the sum $S = |C_{10}|^2 + |C_{11}|^2$ at $\theta = 20^\circ$, because in experiment only two Landau level in emitter ($m_2 = 0$ and $m_2 = 1$) was filled. One can see the different S amplitude in the non-resonance region and in the resonance one (Fig.5). Also if we assume that we should consider only S which more than some S^* , where S^* is the limiting sensibility of experimental device, we will have the same type ΔV vs V plots as experimental one (Fig.6). Also we want to note that deviations from the square root dependence ΔV vs V on the experimental plots we interpret as an influence of higher resonances.

In conclusion we would like to stress that chaos can occur not only in magnetic field tilted with respect to film surface, but in perpendicular one when electrons have non-isotropic energy spectrum. For instance, it can happens in n-Ge- or in n-Si-films when magnetic field is not parallel to the main ellipsoid axis and at the same time is perpendicular to the film surface. After simple transformation of coordinate system we can reform ellipsoid into sphere and will have the same system as was considered in this work.

Acknowledgement

The authors would like to thank G. Casati for useful discussion. This work was supported partially of Grant from State Committee of Higher Education of the Russian Federation.

References

- [1] V. Ya. Demichovskii, V. A. Denisyuk, "Quantum and Classical Chaos in Thin Film (Heterostructure) in Tilted Magnetic Field", *Radiophysics*, 1995, 1-2, pp.74-81 (in russian).
- [2] D. L. Shepelyansky, A. D. Stone, "Chaotic Landau Level Mixing in Classical and Quantum Wells", *Phys. Rev. Let.*, 1995, Vol.74, No.11, pp.2098-2101.
- [3] L. E. Reichl *The Transition to Chaos in Conservative Classical System: Quantum Manifestation.*, Springer-Verlag, New-York, 1992.
- [4] T. M. Fromhold, L. Eaves et al, "Magnetotunneling Spectroscopy of a Quantum Well in the Regime of Classical Chaos", *Phys.Rev.Let.*, 1994, Vol.72, No.16, pp.2608-2612.

ХАОС

В КВАНТОВОЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СТРУКТУРЕ В НАКЛОННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Я. Демиховский, В. А. Денисюк

В классическом и квантовом пределах исследована динамика заряженной бесспиновой частицы, движущейся в тонкой пленке (гетероструктуре), помещенной в наклонное магнитное поле.

В классическом случае изучены нелинейные резонансы, возникающие при совпадении циклотронной частоты (определяемой нормальной компонентой магнитного поля) и частоты осцилляций между стенками пленки. Получено условие перекрытия резонансов-критерий Чирикова, при выполнении которого в системе наступает хаос.

В квантовом случае уравнение Шредингера сводится к системе алгебраических уравнений, определяющей собственные значения энергии и собственные вектора. Исследован изолированный нелинейный резонанс и показано, что в этом случае уравнение Шредингера принимает форму уравнения Матье. Общая система уравнений исследовалась численно и были получены волновые функции и спектр. Показано, что статистика междууровневых интервалов и Δ_3 - статистика в условиях квантового хаоса имеют промежуточный характер между статистиками Пуассона и гауссова унитарного ансамбля (ГУА). Исследована структура волновых функций в области квантового хаоса.

Показано, что квантовые нелинейные резонансы и квантовый хаос могут возникнуть и в магнитном поле, нормальном к поверхности пленки, если электронный энергетический спектр является анизотропным.

Полученные результаты позволяют объяснить экспериментальные данные работы [4], в которой наблюдался квантовый хаос в гетероструктуре, помещенной в наклонное магнитное поле.

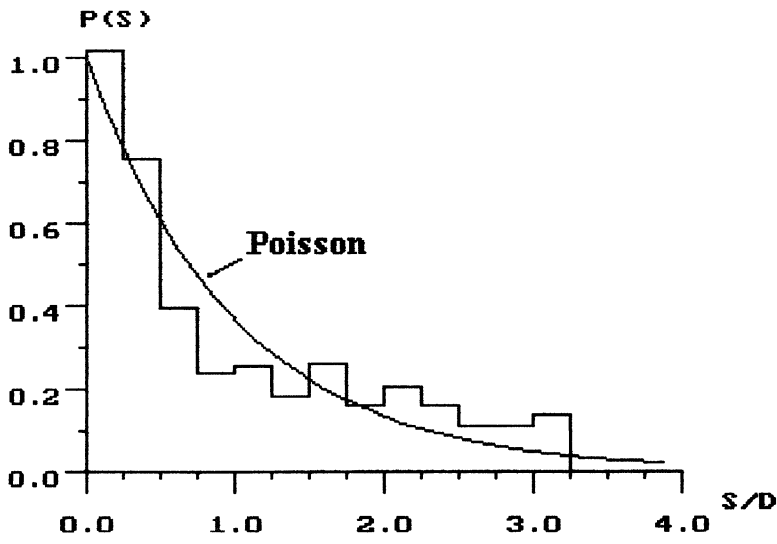


Fig.1

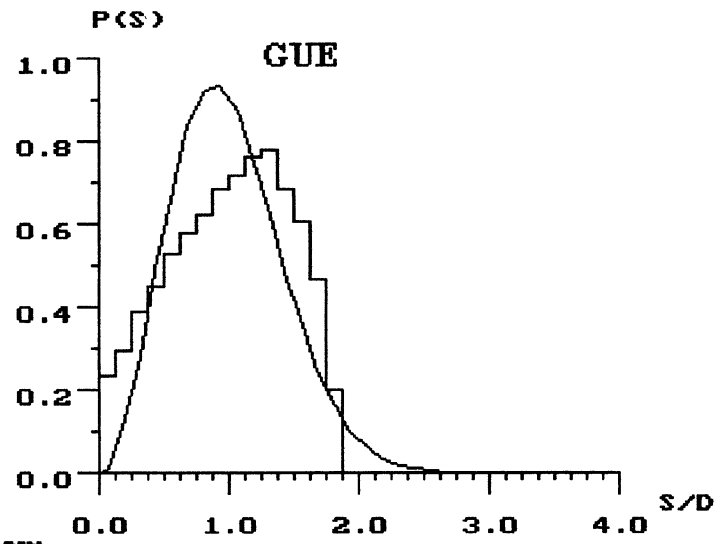


Fig.2

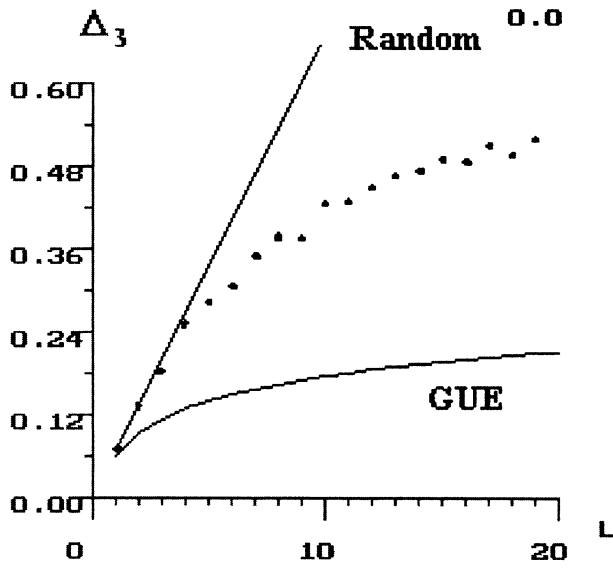


Fig.3

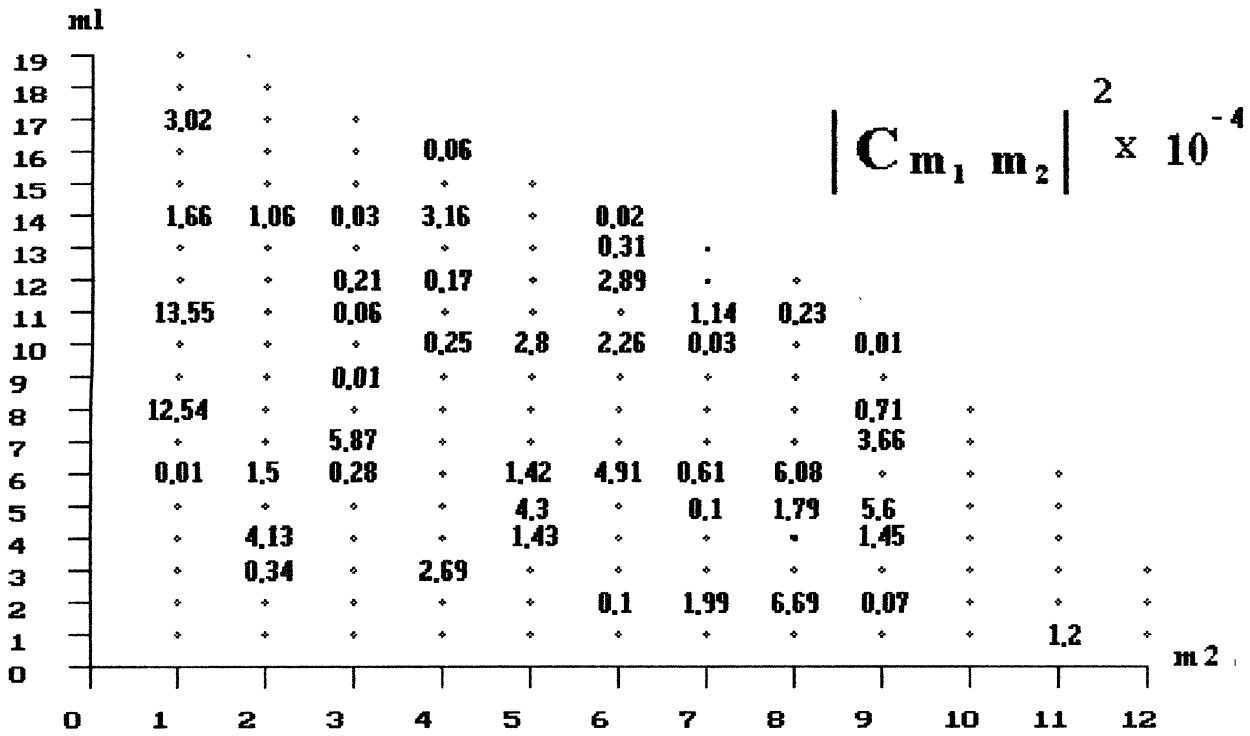


Fig.4

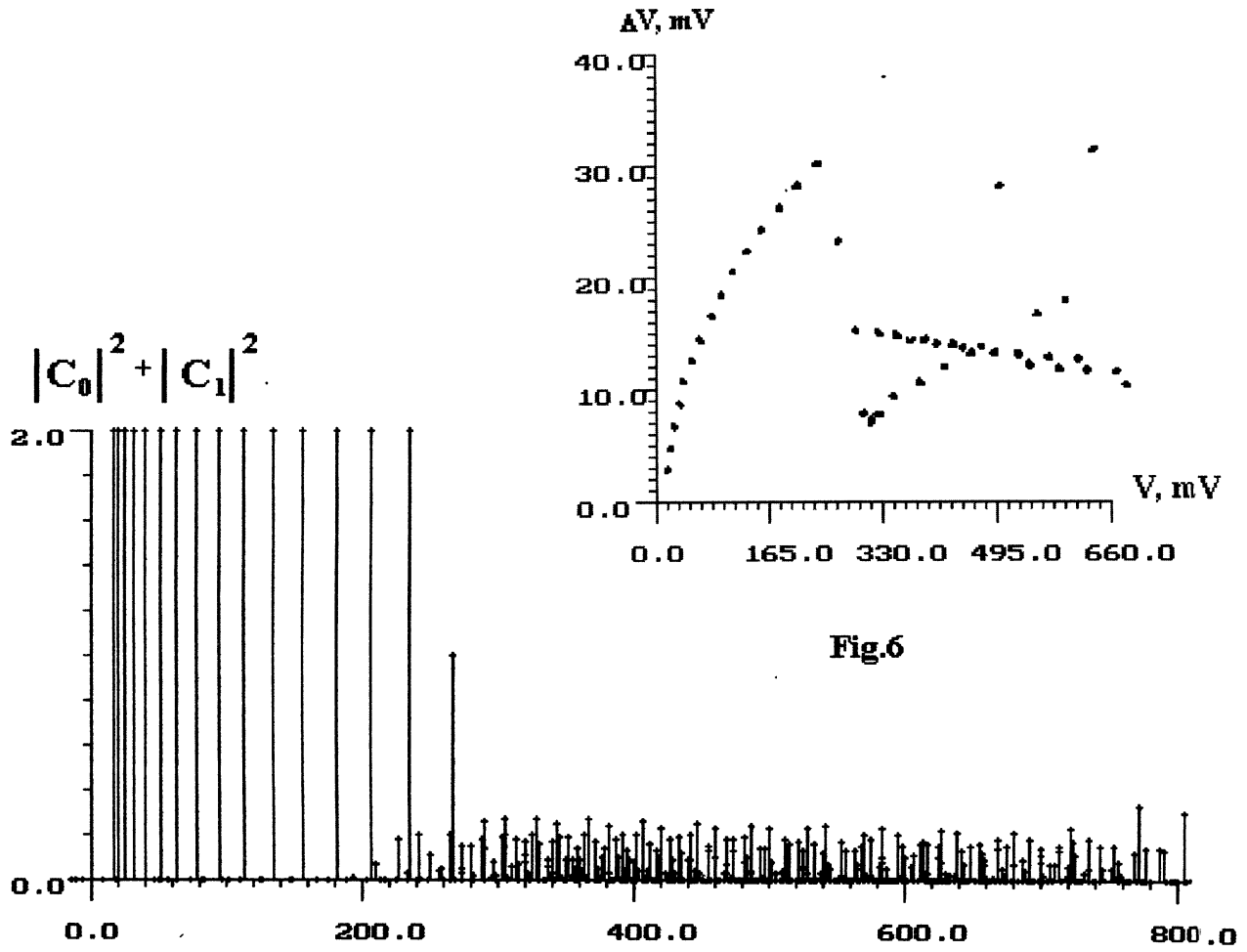


Fig.6

Fig.5

SPECTRUM OF MULTI-CIRCUIT LOCALIZED SOLUTIONS

L.Yu.Glebsky

Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences
46 Uljanov str., Nizhny Novgorod 603600, RUSSIA
E-mail: glebsky@renii.appl.sci-nnov.ru

1 Formulation of theorem

Consider linear differential equation:

$$(\partial_x + B - \lambda A + F(x))\xi = 0 \quad (1)$$

where $\xi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^n$, B and A are $n \times n$ -matrices, $F(x)$ is a continuous matrix function such that $\|F(x)\| < Ce^{-\alpha|x|}$ for $C, \alpha > 0$.

We will say that $\lambda \in \mathbf{C}$ is a resolvent point for Eq.(1) iff there exists the continuous inverse operator for the operator in l.h.s. of Eq.(1) defined in $C(\mathbf{R}, \mathbf{C}^n)$. We will say that λ is a spectral point for Eq.(1) iff the continuous inverse operator does not exist.

Let $\kappa_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, n$ be eigenvalues of the matrix $B - \lambda A$. For $\gamma \geq 0$ let us define $\Lambda_\gamma = \{\lambda \in \mathbf{C} : \min_i |\operatorname{Re}\kappa_i(\lambda)| > \gamma\}$.

Suppose we know the spectrum of Eq.(1) ($\operatorname{Sp}(\infty)$) and intend to study the spectrum of the equation:

$$(\partial_x + B - \lambda A + F_c(x))\xi = 0 \quad (2)$$

$$c = (c_1, \dots, c_{m-1}), \quad c_j > 0, \quad F_c(x) = F(x) + F(x + c_1) + F(x + c_1 + c_2) + \dots + F(x + c_1 + c_2 + \dots + c_{m-1}).$$

Let us denote $d(c) = \min_i c_i$.

Remark. Such a problem may appear in the following situation. Suppose we deal with an evolutionary equation

$$a_t + La = f(a) \quad (3)$$

with one spatial variable $x \in \mathbf{R}$, where $a \in \mathbf{C}^k$ and L is a linear differential operator. Let Eq.(3) has a localized stationary solution $a(x)$, $|a(x)| < C \exp(-\beta|x|)$ for positive C, β . Then it may happen (see [2, 1]) that m -circuit solutions $a_m(x) \approx a(x) + a(x + c_1) + \dots$ to Eq.(3) exist for a countable set of c . Moreover, the greater $d(c)$ is the smaller $\sup_x |a_m(x) - (a(x) + a(x + c_1) + \dots)|$ is. So, if we are interested in stability of these solutions we should consider spectral problem $\lambda\xi + L\xi = Df(a_m)\xi$ which can be transformed into a first order system. This system can be approximated by one of the form (2).

Let $\operatorname{Sp}(c)$ be the spectrum of Eq.2, $R(c)$ be the resolvent set of Eq.2 and $R(\infty)$ be the resolvent set of Eq.1. Let $N_\epsilon(\lambda) = \{y \in \mathbf{C} : |y - \lambda| < \epsilon\}$. Now we can formulate the Theorem (multiplicity of isolated spectral points will be defined below in definition 2).

Theorem 1

- i) Let $\lambda \in \Lambda_0 \cap R(\infty)$ then there exists $M(\lambda, m) > 0$ such that $\lambda \in R(c)$ for $d(c) > M(\lambda, m)$.
- ii) Let $\lambda \in \Lambda_0$ be an isolated spectral point of multiplicity k then, for small enough ϵ , there exists $M(\lambda, \epsilon) > 0$ such that $N_\epsilon(\lambda)$ consist of exactly $m \cdot k$ spectral points for Eq.(2) (counted with multiplicity) for $d(c) > M$.

Remark. The set $\bar{\Lambda}_0 = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda \notin \Lambda_0\}$ is the essential spectrum for the Eq.(1). The set Λ_0 either is equal to \mathbf{C} or is a finite set of smooth curves with intersections and a finite number of singularities (angles). Each closed connected component of Λ_0 consists of only finite number of isolated spectral points of finite multiplicity for Eq.(1) (Eq.(2)) or is the subset of $\operatorname{Sp}(\infty)$ ($\operatorname{Sp}(c)$).

First of all we define multiplicity, simultaneously we give some technical results required for the proof, see [3].

Definition 1 For a closed operator Y and a bounded operator X on a Banach space \mathcal{B} we call λ to be an X -resolvent point for Y ($\lambda \in R^X(Y)$) iff there exists the bounded operator $(Y - \lambda X)^{-1}$. We call λ to be an X -spectral point for Y ($\lambda \in \operatorname{Sp}^X(Y)$) iff $\lambda \notin R^X(Y)$.

Two important classical results on resolvents have the simple generalizations for X -resolvent.

1. $R^X(Y)$ is an open set.
2. Let D be a bounded isolated subset of $Sp^X(Y)$ so there exists a closed Jordan curve Γ separating D from the rest of $Sp^X(Y)$. We can consider the analogue of the Riesz integral

$$P(D) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (Y - \lambda X)^{-1} d\lambda$$

P does not have to be a projector but the operators $P_1(D) = PX$ and $P_2(D) = XP$ do. Moreover, for $\lambda \in R^X(Y)$ one has $P_1(Y - \lambda X)^{-1} = (Y - \lambda X)^{-1} P_2$. Let us denote $I_i = \text{Im}(P_i)$ and $K_i = \text{Ker} P_i$ the image and the kernel for P_i . So, we can consider separately operators $X', Y' : I_1 \rightarrow I_2$ and $X'', Y'' : K_1 \rightarrow K_2$ which are the restrictions X, Y on I_1 and K_1 , with the spectrums $Sp^{X'}(Y') = D$, $Sp^{X''}(Y'') = Sp^X(Y)/D$. Moreover, the spaces I_1 and I_2 are isomorphic since the operator X' is invertible: $X'^{-1} = P : I_2 \rightarrow I_1$. Pair of decompositions $\mathcal{B} = I_1 \oplus K_1 = I_2 \oplus K_2$ with X', Y' and X'', Y'' as above is unique.

Definition 2 Let λ be an isolated X -spectral point for Y . Multiplicity of λ is $\dim \text{Im} P_i(\lambda)$.

2 Proof of the Theorem

In this text the words "bounded operator on a Banach space" mean "bounded everywhere defined operator on a Banach space".

Without loss of generality we may assume $N_\epsilon(\lambda) \subset \Lambda_\gamma$ for small enough $\gamma > 0$ and $\epsilon > 0$.

Let $0 < \gamma' < \min(\gamma, \alpha)$. Consider Banach space $E \subset C(\mathbf{R}, \mathbf{C}^n)$ with the norm $\|u\|_E = \sup_x |u(x)e^{\gamma'|x|}|$ ($u \in E \leftrightarrow \|u\|_E < \infty$). Let S be the shift operator on E : $(S_a u)(x) = u(x+a)$.

Proposition 1 The classic operator ∂_x is a closed operator on E with a dense domain.

So, operators $L_\infty = \partial_x + B + F(x)$ and $L_c = \partial_x + B + F_c(x)$ are closed densely defined operators on E , A is a bounded operator on E .

Lemma 1 The following relations are valid: $R(\infty) \cap \Lambda_\gamma = R^A(L_\infty) \cap \Lambda_\gamma$ and $R(c) \cap \Lambda_\gamma = R^A(L_c) \cap \Lambda_\gamma$. Moreover, $\lambda \in \Lambda_\gamma$ is an isolated spectral point for Eq.1 (Eq.2) of multiplicity k if and only if λ is an isolated A -spectral point for the operator L_∞ (L_c) of multiplicity k .

Proof. Let $\lambda \in \Lambda_\gamma$ and $\xi_2 \in E$. Consider equation

$$(\partial_x + B - \lambda A + F(x))\xi_1 = \xi_2.$$

Every solution ξ_1 to this equation either decays or grows exponentially for $x \rightarrow +\infty$. The same is true for $x \rightarrow -\infty$. So, if $\xi_1 \in C(\mathbf{R}, \mathbf{C}^n)$ then $\xi_1 \in E$. \square

By operator L_c we construct the following operator $\tilde{L}_c : E^m \rightarrow E^m$. For $v = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) \in E^m$ with the norm $\|v\| = \|v_0\|_E + \dots + \|v_{m-1}\|_E$ we put

$$(\tilde{L}_c v)_i = (\partial_x + B + F(x))v_i + \tag{4}$$

$$\{F(x)[(S_{c_{i+1}}(v_{i+1} + S_{c_{i+2}}(v_{i+2} + \dots + S_{c_{m-1}}v_{m-1})\dots) + S_{-c_i}(v_{i-1} + S_{-c_{i-1}}(v_{i-2} + \dots + S_{-c_1}v_0)\dots)]\}.$$

Lemma 2 The following estimate is valid ($\|\cdot\|_E = \|\cdot\|$)

$$\|F(x)S_a\| < C \max\{\exp(\gamma' - \alpha)|a|, \exp(-\gamma'|a|)\}$$

Proof.

$$\|F(x)S_a u(x)\| = \sup_x |e^{\gamma'|x|} F(x)u(x+a)| \leq \sup_x (e^{\gamma'|x|} C e^{-\alpha|x|} \|u\| e^{-\gamma'|x+a|}) = C \max\{e^{(\gamma'-\alpha)|a|}, e^{-\gamma'|a|}\} \square$$

So, the norm of the operator in curly brackets in (4) tends to zero when $d(c) \rightarrow \infty$. Let us consider operator $T_c : E^m \rightarrow E$

$$T_c v = v_0 + S_{c_1}(v_1 + S_{c_2}(v_2 + \dots + S_{c_{m-1}}v_{m-1})\dots) \tag{5}$$

Let $E_c^m = \text{Ker}T_c = \{v \in E^m : T_c v = 0\}$. It is clear that T_c is bounded. Let $\tilde{L}_\infty(\tilde{A})$ on E^m be the direct product of $L_\infty(A)$:

$$\tilde{L}_\infty = \underbrace{L_\infty \times L_\infty \times \dots \times L_\infty}_{m \text{ times}}, \quad \tilde{A} = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{m \text{ times}}$$

For the linear operator X on a Banach space \mathcal{B} and its invariant subspace \mathcal{X} we define the factor operator $X/\mathcal{X} : \mathcal{B}/\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{X}$

$$v \in D(X/\mathcal{X}) \leftrightarrow \exists u \in D(X) v = \{u\} \text{ and } X/\mathcal{X}\{u\} = \{Xu\},$$

where $\{u\} = u + \mathcal{X} \in \mathcal{B}/\mathcal{X}$.

Proposition 2 *The following relations are valid: $\tilde{L}_c(E_c^m), \tilde{A}(E_c^m) \subset E_c^m$, the factor space $E^m/E_c^m \sim E$ and the factor operators \tilde{L}_c/E_c^m and \tilde{A}/E_c^m are isomorphic to L_c and A , respectively.*

Proof. Let $v \in E^m$, denote $\{v\}$ the corresponding element of E^m/E_c^m . It is easy to define isomorphism by means of operator $\tilde{T} : E^m/E_c^m \leftrightarrow E$, $\tilde{T}\{v\} = Tv$, $\tilde{T}^{-1}u = \{(u, 0, 0, \dots)\}$ \square

For the linear operator X and its invariant subspace \mathcal{X} denote $X \setminus \mathcal{X}$ the restriction X on \mathcal{X} . We will say that operator Z on a Banach space \mathcal{B} is invertible iff there exists a bounded operator Z^{-1} such that $ZZ^{-1}u = u$ for all $u \in \mathcal{B}$ and $Z^{-1}Zu = u$ for all $u \in D(Z)$.

Consider a Banach space \mathcal{B} . Let $\mathcal{B} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{M}$ and Y be closed operator on \mathcal{B} with dense domain such that $Y(D(Y) \cap \mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ and $D(Y) = D(Y) \cap \mathcal{X} \oplus D(Y) \cap \mathcal{M}$. If Π is the projector on \mathcal{X} along \mathcal{M} then the last property is equivalent to $D(Y) \cap \mathcal{X} = \Pi D(Y)$.

Lemma 3 *Operator Y is invertible if and only if both operators Y/\mathcal{X} and $Y \setminus \mathcal{X}$ are invertible.*

Remark. *This Lemma should be used carefully: it may happen that operator Y/\mathcal{X} is not closed and, consequently, is not invertible although its closure may be invertible.*

Proof. Denote Π the projector on \mathcal{X} along \mathcal{M} , $\Xi = I - \Pi$. We may represent each $u \in \mathcal{B}$ as a vector $u = (u_1, u_2)$, $u_1 \in \mathcal{X}$, $u_2 \in \mathcal{M}$. Then Y may be written as a matrix

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{\mathcal{X}} & Y_{\mathcal{X}\mathcal{M}} \\ 0 & Y_{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \Pi Y \Pi + \Pi Y \Xi + \Xi Y \Xi.$$

It is clear that $\mathcal{M} \sim \mathcal{B}/\mathcal{X}$ and $Y_{\mathcal{M}} \sim Y/\mathcal{X}$. Let $Y_{\mathcal{X}}^{-1}$ and $Y_{\mathcal{M}}^{-1}$ exist then

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} Y_{\mathcal{X}}^{-1} & -Y_{\mathcal{X}}^{-1} Y_{\mathcal{X}\mathcal{M}} Y_{\mathcal{M}}^{-1} \\ 0 & Y_{\mathcal{M}}^{-1} \end{pmatrix},$$

we should only check that the operator $-Y_{\mathcal{X}}^{-1} Y_{\mathcal{X}\mathcal{M}} Y_{\mathcal{M}}^{-1}$ is bounded and maps to $D(Y_{\mathcal{X}})$. Let

$$Y_{\mathcal{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_{\mathcal{M}}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Then $R(Y_{\mathcal{M}}^{-1}) \subset D(Y)$ and operator $Y Y_{\mathcal{M}}^{-1}$ is bounded as well as $Y_{\mathcal{X}\mathcal{M}} Y_{\mathcal{M}}^{-1}$ which is the restriction of $\Pi Y Y_{\mathcal{M}}^{-1}$ on \mathcal{M} .

Suppose

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} Z_{\mathcal{X}} & Z_{\mathcal{X}\mathcal{M}} \\ Z_{\mathcal{M}\mathcal{X}} & Z_{\mathcal{M}} \end{pmatrix}$$

Studying expression $Y Y^{-1} = I$ one finds that $Z_{\mathcal{X}} = Y_{\mathcal{X}}^{-1}$ and $Z_{\mathcal{M}} = Y_{\mathcal{M}}^{-1}$. \square

Let X be a bounded linear operator on \mathcal{B} such that $X(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ then the following corollary is valid.

Corollary 1 $Sp^X(Y) = Sp^{X \setminus \mathcal{X}}(Y \setminus \mathcal{X}) \cup Sp^{X/\mathcal{X}}(Y/\mathcal{X})$.

Let D be a bounded isolated subset of $Sp^X(Y)$ and Γ be a closed Jordan curve separating D from the rest of $Sp^X(Y)$. Denote projectors

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (A - \lambda X)^{-1} X d\lambda, \quad P_f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (A/\mathcal{X} - \lambda X/\mathcal{X})^{-1} X/\mathcal{X} d\lambda.$$

Corollary 2 $P(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$, $P_f = P/\mathcal{X}$, and, consequently, $\dim \text{Im} P_f = \dim \text{Im} P - \dim(\text{Im} P \cap \mathcal{X})$.

If one puts $B = E^m$, $Y = \tilde{L}_c$, $X = \tilde{A}$, $\mathcal{X} = E_c^m$ and $\mathcal{M} = \{(u, 0, 0, \dots), u \in E\}$ one obtains the proof of the part i) of the Theorem.

Let us prove part ii) of the theorem. Let $\lambda \in \Lambda_\gamma$ be an isolated A -spectral point for L_∞ of multiplicity k , then λ is an isolated \tilde{A} -spectral point for \tilde{L}_∞ of multiplicity $k \cdot m$. Let $\Gamma \subset N_\epsilon(\lambda)$ be a closed Jordan curve separating λ from the rest of the spectrum. Then the corresponding Riesz projectors are

$$\tilde{P}_c = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\tilde{L}_c - \lambda \tilde{A})^{-1} \tilde{A} d\lambda, \quad \tilde{P}_\infty = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\tilde{L}_\infty - \lambda \tilde{A})^{-1} \tilde{A} d\lambda = \underbrace{P_0 \times P_0 \times \dots \times P_0}_{m \text{ times}}$$

where $P_0 = (2\pi i)^{-1} \oint_{\Gamma} (L_\infty - \lambda A)^{-1} A d\lambda$. For $d(c)$ large enough one has $\|\tilde{P}_c - \tilde{P}_\infty\| < 1$, and consequently $\dim(\text{Im} \tilde{P}_c) = k \cdot m$. The proof of the part ii) follows from

Proposition 3 *There exist $M > 0$ such that $\text{Im} \tilde{P}_c \cap E_c^m = \{0\}$ for $d(c) > M$.*

Proof. Since $\dim(\text{Im} P_0) = k < \infty$ there can be find $r > 0$ such that $\sup_{|x| < r} (|u(x)|) > 0$ for $u \in \text{Im} P_0$ and the factor

$$\frac{\sup_{|x| > N} |u(x)|}{\sup_{|x| < r} |u(x)|}$$

tends to zero when $N \rightarrow +\infty$ uniformly in $u(x) \in \text{Im} P_0$. One can take such M' that

$$\frac{\sup_{|x| > M'} |u(x)|}{\sup_{|x| < r} |u(x)|} < \frac{1}{2(m+1)}$$

for all $u(x) \in \text{Im} P_0$.

In order to prove the existence of r and M' one should use compactness of unit sphere in $\text{Im} P_0$.

Moreover, there exists M'' such that $\|\tilde{P}_\infty - \tilde{P}_c\| < (2m-2)^{-1}$ for $d(c) > M''$. It is enough to take $M > \max(M'', M')$. Indeed, let $v = (v_0, v_1, \dots) \in \text{Im} \tilde{P}_c$ and $u = (u_0, u_1, \dots) = \tilde{P}_\infty v$ ($\rightarrow u_i \in \text{Im} P_0$) then $\sup_x |v_i(x) - u_i(x)| < (2m+2)^{-1}$. Choose j such that $\sup_x |u_j| = \max_i \sup_x |u_i|$ then the simple estimates show that

$$\sup_{|x| < r} \left| \prod_{i=1}^j S_i T_c v(x) \right| > 0$$

□

СПЕКТР МНОГО-ОБХОДНЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ

Л.Ю.Глебский

Доказана теорема связывающая дискретный спектр n -обходных решений с дискретным спектром соответствующего одно-обходного решения. В том числе показано, что точка спектра расщепляется на n спектральных точек при переходе от одно- к n -обходным решениям.

Acknowledgment.

This research was supported by the EC-Russia Collaborative Project ESPRIT P 9282 - ACTCS and by the International Science Foundation (grants R97000, R97300).

References

- [1] L.Yu.Glebsky, L.M.Lerman, Instability of Small Stationary Localized Solutions to a Class of Reversible 1+1 PDEs, *this issue*
- [2] L.M.Lerman, Complex Dynamics and Bifurcations in a Hamiltonian System Having a Transversal Homoclinic Orbit to a Saddle-Focus, *Chaos* **1** (1991), 174-180
- [3] G.A.Sviridyuk, To the General Theory of Semigroups of Operators, *Usp. Mat. Nauk* **49** (1994), N4, 47 (in Russian)

INSTABILITY OF SMALL STATIONARY LOCALIZED SOLUTIONS

TO A CLASS OF REVERSIBLE 1+1 PDEs

L.Yu.Glebsky

Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences
43 Uljanov str., Nizhny Novgorod 603600, RUSSIA
E-mail: glebsky@renii.appl.sci-nnov.ru

L.M.Lerman

Research Institute for Applied Math.& Cybernetics,
Nizhny Novgorod, 603005, RUSSIA

Abstract

We study stability properties of small stationary localized and periodic solutions for a class PDEs reversible with respect to a spatial variable x in the case when the related stationary equation undergoes the reversible Hopf bifurcation. Under general assumptions we prove instability of localized and stability of periodic solutions.

1 Introduction

In the present paper we study small stationary solutions $u(t, x) = u(x)$ of 1+1 parabolic PDEs appearing near the threshold of loss of stability (with respect to a parabolic ("time-like") variable t) of a stationary homogeneous solution $u_0(t, x) = a$. Without loss of generality we may regard $a = 0$. Our main purpose is to investigate stability of such small solutions $u(x)$. In order to find stationary solutions $u(x)$ we investigate certain bifurcation of a reversible ODE. The bifurcation turns out to be the reversible Hopf bifurcation for the case considered. This bifurcation was studied in [14, 8]. In order to investigate spectral stability (only such a stability will be discussed here) of these stationary solutions we study the eigenvalue problem for a linear ODE. We consider stability of localized and periodic solutions appearing when the 2a bifurcation (see section 2) takes place. Another solutions and bifurcations will be studied elsewhere.

Our approach was inspired by the papers of Kirchgässner, Iooss, Mielke and others, ([11, 12, 10, 6]). The authors developed center manifold and normal forms theories for infinite dimensional systems and used them for finding stationary and time periodic solutions of physically meaningful equations (e.g., the Navier-Stokes equation) with one unbounded and several bounded coordinates near the threshold of stability but they did not consider time stability of solutions obtained as we are aware of. Although we investigate much more simple case of equations with two independent coordinates, it seems to be possible to extend our results to more general cases.

Relation of this work with an amplitude equations approach [7] should be marked. For the bifurcations 1a, 1b, 2a, 2b one can derive, at least formally, amplitude equations of the Ginzburg-Landau type. In order to do it one can use a slight modification of the method described in [7]. In what follows we shall not use these amplitude equations, but it is worth mentioning that

- all stationary solutions we consider may be approximated by solutions to the corresponding amplitude equation,
- the central spectrum of such a stationary solution is close to the one of the corresponding solution to the amplitude equation.

The main result of the paper (theorem 1) is the following: stationary localized solutions appearing at 2a bifurcation are unstable. In the similar way it can be shown that stationary localized solutions appearing at 1a bifurcation are unstable.

Theorem 2 deals with periodic solutions and explains the well-known Eckhaus instability [5], see also [13, 1]. Our theorem 2 may be considered as a modification of theorem 2 of [13]: our theorem has a stronger condition and inference.

2 Families of equations and bifurcations

We study families of equations which can be written in the form

$$A(\mu, u) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = F(\mu, u) \quad (1)$$

where $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$, $A \in C^{r_1}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n}, L(\mathbf{R}^{2n}, \mathbf{R}^{2n}))$, $F \in C^{r_2}(\mathbf{R}^{2n+1}, \mathbf{R}^{2n})$, $F(\mu, 0) = 0$; $r_1 \geq 2$, $r_2 \geq 4$. Moreover, we assume Eq.(1) to possess a spatial reversibility, that is, there exists $G \in L(\mathbf{R}^{2n}, \mathbf{R}^{2n})$, $G^2 = E = \text{diag}(1, \dots, 1)$ such that

$$A(u) = -GA(Gu)G, \quad F(u) = -GF(Gu)$$

A, F depend on the parameter μ .

Existence of such an involution G means that Eq.(1) has the property: if $u(t, x)$ is a solution of Eq.(1) then so is $u_0(t, x) = Gu(t, -x)$.

Stationary solutions $u(t, x) = u(x)$ have to satisfy an ordinary differential equation

$$u_x = F(\mu, u), \quad (2)$$

reversible under G : $F(\mu, u) = -GF(\mu, Gu)$.

Remark. Even a formulation of the Cauchy problem for Eq.(1) has some features, see [15], but in all our examples equations of the form (1) appear in the following situation. Suppose we deal with an evolutionary equation $a_t + La = f(a)$ with one spatial variable $x \in \mathbf{R}$, where $a \in \mathbf{R}^m$ and L is a linear differential operator of the n -th order. Then stationary equation $La = f(a)$ can be transformed by means of introducing some new vector variable $u \leftrightarrow a$ into the form of the first order system $u_x = F(u)$. Then the original equation is turned into a system of the form (1). Our main idea is to apply the powerful tool of normalization not only to a study bifurcations of stationary solutions but for studying their temporal stability properties as well. For this purposes the form (1) is especially convenient. It is clear that the spectrum of stationary solution $a(x)$ is the same as the spectrum of the corresponding $u(x)$.

We perform a linear stability analysis of such stationary solutions $u(x)$ being homogeneous, localized¹ and periodic. To that end, we have to study the following spectral problem (we do not write parameter μ just for brevity)

$$\lambda A(u(x))\xi + \xi_x - D_u F(u(x))\xi = 0, \quad (3)$$

where $u(x)$ is a solution to Eq.(2). We shall consider the spectral problem in the complex Banach space of continuous functions $\xi \in C(\mathbf{R}, \mathbf{C}^{2n})$ with the supremum norm: $\|\xi\| = \sup_{x \in \mathbf{R}} \|\xi(x)\|$.

Throughout this text \mathcal{X} denotes a Banach space $C(\mathbf{R}, \mathbf{C}^{2n})$ with the supremum norm when we speak about differential operators or an arbitrary Banach space when we deal with abstract operators, $L(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ denotes the space of linear bounded operators on \mathcal{X} .

Let $L \in L(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ and M be a closed linear operator with the dense domain in \mathcal{X} .

Definition 1 λ belongs to the L -resolvent set ($R^L(M)$) of the operator M iff there exists a bounded operator $(\lambda L - M)^{-1}$, this operator is called L -resolvent of M . λ is called to be an L -spectral point of M ($\lambda \in Sp^L(M)$) iff $\lambda \notin R^L(M)$, [15].

Denote $B_0 = DF(0)$, $A_0 = A(0)$. Let $\{\kappa_i(\lambda)\}$ be the set of eigenvalues of matrix $(\lambda A_0 - B_0)$, $\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbf{C} : \text{Re} \kappa_i(\lambda) \neq 0\}$.

Lemma 1 Let $\mathcal{X} = C(\mathbf{R}, \mathbf{C}^{2n})$, $L = A(u(x))$, $M = D_u F(u(x)) - \partial_x$ then the following is valid:

- i) if $u(x)$ is periodic then $\lambda \in Sp^L(M)$ if and only if there exists a bounded on \mathbf{R} nonzero solution to Eq.(3).
- ii) if $u(x)$ is localized and $\lambda \in \Gamma_0$ then $\lambda \in Sp^L(M)$ if and only if there exists a bounded on \mathbf{R} nonzero solution to Eq.(3).

Let us start with stability analysis for the homogeneous solution $u(x) = 0$. In that case we may seek bounded solutions to Eq.(3) in the form $\xi(x) = \xi_0 e^{ikx}$. The existence of such a solution leads to the relation

$$0 = \det(\lambda A(\mu) + ikE - B(\mu)) = \mathcal{D}(\mu, \lambda, ik) \quad (4)$$

¹Here we call solution $u(x)$ to be localized if $|u(x)| < C e^{-k|x|}$ for some positive C and k .

(here and below we denote $B(\mu) = D_u F(\mu, 0)$, $A(\mu) = A(\mu, 0)$).

The relation (4) defines a multi-valued algebraic function $\lambda(k) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ (which, of course, depends on parameter μ for our case). The function $\lambda(k)$ is called a dispersion characteristic. Assume that the solution $u = 0$ is spectrally stable for $\mu < 0$ and unstable for $\mu > 0$. It means that all the curves $r = \text{Re}\lambda(\mu, k)$ lie below k -axis for $\mu < 0$ and only one of these curves (in generic situation) is tangent (intersects) k -axis for $\mu = 0$ ($1 \gg \mu > 0$).

Proposition 1 $\mathcal{D}(\mu, \lambda, ik) = f(\mu, \lambda, k^2)$, where $f(\mu, x, y)$ is a polynomial in x, y with real coefficients depending on μ . If $A(\mu), B(\mu) \in C^k$ (as functions $\mathbf{R} \rightarrow L(\mathbf{R}^{2n}, \mathbf{R}^{2n})$) then the coefficients of f are C^k -smooth.

This proposition follows from reversibility of Eq.(1) and the fact that A and B are real matrices of an even order. The proposition immediately implies that the following four types of loss of stability are generic for one-parameter families of Eq.(1):

1a, 1b. One and only one curve $\text{Re}\lambda_j(0, k)$ of the dispersion characteristic has quadratic tangency with k -axis at the unique point $k = 0$, with $\text{Im}\lambda(0, 0) = 0$ (1a) or $\text{Im}\lambda(0, 0) \neq 0$ (1b), see fig.1.

2a and 2b. One and only one curve $\text{Re}\lambda_j(0, k)$ of the dispersion characteristic has quadratic tangencies with k -axis at two points $k = \pm k_0$, with $\text{Im}\lambda(0, \pm k_0) = 0$ (2a) or $\text{Im}\lambda(0, \pm k_0) \neq 0$ (2b), see fig.2.

Under additional assumptions on A and F we shall say that Eq.(1) undergoes 1a,1b,2a or 2b bifurcation at $\mu = 0$ if its dispersion characteristic possesses the corresponding tangency (see also [11, 3]). These assumptions will be pointed out in Sec. 3 for the 2a bifurcation.

3 The 2a bifurcation

Recall that $B(\mu) = D_u F(\mu, 0)$, $B(\mu) = -GB(\mu)G$. Let $B(0) = B_0$, $A(0, 0) = A_0$. We shall say that Eq.(1) undergoes the 2a bifurcation if

1. One and only one curve $r = \text{Re}\lambda_j(0, k)$ of the dispersion characteristic has quadratic tangencies with k -axis at exactly two points $k = \pm k_0$, $\text{Im}\lambda(0, \pm k_0) = 0$.
2. $\text{Re}\lambda_j(\mu, k) = \lambda_j(\mu, k)$ and $\lambda_j(\mu, k)$ is a simple curve in a neighborhood of $(0, k_0)$, that is, $\partial_\lambda \mathcal{D}(0, 0, ik_0) \neq 0$.

The matrix B_0 in this case has the following properties:

- If κ is an eigenvalue then $-\kappa, \pm\kappa^*$ are eigenvalues also.
- There are no eigenvalues κ with $\text{Re}\kappa = 0$ except $\kappa = \pm ik_0$.
- Operators $(B_0 \pm ik_0 E)$ have 2-dimensional root spaces. Moreover, matrix B_0 has a 2-dimensional Jordan box for each eigenvalue ik_0 and $-ik_0$ (not pairs of 1-dimensional boxes).

Let us prove the last statement only since the first item follows from reversibility and reality of B_0 , see [14, 4], the second item is valid because the dispersion characteristic has no other tangencies or intersections with the k -axis. It is clear that $\det(B_0 - \kappa E)$ has double roots $\pm ik_0$ because of quadratic tangency. So, operator B_0 has a 4-dimensional invariant subspace Y corresponding to roots $\pm ik_0$. Moreover, there is the decomposition $\mathbf{C}^{2n} = Y \oplus Z$ where Z and Y are invariant under B_0 as well as under G , moreover, B_0 is hyperbolic on Z (has no eigenvalues with zero real part). Given proper coordinates, we can write the restrictions \bar{B}_0, \bar{G} of B_0, G on $Y = (y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$:

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}_0 = \begin{pmatrix} ik_0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & ik_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ik_0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & -ik_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

where $\sigma = 1$ or 0 . We just need to show that $\sigma = 1$

Let us represent $A_0 = A_{yy} \oplus A_{zy} \oplus A_{zz} \oplus A_{yz}$, where

$$A_{yy} : Y \rightarrow Y, \quad A_{zy} : Z \rightarrow Y, \quad A_{zz} : Z \rightarrow Z, \quad A_{yz} : Y \rightarrow Z.$$

Reversibility and reality of A_0 implies the following form of A_{yy}

$$A_{yy} = \begin{pmatrix} ia_{11} & a_{12} & ia_{13} & a_{14} \\ a_{21} & ia_{22} & a_{23} & ia_{24} \\ -ia_{13} & a_{14} & -ia_{11} & a_{12} \\ a_{23} & -ia_{24} & a_{21} & -ia_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ji} \in \mathbf{R} \quad (6)$$

in the same coordinates.

Using (5,6) one can calculate

$$\mathcal{D}(0, \lambda, ik_0 + \delta) = -4k_0^2 \det(B_z - ik_0)[\delta^2 + \sigma\lambda a_{21} + O(\lambda^2 + \delta^3 + \lambda\delta)],$$

where B_z is the restriction of B_0 on Z . This expression along with the definition of the 2a bifurcation implies

Proposition. $\sigma = 1$ and $a_{21} < 0$ for the 2a bifurcation.

If F in Eq.(2) has the linear part as described above and some quantity a , calculated by the first, second and the third order terms of the Taylor expansion for F , does not equal to 0 then Eq.(2) undergoes the reversible Hopf bifurcation. The bifurcation was studied in [14, 8, 9]. Recall our assumption on the parameter μ : the solution $u \equiv 0$ is stable for $\mu < 0$ and unstable for $\mu > 0$. Let O be the singular point $u = 0$ of Eq.(2). Then O is elliptic for $\mu > 0$ and a saddle-focus for $\mu < 0$, provided $|\mu|$ being small enough. A neighborhood of O is rich with solutions of different kinds. For example, if $\mu > 0$ and $a < 0$ there are a family of periodic solutions and quasi-periodic solutions; some periodic solutions of the family have homoclinic orbits ([8]). If $\mu < 0$ and $a > 0$ there are at least two homoclinic orbits to O . If these homoclinic orbits are transverse there are a lot of other solutions lying in a small tube of these, "basic", solutions, (see [2]).

The majority of these results are obtained by the following procedure:

- Detection of a center manifold and finding the normal form around O up to some order for the restriction of the system to the center manifold. This normal form turns out to be integrable.
- Integrating the normal form.
- Studying which solutions to the normal form approximate ones to the original equations.

Let us briefly describe the first step of the procedure. Henceforth we shall write k instead of k_0 .

There is the following formal normal form for Eq.(2) (assuming here F to be a power series, see [6]):²

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= ik y_1 + y_2 + iy_1 P(\mu, |y_1|^2, i(y_1 y_2^* - y_1^* y_2), y_\pm^2) + (g_1(\mu, y_1, y_2, y_\pm) y_\pm, y_\pm) \\ \dot{y}_2 &= ik y_2 + iy_2 P(\mu, |y_1|^2, i(y_1 y_2^* - y_1^* y_2), y_\pm^2) + y_1 Q(\mu, |y_1|^2, i(y_1 y_2^* - y_1^* y_2), y_\pm^2) \\ &\quad + (g_2(\mu, y_1, y_2, y_\pm) y_\pm, y_\pm) \\ \dot{y}_\pm &= \mathcal{L} y_\pm + f_\pm(\mu, y_1, y_2, y_1^*, y_2^*, y_\pm) y_\pm \end{aligned} \quad (7)$$

where P, Q are power series with real coefficients; changing the parameter μ we can suppose that $Q = -\mu - a|y_1|^2 + \dots$, the quantity a was mentioned above, $y_\pm = 0$ give the center manifold, y_\pm^2 denotes all quadratic terms of y_\pm , $(g(\cdot) y_\pm, y_\pm)$ is quadratic form on \mathbf{C}^{2n-4} , \mathcal{L} is hyperbolic matrix (all its eigenvalues have nonzero real parts). In general, a normalizing transformation does not converge but really we only need in normalization up to the third order terms so only a finite order of smoothness for F is necessary.

Performing the normalization up to the third order terms by means of a polynomial change of variables

$$u = R(y)$$

where R is a third order polynomial we get an invertible in some neighborhood of $y = 0$ transformation and the equation:

$$\dot{y} = \tilde{F}(\mu, y) \quad (8)$$

with \tilde{F} being in the normal form up to the third order term, that is, the terms of the order ≤ 3 have the form (7).

² a^* means complex conjugate of a , we make use of the fact that $\bar{y}^* = y$. The complete equations may be obtained if one adds equation for y^* and replaces y^* by \bar{y} everywhere.

3.1 The "basic" localized solutions

When $a \neq 0$ in a $O(\sqrt{|\mu|})$ neighborhood of the origin, there exist localized solutions of Eq.(8) if and only if $\mu < 0$ and $a > 0$, see [8]. "The basic" among these solutions can be constructed by a perturbation procedure beginning from solutions to the truncated equation (the conjugated equations are implied)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= ik y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 &= ik y_2 + (-\mu y_1 - a|y_1|^2 y_1) \\ y_{\pm} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Denote $\epsilon = \sqrt{|\mu|}$. The equation (9) has the following localized solutions $y_0(\phi, \epsilon, x)$:

$$\begin{aligned} y_1^0 &= \epsilon \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a} \cosh \epsilon x} e^{i(kx+\psi)} = \epsilon \tilde{y}_1^0(\epsilon x) e^{ikx} \\ y_2^0 &= -\epsilon^2 \frac{\sqrt{2} \sinh \epsilon x}{\sqrt{a} \cosh^2 \epsilon x} e^{i(kx+\psi)} \\ y_{\pm}^0 &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

where ψ is a parameter.

Definition 2 We shall call an ϵ -family of localized solutions ($y_\epsilon(x)$) to Eq.(8) ($\mu = -\epsilon^2$) to be basic iff

$$y_\epsilon(x) = y^0(\psi, \epsilon, x) + g(\epsilon, x) \quad (11)$$

where $\psi \in [0, 2\pi]$, $g(\epsilon, x)$ is continuous and $|g(\epsilon, x)| < \epsilon^2 K e^{-\gamma|x|}$, for $\gamma > \epsilon$.

Let us recall that a solution $u(x)$ is called symmetric iff $Gu(x) = u(-x)$.

Proposition 2 There exists $\epsilon' > 0$ such that for $\epsilon \in (0, \epsilon')$ there exist two (and only two) basic ϵ -families of symmetrical localized solutions to Eq.(8). They can be represented in the form (11) with $\psi = 0$ and $\psi = \pi$.

The proof is given in [8].

Let $u_\epsilon(x) = R(y_\epsilon(x))$ where $y_\epsilon(x)$ is one of the basic families (11). Denote $Sp(u_\epsilon)$ the spectrum of Eq.(3) with $u(x) = u_\epsilon(x)$ and $\mu = -\epsilon^2$. Denote $N_c = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq c\}$

Now we can formulate the theorem which gives an unstable mode for $u_\epsilon(x)$.

Theorem 1 For all $c > 0$ there exists $\epsilon' > 0$ such that for any $0 < \epsilon < \epsilon'$ one has $Sp(u_\epsilon) \cap N_c = S \cup \{0, \lambda_1(\epsilon), \lambda_2(\epsilon)\}$, such that $ReS < -\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$, $\lambda_2 = -3\epsilon^2/a_{21} + O(\epsilon^3)$ and $\lambda_1 = O(\epsilon^3)$

3.2 Families of periodic stationary solutions. Eckhaus instability

In this subsection we consider a family of periodic solutions to Eq.(8) appearing upon the reversible Hopf bifurcation when $\mu > 0$ and $a < 0$. This family can also be constructed by a perturbation procedure. When Eq.(9) has the following family of periodic solutions:

$$\begin{aligned} y_1^0 &= \epsilon \alpha(s) e^{i(k+\epsilon s)x} = \epsilon \tilde{y}_1^0(\epsilon x, s) e^{ikx} \\ y_2^0 &= is\epsilon^2 \alpha(s) e^{i(k+\epsilon s)x} \quad \alpha(s) = \sqrt{\frac{(1-s^2)}{-a}}, \quad s \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (12)$$

which are elliptic for $s^2 > 1/3$ and hyperbolic for $s^2 < 1/3$ as a solutions to Eq.(9).

Proposition 3 ([14, 8].) There is $\epsilon' > 0$ such that for any $0 < \epsilon < \epsilon'$ the following family of periodic solutions to Eq.(8) exists

$$y(s, x) = y^0(s, (1 + \epsilon^2 p(s, \epsilon)x) + \epsilon^2 g(\epsilon, s, (1 + \epsilon^2 p(s, \epsilon)x)), \quad s \in [-1, 1] \quad (13)$$

$g(\epsilon, s, x)$ and $p(s, \epsilon)$ are uniformly continuous and bounded with respect to all of their variables, $g(\epsilon, s, x)$ is $2\pi(k + \epsilon s)^{-1}$ -periodic in x . Moreover, there are two positive functions $s_1(\epsilon)$, $s_2(\epsilon)$, tending to $1/3$ when $\epsilon \rightarrow 0$, such that $y(s, x)$ is elliptic (on the center manifold) for $-1 \leq s < -s_1$ and $1 \geq s > s_2$; $y(s, x)$ is hyperbolic for $-s_1 < s < s_2$.

Denote the corresponding family to Eq.(2) by $u_\epsilon(s, x) = R(y_\epsilon(s, x))$.

Let $Sp_\epsilon(s)$ be the spectrum of Eq.(3) with $\mu = \epsilon^2$ and $u(x) = R(y_\epsilon(s, x))$. Let $N_c = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq c\}$. Now we are able to formulate

Theorem 2 For all $b, c > 0$ there exist $\epsilon' > 0$ such that for $\epsilon \in (0, \epsilon']$ one has $Sp_\epsilon(s) \cap N_c = \mathcal{S} \cap [-\epsilon^2 b, a(s)]$, where $a(s) > 0$ for $s < -s_1$ and $s > s_2$ and $a(s) = 0$ for $-s_1 < s < s_2$, $Re \mathcal{S} < 0$. s_1 and s_2 are the same as in the Proposition 3.

НЕ УСТОЙЧИВОСТЬ МАЛЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Л.Ю.Глебский, Л.М.Лерман

Рассмотрены бифуркации потери устойчивости однородного стационарного решения для одного класса уравнений, обратимых относительно пространственной переменной x . Показана временная неустойчивость малых стационарных решений, рождающихся при таких бифуркациях.

Acknowledgment.

This research was supported in part by the EC-Russia Collaborative Project ESPRIT P 9282 - ACTCS. L.Yu.Glebsky also thanks the International Science Foundation for partial support (grants R97000, R97300). L.M.Lerman is thankful to the Russian Foundation of Fundamental Researches for partial support (grant 95-01-000962a).

References

- [1] P.Collet and J.-P.Eckmann, "Instabilities and Fronts in Extended Systems" Princeton Univ. Press,, Princeton, NJ, 1990
- [2] A.R.Champneys, *Int. J. of Bifurcation & Chaos* **4** (1994), N.6, 1447-1482
- [3] P.Couillet and G.Iooss, *Phys.Rev.Lett.* **64**, 866-869
- [4] R.L.Devaney, *Trans. Amer. Math. Soc.* **218** (1976), 89-113
- [5] W. Eckhaus, "Studies in Non-Linear Stability Theory" New York: Springer,1965
- [6] C. Elphick et al., *Physica D* **29** (1987), 95-127
- [7] A. van Harten, *J. Nonlinear Sci.* **1** (1991), 397-422
- [8] G.Iooss, C.M.Pérouème, *J. Diff. Eq.* **102** (1993), N.1, 62-88
- [9] G.Iooss, J.Los, *Nonlinearity* **3** (1990), N.3, 851-873
- [10] K.Kirchgässner, *J.Diff.Eq.* **45** (1982), 113-127
- [11] A.Mielke, *Z angew Math. Phys. (ZAMP)***43** (1992), 449-470
- [12] A.Mielke, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **21** (1991) N.2, 707-713
- [13] M.B.Sevryuk, *Func. Anal. and its Appl.* **23** (1989), 116-123
- [14] M.B.Sevryuk, "Reversible Systems." Lect. Notes in Math., V.1211, Berlin: Springer, 1986
- [15] G.A.Sviridyuk, *Usp. Mat. Nauk* **49** (1994), N4, 47 (in Russian)

Thermodynamics' restrictions on Amplification without Inversion

Olga Kocharovskaya and Yuri Rostovtsev

Department of Nonlinear Physics and Optics
 Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences
 46 Ulyanova Street, N.Novgorod 603600, Russia
 E-mail: kochar@appl.sci-nnov.ru and rost@appl.sci-nnov.ru

Abstract

Analyzing the general condition of amplification without inversion in three-level atoms driven by the microwave coherent pumping we derive some principal thermodynamics' restrictions. New possibility of observing the amplification without inversion under initial thermodynamics equilibrium between atoms and thermal radiation field is also predicted.

1 Introduction

The conception of the amplification without inversion (AWI) was developed in a large number of papers (for instance, see [1] and the references therein). Recently, two first experiments demonstrating the lasing without inversion were reported [2]. The main interest in this region is connected with the possibility of up-conversion and creating of the novel coherent sources of short wavelength radiation. For this purpose the systematic analysis of the inversionless amplification condition is very important.

The main difficulty in making such analysis up is a large number of parameters. Even in the simplest three-level schemes with a microwave coherent driving field the set of parameters is quite broad. Indeed, it involves along with an intensity of the driving field both longitudinal and transverse relaxation rates at all the transitions.

The cardinal task of this paper is to derive the general condition of the AWI and to solve the principal question whether the traditional Maxwell-Bloch equations allow for possibility of AWI in the case of sufficiently strong driving field under initial thermodynamic equilibrium between atoms and field reservoir.

2 Basic equations

We analyze the close three-level system (see Figure 1) driven by the strong coherent field: $\mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2}(E_p e^{i\omega_p t} + E_p^* e^{-i\omega_p t})$, coupling two upper states 2 and 3.

We are interested to find the amplification condition of the monochromatic probe field: $\mathcal{E}_a(t) = \frac{1}{2}(E_a e^{i\omega_a t} + E_a^* e^{-i\omega_a t})$, acting at the high frequency transition $1 \leftrightarrow 3$ which is an adjacent one to the driven transition $2 \leftrightarrow 3$.

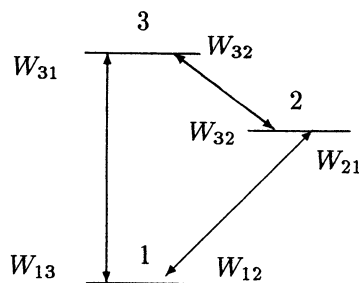


Figure 1: The close *P*-type, three-level system

The density matrix equations in the rotating-wave approximation are:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} = -\Gamma_{13}\sigma_{13} + in_{13}\alpha + i\gamma\sigma_{12} \quad (1a) \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} = -\Gamma_{23}\sigma_{23} + in_{23}\gamma + i\alpha\sigma_{12}^* \quad (1b) \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = -\Gamma_{12}\sigma_{12} + i(\gamma^*\sigma_{13} - \alpha\sigma_{23}^*) \quad (1c) \\ \frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = R_1 - 2\Im(\alpha^*\sigma_{13}) \quad (1d) \\ \frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = R_2 + 2\Im(\alpha^*\sigma_{13} + \gamma^*\sigma_{23}) \quad (1e) \\ 1 = \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} \end{array} \right.$$

with the definitions:

$$\begin{aligned} \Gamma_{13} &= \frac{1}{T_2^{13}} + i(\omega_a - \omega_{31}), \quad \Gamma_{23} = \frac{1}{T_2^{23}} + i(\omega_p - \omega_{32}), \\ \Gamma_{12} &= \frac{1}{T_2^{12}} + i(\omega_a - \omega_p - \omega_{21}), \quad \gamma = \mu_{23}E_p/2\hbar, \quad \alpha = \mu_{13}E_a/2\hbar, \quad n_{ik} = \rho_{ii} - \rho_{kk}, \\ R_1 &= -(W_{21} + W_{31} + W_{13})\rho_{11} + (W_{12} - W_{13})\rho_{22} + W_{13} + 2n_{23}|\gamma|^2\Re\frac{1}{\Gamma_{23}}, \\ R_2 &= (W_{21} - W_{23})\rho_{11} - (W_{12} + W_{32} + W_{23})\rho_{22} + W_{23} - 2n_{23}|\gamma|^2\Re\frac{1}{\Gamma_{23}}, \end{aligned}$$

T_2^{ik} is the transverse relaxation time of the transition $i \leftrightarrow k$. This time is connected with incoherent pumping and damping rates [3]: $\frac{2}{T_2^{ik}} \geq \sum_l (W_{il} + W_{lk})$

The matrix of the relaxation parameters $W_{i \leftarrow k}$ is chosen in a general form with six independent components. We do not impose the equilibrium balance principle or any other restrictions on the $W_{i \leftarrow k}$.

3 Amplification condition

The steady-state solution of the density matrix equations (1) in the first order to respect of the probe field has a form:

$$\begin{aligned} \sigma_{23} &= i\frac{\gamma n_{23}}{\Gamma_{23}}, \\ \sigma_{12} &= i\frac{\gamma^*\sigma_{13} - \alpha\sigma_{23}^*}{\Gamma_{12}}, \\ \sigma_{13} &= \frac{n_{13} - |\gamma|^2\frac{n_{23}}{\Gamma_{12}\Gamma_{23}^*}}{\Gamma_{13} + \frac{|\gamma|^2}{\Gamma_{12}}}i\alpha, \end{aligned}$$

where the populations differences n_{12} and n_{13} which depend on the relaxation matrix $W_{i \leftarrow k}$ and coherent pumping field are the solutions of the equation set (1d, 1e):

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{23} = \frac{\xi}{Z} \\ n_{13} = \frac{(2|\gamma|^2\Re\frac{1}{\Gamma_{23}}\zeta + \eta)}{Z} \\ \eta = (W_{13} - W_{31})(W_{32} + W_{12}) + W_{12}W_{23} - W_{32}W_{21} \\ \xi = (W_{23} - W_{32})(W_{31} + W_{21}) + W_{21}W_{13} - W_{31}W_{12} \\ \zeta = W_{13} - W_{31} + W_{12} - W_{21} \\ Z = 4|\gamma|^2\Re\frac{1}{\Gamma_{23}}(W_{21} + W_{31}) + 2|\gamma|^2\Re\frac{1}{\Gamma_{23}}(W_{12} + W_{13}) + \\ W_{12}W_{13} + W_{13}W_{21} + W_{12}W_{23} + W_{21}W_{23} + W_{12}W_{31} + \\ W_{23}W_{31} + W_{13}W_{32} + W_{21}W_{32} + W_{31}W_{32} \end{array} \right. \quad (2)$$

An amplification condition is

$$\Re \left(\frac{n_{13} - |\gamma|^2 \frac{n_{23}}{\Gamma_{12}\Gamma_{23}^*}}{\Gamma_{13} + \frac{|\gamma|^2}{\Gamma_{12}}} \right) < 0. \quad (3)$$

In the particular case of zero detuning the inequality (3) takes the form: $n_{13} - |\gamma|^2 n_{23} T_2^{23} T_2^{12} < 0$

This condition can be fulfilled only if the microwave pumping $|\gamma|^2$ exceeds a threshold $T_2^{23} |\gamma|^2 > \frac{\eta}{\xi T_2^{12} - 2\zeta}$, and if the necessary condition which can be expressed as $\xi T_2^{12} > 2\zeta$, (3) is fulfilled.

Using the relationships (2) it is possible to obtain the final necessary condition for amplification (3) in the form:

$$(W_{23} - W_{32})(W_{31} + W_{21}) + W_{21}W_{13} - W_{31}W_{12} > \frac{2}{T_2^{12}}(W_{13} - W_{31} + W_{12} - W_{21}). \quad (4)$$

4 Field reservoir

Let us consider now a particular case of the field reservoir.

In this case the matrix of the relaxation parameters $W_{i \leftarrow k}$ are well known and have the form: $W_{i \leftarrow k} = A_{ki}(\theta(i-k) + M(|\omega_{ki}|))$, here ω_{ki} is the frequency of the transition $i \leftrightarrow k$, A_{ki} is Einstein coefficient, $\theta(x)$ is a step function, $M(|\omega_{ki}|)$ is a mean number reservoir's quanta at the frequency ω_{ki} .

After substitution of the last expression into the necessary condition (4) we can transform it to the form:

$$A_{23} > A_{13} + 2A_{12} + \frac{(A_{13} + A_{12})(A_{12} + A_{23}M(\omega_{23}))}{A_{13}M(\omega_{13}) + A_{12}M(\omega_{12})}. \quad (5)$$

In a particular case when $2 \leftrightarrow 1$ transition is forbidden ($A_{12} = 0$) inequality (5) leads to condition $M(\omega_{31}) > M(\omega_{32})$ derived in [4] and regarded as an inversion condition for a field reservoir. In general (5) implies the following inequality to be satisfied:

$$A_{13}(M(\omega_{31}) - M(\omega_{32})) + A_{12}(M(\omega_{21}) - M(\omega_{32})) > 0. \quad (6)$$

It can be fulfilled only if $M(\omega_{31}) > M(\omega_{32})$ and/or $M(\omega_{21}) > M(\omega_{32})$ and hence at $\omega_{32} < \omega_{21}$ (i.e. when the frequency of the amplified field is larger than the double frequency of the driving field) can be regarded again as an inversion condition for a filed reservoir.

However, at $\omega_{32} > \omega_{21}$ it can be fulfilled even in case of the thermally equilibrium reservoir for which the mean number of photons is defined by Bose-Einstein distribution:

$$M(|\omega_{ki}|) = \frac{1}{\exp(\hbar|\omega_{ki}|/kT) - 1}$$

if A_{12} exceeds some threshold value:

$$A_{12} > A_{13} \frac{M(\omega_{32}) - M(\omega_{31})}{M(\omega_{21}) - M(\omega_{32})}. \quad (7)$$

In this case resolving (5) with respect to A_{23} we can rewrite it also as

$$A_{23} > \frac{(A_{13} + 2A_{12})(A_{13}M(\omega_{31}) + A_{12}M(\omega_{21}) + A_{12}(A_{12} + A_{13}))}{A_{13}(M(\omega_{31}) - M(\omega_{32})) + A_{12}(M(\omega_{21}) - M(\omega_{32}))}.$$

In the limit of high temperature inequality (7) takes a form

$$A_{12} > A_{13} \frac{\omega_{21}^2}{\omega_{32}^2 - \omega_{21}^2}.$$

Taking into account that $A_{12} \sim \omega_{12}^3$ we verify that the condition (7) can not be fulfilled in the limit $\omega_{12} \rightarrow 0$. So the possibility of AWI under the thermal equilibrium between atoms and thermal radiation field can be found only in the restricted domain of the frequencies ratio ω_{21}/ω_{31} . Figure 2 illustrates the characteristic dependence of this domain on the Einstein coefficients A_{12} , A_{13} .

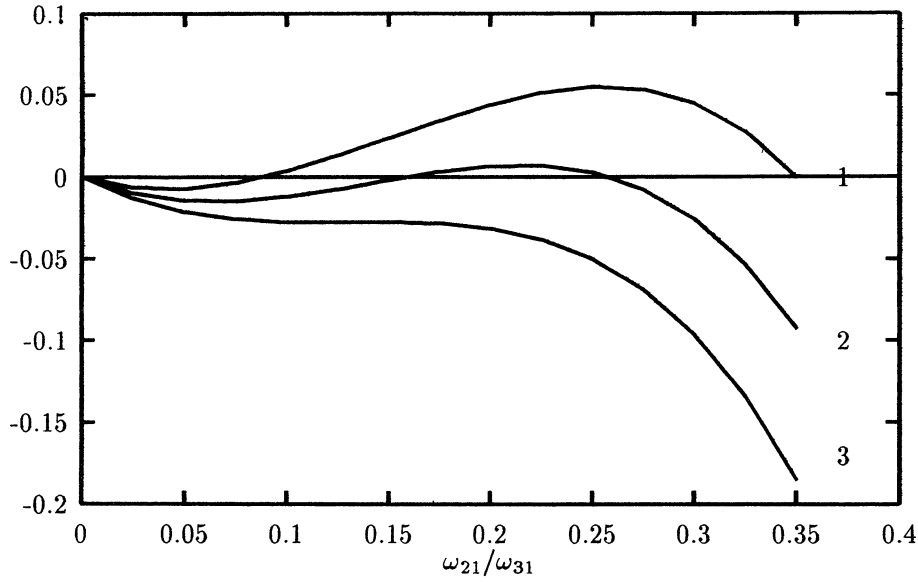


Figure 2: The dependence of the left side inequality (6) on ω_{21}/ω_{31} . Parameters of curves are the next: $A_{12} = a_{12}\omega_{21}^3/\omega_{31}^3$, $\hbar\omega_{31}/kT = 3$, (1) - $A_{13}/a_{12} = 0.3$, (2) - $A_{13}/a_{12} = 0.4$, (3) - $A_{13}/a_{12} = 0.5$.

At the end we would like to remark that this method developed for P -scheme can be extended for H -scheme as well, and leads to the analogous results.

In conclusion, we obtained the general necessary condition (3) for the P -scheme and analyzed it for the radiative limit (5) and show that the thermal equilibrium between atoms and thermal radiation field restricts the possibility of observing the AWI. We also found the region of parameters in which the AWI exists in the system under thermal equilibrium conditions.

5 Acknowledgment

The work has been carried out with support of Russian Fundamental Research Foundation (93-02-3647).

6 References

1. O. Kocharovskaya, P. Mandel, "Basic models of lasing without inversion", *Quantum optics*, Vol. 6, n. 4, pp. 201-390, 1994.
2. A.S. Zibrov, M.D. Lukin, D.E. Nikonov, L.W. Hollberg, M.O. Scully, V.L. Velichansky, "Experimental demonstration of laser oscillation without population inversion via quantum interference in Rb", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, n. 8, pp. 1499-1502, 1995; G.G. Padmabandu, G.R. Welch, I.N. Shubin, E.S. Fry, D.E. Nikonov, M.D. Lukin, M.O. Scully, "Laser oscillation without population inversion in a Sodium atomic beam", submitted to *Phys. Rev. Lett.* (1995).
3. H. Haken *Theory of Laser*, edited by L. Genzel, Encyclopedia of Physics, Vol XXV/2c, Springer, Heidelberg. 1970; *Kvantovaya elektronika*, Vol. 1, Fain V.M., "Photons and Nonlinear media", Sovetskoe radio, Moskva 1972 (in Russian).
4. A. Imamoglu, J. E. Field, S. E. Harris, "Lasers without Inversion: A Closed Lifetime Broadened System", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 66, n. 9, pp. 1154-1156, 1991.

Усиление без инверсии: термодинамические ограничения

Ольга Кочаровская и Юрий Ростовцев

В работе получено общее условие существования усиления без инверсии в замкнутой трехуровневой системе с когерентной накачкой, позволившее выявить термодинамические ограничения на параметры системы и найти область параметров, где усиление без инверсии возможно при термодинамическом равновесии атомной системы с тепловым излучением.

Мы рассмотрели замкнутую трехуровневую атомную систему (см. рис. 1) с когерентной накачкой, считая, что релаксация и некогерентная накачка обусловлены взаимодействием с полем резервуаром.

В результате решения уравнений для матрицы плотности (см. систему уравнений (1)) в резонансном приближении, нами получено общее условие усиления (4) и проведен его подробный анализ для случая, когда матрица релаксации определяется равновесным тепловым излучением.

Было найдено, что при соотношении частот $\omega_{32} < \omega_{21}$, в случае теплового равновесия, усиление без инверсии невозможно. При обратном соотношении частот, напротив, существует, в принципе, область параметров, где возможно усиление без инверсии при равновесии между полем теплового резервуара и атомной системой.

UNSTABLE QUANTUM FIELD THEORY SOLVES THE PROBLEM OF QUANTUM GRAVITY

V. V. Kocharovsky and Vl. V. Kocharovsky

Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences

46 Ulyanov str., Nizhny Novgorod 603600, RUSSIA

E-mail: kochar@appl.sci-nnov.ru

A quantum field theory of interacting negative-energy and positive-energy fields is proposed to be a self-consistent renormalizable unified theory of gravity and matter fundamental interactions. It is shown that the standard Feynman rules and the euclidean formulation of a quantum field theory are inconsistent with the actual physics of the negative-energy instability in a gravity-matter system. A correct formulation of an unstable quantum field theory is outlined. Contrary to the old higher-derivative quantum theory of gravity, the unstable quantum field theory does not suffer from a contradiction between unitarity, causality and renormalizability.

The simplified model of quantized conformally-flat gravity and a massive scalar field is analyzed. A new technique for the evaluation of Feynman diagrams is developed since the usual euclidean method is not applicable to nonsemibounded hamiltonians. Renormalization-group equations are derived and their exact solution is found. It yields a remarkable phenomenon of self-consistent asymptotic freedom taking place both in the ultraviolet and infrared limits simultaneously. Some quantum-field aspects of the Universe inflation and evolution are discussed.

Introduction

We discuss a quantum theory of gravity based on an unstable quantum theory of interacting negative-energy and positive-energy fields [1]. The main conclusion is that this approach solves the long-standing problem of quantum gravity, i. e., more accurately, yields a proper way to a self-consistent physically acceptable quantum field theory (QFT) of gravity and its unification with fundamental matter interactions.

As is well known, the gravitational interaction is the last of the known interactions for which a consistent quantum theory still is not found. It is commonly accepted nowadays that the standard local quantum field theory fails to describe gravity (see, e. g., reviews [2 – 5] and references therein). In other words, the observable gravitation and, hence, the Universe evolution in a whole are inconsistent with the standard set of basic principles of a quantum field theory which includes renormalizability, causality (in particular, local commutativity), unitarity, Lorentz and general gauge symmetries, cyclicity of the vacuum state, positive definiteness of a hamiltonian (condition of spectrality), etc. All these principles together yielded a remarkable quantum field theory in the case of matter interactions including electromagnetic, weak, and strong interactions as well as their unifications. There were a lot of attempts to extend or modify basic principles in order to incorporate quantum gravity. However, it seems, no one of them was successful finally. (Moreover, even without gravity, the modern quantum field theory of matter interactions suffers from unpleasant divergences of effective coupling constants, that indicates some inconsistency of the theory, at least, on the perturbative level of formulation.)

In our opinion, the reason is that the principal feature of the gravity-matter interaction, namely, the phenomenon of the negative-energy instability, was not taken into account correctly. So, a positive definiteness of a hermitian hamiltonian should be excluded from the basic principles of quantum field

theory. As a result, a gravity-matter field system appears as a non-equilibrium system with an internal, self-consistent reason for the development of non-equilibrium structures of matter and spacetime.

The initial obstacle to a QFT of gravity is a non-renormalizability of the classical Einstein-Hilbert lagrangian density $\mathcal{L}_c = \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)/16\pi G$, where $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ is the scalar curvature of spacetime, $g_{\mu\nu}$ the metric tensor, $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$ the Ricci tensor, $R_{\mu\kappa\nu}^\lambda$ the curvature tensor, and Λ the cosmological constant; $g = \det g_{\mu\nu}$. There are two approaches to the solution of the problem (for general references see, e. g., reviews [2 – 5]).

The first, radical approach is to cancel or, at least, suppress ultraviolet divergences by formulating a theory of a different kind. For example, one can impose additional symmetries in extended spaces (supersymmetric theories), replace a local interaction of point particles by an interaction of extended objects (string theories), exploit essentially nonlinear variable transformations (Ashtekar's variables), etc.

The second, more conservative approach is to add to the lagrangian new terms which are necessary for the renormalizability of the usual QFT. They arise naturally in the perturbative calculations and lead to a lagrangian with higher-derivative terms, as it was pointed out by DeWitt and Utiyama [6]. A reasonable correspondence with the classical gravitation theory can survive due to a nice theorem by Weinberg stating that the dominant term in a lagrangian at the low-energy limit is always the Einstein-Hilbert one, provided that the underlying theory is asymptotically safe. It was verified that the higher-derivative QFT of gravity is renormalizable [7] (even in the presence of matter, see [5, 8]). Then, in a series of papers [9 – 12] (each later paper corrects and/or extends the results of the previous one), it was shown by means of the renormalization-group analysis in the one-loop approximation that this QFT can possess an ultraviolet asymptotic freedom. Unfortunately, it occurs mainly for the range of parameters where unitarity, causal behavior of the system is broken because of the presence of negative-norm ghosts or tachyons (for a general discussion of tachyons and negative-norm states in QFT see [13]). Moreover, some coupling constants do not possess the asymptotic freedom. In addition, in the case of the ultraviolet asymptotic freedom, the infrared divergence appears, and vice versa. (A formal alteration of a coupling-constant sign [14] does not solve the problem because it yields the infrared freedom only at the price of the disappearance of the ultraviolet freedom, and vice versa, as in a simple φ^4 -theory.) The problem of unitarity was discussed already in [7] and in most of the later papers on higher-derivative QFT. Speculations on a possible replacement of a negative real q^2 -pole by a pair of complex-conjugated poles by means of some generalization of the Lee-Wick mechanism (which was used in [15] to construct an ultraviolet-finite version of quantum electrodynamics with a non-hermitian lagrangian), or the introduction of radiative corrections, or the hope for non-perturbative effects were never developed into a consistent theory [2, 5, 7 – 12, 14 – 17]. The existence of divergences of the effective coupling constants, either in the infrared or ultraviolet limits, indicates also the inconsistency of the theory or the need to hope for non-perturbative effects. Thus, because of these serious problems, it is almost commonly accepted nowadays that the existent higher-derivative QFT of gravity cannot be regarded as a self-consistent physically acceptable fundamental theory [2, 3, 5].

1 Higher-Derivative Theory of Gravity and Negative-Energy Instability

The unstable QFT allows us to solve simultaneously both the unitarity and the effective-coupling-constant divergence problems of the second approach by taking into account properly the phenomenon of instability

in a gravity-matter field system.

First of all, it should be remembered that the “higher-derivativeness” of QFT does not mean something special because this QFT can be reformulated in the equivalent form of the usual lower-derivative QFT of gravity and some additional matter-fields [18, 19]. This means that the renormalizability of the theory dictates definitely that a pure gravity field cannot exist alone without interaction with some matter fields, “hidden” or observable. All fundamental gravity and matter fields participating in the interaction, their propagators and energy signs can be determined explicitly. For instance, in the case of the “pure” higher-derivative QFT of gravity [5, 7, 11, 12] with a lagrangian density

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + \lambda_1 R^2 + \lambda_2 R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \lambda_3 \mathcal{G} + \lambda_4 \square R \right], \quad (1)$$

there is one spin-2 massive negative-energy field with five independent variables, one spin-2 massless positive-energy gravitational field with two independent variables, and one scalar massive positive-energy field. The lagrangian (1) includes also the surface term, $\square R$, and the Gauss-Bonnet term, $\mathcal{G} = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^2$, which is a topological invariant only in a four-dimensional spacetime and, therefore, is important for the renormalization in the dimensional regularization scheme. The renormalizability of the higher-derivative theory of gravity (to all loop orders in a perturbation expansion) was first shown by Stelle on the basis of the so-called locality hypothesis and then rigorously proven (together with the locality hypothesis) by Voronov and Tyutin [7].

The facts that there is a negative-energy contribution to the hamiltonian coming from a conformal factor of spacetime metric, and that the interaction between negative-energy fields (in particular, the conformal factor) and positive-energy fields (observable matter and gravitational waves) leads to a simultaneous growing of amplitudes of all fields were known in the context of the classical and semiclassical theory of gravity for a long time [20 – 22]. However, in the scope of semiclassical theory the properties and the very existence of this instability depend on the choice of a regularization scheme for the energy-momentum tensor and, hence, cannot be described consistently. Nevertheless, this instability phenomenon develops even starting from a vacuum initial state and influences crucially the quantum physics of the system. The distinctive feature of the gravity-matter system is the unboundedness of its hamiltonian from below as well as from above. (Note that the well-known Witten’s positive energy theorem for the asymptotically flat gravity is valid due to constraints in the classical theory and is not applicable to the QFT of gravity.) For such an unstable QFT, usual Feynman rules and euclidean formulation of QFT are not correct anymore. In other words, a standard euclidean theory corresponds to some fiction of the “euclidean” field dynamics similar to quasi-equilibrium quantum fluctuations in statistical physics, and does not describe the actual dynamics of the physical gravity-matter system. This is the reason why the old higher-derivative QFT yielded physically unacceptable inconsistent properties.

These ideas as well as the correct formulation of the unstable QFT of a gravity-matter system follow immediately from the results obtained in [1]. Calculations should be done directly in the Minkowski momentum space (not in the euclidean one) by means of, e. g., a dimensional regularization and the use of the integral representation of a hypergeometric function similar to the technique developed in [1]. In other respects the calculations are analogous to the standard ones and are lengthy. However, the results are dramatically different from the standard ones and make the theory self-consistent and physically acceptable.

2 Unstable Quantum Field Theory

Here we explain, using a simple example, where the usual euclidean formulation of unstable QFT is wrong, what the correct formulation is, and summarize qualitative conclusions. Let us study QFT of two sets of interacting fields, $\varphi = \{\psi\}$ and $\varphi = \{\phi\}$, with partial lagrangians $\mathcal{L}_\varphi = \mathcal{L}_\varphi^{(0)} + \mathcal{L}_\varphi^{(int)}$ and total lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{\psi\phi}^{(int)}$. Suppose that partial hamiltonians $\mathcal{H}_\varphi = \pi_\varphi \varphi_{,t} - \mathcal{L}_\varphi$ for $\varphi = \{\psi\}$ and $\varphi = \{\phi\}$ are bounded from below and above respectively. The simplest renormalizable model of this type contains two fields with fourth-order interaction,

$$\mathcal{L}_\varphi^{(0)} = \mp(-\varphi'^{\mu} \varphi_{,\mu} + m_\varphi^2 \varphi^2)/2, \quad \mathcal{L}_\varphi^{(int)} = \mp \lambda_\varphi \varphi^4/4!, \quad \mathcal{L}_{\psi\phi}^{(int)} = -\lambda \psi^2 \phi^2/2!2!, \quad (2)$$

in a Minkowski spacetime with a metric $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Here the signs “-” should be taken for $\varphi = \psi$ and “+” for $\varphi = \phi$.

Opposite to a widely spread opinion that unstable systems like (2) are irrelevant to actual physics, we take them seriously and consider them as prototypes for the interaction of fundamental fields including gravity. There are analogs of the negative-energy instability of the gravity-matter system, explicitly described in the present paper, in quantum electrodynamics (QED) of active media and solid state physics. One of the well-studied examples is superradiance of a positive-energy electromagnetic field due to interaction with a negative-energy polarization field in an active medium of molecules with a population inversion of energy levels [23]. There is nothing mysterious in the growing of the quantum fluctuations of fields up to macroscopic values and in the interaction of quantum fields on the background of the inhomogeneous-in-spacetime vacuum with spontaneous symmetry breaking and external fields. The instabilities develop through relatively fast and slow stages. An example is a transition of the Universe from an exponential inflation to a slow adiabatic Friedman expansion. It seems natural that an unstable QFT at a slow stage can be reduced to an effective stable QFT for the field fluctuations near a dressed dynamical vacuum.

Most of the formulas and methods of usual QFT (see, e. g., [24]) can be applied with small modifications to the unstable system (2). Note that the vacuum of the system (2) is just an usual tensor product of the partial vacua of ψ - and ϕ -fields. However, now it is not the ground state, but an unstable state. In order to pick out the contribution of the unstable vacuum state to the observable quantities, e. g., Green’s functions, it is necessary to use the “anti-Feynman” propagator for the negative-energy field and the Feynman propagator for the positive-energy field. For the two-scalar-fields model (2), it means that one should change the sign in front of $\varepsilon \rightarrow +0$ in the Feynman propagator of the negative-energy field as well as the sign in front of the whole ϕ -propagator:

$$-\overrightarrow{p_\phi} \overleftarrow{-} = -i/(p_\phi^2 - m_\phi^2 - i\varepsilon), \quad \overrightarrow{p_\psi} \overleftarrow{-} = i/(p_\psi^2 - m_\psi^2 + i\varepsilon). \quad (3)$$

This main and almost the only difference in the formulation of the unstable QFT is predetermined by the convergence condition of the path-integral representation for the amplitude of the vacuum-vacuum transition. A sign of $\mathcal{L}_\phi^{(0)}$ does not influence the dynamics of a partial free field, but it is crucial for the dynamics of the whole system. As a result we obtain causal and unitary evolution of the unstable field system (in a common sense that a density matrix evolves as $\rho(t) = \exp(-iHt)\rho(0)\exp(iHt)$ with a hermitian hamiltonian H).

Let us consider a model of a gravity-matter system. The gravity is described by a metric $g_{\mu\nu}(x)$ via an Einstein-Hilbert action with a lagrangian \mathcal{L}_c . The simplest choice for matter is a scalar field $\Psi(x)$ with a mass m , self-interaction $\lambda_\psi \Psi^4$ and coupling with gravity $\xi R \Psi^2$, i. e., with a lagrangian $\mathcal{L}_m = -\sqrt{-g(x)}[-\Psi'^{\mu} \Psi_{,\mu} + (m^2 + \xi R)\Psi^2 + 2\lambda_\psi \Psi^4/4!]/2$.

We restrict the analysis to a conformally-flat spacetime, $g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$. There are at least four reasons to do so. First, the obvious simplicity. Second, the field of conformal factor $\Omega(x)$ characterizes a scale of spacetime in the Universe at a point x and plays one of the main roles in cosmology. Third, specifically the conformal degree of freedom makes a negative contribution to the hamiltonian compelling it to be unbounded from below and, hence, leads to an instability. Deviations from conformally-flat metric are associated with gravitational waves and contribute with positive energy [21, 22]. Fourth, but not the least, with the additional choice of conformal coupling $\xi = 1/6$ we get precisely the model (2) for the rescaled scalar field $\psi(x) = \Omega\Psi$ and conformal factor $\phi(x) = (3/4\pi G)^{1/2}\Omega$ with $\lambda = 8\pi Gm^2/3$, $\lambda_\phi = -16\pi G\Lambda/3$ and vanishing masses $m_\psi = m_\phi = 0$, i. e., the renormalizable nonlinear self-consistent QFT. To get the proper classical Einstein equations a quantum-average condition $\langle H \rangle = 0$ on an admissible state of the Universe can be imposed. The renormalizability of the resulting gravity-matter QFT can be proved in a way similar to that of the φ^4 -theory. The presence of the dimensional coupling constant $G = M_P^{-2}$ in the original gravity lagrangian, where M_P is a Planck's mass, is often used as an argument against renormalizability, but it is not in the present model of gravity-matter interaction.

3 Method of the Evaluation of Feynman Diagrams in the Unstable Quantum Field Theory via Integral Representation of Hypergeometric Function

One of the main features of the unstable QFT is the impossibility to make a Wick rotation of the time axis in a complex plane, $x^0 = t \rightarrow it$, in order to replace QFT in Minkowski spacetime by QFT in euclidean space as it is usual to do in the standard QFT with a stable ground state. The reason is that, according to Eqs. (3), the rotation should be counterclockwise for a positive-energy field, but clockwise for a negative-energy field. Hence, it cannot be done at all without crossing singularities. Thus, another technique is needed to evaluate Feynman diagrams. The only new elements complicating these diagrams are the mixed loops which contain both the negative-energy-field and positive-energy-field propagators (3). We formulate the technique within a dimensional regularization approach for the example of the irreducible two-particle vertex in the one-loop approximation (Fig. 1). The mixed-loop contribution in the u -channel is equal to

$$\Gamma_M(p_u) = -(-i\lambda)^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{i}{(l-p_u)^2 - m_\phi^2 - i\varepsilon} \frac{i}{l^2 - m_\psi^2 + i\varepsilon} \equiv \int f dl_0, \quad (4)$$

where $l = \{l_\mu, \mu = 0, 1, \dots, d-1\}$ is a momentum vector in the d -dimensional Minkowski space, $p_u = p_1 - p_4$, and $u = p_u^2$ is one of the three well-known Mandelstam variables. The contribution in the t -channel is $\Gamma_M(p_t)$ with $p_t = p_1 - p_3$.

The integral (4) along a path in the complex plane $l_0 = \text{Re}l_0 + i\text{Im}l_0$, depicted in Fig. 2, is squeezed by four poles of the ψ -propagator, $t_\psi^\pm = \pm((\mathbf{l}^2 + m_\psi^2)^{1/2} - i\varepsilon)$, and the ϕ -propagator, $t_\phi^\pm = p_{u0} \pm ((\mathbf{q}^2 + m_\phi^2)^{1/2} + i\varepsilon)$, where \mathbf{l} and $\mathbf{q} = \mathbf{l} - \mathbf{p}_u$ are the spatial components of d -vectors l and $l - p_u$ respectively. The residue theorem yields $\Gamma_M = \Gamma_{M\phi} - \Gamma_{M\psi}$, where a half-difference of residues $\Gamma_{M\varphi} \equiv i\pi \left(\text{res}_{t_\varphi^+} f - \text{res}_{t_\varphi^-} f \right)$ at the poles t_φ^\pm for $\varphi = \psi, \phi$ is reduced after integration over all angles in the $(d-1)$ -space to a hypergeometric function via its integral representation (see [1] for details).

This technique can be applied to the usual "euclidean" diagrams as well. A nice feature of the present technique is that it gives the answer directly in the Minkowski space in terms of a hypergeometric function

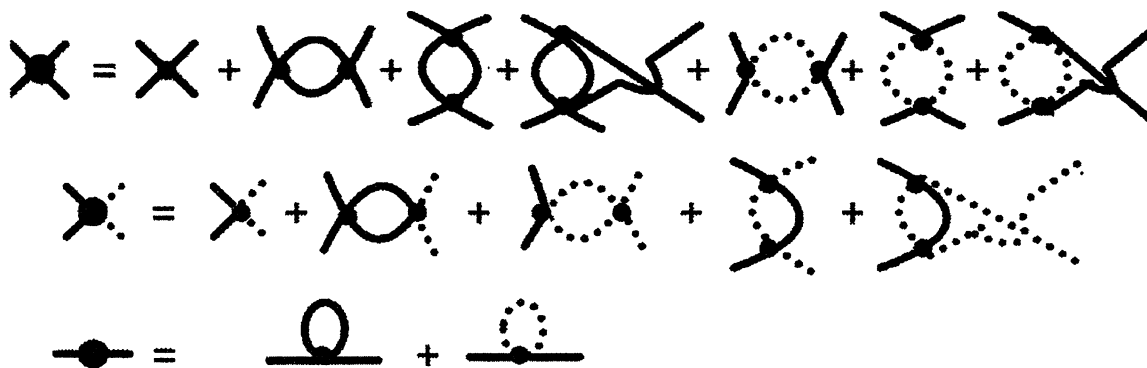


Figure 1: Irreducible two-particle vertices for $\psi - \psi$ and $\psi - \phi$ scattering and the self-energy of ψ -field for the unstable QFT (2) in the one-loop approximation. The $\phi - \phi$ and $\phi - \psi$ vertices and ϕ -self-energy can be obtained from the depicted ones by the substitution ($\psi \rightarrow \phi, \phi \rightarrow \psi$).

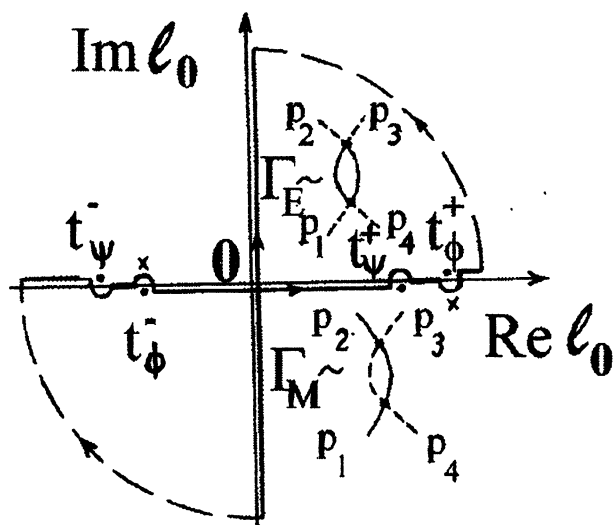


Figure 2: Path of the integral (4), Γ_M , for the last diagram (with a mixed loop) of the $\psi - \phi$ vertex (shown in Fig. 1) is squeezed by four poles contrary to the usual euclidean diagram, Γ_E .

with known analytic properties, i. e., solves simultaneously the problem of the analytic continuation of the result.

For the renormalization-group analysis it is necessary to extract a contribution to the vertex, Γ_M^∞ , that diverges as $(4-d)^{-1}$ at the limit of physical-spacetime dimension $d \rightarrow 4$. The result is $\Gamma_M^\infty = i\lambda^2(m_\phi^2 - m_\psi^2)/8\pi^2(4-d)p_{u0}^2$, where a subtraction point $\mathbf{p}_u = 0$, $p_{u0} \neq 0$ was chosen for simplicity. The usual ‘‘euclidean’’ vertex with one positive-energy-field loop is determined by the integral (4) along the imaginary axis, Γ_E , because in this case poles t_ϕ^\pm are displaced to the same sides of the integration path as t_ψ^\pm (see crosses in Fig. 2) and do not hamper the Wick rotation. Representing the integral (4) in the form $\Gamma_M = \Gamma_E + 2\Gamma_{M\phi}$, we see that the mixed-loop vertex has an additional contribution from the difference $2\Gamma_{M\phi}$ of the residues at poles t_ϕ^\pm . It explains why the divergent part Γ_M^∞ depends on the masses m_ψ , m_ϕ and the subtraction point p_{u0} while the euclidean integral $\Gamma_E \rightarrow \Gamma_E^\infty = i\lambda^2/8\pi^2(4-d)$ was mass-independent at $d \rightarrow 4$.

4 Derivation and Solution of the Renormalization-Group Equations

Let us apply the method of the renormalization-group analysis [24] to the unstable QFT to describe the behavior of interacting fields at arbitrary energy-momentum scale κp_i through the effective (running) coupling constants $\lambda(\kappa)$, $\lambda_\varphi(\kappa)$ and masses $m_\varphi(\kappa)$ if they are known at a given scale $\kappa_0 p_i$. Using the technique outlined in the Sect. 3 we derive the following renormalization-group equations in the one-loop approximation

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_\psi}{ds} &= \lambda_\psi^2 - \lambda^2, & \frac{d\lambda_\phi}{ds} &= \lambda_\phi^2 - \lambda^2, & \frac{d\lambda}{ds} &= \frac{\lambda}{3}(\lambda_\psi + \lambda_\phi + \lambda \frac{m_\phi^2 - m_\psi^2}{p_0^2}), \\ \frac{dm_\psi^2}{ds} &= -\frac{32\pi^2 - \lambda_\psi}{3}m_\psi^2 + \frac{\lambda}{3}m_\phi^2, & \frac{dm_\phi^2}{ds} &= -\frac{32\pi^2 - \lambda_\phi}{3}m_\phi^2 - \frac{\lambda}{3}m_\psi^2, \end{aligned} \quad (5)$$

where $s = (3/16\pi^2)\ln(\kappa/\kappa_0)$, $p_0^{-2} = 2(p_{u0}^{-2} + p_{t0}^{-2})$, and p_{u0} and p_{t0} are subtraction energies in the u - and t -channels respectively.

These results cannot come from euclidean integration because in the Minkowski momentum space the integration path along the real axis is squeezed by poles from all sides so that there is not any possibility for a Wick rotation without crossing singularities. In particular, the minus sign in front of λ^2 in Eqs. (5), which is crucial for the infrared & ultraviolet asymptotic freedom, appears due to the diagram with a two-vertex loop formed by virtual propagators of the field with the energy sign opposite to the sign of in- and out- fields. Note also that the one-loop approximation is correct only if there are no divergences of effective coupling constants. This is, indeed, the case for the unstable QFT with the infrared & ultraviolet asymptotic freedom, and never happens in the euclidean version of the theory or in the standard QFT of electroweak and strong interactions.

First of all, we summarize the results of the solution of Eqs. (5) in the case of vanishing masses, which corresponds to the gravity-matter model of the Sect. 2. The exact solution of Eqs. (5) at $m_\psi = m_\phi = 0$ for λ_φ as functions of λ can be written down explicitly,

$$\lambda_\varphi = \epsilon_\varphi \sqrt{3b\lambda^3 \pm \sqrt{3\lambda^2(1 - a\lambda + b^2\lambda^4)}}, \quad (6)$$

for arbitrary initial conditions defined by two parameters a and b at a reference scale $\kappa = \kappa_0$. Here we introduced ϵ_φ which is equal to $+1$ for $\varphi = \psi$ and -1 for $\varphi = \phi$. The scale dependence is given via a quadrature $s = 3 \int (\lambda_\psi + \lambda_\phi)^{-1} \lambda^{-1} d\lambda$. A typical form of an integral curve in $(\lambda, \lambda_\psi, \lambda_\phi)$ -space is

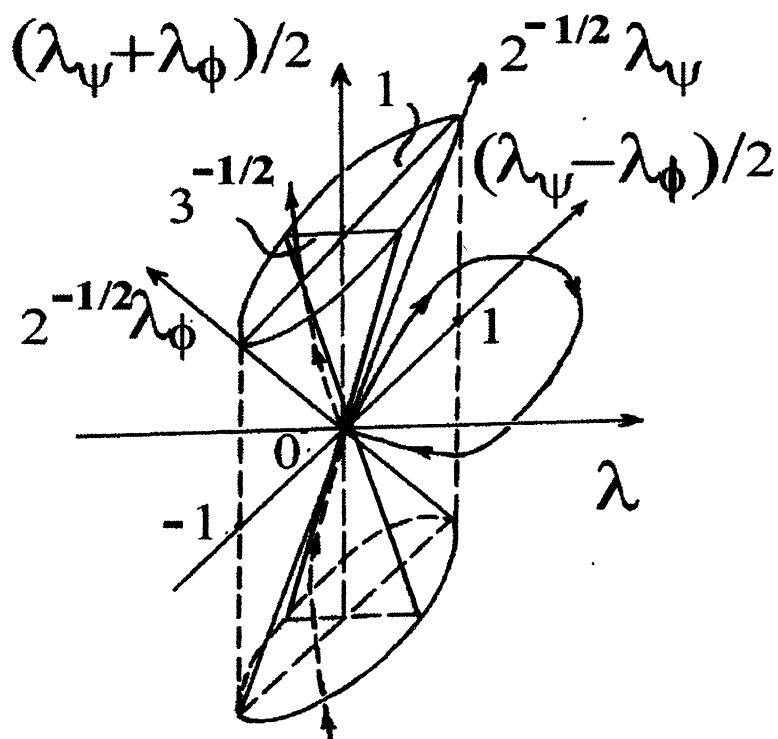


Figure 3: The separatrix cone $\lambda_\psi \lambda_\phi = 3\lambda^2$ and typical trajectory of Eqs.(5) in $(\lambda, \lambda_\psi, \lambda_\phi)$ - space (massless case). In the limit of asymptotic freedom all trajectories approach the lines $\lambda_\psi = \lambda_\phi = \pm\sqrt{3}\lambda$ which describe the asymptotical unification of interactions.

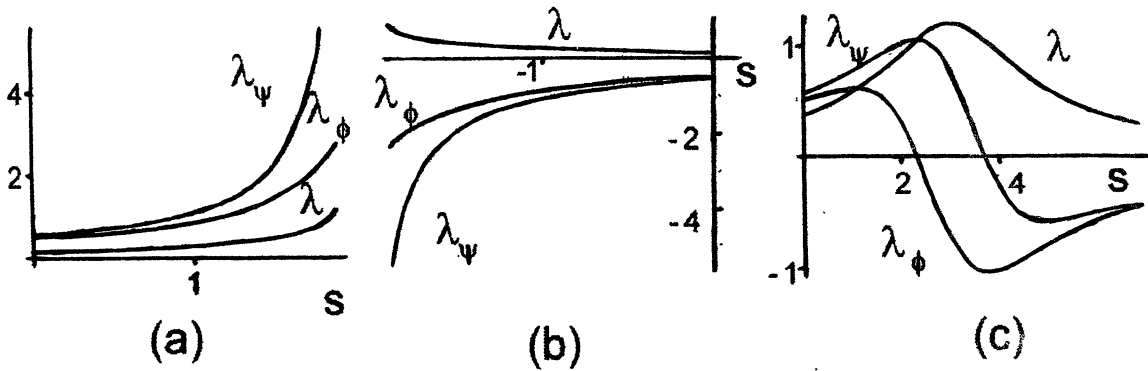


Figure 4: Scale dependences of the effective coupling constants according to Eqs. (5) in the massless case. Solutions are plotted for (a) the QED-type divergent behavior ($\lambda_\psi(0) = 0.55$, $\lambda_\phi(0) = 0.5$, $\lambda(0) = 0.2$), (b) the QCD-type divergent behavior ($\lambda_\psi(0) = -0.55$, $\lambda_\phi(0) = -0.5$, $\lambda(0) = 0.2$), and (c) the self-consistent infrared&ultraviolet asymptotic freedom ($\lambda_\psi(0) = 0.55$, $\lambda_\phi(0) = 0.5$, $\lambda(0) = 0.38$).

shown in Fig. 3. The point of freedom, $\lambda = \lambda_\psi = \lambda_\phi = 0$, cannot be reached at a finite energy scale and corresponds to ultraviolet ($s \rightarrow +\infty$) or infrared ($s \rightarrow -\infty$) limits. A trajectory behaves essentially different inside and outside a separatrix cone $\lambda_\psi \lambda_\phi = 3\lambda^2$ and never comes from one to another side of the cone. Each trajectory describes a definite QFT.

Inside the cone, the self-interaction of fields prevails, $\lambda_\psi \lambda_\phi > 3\lambda^2$. The QFT resembles either QED with an infrared asymptotic freedom and ultraviolet divergence (upper part of the cone where both self-coupling constants are positive, $\lambda_\psi, \lambda_\phi > 0$, that corresponds to stable partial fields), or quantum chromodynamics (QCD) with an ultraviolet asymptotic freedom and infrared divergence (lower part of the cone). Apparently, a QCD-type asymptotic freedom is a consequence of a negative self-coupling ($\lambda_\psi, \lambda_\phi < 0$) of both partial fields making them unstable. The appearance of divergences, like in QED at the illusive Landau pole (Fig. 4a) or in QCD at the QCD's scale parameter (Fig. 4b), indicates some inconsistency (at least, on the perturbative level) in the theory of both types.

Outside the cone, $3\lambda^2 > \lambda_\psi \lambda_\phi$, the interaction between positive-energy and negative-energy fields is so strong that it results in a remarkable phenomenon of ultraviolet and infrared asymptotic freedoms taking place in the same QFT. A trajectory starts at the point of freedom at $s \rightarrow -\infty$ and tends to the same point of freedom at $s \rightarrow +\infty$ without going to infinity (see Fig. 3 and Fig. 4c). The absence of divergences means a self-consistency for this type of QFT.

It is worth to emphasize that in the asymptotics $s \rightarrow \pm\infty$ all coupling constants become proportional to each other, $\lambda_\psi \rightarrow \lambda_\phi \rightarrow \pm\sqrt{3}\lambda$. This fact means an asymptotical unification of interactions between positive-energy and negative energy fields and should be compared with a formally exact (for all energies) unification, i. e., proportionality, of all coupling constants in the standard gauge QFT with a simple symmetry group, e. g., $SU(n)$ Grand Unified Theory (GUT). A standard way to account for the observable $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -splitting of strong, weak and electromagnetic interactions at low energies is to explore some speculations on a possible phase transition at some critical GUT-energy. In the unstable QFT, an analogous splitting occurs automatically, i. e., self-consistently, and in a smooth way. This fact may be relevant to the origin of the field symmetry in the gauge QFT, at least, as far as the Higgs' fields and ghosts are concerned.

Now, let us study the modifications which appear for the massive fields. According to Sect. 3,

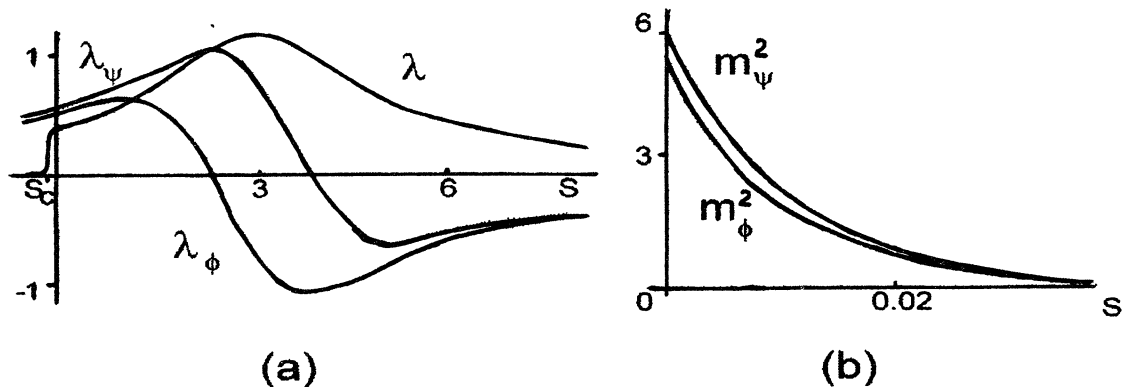


Figure 5: Scale dependences of (a) the effective coupling constants and (b) the effective masses squared. The numerical solution of Eqs. (5) is plotted for the case of the self-consistent infrared&ultraviolet asymptotic freedom ($\lambda_\psi(0) = 0.55$, $\lambda_\phi(0) = 0.5$, $\lambda(0) = 0.38$, $m_\psi^2(0)/p_0^2 = 6$, $m_\phi^2(0)/p_0^2 = 5.9$).

the well-known minimal renormalization (subtraction) scheme fails to be mass-independent, contrary to usual QFT [25]. This mass-memory effect in unstable systems results in a mutually consistent behavior of effective masses and coupling constants demonstrated in Fig. 5. The main effect of masses in the coupled set of Eqs. (5) is to "switch off" the interaction λ between positive-energy and negative-energy fields at some energy scale $s = s_c$. At lower energies, in particular, in the infrared limit, both fields behave as decoupled φ^4 -QFT fields similar to QED. For higher energies the effective coupling constants behave as in the massless case because masses go to zero sharply in the ultraviolet limit. This behavior looks physically reasonable and can be justified easily by means of the approximate analytical solution of Eqs. (5).

5 Preliminary Conclusions

It seems that, according to the preliminary analysis in the one-loop approximation, the correct unstable QFT of gravity does not suffer from the non-unitary, acausal behavior and divergences of effective coupling constants. In fact, the absence of a stable ground state in a QFT with a hamiltonian unbounded from below makes senseless the usual discussions of a non-unitarity at the perturbation level. The appearance of complex-conjugated eigenfrequencies (i. e., poles resembling those of the Lee-Wick mechanism [15]) is very natural since they describe the growing and decaying eigenmodes of an unstable system (see an example from QED of active media in [23]). Moreover, the gravity-matter system possesses a remarkable property of self-consistent asymptotic freedom taking place in the ultraviolet and infrared limits simultaneously. It is very probable that these properties are true for the pure higher-derivative QFT of gravity as well as for its various extensions which include more material, gauge or non-gauge, fields with positive energies or some ghosts with negative energies. In particular, it means that the interaction with gravity makes asymptotically free and consistent even non-gauge (φ^4 or Yukawa) fields which separately do not possess ultraviolet asymptotic freedom. The absence of the infrared divergence solves the problem of "ultra-macroscopic radius for ghost confinement" that was a difficulty in the old higher-derivative QFT of gravity [11]. The infrared asymptotic freedom is plausible for the solution of a cosmological constant problem [4] (cf. a recent discussion on the infrared behavior of an effective euclidean theory of quantum gravity in [14, 26]). At the same time, the renormalizability of the unstable higher-derivative QFT of

gravity and matter fields is conserved (if all necessary interaction terms like $-\xi\psi^2 R$ for a scalar field ψ are included in the lagrangian) because it is a property of nonlinear field kinematics rather than dynamics. It is worth to emphasize that we arrive at these conclusions on the basis of the renormalization-group analysis which reveals only very general properties of a quantum field system.

By quantization of the metric (in particular, conformal factor) we achieve the main goal of quantum theory of gravity, namely, to make probabilistic intervals between events ($ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, $dx^\mu = x_2^\mu - x_1^\mu$). However, we still keep a classical set of events. (More general questions, e. g., "Is it necessary and how to quantize even the set of events itself?", are out of the scope of the present lecture.) Moreover, we imply a particular coordinate system in Minkowski spacetime that allows us to formulate standard relativistic QFT. Formally, in this underlying Minkowski spacetime we have only Lorentz (more precise, Poincare) covariance. But it does not mean that we lose a general covariance. (In some sense, according to a gauge-theory terminology, we choose a particular gauge condition to exclude some unphysical degrees of freedom corresponding to general diffeomorphism transformations.) The general covariance is present because the theory is formulated via general metric $g_{\mu\nu}$. In principle, the geometrical and field formulations of the gravity theory are equivalent (see, e. g., [27]).

6 Open Problems

Among the open problems of general analysis, the first one is to combine gravity with the electroweak and strong interactions in a unified unstable QFT. In fact, except for the instability treatment, the standard results on the GUT's modelling (see, e. g., [2, 5, 8, 11, 28, 29]) can be used. The most straightforward and simple possibility is to add to the higher-derivative lagrangian (1) the lagrangian of the minimal standard model for electroweak and strong interactions,

$$\mathcal{L}_m = \sqrt{-g}(\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_Y - \xi R\Phi^+\Phi); \quad \mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + W_{\mu\nu}^b W^{b\mu\nu} + B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}), \quad (7)$$

where \mathcal{L}_F is the lagrangian for fermion fields interacting with the gauge fields A_μ^a, W_μ^b, B_μ associated with the $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)$ -gauge group ($a = 1, \dots, 8; b = 1, 2, 3; \mu = 0, 1, 2, 3$), \mathcal{L}_g the total lagrangian of the gauge fields with the conventional strengths defined via covariant derivatives (e. g., $B_{\mu\nu} = \nabla_\mu B_\nu - \nabla_\nu B_\mu$), \mathcal{L}_Φ the lagrangian of the scalar fields Φ coupled with gravity via $-\xi R\Phi^+\Phi$ and with fermions via Yukawa interactions \mathcal{L}_Y . (A conformally symmetric version of Eq. (7) was discussed recently in [29].) However, it is worth finding a natural way to incorporate "hidden" fields of the higher-derivative QFT (1) into a unified symmetry group, and not merely add them with other matter fields.

The results obtained for the model (2) prove the existence of a novel mechanism for the asymptotic freedom in QFT. The property of the asymptotic freedom in the ultraviolet limit was discovered in 1973 for non-Abelian gauge QFT [24]. It corresponds to the observed quasi-free behavior of quarks in hadrons at high energies and is very important in QCD. Moreover, from a theoretical point of view, the asymptotic freedom seems to be a very desirable attribute of any physically acceptable and self-consistent theory of unified interactions between particles (fields) at high energies including quantum gravity. The stability of spacetime in the ultraviolet limit of very small distances is also associated with the asymptotic freedom. Later it was shown that any renormalizable QFT of scalar and fermionic fields with a stable ground state, except for non-Abelian gauge QFTs, does not possess asymptotic freedom in the ultraviolet limit, but shows asymptotic freedom in the infrared limit. Examples are φ^4 -theory and Abelian gauge theories like QED. The first problem is to explain this tremendously opposite behavior of traditional unconstrained and modern constrained (with non-Abelian gauge symmetry conditions) QFTs (cf. Fig. 4a and Fig. 4b).

A well-known analogy between the Yang-Mills vacuum of self-interacting non-Abelian gauge bosons and a paramagnetic medium [24] gives only a reformulation of the same facts in other physical terms and does not reveal a deep reason for the phenomenon. The second, more important problem, is to find a mechanism which would allow the combination of both ultraviolet (like QCD) and infrared (like QED) asymptotic freedoms in the same QFT. The standard QFT model of elementary particles does not possess such perturbatively self-consistent (without divergences of effective coupling constants) behavior.

The results we discuss in Sections 1-5 provide some ground for the hypothesis that the negative-energy mechanism is a general mechanism for the self-consistent asymptotic freedom in QFT, including gauge QFT. Indeed, a quantization of a gauge theory is reduced by one or another way (gauge fixing, ghost introducing, BRST-quantization, etc.) to a quantization of some equivalent or extended unconstrained theory. The last one can be asymptotically free due to negative-energy ghosts which correspond to the degrees of freedom with pure imaginary coordinates and momenta emerging in the procedure of the BRST-quantization [30]. A gauge symmetry provides a possibility of a reduction to an effective positive-energy QFT in a physical sector without appearance of ghosts in the physical states. However, ghosts have to be taken into account in the intermediate states in Feynman diagrams because a total elimination of ghosts from dynamics would lead to non-unitarity of S -matrix as it was pointed out by Feynman [31]. To save unitarity in the standard gauge QFT it is necessary to cancel non-unitary contributions in diagrams by means of a formal assignment the additional factor -1 to each ghost loop as if the ghosts, though spinless, obey Fermi statistics. This famous trick results in a wrong, unphysical connection between spin and statistics for ghosts. In the unstable QFT, the factor -1 for the negative-energy-field loops appears automatically (without any violation of the spin-statistics connection) due to corrected Feynman rules of integration as it was explained in Sections 2-4 (see Eqs. (3) and discussion of Eqs. (5)). In this way the mystery of ghosts can be resolved by the physics of the negative-energy instability process. The well-known fact that the asymptotic freedom in the standard gauge QFT aggravates and disappears if one involves sufficiently large number of positive-energy self-interacting scalar or fermionic fields is in agreement with the hypothesis since this modification is similar to a transition into the upper part of the separatrix cone in Fig. 3 with QED-type asymptotic behavior.

The unstable quantum field theory of gravity-matter interaction we discussed above includes a possible mechanism for a spontaneous symmetry breaking similar to a Higgs' one, but on a nonstationary background of unstable fields growing up to macroscopic values. This process could involve a transition from quantum to quasiclassical gravity fields via inflation and subsequent adiabatic Friedman expansion of the spacetime and provide a truly dynamical mechanism for gauge fields to acquire nonzero masses.

An essentially different problem is to analyze, at least approximately, a nonlinear dynamical solution for spatio-temporal evolution of interacting gravity and matter quantum fields. Only in this way can the principal question about the existence of the solution describing a transition from a fast inflation to a slow quasiadiabatic Friedman expansion be solved explicitly. It is reasonable to expect that the unstable QFT at a slow stage of instability can be reduced to an effective stable QFT on a quasiadiabatic inhomogeneous-in-spacetime background. If this is the case, then we would have a dynamical analog of the Higgs' mechanism for the solution of the spontaneous symmetry breaking problem in the unified QFTs (cf. [29]). Of course, the unstable QFT described above provides us only with the rigorous, mathematically correct, formulation of quantum gravity theory and not with concrete solutions of quantum field equations. To find an explicit solution is a difficult technical problem.

We can refer to an analogous situation in the history of general relativity. After formulation of the Einstein equations, which describe much more general physical system than Newton's equations and possess many unusual features in dynamics (e. g., collapse), a lot of efforts of many researchers were

needed to find nonlinear solutions (e. g., Schwarzschild's metric) and clarify completely the question for what subsystems the Einstein equations can be effectively reduced to Newton's ones (cf., e. g., the Newton's limit of general relativity for Solar subsystem).

At the moment, we have analyzed only the dynamics of a very simplified model of two coupled nonlinear oscillators possessing opposite signs of energies:

$$H = -\frac{1}{2}(-\partial^2/\partial x_1^2 + \omega_1^{(0)2} x_1^2) + \frac{1}{2}(-\partial^2/\partial x_2^2 + \omega_2^{(0)2} x_2^2) - \frac{\lambda_1}{4!} x_1^4 + \frac{\lambda_2}{4!} x_2^4 + \frac{\lambda}{2!2!} x_1^2 x_2^2, \quad (8)$$

It can be shown that in this case the negative-energy instability takes place as well. The most interesting features are a transient non-adiabatic behavior and a slowing down of the instability with time due to a self-consistent squeezing of the quantum states of oscillators and due to nonlinear resonances between opposite-sign energy levels of anharmonic oscillators (8). These encouraging results can be demonstrated the most clearly at a semiclassical stage of the instability when one of the interacting oscillators is on a macroscopic level of coherent excitation and behaves as a classical oscillator. Even classical analog of two nonlinearly coupled anharmonic oscillators (8) show the saturation of the instability and the formation of a localized ("dynamical vacuum") state for which the interaction between nonlinear resonances and stochastization similar to known in the Kolmogorov-Arnold-Moser theory are very important.

7 Towards Quantum Inflationary Cosmology

The conclusions we come have interesting consequences for cosmology. Here we mention only some of them. First of all, the unstable quantum field theory of gravity gives a very natural, fully quantum basis for the inflationary cosmology. The inflationary scenario (more accurately, a series of its different versions) was proposed phenomenologically and on the semiclassical level [22, 32] because of the absence of a consistent theory of quantum gravity. The inflationary cosmology is preferable nowadays since it is the only one that provides reasonable solutions for many serious difficulties of the standard Big Bang and other cosmologies [22, 32]. It is remarkable that the unstable field theory of quantum gravity proposed above points namely to the inflation cosmological scenario (a definite version of it) and explains consistently a quantum origin of the inflation on the fundamental level. The immediate conclusion is that, due to quantum fluctuations, the inflation and matter creation starts even from a vacuum state. At different local regions of an infinite space, the inflation develops independently and spontaneously at different moments of time, i. e., with a wide probability distribution of a delay time. Usually, each "bubble" expands very fast up to an exponentially large scale and forms a local universe. For an observer inside a "bubble", the expansion looks as a superluminal so that he receives signals only from a finite, relatively small region inside a so-called horizon of events. This observable part of our local Universe is about 10^{28} cm. Direct signals from neighbouring expanding "bubbles" (i. e., from other local universes) can reach him only after an exponentially long interval of time. At a semiclassical stage, the inflation of each "bubble" is slowing down to a quasiadiabatic Friedman expansion due to a self-consistent squeezing of quantum states of unstable fields and other nonlinear effects. This is the stage where the standard cosmological model works well. After a long enough expansion, when a local universe becomes dilute and homogeneous enough, quantum fluctuations can trigger a negative-energy instability and a subsequent inflation again (see [33]). The self-similar infinite process of secondary inflations has no end and does not need a beginning. Our preliminary conclusion is that the inflationary scenario is suited perfect to the unstable quantum field theory of gravity.

The fact that a finite coupling and, hence, gravity-matter structure appears only within a finite

range of energy-momentum scales can be related to the observed range of scales from a Planck's scale $\kappa_{max}^{-1} \sim 10^{-33}cm$ to a cosmological scale $\kappa_{min}^{-1} \sim 10^{27}cm$ on which the Universe becomes homogeneous according to the cosmological principle. The ratio $\kappa_{max}/\kappa_{min} \sim 10^{60}$ corresponds to the interval $\Delta s = (3/16\pi^2) \ln(\kappa_{max}/\kappa_{min}) \sim 3$ of the order of unity and can be easily accounted for by quantum field theory without introducing big numbers *ad hoc*. Another consequence is the impossibility to fix arbitrarily a cosmological constant $\Lambda \propto \lambda_\phi$, in particular, to set $\Lambda \equiv 0$. It is correlated with a gravitational constant $G \propto \lambda$ and matter self-interaction constant λ_ψ and, hence, can change a sign and be finite at some energy scales (see Fig. 4c). Therefore, different scales (energies) contribute to the total expansion of the local, observable Universe with different weights and even signs. This conclusion changes essentially a status of the well-known "dark matter" problem of the standard cosmology. The last problem originated from the fact that the density of the observable matter in the Universe (in galaxies and clusters of galaxies) is too small, $\rho_{obs} \sim 0.03\rho_c$, compared with the so-called critical density $\rho_c = 3H_o^2/8\pi G \approx 5 \times 10^{-30}g/cm^3$, to provide the observable, relatively slow expansion of the Universe with a Hubble constant $H_o \simeq 50km/(s \times Mps)$ if the classical general relativity with $\Lambda \equiv 0$ and no scale dependence of gravitational and cosmological constants is used.

It is important to stress that the quantum field theory of unstable systems displays genuine dynamical behavior in contrast to the usual euclidean quantum field theory which deals, in principle, only with the statistical mechanics of quantum fluctuations near an equilibrium ground state. The presence of the instability allows to incorporate the observable irreversibility of the Universe evolution in the unified quantum field theory of fundamental matter and gravity fields. Obviously, the processes in the unstable gravity-matter system, as the system of interacting fields with a continuum energy spectrum, are similar to irreversible processes of non-equilibrium statistical physics. The properties of irreversibility in this system is even more pronounced because of the additional Poincare resonances between negative-energy and positive-energy fields. As a result, it is possible to derive kinetic equations for gravity-matter fields. They are different from the usual kinetic equations of stable field systems and describe self-consistent non-equilibrium creation of matter and gravity in the Universe via internal, negative-energy mechanism of instability without any external sources of energy. These equations will be discussed elsewhere.

8 Resume

In conclusion, the preliminary analysis shortly summarized above indicates that there are no any obstacles, neither in a rigorous mathematical formulation nor in a physical interpretation, for the development of the unstable quantum field theory of gravity and its unification with fundamental matter interactions. In a result, the renormalizable, unitary, ultraviolet & infrared asymptotically free theory of quantum gravity and matter fields can be established. The conclusions announced in the present lecture have a fundamental importance for a QFT of gravity and unified interactions and, of course, demand an independent verification. To promote such a verification is one of the purposes of this preliminary communication. The method of the solution of the quantum gravity problem described above is very conservative in the sense that we manage to extend the validity of standard basic principles of QFT (locality, unitarity and causality, renormalizability and the absence of effective-coupling-constant divergences) to all fundamental interactions including quantum gravity. This means that the other exotic theories proposed *ad hoc* in order to overcome the renormalizability difficulty in quantum gravity, like superstring theory, lose one of the main motivations for turning to them. Hopefully, this approach results in an acceptable solution of the long-standing problem of quantum gravity.

Acknowledgements

We wish to thank Prof. B. DeWitt, Prof. E. C. G. Sudarshan, and Prof. S. Weinberg for very interesting and stimulating discussions of infrared & ultraviolet asymptotic freedom in the unstable QFT of gravity and matter while we were at the University of Texas at Austin. We are very grateful to Prof. I. Prigogine for fruitful discussions on the instability and irreversibility problems in quantum theory, and for his hospitality at the International Solvay Institutes for Physics and Chemistry in Brussels. This work was supported by the Commission of the European Communities - DG III/ESPRIT Project - ACTCS 9282.

References

1. V. V. Kocharovsky and V. V. Kocharovsky, *Found. Phys.*, 1996, Vol. 26 (accepted for publication).
2. S. L. Adler, *Rev. Mod. Phys.*, 1982, Vol.54, 729.
3. E. Alvarez, *Rev. Mod. Phys.*, 1989, Vol.61, 561.
4. S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.*, 1989, Vol.61, 1.
5. I. L. Buchbinder et al., *Effective Action in Quantum Gravity*, IOP, Bristol, 1992.
6. R. Utiyama and B. S. DeWitt, *J. Math. Phys.*, 1962, Vol.3, 608.
7. K. S. Stelle, *Phys. Rev. D*, 1977, Vol.16, 953; B. L. Voronov and I. V. Tyutin, *Yad. Fiz. [Sov. J. Nucl. Phys.]*, 1984, Vol.39, 998.
8. I. L. Buchbinder et al., *Yad. Fiz. [Sov. J. Nucl. Phys.]*, 1986, Vol.44, 668; *Phys. Lett. B*, 1989, Vol.216, 127.
9. J. Julve and M. Tonin, *Nuovo Cimento B*, 1978, Vol.46, 137.
10. E. Tomboulis, *Phys. Lett. B*, 1977, Vol.70, 361; 1980, Vol.97, 77; *Phys. Rev. Lett.*, 1984, Vol.52, 1173; I. Antoniadis and E. Tomboulis, *Phys. Rev. D*, 1986, Vol.33, 2759.
11. E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, *Phys. Lett. B*, 1981, Vol.104, 377; *Nucl. Phys. B*, 1982, Vol.201, 469; 1984, Vol.234, 472.
12. I. G. Avramidi and A. O. Barvinsky, *Phys. Lett. B*, 1985, Vol.159, 269; I. G. Avramidi, *Yad. Fiz. [Sov. J. Nucl. Phys.]*, 1986, Vol.44, 255.
13. E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. D*, 1972, Vol.12, 3658, 3678.
14. E. Elizalde et al., *Phys. Lett. B*, 1994, Vol.334, 33; *Class. Quantum Grav.*, 1994, Vol.11, 1607.
15. T. D. Lee and G. C. Wick, *Nucl. Phys. B*, 1969, Vol.9, 209; 1969, Vol.10, 1; *Phys. Rev. D*, 1970, Vol.2, 1033.
16. A. Salam and J. Strathdee, *Phys. Rev. D*, 1978, Vol.18, 4480.
17. B. Hasslacher and E. Mottola, *Phys. Lett. B*, 1981, Vol.99, 221.
18. D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Canonical Quantization of Constrained Fields*, Nauka, Moscow, 1986 [in Russian]; J. C. Alonso et al., *Class. Quantum Grav.*, 1994, Vol.11, 865.
19. K. Maeda, *Phys. Rev. D*, 1988, Vol.37, 858.
20. E. P. Tryon, *Nature*, 1973, Vol.246, 396 (1973); P. I. Fomin, *Dokl. Akad. Nauk SSSR [Sov. Phys. Dokl.] A*, 1975, Vol.9, 831.
21. R. Brout et al., *Ann. Phys. (Paris)*, 1978, Vol.115, 78; *Gen. Rel. Grav.*, 1979, Vol.10, 1; *Nucl. Phys. B*, 1980, Vol.170, 228.
22. E. Gunzig, J. Geheniau and I. Prigogine, *Nature*, 1987, Vol.330, 621; E. Gunzig and P. Nardone,

Fund. Cosmic Phys., 1987, Vol.11, 311.

23. V. V. Kocharovskiy and V. V. Kocharovskiy, in *Nonlinear Waves 3*, eds. A. V. Gaponov-Grekhov et al., Springer, Berlin, 1990, pp.146-161; V. V. Zheleznyakov, V. V. Kocharovskiy and V. V. Kocharovskiy, *Sov. Phys. - Uspekhi*, 1989, Vol.32, 835.

24. T.-P. Cheng and L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Clarendon Press, Oxford, 1984; L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Press, London, 1985.

25. G. 'tHooft, *Nucl. Phys. B*, 1973, Vol.61, 455; S. Weinberg, *Phys. Rev. D*, 1973, Vol.8, 3497.

26. I. Antoniadis et al., *Phys. Rev. D*, 1992, Vol.45, 2013; *Phys. Lett. B*, 1994, Vol.323, 284.

27. S. Deser, *Gen. Rel. Grav.*, 1970, Vol.1, 9; Ya. B. Zeldovich and L. P. Grishchuk, *Usp. Fiz. Nauk [Sov. Phys. - Uspekhi]*, 1988, Vol.155, 517 and references therein.

28. T. Muta and S. D. Odintsov, *Mod. Phys. Lett. A*, 1991, Vol.6, 3641; E. Elizalde et al., *Phys. Rev. D*, 1995, Vol.51, 4250.

29. M. Pawlowski and R. Raczka, *Found. Phys.*, 1994, Vol.24, 1305.

30. M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1992.

31. R. P. Feynman, *Acta Physica Polonica*, 1963, Vol.24, 697; in *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energy*, eds. R. Balian and C. H. Llewellyn Smith, North-Holland, Amsterdam, 1977, p.121.

32. A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Contemporary Concepts in Physics, Harwood, 1990.

33. W.-M. Suen, *Phys. Rev. Lett.*, 1989, Vol.62, 2217-2220; *Phys. Rev. D*, 1989, Vol.40, 315-326.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ НА ОСНОВЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПОЛЕЙ

В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский

Найдено решение проблемы квантовой гравитации. Показано, что гравитационное взаимодействие в отличие от трех других известных фундаментальных взаимодействий (сильного, слабого и электромагнитного) приводит к перенормируемой квантовой теории полей с неполуограниченным гамильтонианом. Стандартные правила Фейнмана и евклидова формулировка теории не верны для системы "гравитация + материя", в которой даже из вакуумного состояния развивается процесс неустойчивости вследствие взаимодействия полей отрицательной энергии с полями положительной энергии. Дана корректная формулировка квантовой теории взаимодействующих полей с разными знаками энергий.

В таких системах обнаружены явления ИК&УФ-асимптотической свободы и отсутствия расходимостей эффективных констант связи, преследующих стандартную квантовую теорию поля (фиктивный полюс Ландау при больших энергиях в квантовой электродинамике, расходимость в квантовой хромодинамике в области малых энергий вблизи масштабного параметра КХД). Утверждается, что предложенная квантовая теория неустойчивых полей разрешает основное противоречие локальной квантовополевой теории гравитации - противоречие между перенормируемостью и унитарностью (или причинностью), связанное с существованием духов (или тахионов). В результате мы приходим к самосогласованной перенормируемой квантовой теории полей материи и гравитации с высшими производными, в которой одновременно решается проблема расходимостей эффективных констант связи. В заключение обсуждается квантовополевой сценарий инфляции и эволюции Вселенной.

DYNAMICS WEEK IN NIZHNY NOVGOROD

D W N N – 9 6

Nizhny Novgorod

July 1–7, 1996

Russia

The DWNN–96 is dedicated to the 95-th anniversary of academician A. Andronov — the founder of Nizhny Novgorod scientific school of nonlinear oscillations.

The goal of the DWNN–96 is to provide a forum for the presentation of outstanding theoretical and applied works in the areas of nonlinear dynamics and chaos. Andronov’s scientific lectures will be delivered in the course of DWNN–96.

The DWNN–96 is a joint promotion of:

- 3rd International Scientific School-Seminar “Dynamic and Stochastic Wave Phenomena” (DSWP–96)
- 2nd International Conference “Contemporary Problems in the Theory of Dynamical Systems” (CPTDS–96)
- International Specialist Workshop “Nonlinear Dynamics — Synchronization and Chaos” (NDSC–96)

DWNN–96 is planned to be held on board of a comfortable ship cruising along the Volga river. The DWNN–96 is open to all the world. The participation in all three announced school, conference and workshop is available for participants of any of them without additional registration procedures and fees.

Organizers of DWNN–96

University of Nizhny Novgorod (Radiophysical Faculty, Research Institute for Applied Mathematics and Cybernetics)

Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences (Nizhny Novgorod)

Nizhny Novgorod Regional Administration

For further information, please, contact:

DSWP–96 Radiophysical Faculty, University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin St., Nizhny Novgorod 603600, RUSSIA
fax: (8312) 658592 , *e-mail:* school@rf-nngu.nnov.su

CPTDS–96 Research Institute for Applied Math. & Cybernetics,
10 Ul’yanov St., Nizhny Novgorod 603005, RUSSIA
fax: (8312) 390411 , *e-mail:* conf@focus.nnov.su,

NDSC–96 Radiophysical Faculty, University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin St., Nizhny Novgorod 603600, RUSSIA
fax: (8312) 658592 , *e-mail:* workshop@rf-nngu.nnov.su

NONLINEAR ABSORPTION AND VELOCITY DISPERSION OF ACOUSTIC PULSES IN SUPERCONDUCTORS

V.A.Kukushkin, N.P.Tolstova

Shuvash State Pedagogical Institute
38 K.Marx str., Cheboksary 428000, RUSSIA

The evolution of the intensive longitudinal pulses in superconductors is studied. The kinetic equation is used to define the force effecting the lattice by resonant quasi-particles. The wave equation solution describing the nonlinear absorption and phase velocity shift δw has been researched. It is shown that the temperature dependence $\delta w(T)$ when T tends to the critical temperature T_c has a sharp maximum some time later in superconducting tin observed experimentally by Fil and his colleagues.

Introduction

The evolution of the intensive longitudinal pulses in clear superconductors caused by the absorption and velocity dispersion is studied. It is assumed that the average free path of normal particle l is much larger than the pulse length L ; in this case the phenomena under study are determined by quasi-particles moving in approximately perpendicular direction towards of wave propagation (along x axis). This kind of particles is called "resonant particles". We shall assume too that the wave power is so strong that the flight time of pulse area by resonant particle L/\tilde{v} is smaller than the relaxation time τ_p ($a = \frac{L}{\tilde{v}\tau_p} \ll 1$, $\tilde{v} = (\frac{\Phi_0}{m})^{1/2}$, Φ_0 - the maximum value of acoustic field). Furthermore the temperature of pattern T is near critical temperature T_c . Under these conditions the nonlinear evolution is determined by resonant particles reflecting from the potential barrier of acoustic pulse. This type of nonlinearity is called "pulse nonlinearity". The energy attenuation has a collisionless character in this case and it is explained by equilibrium distribution function f_0 of particles having the negative sign of the one derivative of f_0 with respect to longitudinal velocity v_x reaching the sound velocity w : $\frac{\partial f_0}{\partial v_x} |_w$. In other words we have a well known phenomenon, Landau damping.

In addition the nonlinear evolution is determined by the dependence of sound velocity w on lattice displacement. In collisionless case the velocity dispersion is determined by resonant particles having the response function containing the second derivative of f_0 with respect to t_0 v_x : $\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_x^2} [1]$.

1 Basic equations

The basic equations of the problem are the kinetic equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\xi}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p_x} + \frac{f - f_0}{\tau_p} \frac{|\xi|}{\varepsilon} = 0, \quad (1.1)$$

where ε and ξ are a dispersion law of particles in superconducting and normal states, and wave equation

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho w^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F, \quad (1.2)$$

where ρ is a density of pattern, F is the force effecting the lattice by resonant particles. This force is found as a variational derivative of energy electron system with respect to lattice displacement u at constant entropy

$$F = -\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\partial}{\partial u} \int dV \int d\vec{p} f \varepsilon. \quad (1.3)$$

It is assumed that the solution of (1.1) is the following

$$f = f_0(\varepsilon) + g(\vec{p}, x - wt). \quad (1.4)$$

Then the disequilibrium distribution function g has the form

$$g = -\frac{w}{\tilde{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{ds}{d\tau'} e^{-a(\tau-\tau') \frac{|\xi|}{\varepsilon}} d\tau', \quad (1.5)$$

satisfying the initial condition $g \rightarrow 0$ at $t \rightarrow -\infty$; here $s = (v_x - w \frac{\xi}{\tilde{v}})/\tilde{v}$.

For further we have to expand the derivative df_0 over $d\varepsilon$ in s near point $s = 0$:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \Big|_{s=0} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{s=0} m \tilde{v} w s. \quad (1.6)$$

Introducing (1.6) into (1.5) and then (1.3) after some calculation we obtain

$$F = F_1 + F_2; \quad (1.7)$$

$$F_1 = 3 \frac{n_0 \Lambda \Phi_0}{L \varepsilon_F v_F} \frac{w}{v_F} \left(e^{\Delta/T} + 1 \right)^{-1} \left\{ (1 - \Phi_1)^{1/2} + \Phi_1 \ln \frac{(1 - \Phi_1)^{1/2} + 1}{|\Phi_1|^{1/2}} \right\}; \quad (1.8)$$

$$F_2 = F_2^L \left\{ 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tilde{v}}{v_F} \frac{[(1 - \Phi_1)^{3/2} - \Phi_1^{3/2}]}{\Phi_1} \right\} \equiv F_2^L G_b(\Phi_1) \quad (1.9)$$

for the potential "barrier" case;

$$F_2 = F_2^L \left\{ 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\tilde{v}}{v_F} |\Phi_1|^{1/2} \right\} \equiv F_2^L G_w(\Phi_1) \quad (1.10)$$

for the potential "well" case; were force

$$F_2^L = \frac{3}{2} \frac{n_0 \lambda \Phi_0}{L \varepsilon_F} \frac{m w^2}{T} c h^{-2} \left(\frac{\Delta}{2T} \right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \quad (1.11)$$

correspond to the linear case when the particle trajectories have been weakly perturbed by sound field.

2 Acoustic pulses evolution

Let us regard the equation (1.2) with electronic force (1.7); it describes the nonlinear energy attenuation of acoustic pulses. Using the slow evolving profile method ($u(x, t) = u(\eta, t')$, t' is slow time) this equation may be written as follows

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t'} + R(\Phi(\eta, t')/\Phi_0(t')) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0, \quad (2.1)$$

where

$$R = \frac{3}{2} \frac{n_0 \lambda}{\rho w^2} \frac{w}{L \varepsilon_F} \frac{\lambda}{v_F} \frac{w}{v_F} \left(e^{\Delta/T} + 1 \right)^{-1} \left\{ \ln \frac{(1 - \Phi_1)^{1/2} + 1}{\Phi_1} + (1 - \Phi_1)^{-1/2} \right\}. \quad (2.2)$$

The equation (2.1) was regarded by Demichovskii and his colleagues for the longitudinal acoustic pulses in normal state of metals [2]. It is necessary to note that the temperature dependence of the absorption coefficient (2.2) is described by BCS-formula and when T tends to T_c a smooth transition to absorption regime for the normal state takes place. The potential "well" absorption is absent in this case.

Let us regard the equation (1.2) with the electronic force (1.8)–(1.10). It describes the pulse evolution because of the sound velocity shift. We shall search the solution of it in the following form

$$u = u(x - w(\eta)t), w(\eta) = w_0 + \delta w(\eta), \quad (2.3)$$

where w_0 is equilibrium sound velocity, δw is slow function of η and $\mu = \frac{|\delta w|}{w_0} \ll 1$. Introducing (2.3) into (2.1) in linear approximation for the small parameter μ we obtain

$$\delta w = \delta w^L G_b(\Phi_1) \quad (2.4)$$

for the potential "barrier" case and

$$\delta w = \delta w^L G_w(\Phi_1) \quad (2.5)$$

for the potential "well" case, here

$$\delta w^L = \frac{3}{4} w_0 \frac{n_0 \lambda}{\rho w_0^2} \frac{\lambda}{\varepsilon_F} \frac{m w_0^2}{T} c h^{-2} \Delta/T -$$

the linear sound velocity shift.

In Fig.1 we can see the effect of the pulse deformation described by formulae (2.4)(Fig.1a) and (2.5)(Fig.1b). It is necessary to note that the temperature dependence of velocity shift has sharp maximum when $T \rightarrow T_c$ (Fig.2). In this maximum the relative value of velocity change is much larger (namely two or three orders) than that for the normal state of metals [3].

This effect is explained by strong modification of the normal particle spectrum in superconducting transition. It was observed experimentally some time ago in superconducting tin by Fil and his colleagues [4].

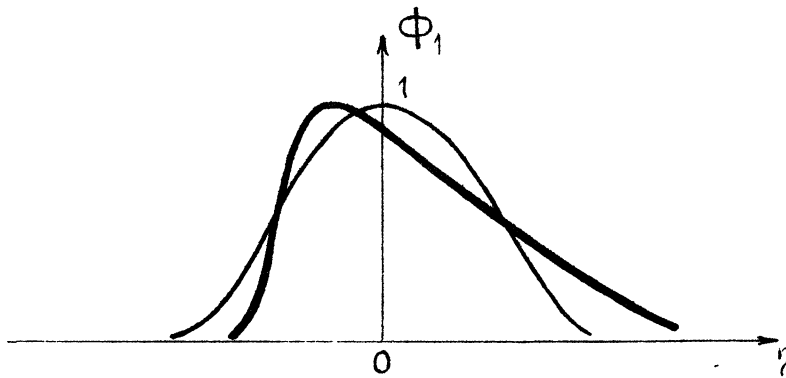


Fig.1a

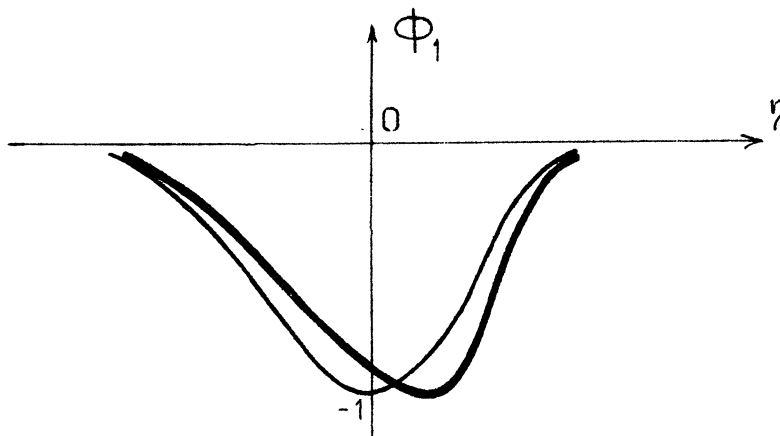


Fig.1b

Figure 1. Character deformation of acoustic pulses profile because of nonlinear sound velocity dispersion (1a for potential "barrier" case; 1b for potential "well" case)

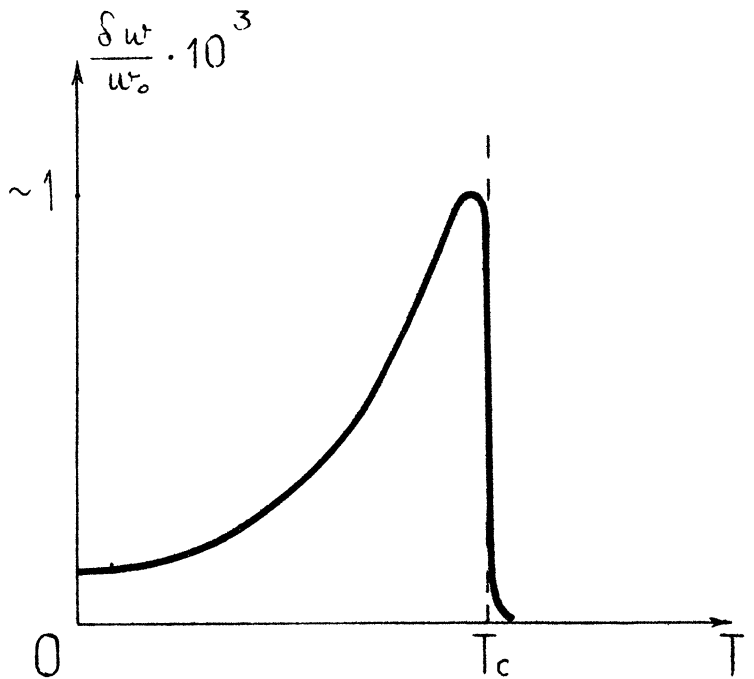


Figure 2. Temperature dependence of disequilibrium sound velocity shift in superconductor

References

- [1] G.I.Morales, T.M.O'Neil, "Nonlinear frequency shift of the plasma wave", *Phys.Rev. Let.*, 1972, Vol.28, No.7, p.p.417-421.
- [2] V.Ya.Demichovskii, G.M.Maksimova, V.E.Sautkin, "Interaction of acoustic pulses with conduction electrons in metals", *Sov.JETP*, 1984, Vol.86, No.3, p.p.1037-1048.
- [3] V.Ya.Demichovskii, N.Shmatkova, "Amplitude dependence of sound velocity shift in a collisionless case", *Sov.J.Phys.LowTemp.*, 1978, Vol.4, No.2, p.p.256-261.
- [4] V.D.Fil, V.I.Denisenko, P.A.Bezugly, "Dispersion of the sound velocity in superconducting tin", *Sov.JETP*, 1973, Vol.66, No.2, p.p.765.

Нелинейное затухание и дисперсия скорости акустических импульсов в сверхпроводниках

В.А.Кукушкин, Н.П.Толстова

Изучена эволюция мощных акустических импульсов продольной поляризации в сверхпроводниках. Предположено, что длина пробега l нормальных носителей в образце много больше длины импульса L , а мощность волны такова, что время пролета резонансными возбуждениями области импульса меньше времени релаксации τ_p ; считается также, что температура образца достаточно близка к температуре сверхпроводящего перехода T_c . В этих условиях динамика квазичастиц имеет нелинейный характер, обусловленный отражением обычного типа от потенциального поля волны. Соответствующий тип нелинейности известен под названием "импульсная нелинейность". На основании решения кинетического уравнения найдена сила, действующая со стороны резонансных возбуждений на решетку. Исследовано решение уравнения теории упругости, описывающее нелинейное затухание и перенормировку скорости звука δw . Показано, что вблизи температуры перехода $T = T_c$ зависимость $\delta w(T)$ проявляет резкий пик (см. рис.2), наблюдавшийся ранее экспериментально Филем с сотр. в сверхпроводящем олове [4].

PROPERTIES OF TIME DELAY IN QUANTUM CHAOTIC SCATTERING

N. Lehmann¹, D.V. Savin², V.V. Sokolov², H.-J. Sommers¹

¹Fachbereich Physik, Universität Gesamthochschule Essen, D-45117 Essen, Germany,

²Budker Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk, Russia.

Abstract

We study the properties of time delays in a model of chaotic resonance scattering based on the random matrix approach. Analytical formulae which are valid for an arbitrary number of open channels and arbitrary coupling strength between resonances and channels are obtained by the supersymmetry method. We demonstrate that in the limit of a large number of open channels the time delay correlation function, though being not a Lorentzian, is characterized, similar to that of the scattering matrix, by the gap between the cloud of complex poles of the S -matrix and the real energy axis.

1 Introduction

The duration of particle collisions is an interesting and important aspect of general scattering theory which is in a sense complementary to the energy representation ordinarily used. A collision is characterized in this case by the time delay of particles in the region of interaction. Wigner [1] was the first who considered the time on which a monochromatic particle with given angular momentum is delayed during its elastic scattering. He established the connection of this time delay to the energy derivative of the scattering phase shift. The sharper the energy dependence of the phase shift the longer is the time delay.

Later on Smith [2] extended the time delay concept on many channel problems introducing the time delay matrix

$$Q^{ab}(E) = -i\hbar \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} \sum_c S^{ac}(E + \frac{\varepsilon}{2}) S^{*cb}(E - \frac{\varepsilon}{2}) \right\}_{\varepsilon=0}, \quad (1)$$

in the channel space. Here S is the scattering matrix and the summation index c runs over all the M open scattering channels. Diagonal element Q^{cc} coincides with the mean duration of collision (time delay) in the c -th entrance channel. Averaging over the channels, one arrives at the simple weighted-mean characteristic

$$Q(E) = \frac{1}{M} \sum_c Q^{cc} = -\frac{i}{M} \frac{d}{dE} \ln \det S(E) \quad (2)$$

of the duration of collisions. Eq.(2) is just the many-channel version of the well-known simple Wigner formula. (Here and below we set $\hbar = 1$.)

The time delay turns out to be an especially pertinent concept for the chaotic resonance scattering encountered in atomic, molecular and nuclear physics [3, 4], as well as in the scattering of electromagnetic microwaves [5] in resonance billiard-like cavities. The quantity $Q(E)$, being closely connected to the complex energy spectrum of resonance states, shows in its energy dependence strong fluctuations around a smooth regular variation. The two kinds of variation on different energy scales are naturally decomposed

$$Q(E) = \langle Q(E) \rangle + Q_{fl}(E), \quad (3)$$

with an energy or ensemble averaging. By this, the slow energy dependence of time delay is revealed whereas the two-point autocorrelation function

$$C_Q(E, \varepsilon) = \langle Q_{fl}(E + \frac{\varepsilon}{2}) Q_{fl}(E - \frac{\varepsilon}{2}) \rangle = \langle Q(E + \frac{\varepsilon}{2}) Q(E - \frac{\varepsilon}{2}) \rangle - \langle Q(E + \frac{\varepsilon}{2}) \rangle \langle Q(E - \frac{\varepsilon}{2}) \rangle \quad (4)$$

is used to characterize the time delay fluctuations.

According to the general scattering theory [6, 7, 8], the poles of the resonance scattering matrix in the complex energy plane are those of the Green's function

$$\mathcal{G}(E) = (E - \mathcal{H})^{-1}. \quad (5)$$

They coincide with the eigenvalues $\mathcal{E}_n = E_n - \frac{i}{2}\Gamma_n$ of the effective nonhermitian Hamiltonian \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = H - i\gamma W, \quad W = VV^T, \quad (6)$$

with E_n and Γ_n being the energy and width of n -th resonance state. The Hamiltonian (6) describes the evolution of the N -level unstable system formed on intermediate stage of a resonance collision. Due to the elimination of continuum variables, it acquires the antihermitian part which consists of the product of amplitudes V_m^c of transitions between N internal and M channel states. The dimensionless parameter γ characterizes the strength of the coupling of the internal motion to the continuum. It what follows, the properties of the spectrum of complex energies \mathcal{E}_n play the crucial role.

The intrinsic chaoticity of the internal motion of long-lived intermediate system manifests itself by chaotic fluctuations in resonance scattering and demands a statistical consideration. Therefore the random matrix approach extending the well-known [9] description of chaotic bounded systems has been worked out in [10, 11, 8]. It is usually assumed that the hermitian part H of the effective Hamiltonian subject to the T-invariance belongs to the Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE),

$$\langle H_{nm} \rangle = 0, \quad \langle H_{nm} H_{n'm'} \rangle = \frac{\lambda^2}{N} (\delta_{nn'} \delta_{mm'} + \delta_{nm'} \delta_{mn'}) . \quad (7)$$

In the limit $N \rightarrow \infty$ eigenvalues of H are situated in the interval $[-2\lambda, 2\lambda]$ with the density given by Wigner's semicircle law. Following [8], we suggest the transition amplitudes V_n^c also to be statistically independent Gaussian variables,

$$\langle V_n^a \rangle = 0, \quad \langle V_n^a V_m^b \rangle = \frac{\lambda}{N} \delta^{ab} \delta_{nm} . \quad (8)$$

The number N of resonances is as usual supposed to be asymptotically large and for carrying out the averaging of quantities defined in (3,4) over the ensemble (7,8) we use the powerful supersymmetry technique [12] first applied to chaotic scattering problems in [11]. The number M of the (statistically equivalent) scattering channels can be small or large or can even scale with the number of resonance states. One can treat the latter two cases [4, 13, 14] as a "quasiclassical" limit in the matrix model. We show here that the time delay local fluctuations are governed, similar to those of the S -matrix [14], by the gap between the real axis and the upper edge of the distribution of resonance energies in the complex energy plane. We compare this result with that obtained in the framework of the periodic orbit approach.

2 Time Delay and Resonance Spectrum

The poles \mathcal{E}_n in the lower part of the complex energy plane are the only singularities of the resonance scattering matrix. Due to the unitarity condition their complex conjugates \mathcal{E}_n^* serve as S -matrix's zeros. These two conditions result in the representation $\det S(E) = \prod_n \frac{E - \mathcal{E}_n^*}{E - \mathcal{E}_n}$. Substituting this into eq.(2), we come to the important connection

$$Q(E) = -2 \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{M} \operatorname{tr} \mathcal{G}(E) \right\} = \frac{1}{M} \sum_n \frac{\Gamma_n}{(E - E_n)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_n^2} \quad (9)$$

between the time delay and the trace of the Green's function (5) of the intermediate unstable system. The time delay is entirely determined by the spectrum of complex energies of this system. The collision duration directly reflects the statistical properties of resonances. This is in contrast to the scattering amplitudes $S^{cc'}$ which explicitly depend also on the transition amplitudes V_n^c .

The ensemble averaging of eq.(9) gives

$$\langle Q(E) \rangle = \frac{2}{m\lambda} \operatorname{Re} g(E) \quad (10)$$

where $m < 1$ is the ratio M/N and the function $g(E) = i\lambda \frac{1}{N} \langle \operatorname{tr} \mathcal{G}(E) \rangle$ satisfies the cubic equation [14]

$$g(E) - \frac{1}{g(E)} + \frac{m\gamma}{1 + \gamma g(E)} - i \frac{E}{\lambda} = 0 . \quad (11)$$

The (unique) solution with a positive real part has to be chosen. It can be seen from the consideration given in [14] that this real part is close to $\frac{\lambda}{N} \pi \rho(E)$ with $\rho(E)$ being the projection on the real energy axis near the scattering energy E of the density of resonance levels in the complex energy plane.

On the other hand, averaging eq.(1) directly, we express $\langle Q \rangle$ in terms of the two-point S -matrix correlation function [11, 14], which, in the limit of a large number of statistically equivalent channels, $M \gg 1$, scaling with the number of resonances N is given by [14]

$$C_S(\varepsilon) = \frac{i\Gamma(\varepsilon)}{\varepsilon + i\Gamma(\varepsilon)} \mathcal{T}(\varepsilon) \equiv K(\varepsilon) \mathcal{T}(\varepsilon) \quad (12)$$

with the two smooth functions defined by

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{m}{2} \lambda \frac{\mathcal{T}(\varepsilon)}{g(\varepsilon/2)}, \quad \mathcal{T}(\varepsilon) = \frac{4\gamma g(\varepsilon/2)}{[1 + \gamma g(\varepsilon/2)]^2} \quad (13)$$

and we set $E = 0$ for the sake of simplicity. The quantity $C_S(0) = \mathcal{T}(0) \equiv T$ coincides with the transmission coefficient $T = 1 - |\langle S \rangle|^2$. With eq.(12) taken into account we obtain

$$\langle Q \rangle \equiv -i \frac{dC_S(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + i \frac{d\mathcal{T}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = -iT \frac{dK(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{T}{\Gamma_0}, \quad (14)$$

where we have designated $\Gamma(0)$ as Γ_0 .

In eq.(12), only the first fast varying factor $K(\varepsilon)$ describes the local fluctuations whereas the second one corresponds to the joint influence of all resonances giving rise to the processes with a very short duration [14]. The average time delay of a non-monochromatic spatially small wave packet caused by the formation of a long-lived intermediate state [3, 16] is determined just by the factor $K(\varepsilon)$ [14]

$$\langle \tau \rangle = -i \frac{dK(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \Gamma_0^{-1}. \quad (15)$$

This implies the connection [16, 14]

$$\langle \tau \rangle = \langle Q \rangle / T = \frac{2N}{\lambda M T} g(0) \approx \frac{2\pi\rho}{MT}. \quad (16)$$

3 Time Delay Correlation Function

Now we calculate the correlation function (4) and, to simplify formulae, we restrict ourselves to the center of the GOE spectrum $E = 0$. Taking into account the relation (9), one can cast eq.(4) into the form

$$C_Q(\varepsilon) \equiv \langle Q \rangle^2 K_Q(\varepsilon) = \frac{2}{M^2} \text{Re} \left\{ \langle \text{tr} \mathcal{G}(\frac{\varepsilon}{2}) \text{tr} \mathcal{G}^\dagger(-\frac{\varepsilon}{2}) \rangle - \langle \text{tr} \mathcal{G}(\frac{\varepsilon}{2}) \rangle \langle \text{tr} \mathcal{G}^\dagger(-\frac{\varepsilon}{2}) \rangle \right\}, \quad (17)$$

where we have also defined the normalized correlation function $K_Q(\varepsilon)$. The terms containing two Green's functions with poles at the same side from the real energy axis are omitted in (17). Their contribution turns out to have got no resonance behaviour and is negligible as long as $\Gamma_0 \ll \lambda$, implying a clear cut-distinction of local and global scales [14].

To perform the ensemble averaging in (17) we use the modification worked out in [14, 15] of the supersymmetry technique [11]. Using the integral representation of Green's function as a multivariate Gaussian integral over commuting and anticommuting variables, one gains the possibility to accomplish the averaging exactly. With the help of the Fourier transformation in the supermatrix space the integration over initial auxiliary supervectors is then carried out. Since the number of resonances $N \rightarrow \infty$, the integration over the supermanifold can be carried out in the saddle-point approximation. Two cases when the number of channels M is finite ($m = 0$) or tends to infinity (m is finite) have different saddle-points and, therefore, should be treated separately. Details of calculations can be found in [15].

In the limit of a fixed number of channels M we come to the result

$$K_Q(\varepsilon) = \frac{1}{4} \int_0^1 d\lambda_0 \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty d\lambda_2 \mu(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) (2\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^2 \cos\{\pi\rho\varepsilon(2\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\} \left[\frac{(1 - T\lambda_0)^2}{(1 + T\lambda_1)(1 + T\lambda_2)} \right]^{M/2} \quad (18)$$

where

$$\mu(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{(1 - \lambda_0)\lambda_0|\lambda_1 - \lambda_2|}{[(1 + \lambda_1)\lambda_1(1 + \lambda_2)\lambda_2]^{1/2}(\lambda_0 + \lambda_1)^2(\lambda_0 + \lambda_2)^2},$$

and $T = 4\gamma/(1 + \gamma)^2$ is the transmission coefficient (see (13)) calculated in the limit of $m = 0$.

In the limit $\gamma = 0$, when the system gets closed, the correlation function (17) becomes proportional to the GOE density-density correlation consisting [9] of the singular term $\delta(\pi\rho\varepsilon)$ and smooth Dyson's function $-Y_2(\pi\rho\varepsilon)$. Coupling to the continuum leads to appearing of a new energy scale caused by the decay processes and defined [14] by $\Gamma(\varepsilon)$ from eq.(13). One can anticipate a qualitative changing of the correlation function to occur on this scale. For larger distances the influence of the antihermitian part should fade away and the asymptotics of C_Q for $\varepsilon \rightarrow \infty$ is expected to coincide with that of $-Y_2(\pi\rho\varepsilon)$.

Generally speaking, the threefold integral in (18) can be investigated for arbitrary number of channels M only numerically using the methods developed in [17] (see [15]). However, this integral can be simplified if M becomes large enough. Let the number M grow still keeping the ratio $m \ll 1$ and the product $MT = 2\pi\rho\Gamma_W$ (compare with (16)) fixed. The quantity Γ_W is just the limiting value of Γ_0 with T and g calculated in the limit $m = 0$. It coincides with the well-known semiclassical Weisskopf estimate of the correlation length of Ericson fluctuations. Then $K_Q(\varepsilon)$ is found to be

$$K_Q(\varepsilon) = \int_0^2 dt t e^{(-\pi\rho\Gamma_W t)} \left(1 - \frac{1}{2} \ln(t+1)\right) \cos(\pi\rho\varepsilon t) + \int_2^\infty dt e^{(-\pi\rho\Gamma_W t)} \left(2 - \frac{t}{2} \ln \frac{t+1}{t-1}\right) \cos(\pi\rho\varepsilon t). \quad (19)$$

This is in close analogy with the consideration of the S-matrix correlation function made in [17]. In the limit $\rho\Gamma_W \rightarrow 0$ this expression reduces to the normalized GOE density-density correlation function written in its Fourier representation [12].

The behaviour of $K_Q(\varepsilon)$ is quite different in the regions $\varepsilon \ll \Gamma_W$ and $\varepsilon \gg \Gamma_W$. In the first one it is determined by decays and therefore is sensitive to the coupling to the continuum. Quite opposite, for large ε the behaviour becomes universal since the GOE fluctuations described by the Dyson's function Y_2 are restored. It is perfectly reasonable since an open system cannot be distinguished from a closed one during a small time $t \ll \Gamma_W^{-1}$.

In the limit of isolated resonances, $\rho\Gamma_W \ll 1$, it is natural to set aside the contribution of asymptotics of the integrand, presenting (19) in the form

$$K_Q(\varepsilon) = \frac{1}{\pi\rho} \frac{\Gamma_W}{(\varepsilon^2 + \Gamma_W^2)} + \int_0^2 dt e^{-\pi\rho\Gamma_W t} \left(t - \frac{t}{2} \ln(t+1) - 1\right) \cos(\pi\rho\varepsilon t) + \int_2^\infty dt e^{-\pi\rho\Gamma_W t} \left(1 - \frac{t}{2} \ln \frac{t+1}{t-1}\right) \cos(\pi\rho\varepsilon t). \quad (20)$$

The Lorentzian contribution with the width Γ_W directly traced to the GOE δ -function dominates in the domain $\varepsilon \lesssim \Gamma_W$. The sum of the remaining integrals is negative for all values of ε and approaches asymptotically the function Y_2 from above. We thus come to the conclusion that the correlation function vanishes at some intermediate point ε_0 which can be easily estimated as $\varepsilon_0 \simeq \sqrt{\Gamma_W/(\pi\rho)}$.

In the regime of strongly overlapping resonances, $\rho\Gamma_W \gg 1$, the main contribution in K_Q comes from $t \lesssim (\pi\rho\Gamma_W)^{-1}$ and, therefore, the second integral in (19) can be neglected. Dropping then out the small logarithmic term in the first integral and extending its upper limit to infinity, we arrive at

$$K_Q(\varepsilon) \approx \int_0^\infty dt t e^{(-\pi\rho\Gamma_W t)} \cos(\pi\rho\varepsilon t) = \frac{4\Gamma_W^2}{M^2 T^2} \frac{\Gamma_W^2 - \varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + \Gamma_W^2)^2}. \quad (21)$$

The function (21) is not a Lorentzian at all. Decreasing quadratically in a small vicinity of the point $\varepsilon = 0$, it deviates subsequently from a Lorentzian, becomes zero at the point $\varepsilon_0 = \Gamma_W$, reaches a negative minimum and approaches at last zero from below. Just the correlation function of such a form with Γ_W substituted by the classical escape rate was conjectured in [18] as the limiting classical expression following from the periodic orbit picture.

In the limit of finite m we have found that the expression (21) is reproduced again but with Γ_W substituted by Γ_g where

$$\Gamma_g = \frac{\Gamma_0}{1 + i\Gamma_0'}, \quad (22)$$

and $\Gamma_0' \equiv d\Gamma(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$. It has been proven in [14] that Γ_g , playing the role of the correlation length of the Ericson fluctuations, coincides with the gap between the distribution of resonance energies in the

complex energy plane and the real energy axis. Therefore, we come to the conclusion that the properties of fluctuations both of the S -matrix and time delay are described by the same quantity, the gap Γ_g .

The obtained form of the ε -dependence of the many-channel correlation function C_Q is close to that found in [19] for Gutzwiller's model of single-channel chaotic scattering on a space of negative curvature. The same values of all resonance widths and the outcoming possibility for resonances to overlap are two specific features of the model which are in fact in strong disagreement with properties of the resonance spectra represented by matrix models. In particular, the single-channel resonances cannot overlap at all in the latter models [8] and their widths fluctuate strongly. That is why our result for $M = 1$ (see also [15]) differs noticeably from the correlation function of ref.[19]. The situation changes when the number of channels is large. The width fluctuations diminish with the number M of channels growing. The time delay depending (see (9)) only on properties of the complex energies of resonances and not on the number of channels directly, the correlation functions become similar in the two quite different cases compared.

It is worthy to note that resonances overlapping strongly suppress time delay fluctuations. Indeed, one gets for isolated resonances $K_Q(0) = (\pi\rho\Gamma_W)^{-1} \gg 1$ whereas $K_Q(0) = (\pi^2\rho^2\Gamma_W^2)^{-1} \ll 1$ when they overlap. The duration of a collision thus becomes a good definite quantity in the "quasiclassical" domain.

The question arises of a possible connection of our results to the classical limit. Since Planck's constant actually has a finite value, corresponding to a vicinity around the point $\varepsilon = 0$ the long-time, $t > t^*$, asymptotics of the Fourier transform of the time delay correlation function is formed by quantum effects [18]. Our results imply that the decay rate of this asymptotics coincides with the gap Γ_g and there is no another decay exponent similar to classical one which takes its appearance at intermediate values of time in the periodic orbit consideration in ref. [18]. Certainly, there are no reasons why the classical regime must appear as long as the condition $\Gamma_g t^* \lesssim \hbar$ holds. The natural estimate for the time t^* is the Heisenberg time $t^* \sim \hbar\rho$. Hence, the resonances are isolated under above condition and the gap characterizes individual widths which ceased to fluctuate since the number of channels is very large.

One could expect that in the opposite case $\Gamma_g t^* \gg \hbar$ when resonances strongly overlap the gap should approach the value $\hbar\gamma_{cl}$ with γ_{cl} standing for the classical escape rate. This would mean that quantum effects completely disappear from eq. (21). In fact, the matrix model used fails to provide by itself any estimate for γ_{cl} or even the way in which the time t^* goes to infinity in the formal limit $\hbar \rightarrow 0$. The density of levels ρ is a free parameter of the model. Therefore, the conjecture just made cannot be checked in the framework of our approach. It is worthy noting in this connection that arguments of rather general nature have been presented in [20] that the difference between Γ_g and $\hbar\gamma_{cl}$ can survive even in the limit $\hbar \rightarrow 0$ provided that the classical motion is chaotic.

4 Summary

In this paper we have considered the fluctuations of the characteristic time of collisions in the framework of a random matrix model of resonance chaotic scattering. These fluctuations are entirely due to the fluctuations of the spectrum of complex resonance energies. We calculate analytically the time delay correlation function and investigate its properties analytically and numerically for different values of the number of channels and the strength of coupling to the continuum. For any values of these parameters this function is far from being a Lorentzian. In particular, it vanishes at some point which can play the role of the characteristic correlation length of the fluctuations. In the "quasiclassical" limit of a large number of strongly overlapping resonances this length is given, similar to that of the S -matrix fluctuations, by the gap between the upper edge of the distribution of complex energies of resonances and the real energy axis. We believe that the link between the characteristic lengths of correlations from one hand and the complex pole distribution from another, established in [14] on the example of matrix models, is in fact the generic feature of chaotic quantum scattering.

Acknowledgements

We are grateful to F. Izrailev for his permanent interest to this work and to B.V. Chirikov for critical and valuable remarks. Financial support from the Deutsche Forschungsgemeinschaft through the SFB 237 and the International Science Foundation, grant no. RB7000, (for V.V.S. and D.V.S.) is acknowledged with thanks.

References

- [1] E. Wigner, Phys. Rev. 98 (1955) 145.
- [2] F.T. Smith, Phys. Rev. 118 (1960) 349; 119 (1960) 2098.
- [3] V.L. Lyuboshitz, Phys. Lett. B72 (1977) 41; Yad. Fiz. 27 (1978) 948 (Sov. Journ. Nucl. Phys. 27 (1978) 502); Pis.ZhETF 28 (1978) 32 (Sov. JETP Lett. 28 (1978) 30).
- [4] C.H. Lewenkopf and H.A. Weidenmüller, Ann. Phys.(N.Y.) 212 (1991) 53.
- [5] S. Sridhar, Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 785; H.-D. Gräf *et al.*, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 1296; J. Stein and H.-J. Stöckmann, Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 2867.
- [6] C. Mahaux and H.A. Weidenmüller, *Shell-model Approach to Nuclear Reactions*, (North-Holland, Amsterdam, 1969).
- [7] I.Yu. Kobzarev, N.N. Nikolaev and L.B. Okun, Yad. Fiz. 10 (1969) 864; V.D. Kirilyuk, N.N. Nikolaev, L.B. Okun, *ibid* p.1081.
- [8] V.V. Sokolov and V.G. Zelevinsky, Phys. Lett. B202 (1988) 140; Nucl. Phys. A504 (1989) 562.
- [9] C.E. Porter (ed.), *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*, (Academic Press, New York, 1965); M.L. Mehta, *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Spectra*, (Academic Press, New York, 1967).
- [10] H.A. Weidenmüller, Ann. Phys.(N.Y.) 158 (1984) 120.
- [11] J.J.M. Verbaarschot, H.A. Weidenmüller and M.R. Zirnbauer, Phys. Rep. 129 (1985) 367.
- [12] K.B. Efetov, Advan. in Phys. 32 (1983) 53.
- [13] F. Haake, F.M. Izrailev, N. Lehmann, D. Saher and H.-J. Sommers, Z. Phys. B88 (1992) 359.
- [14] N. Lehmann, D. Saher, V.V. Sokolov and H.-J. Sommers, Nucl. Phys. A582 (1995) 223.
- [15] N. Lehmann, D.V. Savin, V.V. Sokolov and H.-J. Sommers, Physica D (1995), to appear in vol.86-88.
- [16] F.M. Dittes, H.L. Harney and A. Müller, Ann. Phys.(N.Y.) 220 (1992) 159.
- [17] J.J.M. Verbaarschot, Ann. Phys.(N.Y.) 168 (1986) 368.
- [18] B. Eckhardt, Chaos 3 (1993) 613.
- [19] A. Shushin and D.M. Wardlaw, J. Phys. A: Math. Gen. 22 (1992) 1503.
- [20] P. Gaspard and S.A. Rice, J. Chem. Phys. 90 (1989) 2225, *ibid* p.2242, *ibid* p.2255.

СВОЙСТВА ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ В КВАНТОВОМ ХАОТИЧЕСКОМ РАССЕЙАНИИ

Н. Леманн¹, Д.В. Савин², В.В. Соколов², Х.-Ю. Зоммерс¹

Рассмотрены флуктуации характерного времени столкновений при резонансном хаотическом рассеянии в рамках теории случайных матриц. Эти флуктуации целиком определяются флуктуациями спектра комплексных энергий. При помощи метода суперсимметрии вычислен коррелятор времён задержки и исследованы его свойства при различных значениях числа открытых каналов и силы смешивания с континуумом. При любых значениях этих параметров эта функция не является Лоренцианом. В частности, коррелятор зануляется в некоторой точке, которая может играть роль характерной корреляционной длины флуктуаций. В "квазиклассическом" пределе большого числа сильно перекрывающихся резонансов эта длина, подобно корреляционной длине флуктуаций S -матрицы, определяется щелью между верхним краем распределения комплексных энергий резонансов и вещественной осью энергии. Мы полагаем, что установленная связь между характерными длинами флуктуаций и распределением полюсов S -матрицы является общей чертой квантового хаотического рассеяния.

THE DUAL $\bar{\partial}$ -PROBLEM AND (2+1)-DIMENSIONAL NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS

S.V.Manakov, A.I.Zenchuk

L.D.Landau Institute for Theoretical Physics Russian Academy of Sciences
Chernogolovka, Moscow 142432, RUSSIA
E-mail:zenchuk@itp.ac.ru

Abstract

The dressing method originally formulated by Zakharov and Shabat [1], is a powerful tool for construction of multidimensional nonlinear integrable equations together with their solutions. This method exists in different modifications; the most advanced one is connected with the nonlocal D-bar problem [2], [3]. For various equations this method allows to describe almost all known their properties with maximal simplicity and efficiency. However, the direct study of some questions by means of the D-bar method is rather complicated. For example, it is difficult to obtain the compact form of the "general" evolution equations connected with the given auxiliary spectral problem. In the present paper we show how to avoid these troubles by using the dual D-bar problem.

First, we introduce some definitions and notations.

The nonlocal $\bar{\partial}$ -problem is an integral equation for complex-valued matrix function $\phi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\lambda}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\lambda}} + \int \phi(\nu) R(\nu, \mu) d^2 \nu. \quad (1)$$

where symbols $d^2 \mu$ and $d^2 \nu$ indicate the usual measure on the plane. We assume that the equation has the unique solution. Function f is called the normalization of $\bar{\partial}$ -problem, R is a kernel.

Normalization f is chosen from convenience. Two cases are usually considered: $f = 1$ and $f = \frac{1}{\lambda - a}$, where a is arbitrary point in the complex plane. We shall use the notations $\psi(\lambda)$, $\phi(a, \lambda)$ for the corresponding solutions of equation (1). These functions have the expansions as $\lambda \rightarrow \infty$

$$\psi(\lambda) = 1 + \frac{\psi'}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (2)$$

$$\phi(a, \lambda) = \frac{\phi'_a}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

(here and below prime means the residue at the infinity). Solution $\psi(\lambda)$ has no singularity in the complex plane, and $\phi(a, \lambda)$ has the unique pole at $\lambda = a$, which is called the normalization point

$$\phi(a, \lambda) = \frac{1}{\lambda - a} + \phi_a^{(0)} + O(|\lambda - a|), \lambda \rightarrow a. \quad (3)$$

Together with problem (1) we consider the equations

$$\frac{\partial \tilde{\psi}(\lambda)}{\partial \bar{\lambda}} = - \int R(\lambda, \mu) \tilde{\psi}(\mu) d^2 \mu \quad (4)$$

$$\tilde{\psi} \rightarrow 1, |\lambda| \rightarrow \infty$$

and

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(b, \lambda)}{\partial \bar{\lambda}} = \pi \delta(\lambda - b) - \int R(\lambda, \mu) \tilde{\phi}(b, \mu) d^2 \mu. \quad (5)$$

$$\tilde{\phi}(b, \lambda) \rightarrow \frac{\tilde{\phi}'_b}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \lambda \rightarrow \infty$$

It is naturally to call these equations as the *dual $\bar{\partial}$ -problem*; it plays the basic role in our approach. From eq. (1) – (5) one gets the relations

$$\phi(a, b) = -\tilde{\phi}(b, a), \quad (6)$$

$$\phi'_a = \tilde{\psi}(a), \quad \tilde{\phi}'_a = \psi(a), \quad (7)$$

$$\psi' = -\tilde{\psi}'. \quad (8)$$

These formulas connect the solutions of the $\bar{\partial}$ -problem and the dual one and possess to simplify significantly the derivation of many formulas in the dressing method.

The relation with the integrable nonlinear PDE can be established, if we introduce the additional parameter x_i by the formulas

$$\frac{\partial R(\mu, \lambda)}{\partial x_i} = I_i(\mu)R(\mu, \lambda) - R(\mu, \lambda)I_i(\lambda), \quad (9)$$

where I_i are mutually commuting matrix-valued rational functions. Let D_i and \tilde{D}_i be the *extended derivatives*

$$D_i \psi \doteq \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi I_i(\lambda), \quad (10)$$

$$\tilde{D}_i \tilde{\psi} \doteq \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_i} - I_i(\lambda) \tilde{\psi}$$

(operators \tilde{D}_i are used in the dual problem). This procedure was described by V.E. Zakharov, S.V. Manakov and L.V. Bogdanov [2], [3], [4]. Here we consider two examples [7], [8]. The first one is associated with KP-hierarchy and vector NS.

Let us put in the equations (9) $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = \tau$ and $I_1 = -\lambda$, $I_2 = -\lambda^2$, $I_3 = \sum \frac{\omega_i}{\lambda - \lambda_i}$. In this case

$$D_x = \partial_x - \lambda, \quad D_y = \partial_y - \lambda^2, \quad D_\tau = \partial_\tau + \Omega = \partial_\tau + \sum_i \frac{\omega_i}{\lambda - \lambda_i}.$$

The corresponding spectral problems arise in the form

$$\psi_y + \psi_{xx} - 2\lambda\psi_x = u\psi \quad (11)$$

where

$$u = -2\psi'_x, . .$$

The equation for $\psi(\lambda)$ with respect to τ is

$$\partial_\tau \psi(\lambda) + \sum_i \frac{\omega_i}{\lambda - \lambda_i} \psi(\lambda) = \sum_i \omega_i \psi(\lambda_i) \phi(\lambda_i, \lambda). \quad (12)$$

Let us expand eq. (12) in powers of $\frac{1}{\lambda}$ as $\lambda \rightarrow \infty$. In the leading order we obtain

$$\partial_\tau \psi' + \sum_i \omega_i = \sum_i \omega_i \psi(\lambda_i) \phi'_i, \quad \phi'_i \equiv \phi'_{\lambda_i}.$$

In the usual $\bar{\partial}$ -formalism [2], [3] the next step (to connect ϕ'_i with u) is rather difficult. However, by using dual $\bar{\partial}$ -problem, namely the formula (7), one can get

$$\phi'_i = \tilde{\psi}(\lambda_i).$$

Substitution of this relation into the previous equation and differentiation with respect to x yield

$$\partial_\tau u = -2 \sum_i \omega_i (\psi(\lambda_i) \tilde{\psi}(\lambda_i))_x. \quad (13)$$

The symmetry constraint $u_\tau = u_x$ gives rise to

$$u = -2 \sum_i \omega_i \psi(\lambda_i) \tilde{\psi}(\lambda_i). \quad (14)$$

Substituting eq. (14) into eq. (11) and putting $\lambda = \lambda_i$ we arrive to the vector nonlinear Schrödinger equation [5], [6]

$$\psi_y(\lambda_i) + \psi_{xx}(\lambda_i) - 2\lambda_i\psi_x(\lambda_i) + 2\sum_j \omega_j\psi(\lambda_j)\tilde{\psi}(\lambda_j)\psi(\lambda_i) = 0 \quad (15)$$

In the second example the parameters x_i are introduced as follows

$$D_x = \partial_x + \lambda, \quad D_y = \partial_y + \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad D_\tau = \partial_\tau + \Omega = \partial_\tau + \sum_i \frac{\omega_i}{\lambda - \lambda_i}.$$

As usual, one constructs the equation

$$D_x D_y \psi = A D_y \psi + u \psi + \psi,$$

where $A = \partial_x \ln \psi(0)$, $u = \psi'_y$. After substitution

$$\Psi = \psi e^{\lambda x + \frac{\varepsilon}{\lambda} y} \quad (16)$$

this equation turns into the 2-dimensional stationary Schrödinger equation

$$\Psi_{xy} = A \Psi_y + u \Psi + \varepsilon \Psi. \quad (17)$$

The evolution of potentials A and u comes from the equation

$$\psi_\tau(\lambda) + \sum_i \frac{\omega_i}{\lambda - \lambda_i} \psi(\lambda) = \sum_i \omega_i \psi(\lambda_i) \phi(\lambda_i, \lambda), \quad (18)$$

which gives

$$u_\tau = \varepsilon \partial_\tau (\tilde{\psi}(0)\psi(0)) = \sum_i \omega_i \partial_y (\psi(\lambda_i)\tilde{\psi}(\lambda_i)) \quad (19)$$

and

$$A_\tau = \sum_i \omega_i \partial_x \left[\frac{\phi(\lambda_i)}{\varepsilon + u} \left(\tilde{\psi}_y(\lambda_i) - \frac{\varepsilon}{\lambda_i} \tilde{\psi}(\lambda_i) \right) \right] \quad (20)$$

Now we consider the simplest reductions. Equation (19) offers the symmetry constraint ($\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y}$)

$$u = \sum_i \omega_i \psi(\lambda_i) \tilde{\psi}(\lambda_i).$$

Let

$$\tilde{\psi}(\lambda) = \psi(-\lambda), \quad \Omega = \frac{1}{\lambda - a} + \frac{1}{\lambda + a}.$$

Then from (17) we have the system for functions $v = \Psi(a)$ $w = \Psi(-a)$

$$v_{xy} = \frac{(vw)_x}{\varepsilon + 2vw} v_y + 2v^2 w + \varepsilon v \quad (21)$$

$$w_{xy} = \frac{(vw)_x}{\varepsilon + 2vw} w_y + 2w^2 v + \varepsilon w,$$

In particular, putting

$$v = \dot{w} = \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sinh \frac{q}{2}$$

one gets from the equations (21)

$$q_{xy} = \varepsilon \sinh q$$

(This fact was noted by A.V.Mikhailov).

Acknowledgement

The work was supported by Russian Basic Research Foundation under grant No. 94-01-00899. S.V.Manakov acknowledges the support from the International Soros Fond under grant No. MLY000, and A.I.Zenchuk acknowledges the support from Forschungszentrum Jülich under Landau Scholarship grant.

References

- [1] V.E.Zakharov, A.B. Shabat, *Funct. Anal. Appl.* **8** 3 (1974) 43
- [2] V.E.Zakharov, S.V.Manakov, *Funct. Anal Appl.* **19** 2 (1985) 11
- [3] L.V.Bogdanov, S.V.Manakov. *J.Phys. A:Math.Gen.* **21** (1988) L537
- [4] B.G.Konopelchenko. *Solitons in Multidimensions* (World Scientific, 1993)
- [5] Cheng Y., Li Y. *Phis. Lett. A* **157** (1991) 22
- [6] B.Konopelchenko, J.Sidorenko, W.Strampp *Phis. Lett. A* **157** (1991) 17
- [7] A.I.Zenchuk, S.V.Manakov *TMF, in print*
- [8] S.V.Manakov, A.I.Zenchuk *Physica D, in print*

ДУАЛЬНАЯ $\bar{\partial}$ -ПРОБЛЕМА И (2+1)-МЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

А.И. Зенчук, С.В. Манаков

Метод одевания, впервые сформулированный Захаровым и Шабатом [1], является мощным инструментом для построения многомерных нелинейных интегрируемых уравнений в частных производных. Одной из формулировок этого метода является нелокальная $\bar{\partial}$ -проблема. В данной работе рассмотрена дуальная $\bar{\partial}$ -проблема, которой ранее не придавалось существенного значения. Это позволяет эффективно использовать для построения нелинейных систем сингулярные решения $\bar{\partial}$ -проблемы, нормированные в точке сингулярности.

Под нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемой понимается уравнение (1), где $d^2\mu, d^2\nu$ — обычная мера на комплексной плоскости, R — ядро интегрального уравнения, f — нормировочная функция. Обычно рассматриваются два случая: $f = 1$ или $f = \frac{1}{\lambda - a}$, где a — произвольная точка на комплексной плоскости. Соответствующие решения обозначим $\psi(\lambda)$ и $\phi(a, \lambda)$ (2). Первое из этих решений не имеет особенностей на комплексной плоскости, а второе имеет единственный простой полюс в точке $\lambda = a$, называемой точкой нормировки (3).

Вместе с (1) рассмотрим уравнения (4) и (5), которые назовем дуальной $\bar{\partial}$ -проблемой. Из (1) – (5) легко получить соотношения (6) – (8).

Теперь связь с нелинейными уравнениями возникает, если ввести зависимость ядра от дополнительных параметров x_i по формулам (9), (10). Данная проблема изучена в работах [2], [3], [4].

Рассмотрим два примера. В первом параметры введем следующим образом:

$$D_x = \partial_x - \lambda, \quad D_y = \partial_y - \lambda^2, \quad D_\tau = \partial_\tau + \Omega = \partial_\tau + \sum_i \frac{\omega_i}{\lambda - \lambda_i}.$$

Обычным способом построим спектральную задачу (11) а также эволюционное уравнение (12). Пользуясь редукцией $u_\tau = u_x$ и спектральной задачей (11) получим (1+1)-мерное векторное нелинейное уравнение Шредингера (15).

Во втором примере дополнительные параметры введем по формулам

$$D_x = \partial_x + \lambda, \quad D_y = \partial_y + \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad D_\tau = \partial_\tau + \Omega = \partial_\tau + \sum_i \frac{\omega_i}{\lambda - \lambda_i}.$$

Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим эволюционные уравнения (19), (20) для коэффициентов в уравнении Шредингера с магнитным полем (17), и, с помощью вытекающей из них редукции $u_\tau = u_y$, (1+1)-мерную систему (21), частным случаем которой является уравнение sh-Гордона. Более подробные результаты изложены в работах [7], [8].

TWO EXAMPLES OF NORMAL FORMS FOR THE SHALLOW WATER EQUATIONS

S. B. Medvedev

Institute of Computational Technologies of SD RAS
6 Lavrent'ev avenue, Novosibirsk 630090, RUSSIA
E-mail: medvedev@ictnw.scnet.nsk.su

Abstract

Two examples of normal forms for the shallow water equations are demonstrated. In first example a slow forcing is eliminated by a nonlinear transform and it is allowed to obtain a slow manifold and a motion equations on it. A second example is a direct application of Poincare method of normal forms for the shallow water equations in large space scale, because the main part of this system for this limit is one of ordinary differential equations.

Introduction

Method of normal forms is widely used for study a system of ordinary differential equations [1]. In this article this method is applied to the shallow water equations. Two examples of such application are given. The first example is to find a slow manifold and the motion equations on it by transform to a special form which allows to obtain the formal invariant manifold. The second example is a direct application of Poincare method of normal forms to the shallow water equations for large scale and inhomogeneous Coriolis parameter. This example is important for obtaining nonlinear interaction equations of inertial-gravity and Rossby waves in non-homogeneous media.

1 The first example

1.1 Basic idea

Let us write the shallow water equations in standard form

$$u_t - fv + z_x = -(uu_x + vv_y), \quad (1)$$

$$v_t + fu + z_y = -(uv_x + vv_y), \quad (2)$$

$$z_t + u_x + v_y = -(uz)_x - (vz)_y. \quad (3)$$

Here the notations are commonly used and the Coriolis parameter f is a constant. The idea of the first example is better to explain for spectral form of the equations. In order to obtain them we perform the Fourier transform, introduce normal variables a_k , b_k and obtain system

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial t} &= \int A_{kk_1k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \\ &+ \left(\int B_{kk_1k_2} b_{k_1} a_{k_2} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 + k.c. \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_k}{\partial t} + i\omega_k b_k &= \int U_{kk_1k_2} a_{k_1} b_{k_2} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \\ &+ \left(\int V_{kk_1k_2} b_{k_1} b_{k_2} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 + k.c. \right) \\ &+ \underline{\int W_{kk_1k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

here $\omega_k = \sqrt{f^2 + |\vec{k}|^2}$ is frequency of inertial-gravity waves and $A_{kk_1k_2}$, $B_{kk_1k_2}$, $U_{kk_1k_2}$, $V_{kk_1k_2}$, $W_{kk_1k_2}$ are some coefficients. a_k and b_k describe a slow and fast motions, accordingly. If we put $a_k = 0$, then eq. (4) is satisfied identically and eq.(5) is one for evolution of b_k . This corresponds to a well-known case of conservation of potential motion, if initial velocity is potential. From other side, if we put $b_k = 0$, then the underlined term in (5) will generate b_k . Therefore the problem is to find a nonlinear transform

$$a_k = \bar{a}_k, \quad b_k = \bar{b}_k + F[\bar{a}_k], \quad (6)$$

which eliminates a slow forcing in equation for b_k . Then equation for \bar{b}_k will satisfy identically for $\bar{b}_k = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial t} &= \int A_{kk_1k_2} \bar{a}_{k_1} \bar{a}_{k_2} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \\ &+ \left(\int B_{kk_1k_2} \bar{b}_{k_1} \bar{a}_{k_2} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 + k.c. \right) + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{b}_k}{\partial t} + i\omega_k \bar{b}_k &= \int U_{kk_1k_2} \bar{a}_{k_1} \bar{b}_{k_2} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \\ &+ \left(\int V_{kk_1k_2} \bar{b}_{k_1} \bar{b}_{k_2} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 + k.c. \right) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Consequently, for $\bar{b}_k = 0$ in (6) and (7) we obtain the equation for the slow manifold and the motion equation on it.

1.2 A case $f = 1$

Let us make the elimination in r -space. The first step is to separate motion in linear part by transforming to the new variables χ, ξ, φ

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_y & -\partial_x & \partial_x \\ \partial_x & \partial_x & \partial_y \\ 1 & \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (9)$$

The equations are as follows

$$(1 - \Delta) \frac{\partial \chi}{\partial t} = N(\chi, \xi, \varphi), \quad (10)$$

$$\Delta(1 - \Delta) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \Delta(1 - \Delta) \varphi = R(\chi, \xi, \varphi), \quad (11)$$

$$\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta(1 - \Delta) \xi = S(\chi, \xi, \varphi), \quad (12)$$

where N , R and S are nonlinear terms. The variable χ describes a slow motion, and variables ξ and φ describes a fast one. The second step is to eliminate the slow forcing by nonlinear transform

$$\chi = \bar{\chi}, \quad \xi = \bar{\xi} + F[\bar{\chi}], \quad \varphi = \bar{\varphi} + G[\bar{\chi}]. \quad (13)$$

The equations for the variables with bar are

$$(1 - \Delta) \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} = N(\chi, \bar{\xi} + F[\bar{\chi}], \bar{\varphi} + G[\bar{\chi}]) \equiv \bar{N}(\chi, \bar{\xi}, \bar{\varphi}), \quad (14)$$

$$\Delta(1 - \Delta) \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \Delta(1 - \Delta) \bar{\varphi} = \bar{R}(\chi, \bar{\xi}, \bar{\varphi}), \quad (15)$$

$$\Delta \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} - \Delta(1 - \Delta) \bar{\xi} = \bar{S}(\chi, \bar{\xi}, \bar{\varphi}). \quad (16)$$

We seek a transform such that $\bar{R}(\chi, 0, 0) = 0$ and $\bar{S}(\chi, 0, 0) = 0$, then initial data on the slow manifold

$$\chi|_{t=0} = \chi_0, \quad \xi|_{t=0} = F(\xi_0), \quad \varphi|_{t=0} = G(\varphi_0) \quad (17)$$

evolute according to equation

$$(1 - \Delta) \frac{\partial \chi}{\partial t} = N(\chi, F[\chi], G[\chi]). \quad (18)$$

To find this transform it is necessary to solve the functional system

$$\frac{dF[\chi]}{dt} + G[\chi] = R(\chi, F[\chi], G[\chi]), \quad (19)$$

$$\frac{dG[\chi]}{dt} - (1 - \Delta)F[\chi] = S(\chi, F[\chi], G[\chi]), \quad (20)$$

where temporal derivative of χ is from eq. (18). By solving this system for weak nonlinearity we have

$$\xi = \bar{\xi} + 2(1 - \Delta)^{-1} \Delta^{-1} (\chi_{xy}^2 - \chi_{xx} \chi_{yy}) + \dots, \quad (21)$$

$$\varphi = \bar{\varphi} + (1 - \Delta)^{-1} \Delta^{-1} [\Delta \chi, \chi] + \dots, \quad (22)$$

where $[a, b]$ notes Jacobian of two functions a and b .

1.3 A case $f=0$

For the shallow water equations without Coriolis force the motion equation on the slow manifold is as follows

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + [\psi, \Delta \psi] + \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \Delta \varphi^+ \Delta \psi = 0 \quad (23)$$

where ψ is the stream-function and φ^+ is the solution of the following equation

$$\begin{aligned} & \Delta \varphi^+ + 4 \left[\psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \\ & + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Delta^{-1} [\Delta \psi, \psi] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Delta^{-1} [\Delta \psi, \psi] - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \Delta^{-1} [\Delta \psi, \psi] \right) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

It is easy to see, that the quadratic part is a well-known equation for vorticity and a nonlinearity of fourth order arises owing compressibility. A higher nonlinearity can manifest itself at stable solution of the equation for vorticity $\Delta \psi = F(\psi)$, where F is arbitrary function.

2 The second example

Let us introduce for the shallow water equations a new variable $\psi = \frac{u+iv}{\sqrt{2}}$ and operator $D = \frac{\partial_x + i\partial_y}{\sqrt{2}}$, then the equations are

$$\psi_t + i f \psi + D h + \psi D^* \psi + \psi^* D \psi = 0 \quad (25)$$

$$h_t + D^* \psi h + D \psi^* h = 0, \quad (26)$$

here Coriolis parameter is a positive function of space variables. We consider a motion for a scale, which is larger then Rossby radius, therefore we assume $D \ll 1$. Then the main part of (25)-(26) is a system of ordinary differential equations with frequencies 0 and f , in which x and y are as parameters and one can use Poincare method of normal forms to eliminate all nonresonant terms. In this system small terms are nonresonant, therefore one can make a transform to eliminate all terms of first order of D

$$\psi \rightarrow \psi + i f^{-1} D h + \psi^* A \psi + \psi B \psi \quad (27)$$

$$h \rightarrow h - i D^* f^{-1} \psi h + i D f^{-1} \psi^* h \quad (28)$$

where $A = i f^{-1} D - i (D f^{-1})$ and $B = -i D^* f^{-1}$. The equations obtained with only resonant terms in second order of D are

$$h_t + [h^2/2 + h \psi^2, f^{-1}] = 0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \psi_t + i f \psi - i D D^* f^{-1} h \psi + i \psi D^* (f^{-1} D h) + i f^{-1} (D h) (D^* \psi) - i f^{-1} (D^* h) (D \psi) \\ & + \psi D^* (\psi^* A \psi) + \psi^* (A^* \psi) (D^* \psi) + \psi^* D (\psi B \psi) + \psi (A \psi^*) (D \psi) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Analogous equations was obtained for a constant Coriolis parameter and beta-plane by some other way in [2].

Conclusion

The first exaple demonstrates a general approach to studying a system with two time scale. Let us assume that we are interested only the slow motion in this system, then there are two ways to study this problem. The first way is to reduce a original equations to ones which describes only a slow motion. The second way is to study the original equations with slow initial data. In the first way the initial data are set exactly, but the equations are approximate. In the second one it is oppositely, the slow initial data is approximate, but the equations are exact.

The second example shows a case, when the main part of the partial differential equations is a system of ordinary differential equations, then one can apply methods of perturbation theory for ordinary differential equations to study the original system [3].

Acknowledgement

The participation at the International School in Nonlinear Science was supported by the grant N 95-05-15581 of the Russian Foundation for Basic Research.

References

- [1] D.V.Anosov, V. I. Arnold, (Ed.) *Dynamical System I.*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.
- [2] G. Falkovich, E. Kuznetsov, S. Medvedev, "Nonlinear Interaction between Long Inertio-Gravity and Rossby Waves", *Nonlinear Processes in Geophysics*, 1994, Vol.1, No.2/3.
- [3] V.N.Bódaevsky, A.Ya.Povzner, *Algebraic Methods in Nonlinear Perturbation Theory.*, Springer-Verlag, 1991.

ДВА ПРИМЕРА НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

С. Б. Медведев

Приведены два примера нормальных форм для уравнений мелкой воды. В первом примере с помощью нелинейного преобразования исключается медленный форсинг, что позволяет построить медленное многообразие и уравнения движения на нем. Второй пример есть прямое применение метода нормальных форм Пуанкаре для уравнений мелкой воды на больших пространственных масштабах, поскольку главная часть этих уравнений в этом пределе есть система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Quantum Group Diffusion over Roots of Unity

A. P. Protogenov and Yu. V. Rostovtsev

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

V. A. Verbus

Institute for Physics of Microstructures, Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

We consider the temporal evolution of strong correlated degrees of freedom in $2 + 1$ D spin systems using the Wilson operator eigenvalues as variables. It is shown that the quantum-group diffusion equation at deformation parameter q being the k -th root of unity has the polynomial solution of degree k .

PACS numbers: 74.20.Hi, 74.20.Kk

1. INTRODUCTION

Strong quantum fluctuations in low dimensional spin systems change the structure of the ground state and the classification of low-lying excitations. Breaking of local magnetic order due to doping and creation of charge degrees of freedom makes the role of many-body correlations more essential. For instance, this situation exists in the layered CuO_2 compounds. The spin disorder of any number of particles can be expressed in terms of fluxes Φ of a statistical gauge field “measuring” a degree of the spin noncollinearity along an arbitrary large loop C . The statistical magnetic field fluxes through any sets of cells can be ordered or random depending on the temperature and other factors. If at low temperature and density the Wigner crystal is formed, then at higher temperature we have the liquid phase of magnetic fluxes. In the case of Gaussian distribution of fluxes with the dispersion proportional to the total area $S(C)$, the mean value satisfies the confinement law: $\langle \exp(i\Phi) \rangle \sim \exp(-\alpha S(C))$. The choice of the gauge and diffeomorphic invariant eigenvalues $\exp(i\Phi)$ of the Wilson operator is connected not only with the need to take into consideration the many-particle correlations. The choice of these variables simplifies the structure of the phase space of planar spin systems under consideration. The finite volume of the phase space makes the dimension of the Hilbert space finite [1] due to the periodicity of the canonical conjugated variables $\exp(i\Phi_a)$ ($a = n$ or $a = m$), for example in the simplest case of the phase space being a torus. The wave function $\Psi(\exp(i\Phi))$ will be a k -dimensional vector, because the eigenvalue of the Wilson operator is equal to the k -th root of unity, i. e. $\Phi_n = 2\pi in/k$ and $n = 0, \dots, k - 1$. Here k is related to the coefficient K before the $SU(2)$ Chern-Simons term in a usual long-wave description by $k = K + 2$ [2]. In the general case the quantum number, K , has a sense of the linking number of the particle world lines. In particular, within the $SU_q(2)$ quantum group theory of fractional statistics the semion excitations have the value $k = K + 2 = 4$, i. e., the d -wave quantum number K .

The problems of properties of the electronic system in the phase with Gaussian-random or homogeneous distribution of magnetic fluxes are discussed in a great number of papers published recently [3, 4, 5, 6]. On the other hand, the quantum group approach to the description of the diffusion in spin chains has been used in Refs. [7]. In this paper we study the q -dynamics of the states characterized by

the random distribution of the fluxes with fixed value of k and an arbitrary value of n . We are interested in the time behavior of transition processes $n \rightarrow n \pm 1$.

2. q -RANDOM WALKS

Let us consider the transition from the state $\Psi(w_n) \equiv \Psi_n$ to the neighboring states $\Psi(w_{n\pm 1})$. We use the parametrization of the wave function argument by the eigenvalue $w_n = \exp(\Phi_n)$ of Wilson operator $\hat{W} = \text{Tr}_{\mathcal{R}} \mathcal{P} \exp(\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l})$. Here \mathcal{R} denotes an irreducible representation; \mathbf{a} is the non-Abelian gauge potential. Using these variables the processes of the creation $\Psi(w_n) \rightarrow \Psi(w_n q)$ and the annihilation $\Psi(w_n) \rightarrow \Psi(w_n/q)$ of the fluxes can be considered as hops on the lattice constructed by the geometrical progression rules. The denominator of this geometrical progression $q = \exp(2\pi i/k)$ is the k -th root of unity. The wave function is now determined on a discretized circle with the points locating in the positions of the k -th roots of unity: $\{1, q, \dots, q^{k-1}\}$. In this case the procedure of the comparison of function values in neighboring points is represented by the difference operator D_q^+ :

$$D_q^+ \Psi(w_n) = \frac{\Psi(qw_n) - \Psi(w_n)}{qw_n - w_n}, \quad (1)$$

and by Hermite-conjugated ones D_q^- :

$$D_q^- \Psi(w_n) = \frac{\Psi(w_n/q) - \Psi(w_n)}{w_n^{-1}/q - w_n^{-1}}. \quad (2)$$

The action of the Laplace operator, Δ_q is given by [8]

$$\Delta_q \Psi_n \equiv D_q^- D_q^+ \Psi_n = \frac{\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} - 2\Psi_n}{q + q^{-1} - 2} \quad (3)$$

and the equation of motion in the Euclidean time

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta_q \Psi \quad (4)$$

has the form of the q -diffusion equation [9]. It is easily seen that the operator (3) coincides with the Hamiltonian for a rotator in the limit $k \rightarrow \infty$ ($q \rightarrow 1$) and Eq. (4) is a usual diffusion equation in this limit.

The eigenfunctions and the eigenvalues of Δ_q are given by

$$\Psi_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{k}} q^{mn}, \quad n, m = 0, 1, \dots, k-1, \quad (5)$$

$$\epsilon_m = \frac{\sin^2(\pi m/k)}{\sin^2(\pi/k)}. \quad (6)$$

By using Eqs. (5), (6) the general solution of Eq. (4) may be written as

$$\Psi_n(t) = \sum_{m=0}^{k-1} a_m \Psi_{n,m} e^{-\epsilon_m t} = \sum_{m=0}^{k-1} g_m G(n-m, t), \quad (7)$$

where $g_n = \Psi_n(0)$ and the Green function $G(n, t)$ has the following form

$$G(n, t) = \frac{1}{k} \sum_{s=0}^{k-1} \exp\{-\epsilon_s t + 2\pi i s n/k\}. \quad (8)$$

3. DISCUSSION

First of all, we would like to draw attention to the fact that spectrum (6) has the sense of the squared q -dimension $[n]_q^2$ of irreducible representation of algebra $U_q(sl_n)$. Here $[n]_q \equiv (q^{n/2} - q^{-n/2}) / (q^{1/2} - q^{-1/2})$. From this viewpoint the temporal evolution looks like *quantum group random walks in the space of different hooks of the Young tableaux* connected with representations of the q -deformed algebra. This motion can also be considered [11] as random walks on a Dynkin diagram and t as a discrete time parameter. The statistical models related with random walks on Dynkin diagrams have been studied in Refs. [12, 13]. The associated two-dimensional quantum field theories at critical temperature (equal to $T = 1/\ln(1 + \sqrt{Q})$, where $Q = 2 + q + q^{-1}$ is the Jones algebra index) are conformal field theories with a value $c = 1 - 6/k(k-1)$ of the central charge. For $k = 2$ we have the usual value $c = -2$ for the random walks. The connection between the topological properties of random walk on double punctured plane and the behavior of the four-point correlation function in the conformal theory with the central charge $c = -2$ was discussed in Ref.[14].

It is easily shown using Gaussian-like distribution (8) that in the initial state the mean value $\langle \epsilon_n \rangle$, i.e., the variance

$$\langle [n]_q^2 \rangle = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \epsilon_m = \frac{1}{2 \sin^2(\pi/k)}, \quad (9)$$

is proportional to the q -analog of the Casimir operator for odd representations [15].

At $t \rightarrow 0$ the variance agrees with the diffusion law $\langle [n]_q^2 \rangle = \mathcal{D}(k)t$ with the diffusion coefficient $\mathcal{D}(k)$, which equals $1/2$ in the fermion case $k = 2$. For semions $\mathcal{D}(4) = 5$.

The q -deformed equation of the random walk motion (2) was first obtained in Ref. [9] (see also Ref. [10] in connection with the anyon problem). We show here that the Madjid's assumption [9] that there is not reason to think that the solutions of q -diffusion equation "should exist along familiar Gaussian lines", is valid in the following case.

The determination of operator (3) is not unique. Its determination [9] as D_q^2 where $D_q \Psi(w) = \{\Psi(qw) - \Psi(w/q)\} / \{w(q - q^{-1})\}$ leads to existence of only zeroth modes in the diffusion equation. In that case Eq. (4) has the following form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = & w^{-2n} [q^{-1} \Psi(w_{n+2}) + q \Psi(w_{n-2}) \\ & - (q + q^{-1}) \Psi(w_n)] \equiv \hat{A} \Psi. \end{aligned} \quad (10)$$

The multiplier $(q - q^{-1})^{-2}$ in the right-hand side of this equation is included in the definition of t . The formal solution of Eq. (10)

$$\Psi_n(t) = e^{\hat{A}t} \Psi_n(0) \quad (11)$$

is a polynomial in t and q

$$\Psi_n(t) = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{t^s}{s!} \hat{A}^s \Psi_n(0) \quad (12)$$

because the operator \hat{A} is the nilpotent operator of degree r : $\hat{A}^r = 0$. The dependence of $r(k)$ is shown in the following Table 1.

k	odd	even, $4 \leq k \leq 10$	12	14, 16
r	$(k+1)/2$	2	3	4

In the steady-state Eq. (10) is satisfied by solutions (5) which are equal to the functions $\Psi_n(0)$ in Eq. (12). To make this fact more clear, let us rewrite Eq. (10) in the equivalent form

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = a^2 \Psi. \quad (13)$$

The annihilation and creation operators a, a^+ in the finite-dimensional q -holomorphic representation are defined by [16]

$$a = g^{-1} \frac{h - h^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad a^+ = g, \quad (14)$$

where $h = \exp[(2\pi i/k)P]$ and $g = \exp(iQ)$. The effect of the last operators is given by

$$\begin{aligned} (h\Psi)(w_n) &= \Psi(w_{n+1}), \\ (g\Psi)(w_n) &= w_n \Psi(w_n). \end{aligned} \quad (15)$$

They satisfy the following commutator relations

$$h^k = g^k = I, \quad hh^+ = gg^+ = I, \quad hg = qgh. \quad (16)$$

Using the latter property it is possible to find [16] the commutator relation [17, 18]

$$aa^+ - qa^+a = q^{-P}. \quad (17)$$

The relation shows that the angular momentum operator P and the particle number operator coincide. The eigenstates $\Psi_m(w_n)$ of the operator P ($P\Psi_m = m\Psi_m$, $m = 0, 1, \dots, k-1$) coincide with the functions Ψ_n in Eq. (5).

All eigenvalues, ε , being equal to zero means that Eq. (10) describes a motion in the degeneracy space of the ground state. This allows us to formulate the following hypothesis associated with the dependence of the entropy on the braid linking index k . The operator of the time evolution of states in the frames of the quantum-group approach can be generalized [19] with the conservation of energy and nonconservation of entropy, i.e. with the possibility of transition from pure states to mixed ones, as this takes place in open systems. The presence or absence of the transitions can depend on the invariance of the considered mixed state with respect to the action of the q -generalized evolution operator. In particular, since the “renormalized” coefficient before the Chern-Simons term for the high- T_c superconducting state is zero, it might be interesting to check up if the superconducting coherent state differs in the above respect from the high-temperature normal state which has partially retained quantum-group order.

In conclusion, we have performed a study of the q -Brownian motion in the flux space. For the deformation parameter being a root of unity, it is found out that the general solution of the q -diffusion equation is the q -power polynomial and the distribution of the flux numbers is characterized by the variance that is proportional in the initial state to the q -analog of the Casimir operator.

ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thank M. A. Antonets and I. A. Shereshevsky for many helpful and stimulating discussions. This work was supported in part by the Russian Fundamental Research Foundation under Grant No. 95-02-05620.

References

- [1] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **121**, 351 (1989).
- [2] L. Alvarez-Gaume, J. M. F. Labastida, and A. V. Ramallo, *Nucl. Phys.* **B334**, 103 (1990); E. Guadagnini, M. Martellini, and M. Mintchev, *Nucl. Phys.* **B336**, 581 (1990).
- [3] C. Pryor and A. Zee, *Phys. Rev. B* **46**, 3116 (1992).
- [4] B. L. Altshuler and L. B. Ioffe, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2979 (1992).
- [5] Y. Avishai, Y. Hatsugai, and M. Kohmoto, *ISSP Report* (1993).
- [6] T. Sugiyama and N. Nagaosa, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1980 (1993).
- [7] F. C. Alcaraz and V. Rittenberg, *Phys. Lett. B* **314**, 377 (1993); F. C. Alcaraz, M. Droz, M. Henkel, and V. Rittenberg, preprint UGVA-DPT 1992/12-799.
- [8] T. Kobayashi and T. Suzuki, *J. Phys. A* **26**, 6055 (1993).
- [9] S. Majid, *Int. J. Mod. Phys. A* **8** 4521 (1993).
- [10] S. Madjid, preprint DAMTP-91/16.
- [11] R. Coquereaux, preprint CPT-94/P.3020.
- [12] V. Pasquier, *Nucl. Phys.* **B285** 162 (1987).
- [13] V. Pasquier, *J. Phys. A* **20**, 5707 (1987).
- [14] S. Nechaev and A. Vershik, *J. Phys. A* **27**, 2289 (1994).
- [15] P. B. Wiegmann and A. V. Zabrodin, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1890 (1994).
- [16] E. G. Floratos, *J. Phys. A* **24**, 4739 (1991).
- [17] L. Biedenharn, *J. Phys. A* **22**, L873 (1989).
- [18] A. MacFarlane, *J. Phys. A* **22**, 4581 (1989).
- [19] P. Schupp, preprint UCB-PTH-93/35.

Amplification without inversion via field-dependent relaxation

Yevgeny Radeonychev

Institute of Applied Physics Russian Academy of Science,
46 Ulyanov Street, 603600 Nizhny Novgorod, Russia,
E-mail: radion@appl.sci-nnov.ru

We study a three-level atomic system strongly driven by a monochromatic field resonant to one of three atomic transitions and probed by a weak field at the adjacent atomic transition. We predict a novel mechanism of probe field amplification without population inversion which is due to a strong field induced spontaneous relaxation of the ground atomic state. This mechanism appears in case of sufficiently fast relaxation at the low frequency transition.

Nonlinear phenomena based on atomic coherence induced by a strong laser field in two-level and three-level atomic systems such as lasing without inversion, electromagnetically induced transparency, enhanced index of refraction drew much attention during the last five years [1]. The common approach to the description of these effects as well as many other phenomena in quantum optics has involved consideration of the interaction between atoms and the coherent driving field separately from the process of atomic relaxation. Atomic relaxation was modeled by the conventional interaction of bare atoms (i.e. atoms uncoupled to a laser field) with a suitable reservoir in spite of presence of external laser field. This approach leads to the traditional Bloch equations for density matrix $\rho_{m'm}$ of the atomic system which in the energy representation has the form

$$\frac{d}{dt}\rho_{m'm} + i\omega_{m'm}\rho_{m'm} + \frac{i}{\hbar}[V(t), \rho]_{m'm} = \sum_{n'n} R_{m'mn'n}\rho_{n'n} \quad (1)$$

where $\omega_{m'm} = (E_{m'} - E_m)/\hbar$ is a frequency corresponded to separation between energy levels $|m'\rangle$ and $|m\rangle$, $V(t)$ is the Hamiltonian of atom - laser field coupling. Atomic relaxation terms $R_{m'mn'n}$ are constants which depend exclusively on properties of bare atomic system and reservoir. It's obvious, that the above equations are valid if the interaction of laser field with atoms is small enough.

Meanwhile, it was predicted [2] and verified experimentally [3] that strongly driven two-level atoms placed in a high- Q cavity manifested dramatic alteration of their relaxation properties. That was interpreted as a result of non-Markovian spontaneous relaxation due to the finite response time of the environment [2]. Subsequent investigations [4] connected with this phenomenon, were limited by the case of two-level atoms coupled to a single-mode microwave cavity and dealt with the spontaneous emission spectrum.

Recently a set of generalized Bloch equations has been proposed for a semiclassical description of the strong atom-field coupling [5]. According to this approach atomic system and laser field are treated as a single quantum system (so called dressed atom, i.e. atom dressed by the laser field [6]) which is coupled to the reservoir. Master equations for the dressed atoms can be written in the same form as the traditional Bloch equations (1). But now all atomic relaxation rates $R_{m'mn'n} = R(\mathcal{E}, \omega)$ depend on both amplitude \mathcal{E} and frequency ω of the laser field [5]. This field-dependence, being intrinsic property of the generalized equations, introduces novel nonlinearity into the traditional Bloch equations and can substantially alter the whole picture of atom - laser field coupling.

It is not difficult to show [7,8] that the field-dependence of the atomic relaxation originates from dependence of the decay rates \bar{A}_{ij} of the quantum dressed states on frequencies $\bar{\omega}_{ij}$ of the corresponding dressed transitions when the driven atomic system is coupled to vacuum (fig.1). In turn, modification of mode properties of vacuum (high- Q cavity etc.) via factor $\eta(\bar{\omega}_{ij})$ provides an additional possibility for manipulating by the atomic relaxation rates.

This approach allows to predict a number of novel effects of field-atom-reservoir interaction. Even in case of simplest two-level atomic system driven by a monochromatic laser field a number of novel effects has been predicted [8].

In this paper we consider a three-level atomic system where two upper levels $|2\rangle$ and $|3\rangle$ are coupled by the coherent pumping field and an adjacent transition $|3\rangle - |1\rangle$ is probed by a weak coherent field (fig.2). Let intermediate level $|2\rangle$ to be close to the ground state $|1\rangle$ and intensity of the pumping field to be so high that corresponding Rabi frequency $|\beta| = \mu_{32}\mathcal{E}/2\hbar$, where μ_{32} is the dipole moment of the $|3\rangle - |2\rangle$ transition, exceeds a frequency ω_{21} between levels $|2\rangle$ and $|1\rangle$. This situation corresponds to the crossing between the lower dynamic Stark level $|\overline{2}, n-1\rangle$, and the ground state $|\overline{1}, n\rangle$, (fig.2). As soon as the lower Stark level moves under the ground state the spontaneous decay of the ground state to this level arises. Note that in the bare-atom basis the above process is spontaneous relaxation upward direction $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$. This phenomenon is completely ignored by the conventional treatment and naturally appears within the framework of the generalized master equations.

The atomic system under the above conditions demonstrates a number of novel effects. Some of them were predicted in [7]. Here we show that atomic response to the action of the probe field resonant to the adjacent transition demonstrates substantial difference from the solution within the traditional approach. We limit ourselves by the case when: (i) the atomic system is placed in vacuum $\eta(\omega) = 1$, (ii) the average number of vacuum photons at any frequencies equals zero, i.e. we deal with spontaneous relaxation only. This means that in the absence of the coherent driving field all the atoms occupy the ground level

$$\rho_{11}^0 = 1, \quad \rho_{22}^0 = \rho_{33}^0 = 0. \quad (2)$$

Note that according to the traditional Bloch equations any field acting at $|2\rangle - |3\rangle$ transition never changes this initial population distribution. The field does not interact with such a system. Therefore an absorption line of the probe field at the adjacent transition $|1\rangle - |3\rangle$ has the usual Lorencian profile.

The generalized Bloch equations give essentially different result. If one considers the probe field to be small enough to influence the population distribution caused by the pump field, the generalized equations can be written in quite a simple form in the dressed-states representation. For the case depicted on fig.2, we have:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{11} &= -\bar{a}_{12}\tilde{\rho}_{11} + \bar{A}_{21}\tilde{\rho}_{22} + (\bar{a}_{31} + \bar{A}_{31})\tilde{\rho}_{33}, \\ \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{22} &= \bar{a}_{12}\tilde{\rho}_{11} - (\bar{A}_{21} + \bar{A}_{23})\tilde{\rho}_{22} + \bar{A}_{32}\tilde{\rho}_{33}, \\ \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{33} &= \bar{A}_{23}\tilde{\rho}_{22} - (\bar{a}_{31} + \bar{A}_{31} + \bar{A}_{32})\tilde{\rho}_{33} \end{aligned} \quad (3)$$

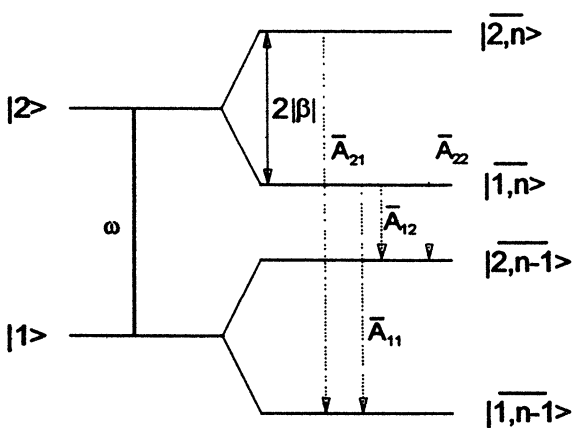


Figure 1. Spontaneous decay rate $\bar{A}_{ij} = 4|\bar{\mu}_{ij}|^2\bar{\omega}_{ij}^3\eta(\bar{\omega}_{ij})$ from quantum dressed state $|\overline{i}, n\rangle$ to $|\overline{j}, n-1\rangle$ is defined by the dressed dipole moment $\bar{\mu}_{ij}$, by the dressed frequency $\bar{\omega}_{ij}$, and by dimensionless factor $\eta(\bar{\omega}_{ij})$ characterizing the mode density of the reservoir; in vacuum $\eta(\bar{\omega}_{ij}) = 1$.

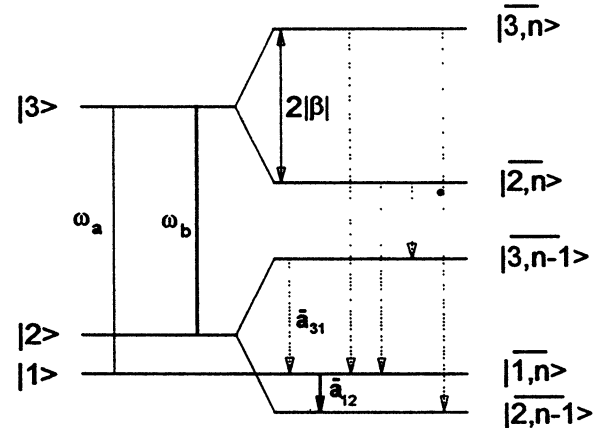


Figure 2. Dressed state representation of a strongly driven three-level system, when the lower Stark level has crossed over the ground atomic state.

where $\bar{A}_{mn} = \frac{4}{3\hbar c_0^3} |\bar{\mu}_{mn}|^2 \bar{\omega}_{mn}^3 \eta(\bar{\omega}_{mn})$ is the spontaneous emission rate (the Einstein coefficient) at the optical dressed frequency $\bar{\omega}_{mn}$ (fig.2), while $\bar{a}_{mn} = \frac{4}{3\hbar c_0^3} |\bar{\mu}'_{mn}|^2 \bar{\omega}'_{mn}{}^3 \eta(\bar{\omega}'_{mn})$ is emission rate at the low frequency dressed transition between unperturbed level $|\bar{1}, n\rangle$ and Stark levels $|\bar{2}, n-1\rangle$ and $|\bar{3}, n-1\rangle$ (fig.2).

One can easily find analitically a steady state solution of (3). It is defined by the equalities:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{22} &= r_2/D, & \tilde{\rho}_{33} &= r_3/D, \\ r_2 &= -\bar{a}_{12}(\bar{a}_{31} + \bar{A}_{31} + \bar{A}_{32}), & r_3 &= \bar{a}_{12}\bar{A}_{23}, \\ D &= r_2 + r_3 + (\bar{a}_{31} + \bar{A}_{31})(\bar{A}_{21} + \bar{A}_{23}) + \bar{A}_{21}\bar{A}_{32}. \end{aligned} \quad (4)$$

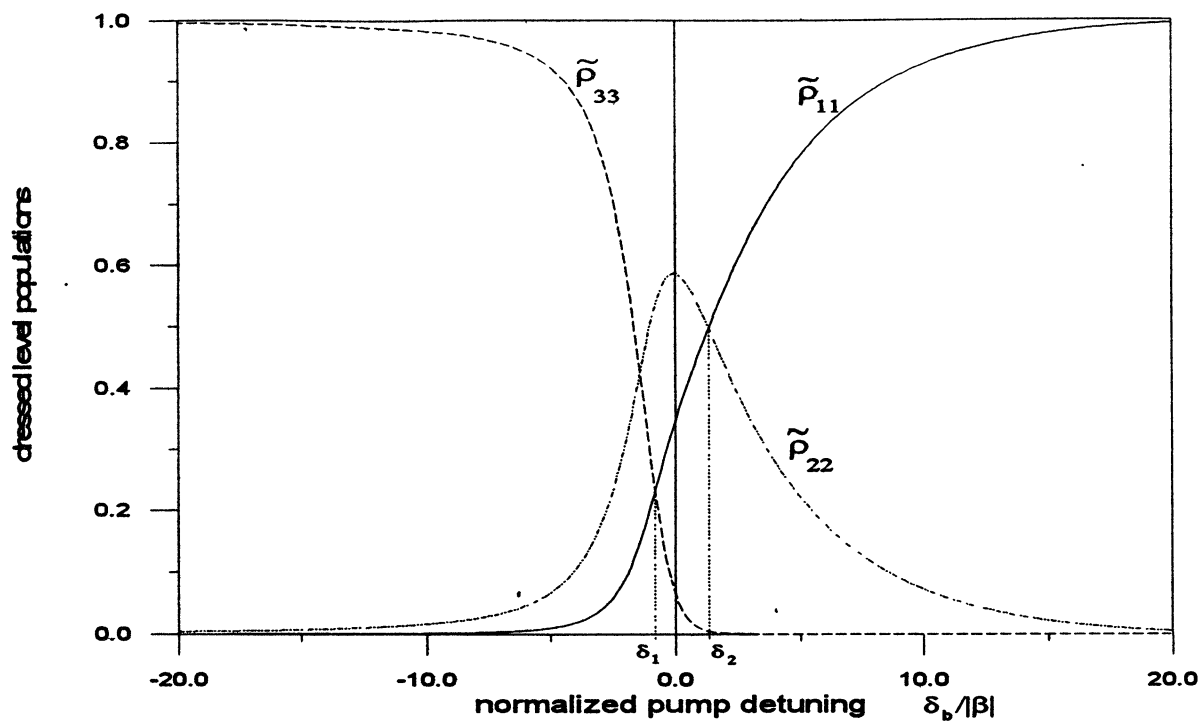
The relations

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \tilde{\rho}_{11}, & \rho_{22} &= c^2 \tilde{\rho}_{22} + s^2 \tilde{\rho}_{33}, & \rho_{33} &= s^2 \tilde{\rho}_{22} + c^2 \tilde{\rho}_{33}, \\ s^2 &= |\beta|^2 / (\theta^2 + |\beta|^2), & c^2 &= \theta^2 / (\theta^2 + |\beta|^2), \\ \theta &= (\delta_b + \Omega)/2, & \Omega &= \sqrt{\delta_b^2 + 4|\beta|^2} & \delta_b &= \omega_{32} - \omega_b. \end{aligned} \quad (5)$$

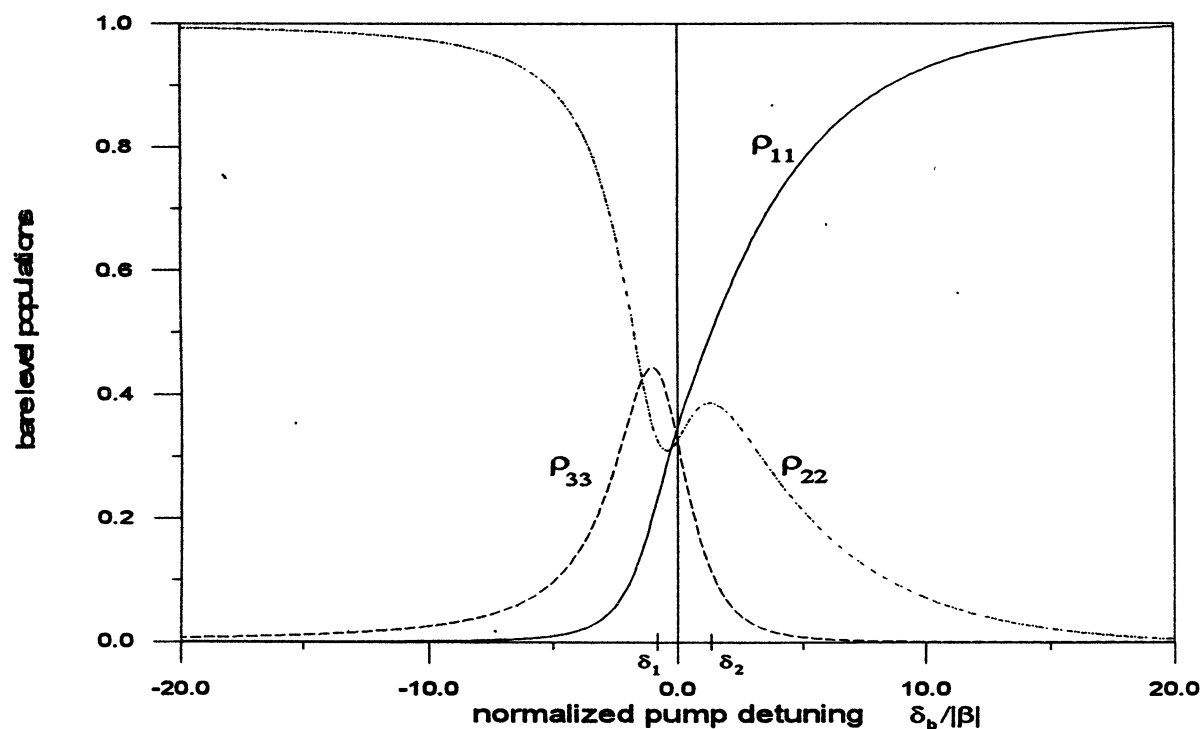
provide a correspondent solution for the populations of bare states. Fig.3a,b show that the novel spontaneous relaxation channel $|\bar{1}, n\rangle \rightarrow |\bar{2}, n-1\rangle$ (fig.2) induced by the strong field $|\beta|$, leads to essential perturbation of both dressed and bare atomic populations due to spontaneous depletion of the ground state $|\bar{1}\rangle$ with the rate \bar{a}_{12} . At any detuning δ_b of the pumping field from the transition $|\bar{3}\rangle - |\bar{2}\rangle$ within the domain $\delta_b < \delta_1$ (fig.3a) there occurs the relation $\tilde{\rho}_{33} > \tilde{\rho}_{11}$. This means that probe field interacting with the $|\bar{3}\rangle - |\bar{1}\rangle$ transition (fig.2) will be amplified in the vicinity of the frequency $\bar{\omega}_{31}$ (fig.4a). At the same time at $\delta_b < \delta_2$ the relation $\tilde{\rho}_{22} > \tilde{\rho}_{11}$ provides probe-field amplification in the vicinity of the $\bar{\omega}_{21}$ atomic transition (fig.4b). Dependently on the pump detuning, amplification of the probe field can be either accompanied or not by the presence of the steady-state population inversion between bare atomic states. In case illustrated on fig.4a there occurs steady-state inversion of bare populations $\rho_{11} < \rho_{22}, \rho_{33}$ (see fig.3b). Note that this steady-state inversion is created by the *monochromatic field*. This effect is impossible within the traditional treatment. Fig.4b illustrates the case when positively detuned probe field is amplified in the *absence* of steady-state population inversion $\rho_{11} > \rho_{22}, \rho_{33}$ (see fig.3b).

Therefore we can speak about inversionless amplification of the probe field which is caused by spontaneous decay of the ground atomic state to the field-induced lower Stark level. We have a remarkable example wherein spontaneous relaxation does not destroy but *helps to induce* steady - state atomic coherence which leads to amplification of a probe field. Thus we predict a novel mechanism of amplification without inversion via field induced spontaneous relaxation of the ground atomic state in strongly driven atomic system. Unlike the AWI in the Λ -scheme [1] this mechanism appears in case of sufficiently fast relaxation at the low frequency transition.

The author wishes to thank Olga Kocharovskaya for guidance by the research. The research was partially supported by International Soros Science Education Program (Grant No.A858-F).



(a)



(b)

Figure 3. Populations $\tilde{\rho}_{ii}$ of the dressed levels (a) and populations ρ_{ii} of the bare levels (b) for the scheme of fig.2 versus the pumping field detuning δ_b in units of resonant Rabi frequency $|\beta|$ for $|\beta|/\omega_{21} = 30$, $A_{21}/\omega_{21} = 10^{-6}$, $A_{31}/\omega_{21} = A_{32}/\omega_{21} = 10^{-2}$, $\omega_{31}/\omega_{21} = \omega_{32}/\omega_{21} = 10^5$, $\eta(\omega) = 1$, $N(\omega) = 0$, where A_{ij} is spontaneous decay rate at the bare atomic transition $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$. The corresponding solution within the traditional approach is $\tilde{\rho}_{11} = \rho_{11} = 1$, $\tilde{\rho}_{22} = \rho_{22} = \tilde{\rho}_{33} = \rho_{33} = 0$ for all detuning δ_b .

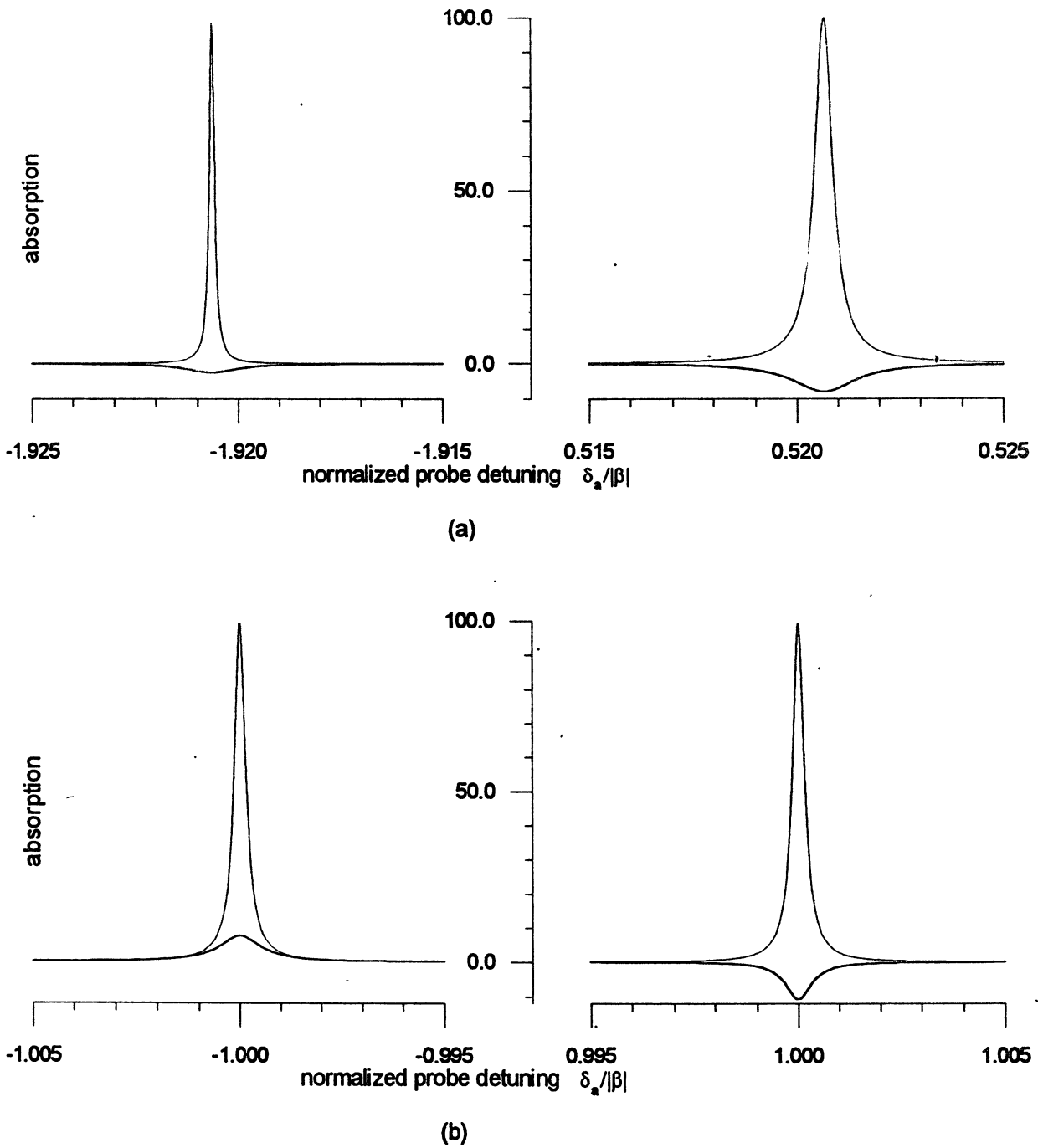


Figure 4. Amplification profile of the probe field at the $|3\rangle - |1\rangle$ transition (bold line) in comparison with solution of the traditional master equations when pumping field detuning from the $|3\rangle - |2\rangle$ transition is fixed at the magnitude (a) $\delta_b/|\beta| = -1.4$ ($\tilde{\rho}_{33} \cong \tilde{\rho}_{22} > \tilde{\rho}_{11}$ (fig.3a)- probe-field amplification at both side-bands, meanwhile $\rho_{33} \cong \rho_{22} > \rho_{11}$ in fig.3b), (b) $\delta_b = 0$ ($\tilde{\rho}_{33} < \tilde{\rho}_{11}$ - probe-field absorption peak (left), $\tilde{\rho}_{22} > \tilde{\rho}_{11}$ - peak of probe-field amplification without inversion (right) since $\rho_{33} = \rho_{22} < \rho_{11}$ (see fig.3b))

References

1. For reviews see: O.Kocharovskaya, Phys. Rep. 219, 175 (1992); M.O.Scully, *ibid.*, p.191; P.Mandel, Contemp. Phys. 34, 235 (1994). For more recent works on atomic interference effects in driven three-level systems see: special issue Quant. Opt. 6, No 4 (1994); S.E.Harris, Phys. Rev. Lett. 72, 52 (1994); J.H.Eberly, M.L.Pons and H.R.Hag, *ibid.*, p.56. For recent works on analogous effects in driven two-level systems see: G.S.Agarwal, Phys. Rev. A 42, 686 (1990); C.Cohen-Tannoudji and G.Grynberg, Opt. Commun. 96, 150 (1993).
2. M.Lewenstein, T.W.Mossberg, and R.G.Glauber, Phys.Rev.Lett. 59, 775 (1987); M.Lewenstein, T.W.Mossberg, Phys.Rev. A37, 2048 (1988).
3. Yifu Zhu, A.Lezama, and T.W.Mossberg, Phys.Rev.Lett. 61, 1946 (1988).
4. W.Lange, and H.Walter, Phys.Rev. A48, 4551 (1993); G.S.Agarwal, W.Lange, and H.Walter, Phys.Rev. A48, 4555 (1993); M.Elĳ and P.Lambropoulos Phys.Rev. A50, 1490 (1994); C.H.Keitel, P.L.Knight, L.M.Narducci and M.O.Scully, Opt. Commun., in press.
5. O.Kocharovskaya, M.O.Scully, S.-Y.Zhu, P.Mandel and Y.V.Radeonychev, Phys. Rev. A49 (1994) 4928.
6. For reviews see: P. Knight and P. Milonni, Phys. Rep. 66 (1980) 1; C. Cohen-Tannouji and S. Reynaud, J. Phys.B: Atom. Mol. Phys. 10 (1977) 345.
7. O.Kocharovskaya, P.Mandel and M.O.Scully, Phys. Rev. Lett. 74, 2451 (1995).
8. O.Kocharovskaya and Y.V.Radeonychev, Quantum Semiclass. Opt. (accepted for publication).

Усиление без инверсии за счет зависящей от поля релаксации

Евгений Радионычев

Недавно предсказанное и уже подтвержденное экспериментально явление усиления излучения атомными системами без инверсии населенностей привлекает в мире значительный интерес. Теоретический анализ этого эффекта, а также многих других явлений квантовой оптики базируется, как правило, на решении "традиционных" квантовых кинетических уравнений для матрицы плотности (1). В этом подходе взаимодействие атомов с когерентным полем рассматривается отдельно от процесса релаксации. Поэтому релаксационные члены в (1) зависят исключительно от свойств атомной системы и резервуара, несмотря на присутствие когерентного поля. Очевидно, такой подход корректен при достаточно малой интенсивности поля.

Недавно в [5] были получены обобщенные квантовые кинетические уравнения, которые остаются справедливыми в режиме сильного поля. В этом подходе атомная система и лазерное поле рассматриваются как единая квантовая система (одетый атом [6]), взаимодействующая с резервуаром. Обобщенные уравнения могут быть записаны в виде (1), но теперь скорости атомной релаксации зависят от амплитуды и частоты поля. Указанная полевая зависимость релаксации вносит новую нелинейность в традиционные квантовые кинетические уравнения и может существенно изменить всю картину взаимодействия атомов с когерентным полем.

Мы применяем обобщенные квантовые кинетические уравнения для анализа взаимодействия трехуровневых атомов с бигармоническим полем, одна компонента которого (накачка) резонансна переходу 3-2 и является мощной, а другая, слабая, пробует соседний переход 3-1 (рис.2). В условиях, когда вызванное накачкой динамическое штарковское расщепление, превышает частоту атомного перехода, так что один из штарковских уровней опускается ниже основного состояния (рис.2), возникает спонтанная релаксация из основного состояния на указанный уровень. Это приводит к кардинальному изменению атомного отклика на воздействие как накачки, так и пробного поля. Например, распределение населенностей как одетых, так и энергетических атомных уровней коренным образом отличается от соответствующего решения традиционных уравнений (рис.3). Вследствие этого, коренным образом изменяется характер распространения пробного поля в такой системе. При определенных условиях может иметь место усиление пробного поля в отсутствие инверсии населенностей в атомной системе (рис.4). Таким образом, предсказано явление безынверсного усиления пробного поля за счет спонтанной релаксации основного атомного состояния на индуцированный полем накачки штарковский уровень.

SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE DAVEY-STEWARTSON-II EQUATIONS

M.M. Shakir'yanov

Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences
112 Chernyshevskii str., Ufa 450000, RUSSIA
E-mail: marsh@nkc.bashkiria.su

Abstract

The classical solvability of the initial-boundary problem for the Davey-Stewartson-II type system of equations is proved.

Introduction

Let us consider the initial-boundary problem for the Davey-Stewartson-II system of equations:

$$iu_t + u_{xx} - u_{yy} = \gamma|u|^2u + \lambda u\varphi_x, \quad \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \mu(|u|^2)_x, \quad (1)$$

$$u(x, y, t)|_{t=0} = u_0(x, y); \quad \nabla\varphi \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (2)$$

The Davey-Stewartson-II system of equations is the two-dimensional generalization of the usual nonlinear Schrodinger equation. Systems of the form (1) were first derived by Davey and Stewartson in the shallow-water limit for the surface waves in fluid, [1]. Physical applications also include plasma physics and nonlinear optics. In the above $u(x, y, t)$ is the amplitude of a surface wave packet and $\varphi(x, y, t)$ is the velocity potential of mean flow interacting with the surface wave. It is worth mentioning that some of Davey-Stewartson systems of equations are integrable, but many of them are not integrable. The existence and uniqueness results with respect to the initial data (in L_2, H^1, H^2) were recently obtained in the sufficiently wide classes of generalized solutions, [2]. Our notice is centred on existence of classical solutions of the initial-boundary problem for the more generally Davey-Stewartson-II system of equations.

The existence and uniqueness theorems

Fourier transform with respect to spatial variables lies in the base of proof of solvability of the initial-boundary problem (1)-(2). By using this traditional approach to the proof of existence theorems, we may pass from the system of partial differential equations (1) to a single integral equation in terms of the Fourier transform $\hat{u}(k, m, t)$ of $u(x, y, t)$:

$$\hat{u}(k, m, t) = \hat{u}_0(k, m)e^{i(m^2 - k^2)t} - i \int_0^t e^{i(k^2 - m^2)(\tau - t)} L(\hat{u}(k, m, \tau)) e^{2i(k^2 - m^2)\tau} d\tau. \quad (3)$$

where the operator L is defined by the following formula:

$$L(\hat{u}) = \gamma \hat{u} \star \hat{u}^* \star \hat{u} + \lambda \mu \hat{u} \star \left[\frac{k^2}{k^2 + m^2} (\hat{u} \star \hat{u}^*) \right].$$

Here the sign \star is a convolution with respect to (k, m) .

Theorem 1 *Let $u_0(x, y) \in H^p$ provided $p > 1$. There exists a positive $T > 0$ such that $\forall t \in [0, T]$ the initial-boundary problem (1)-(2) has a unique solution such that: $u, \nabla\varphi \in C^1([0, T]; H^p)$.*

The basic idea of the proof is now to use a contraction mapping method in a suitable scale of Banach spaces. In these Banach spaces integral operator from (3) should be bounded and Lipschitzian. By analogy with [3,4], we introduce the scale of Banach spaces $C([0, T]; H^p)$ of Fourier transforms $\hat{u}(k, m, t)$, which are continuous with respect to $(k, m), t \in [0, T]$ and decreasing at the infinity, with the following norms:

$$\|\hat{v}(k, m, t)\| \doteq \sup_{t \in [0, T]} \|(1 + |k| + |m|)^p \hat{v}(k, m, t)\|_{L_2}.$$

In view of nonlinearity of L operator, our Banach space must be an algebra with respect to the convolution operation. This problem was solved provided $p > 1$. It turns out that in this case the convolution is a Lipschitzian operator in Sobolev space H^p . Then if we choose a suitable T such that the integral operator from (3) would be contraction, the solvability of the equation (3), and so of the problem (1)-(2) follows from the Ovsjannikov's results for the equations in Banach spaces, [5].

This result is directly applicable to the more general systems of equations in multidimensions. Namely, we consider the following initial-boundary problem for the system of partial differential equations:

$$i\partial_t u + \omega(-i\partial_{x_1}, \dots, -i\partial_{x_n})u = g(u, u^*) + \bar{h}(u, u^*)\nabla\varphi, \quad P\varphi = \nabla\bar{f}(u, u^*), \quad (4)$$

$$u(x_1, \dots, x_n, t)|_{t=0} = u_0(x_1, \dots, x_n); \quad \nabla\varphi \rightarrow 0, \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \infty, \quad (5)$$

where P is a second-order differential operator with the constant coefficients and $\omega(k_1, \dots, k_n)$ is a polinom with respect to k_1, \dots, k_n .

Theorem 2 Let 1) functions \bar{f}, g, \bar{h} are analytical with respect to all arguments such that: $\bar{f}(0, 0) = g(0, 0) = \bar{h}(0, 0) = 0$; 2) initial function $u_0(x_1, \dots, x_n) \in H^p$ provided $p > n/2$. There exists a positive $T > 0$ such that $\forall t \in [0, T]$ the initial-boundary problem (4)-(5) has a unique solution such that: $u, \nabla\varphi(x_1, \dots, x_n, t) \in C^1([0, T]; H^p)$.

Acknowledgement

I am grateful to L.A.Kalyakin for useful discussions. This work was partially supported by International Science Foundation (NMB000) and by RFFI (94-01-00193-a).

References

- [1] Davey A., Stewartson K., "On the three-dimensional packets of surface waves", *Proc.R.Soc.London*, 1974, Vol.338, Ser.A, pp.101-110.
- [2] Ghidaglia J.-M., Saut J.-C., "On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems" *Nonlinearity*, 1990, Vol.3, pp.475-506.
- [3] Vakulenko S.A., "Justification of asymptotic formula for the perturbed Klein-Fock-Gordon equation", *Zap.nauch.semin. LOMI*, 1981, Vol.104, pp.84-92.
- [4] Kalyakin L.A., "Asymptotic collapse of one-dimensional wave packet in nonlinear dispersive medium", *Mat.sbornik*, 1987, Vol.132, No.4, pp.470-495.
- [5] Ovsjannikov L.V. "A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces", *Dokl.Akad.Nauk SSSR*, 1971, Vol.200, No.4, pp.789-792.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДЭВИ-СТЮАРТСОНА-II

М.М.Шакирьянов

В настоящей заметке рассматривается начально-краевая задача для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений Дэви-Стюартсона-II. Результаты о разрешимости поставленной задачи в пространствах, эквивалентных $C^1([0, T]; H^p)$, при $p > n/2$, справедливы для системы уравнений типа (1) произвольной размерности n и аналитическими правыми частями (теорема 2), так как представленный подход не использует, ни техники метода обратной задачи, ни априорные оценки. Следует подчеркнуть, что эти результаты позволяют получить классическое решение начально-краевой задачи (1)-(2), основываясь на теоремах вложения Соболева.

НОВЫЕ ЧЕЛОВЕКО-МАШИННЫЕ ИНТЕРФЕЙСЫ

В.А.Антонец

Институт прикладной физики РАН
603600, Н.Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail: antva@appl.sci-nnov.ru

Э.П.Ковалева

Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского
603091, Н.Новгород, пр.Гагарина, 23

А.В.Зевеке, Г.И.Малышева, С.А.Полевая

Нижегородская медицинская академия
603005, Н.Новгород, пл.Минина, 10/1

Реферат

В лекции делается попытка наметить и отчасти сформулировать направления решения важной проблемы, связанной с развитием системы взаимодействия между человеком и информационной машиной - компьютером. Речь идет об установлении прямого двухстороннего контакта между двумя электронными информационными системами - искусственной (компьютерной) и естественной биологической (нервной), т.е. в построении сенсорно - эффекторных каналов, не присущих человеку от природы. Такой контакт требует создания принципиально новых - имплантируемых - интерфейсов. Они уже настоятельно требуются для разработки различных электронных протезов - конечностей, органов слуха и зрения, элементов нервной системы - для управления которыми конечно не пригодны ни клавиатура, ни даже голос. Для проектирования новых интерфейсов требуются качественно новые сведения из области нейро- и психофизиологии, не доставшиеся нам в наследство от классиков. В лекции приводятся два конкретных примера решения экспериментальных задач, являющихся попыткой получить новые факты из этой развивающейся области.

Введение

По признанию специалистов за 50 лет развития электронной вычислительной техники наименьшим был прогресс в области создания интерфейсов. Действительно, арифметическое устройство и устройство памяти ЭВМ первого поколения занимали несколько комнат, а оператор-пользователь сидел за столом, на котором размещался монитор с экраном и клавиатура. Сейчас при сопоставимых и даже существенно больших возможностях вычислительное устройство и память занимают объем на много порядков меньший. С бытовой точки зрения этот объем вообще близок к нулю. Но пользователь по-прежнему сидит за столом, а перед ним - экран монитора и клавиатура, примерно такие же, как и 50 лет назад. И когда он хочет ввести информацию в компьютер, то часто вынужден прибегать к помощи пальцев. Это информационное кольцо "экран - зрение - мозг - пальцы - клавиатура (джойстик) - вычислительное устройство - экран", даже усиленное системами опознавания и синтеза речи, чрезвычайно медлительно. Оно не позволяет решать многие из задач, возникших в последнее время.

Характерным примером такой задачи может являться создание электронных протезов органов человека. Очевидно, что эффективное управление протезом от клавиатуры и даже голосом невозможно. Поэтому разработчики начали использовать прямой электронный контакт между протезом и нервной системой. При этом если в новейших слуховых протезах осуществляется прямая связь между выходом микрофонно-усилительного тракта и слуховым нервом, то в протезах верхней конечности осуществляется и обратная связь нервно-мышечного комплекса с протезом.

Другой задачей, которая и навела на рассматриваемую проблему, является создание дополнительных сенсорных каналов, не присущих человеку от природы. В таких каналах он может нуждаться в экстремальных условиях. Например, во время космического полета, особенно в первые его часы и дни, космонавты подвержены так называемой болезни движения, вызывающей дискомфорт, головокружения и тошноту. Эта болезнь провоцируется и усиливается при неправильных

движениях головы. Человек не может эффективно контролировать их, если занят каким-либо делом. Он не замечает неправильных движений до тех пор, пока болезненный синдром не проявит себя. Нет сколько-нибудь серьезных технических трудностей в создании датчиков движений головы, но есть серьезная проблема доведения сигналов от них до человека так, чтобы они были восприняты. Точно так же представляются технически разрешимыми проблемы создания самых разнообразных датчиков для измерения факторов и воздействий не ощущаемых человеком, но существенно влияющих на него.

Здесь и возникают идея и проблема прямого электрического контакта искусственных электронных информационных систем с природной биологической электронной информационной системой - нервной. Эта идея не нова и принадлежит, по-видимому, фантастам, придумавшим всевозможных "киберов" - кто для развлечения публики, кто для обостренной постановки морально-этических и философских проблем. Мы же попытаемся подойти к проблеме как к технологической и попытаемся наметить возможные пути ее решения. Специалистами в области создания биочипов (БЧ), т.е. микроэлектронных устройств, являющихся аналогами некоторых биологических систем,¹ [1-3] она формулируется как проблема искусственных имплантируемых (вживляемых) синапсов. Нами она сформулирована как проблема синтеза дополнительных сенсорных каналов в системе человек-машина, для расширения спектра воспринимаемых (человеком) модальностей воздействий и создания органов чувств, не присущих человеку от природы [4].

Для построения таких интерфейсов необходимо решить следующие проблемы:

1. разработать и изготовить необходимые БЧ;
2. решить проблему неотторжимой имплантации;
3. решить проблему энергетического и пластического (ремонтно-восстановительного) обеспечения имплантированных БЧ в процессе их эксплуатации;
4. реализовать в построенной биосистеме процессы кодирования, передачи и обработки информационных сигналов;
5. научить живой организм пользоваться построенным сенсорным каналом;
6. решить морально-этические проблемы.

Если первые три проблемы рассматриваются различными отраслями науки, связанными с протезированием органов, в том числе и имплантируемых, то проблемы передачи информационных сигналов и обучения организма пользованию новым сенсорным каналом не ставятся, по крайней мере, в той форме, которая обсуждается нами в лекции.

Вместе с тем, это проблемы не столько техники, сколько нейрофизиологии и психологии. Вряд ли разумно ожидать, пока появятся реальные БЧ, и лишь потом разрабатывать методы их использования. Более того, соответствующие научные исследования могут существенно повлиять на формулировку требований к техническим параметрам БЧ, связывающих нервную систему с электронными устройствами. Такой взгляд, учитывающий также необходимость количественного описания свойств нервной системы, позволяет формулировать новые задачи нейрофизиологических исследований. В лекции будут представлены результаты рассмотрения двух таких задач. Первая связана с анализом структуры естественных кодов кожного анализатора кошки, а вторая - с количественной оценкой ощущений в мышечном анализаторе человека.

1 О структуре естественных кодов

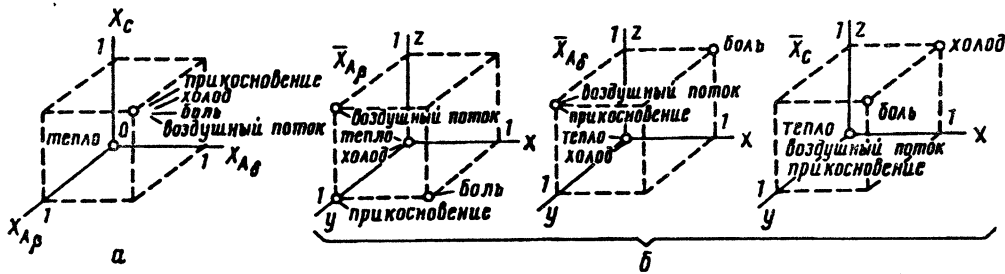
В связи с постановкой вопроса о возможности синтеза дополнительных сенсорных каналов [4], в которых первичная физическая величина регистрировалась бы электронным устройством и после преобразования вводилась непосредственно в нервные волокна в виде кодовых посылок, проблема структуры естественных кодов приобретает особый интерес. Во-первых, с точки зрения использования их как образца для формирования пригодных для восприятия нервной системой кодов искусственного сенсорного канала. Во-вторых, с точки зрения оценки принципиальной возможности

¹Иногда под биочипами понимают также интегральную схему, компонентами которой являются биологические молекулы.

формирования физиологически допустимых кодовых посылок, отличных, однако, от наблюдаемых при естественных раздражениях.

С этой целью рассмотрены результаты выполненного ранее цикла работ по исследованию рецепторного аппарата кожного анализатора кошки [5–8].

Структуру кодовых посылок изучали при холодном, тепловом, тактильном и болевом раздражении рецепторного поля участка кожи кошки и отведения потенциалов от целостного нерва. При этом в афферентном импульсном потоке регистрировали частоту импульсов в момент раздражения рецепторов, длительность афферентной импульсации при раздражении и долю (%) возбужденных A_β , A_δ и C - волокон [9]. Эти параметры рассматривали в качестве признаков кодовых посылок и использовали для их описания.



Р и с. 1. Отображение параметров кодовых посылок в трехмерном (а) и девятимерном (б) пространствах

Описания могут быть построены с различной степенью подробности. Например, афферентные потоки можно описать по признаку наличия большого или малого количества возбужденных волокон того или иного вида. Это описание дадим в виде трехмерного вектора $\vec{K}_3 = (X_{A_\beta}, X_{A_\delta}, X_C)$, где переменные X могут принимать значение единицы, если соответствующих волокон возбуждено много, и нулю — если нет. Очевидно, что такое описание содержит 2^3 значений вектора \vec{K}_3 : (0, 0, 0); (0, 0, 1); (0, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 0); (1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1).

Оказалось что в эксперименте обнаружены только $\vec{K}_3 = (0, 0, 0)$ — при тепловом раздражении и $\vec{K}_3 = (1, 1, 1)$ — при холодном, тактильном и болевом раздражениях (рисунок а). Комбинации (0, 0, 1); (0, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 0); (1, 0, 1); (1, 1, 0) при естественных раздражениях не наблюдались. Действительно, трудно представить, чтобы в естественных условиях нашелся такой высокий раздражитель, который мог бы затормозить активность одного типа волокон и усилить другого. Однако это не означает еще, что такое соотношение не может быть реализовано в неких искусственных условиях.

Более детальное описание может быть получено при использовании 3 признаков — длительности афферентной импульсации; наличие или отсутствие высокой частоты афферентной импульсации; большое или малое количество возбужденных волокон того или иного типа. Такое описание может быть получено в виде девятимерного вектора $\vec{K}_9 = (\bar{X}_{A_\beta}, \bar{X}_{A_\delta}, \bar{X}_C)$, где \bar{X} — уже не числа, как в \vec{K}_3 , а трехмерные векторы, соответствующие компоненты которых равны 1, если признак выражен и 0 — если он не выражен (рисунок б). Например $\bar{X}_{A_\beta} = (1, 1, 1)$, если волокна A_β возбуждены, продолжительность афферентной импульсации велика, афферентная импульсация — высокочастотная.

Если учесть, что не имеет смысла говорить о длительности и о частоте импульсации, если волокна не возбуждены, то число возможных описаний кодовых посылок оказывается равным 125. При этом в экспериментах обнаружено только 44 типа кодовых посылок — 17 при тактильном раздражении, 6 — при смещении волосков, 6 — при болевом, и 14 — при тепловом и 1 — при холодном воздействии, а в 81 варианте возможных кодов не наблюдали.

Общая формула для вычисления количества (N) возможных кодов при однобитовом "есть" — "нет", "много" — "мало" описание признаков имеет вид

$$N = 1 + 2^{3(S-1)} + 32^{2(S-1)} + 32^{(S-1)},$$

где S — число признаков, используемых в описании афферентного потока.

Использование еще одного (4-го) признака — скорости нарастания афферентной активности — дает 729 кодовых комбинаций, из которых экспериментальным данным соответствует только 180 кодов, а 549 — не задействованы.

Таким образом, можно полагать, что в векторном пространстве описаний допустимых кодов существуют свободные незаполненные области, т.е. имеется определенная избыточность и пространства кодов. Это может служить основанием формирования новых кодов, необходимых для решения задачи синтеза дополнительных сенсорных каналов.

Для проверки этого обстоятельства проведены предварительные психофизиологические эксперименты по оценке влияния одновременного механического и термического раздражения. При этом оказалось, что при растяжении кожи и одновременном охлаждении у испытуемых возникала иллюзия усиления холода по сравнению с мономодальным охлаждением, а при одновременном растяжении и нагреве — ощущение тепла пропадало. Это может быть объяснено модификацией кодов, что и подтверждает идею неполного использования пространства возможных кодов в нормальной ситуации и наличия некоторого резерва для кодирования сигналов в искусственном сенсорном канале.

2 О количественной оценке ощущений в мышечном анализаторе

Важной характеристикой любой сенсорной системы является зависимость уровня ощущения от величины внешнего воздействия. Ощущение суть характеристика неизмеряемая. Однако, его возможно, хотя и трудно, описать количественно, что было показано в конце прошлого века в так называемых психофизических исследованиях, результатом которых стало открытие закона Вебера-Фехнера [10], после многократных проверок сформулированного следующим образом: относительные изменения стимула и ощущения пропорциональны друг другу.

$$\frac{\Delta I}{I} = C \cdot \frac{\Delta R}{R} \quad (1)$$

где R - интенсивность раздражителя, ΔR - ее изменение, I интенсивность ощущения, ΔI - ее изменение, C - постоянная, зависящая от модальности (типа) ощущения и от конкретного пациента. В интегральном виде эта закономерность представляет собой степенную зависимость I от R :

$$I = R^C \quad (2)$$

При этом оказывается, что хотя шкалирование ощущений осуществляется самим испытуемым интуитивно, его результат удивительно стабилен [11].

Однако, деятельность сенсорных систем является основой не только для психических актов восприятия и ощущения, но и для управления органами и их функциями. Это открывает новые возможности для количественной характеристики ощущений, основанные на количественном исследовании параметров произвольной активности физиологических систем. ² Так Мэтьюс в 1931 г. провел опыты по количественному изучению реакции конечности лягушки на нагрузку. Гартлайн и Грэхэм в 1932 году экспериментально показали, что зависимость частоты афферентных импульсов зрительного органа мечехвоста от интенсивности освещения подчиняется закону Вебера-Фехнера.

Наши исследования [14] были посвящены изучению восприятия тяжести мышечным анализатором. Для этого экспериментально изучалась зависимость интенсивности произвольных микродвижений (тремора) предплечья человека от массы удерживаемого груза. Кроме того, измерялись частотные и статистические характеристики тремора как квазипериодического колебательного процесса для решения вопроса о его природе - автоколебательной или стохастической.

2.1 Методика эксперимента

Исследовался тремор предплечья в равновесном горизонтальном состоянии при изменяемом статическом нагружении. Для этого к запястью подвешивались грузы массой от 1 до 6 кг. Нагружение

²По-видимому, можно считать, что в общем виде эта идея принадлежит И.М.Сеченову, утверждавшему, что психическая деятельность всегда имеет моторное отражение [12]. Но, вероятно, она может быть расширена следующим образом: психическая деятельность всегда имеет вегетативное отражение. Так, например, в работе [13] предлагается оценивать эмоциональную реакцию на внезапный звуковой стимул через изменение частоты сердечбиений. Вероятно также, что выполнено немало работ в области детектирования лжи, которые по понятным причинам могут быть неизвестны.

конечности, с одной стороны, позволило менять параметры конечности как колебательной системы, а с другой - упростить исследуемую систему, т.к. в удержании груза участвует только *m.biceps brachi*, а *m.triceps brachi* расслаблен, что было подтверждено контрольными миографическими исследованиями (электрической активности).

Нагружение конечности производилось через подвесы разной жесткости. Подобный экспериментальный подход к исследованию тремора конечности при изменении силы и характера нагрузки на нее применялся в [15].

При одном и том же статическом нагружении, то есть при использовании одного и того же груза, в случае нерастяжимого подвеса предплечье колеблется вместе с грузом, а в случае достаточно растяжимого - практически независимо от груза (как видно из уравнений (3) - (7)).

Тремор предплечья регистрировался пьезоакселерометрическим датчиком ПАМТ [16], закрепленным на запястье испытуемого. Обработка сигнала производилась при помощи ЭВМ: вычислялся спектр сигнала, строился фазовый портрет [17] (зависимость производной сигнала от значения сигнала в каждый момент времени), и сечение фазового портрета - распределение плотности точек пересечения фазовых траекторий и биссектрисы фазового портрета.

Для того, чтобы выяснить, является ли тремор предплечья квазипериодическими автоколебаниями или хаотическим процессом, были применены два метода:

- Исследовался фазовый портрет сигнала [17]: если фазовый портрет имеет в центре незаполненную область, т.е. сечение фазового портрета имеет два ярко выраженных максимума, то процесс является квазипериодическими автоколебаниями. Для того, чтобы отделить сигнал от высоко- и низкочастотных шумов, т.е. чтобы выяснить, не они ли искажают фазовый портрет, и определить происхождение собственно спектральной линии, сигнал пропускался через полосовой фильтр шириной 1 Гц, частота которого совпадает с частотой максимума спектра исследуемого сигнала.

-Исследовалась функция распределения огибающей амплитуды сигнала [18]. Если функция распределения огибающей амплитуды центрирована вблизи ненулевого значения - процесс имеет характер квазипериодических автоколебаний. Если распределение похоже на рэлеевское - процесс ближе к хаотическому.

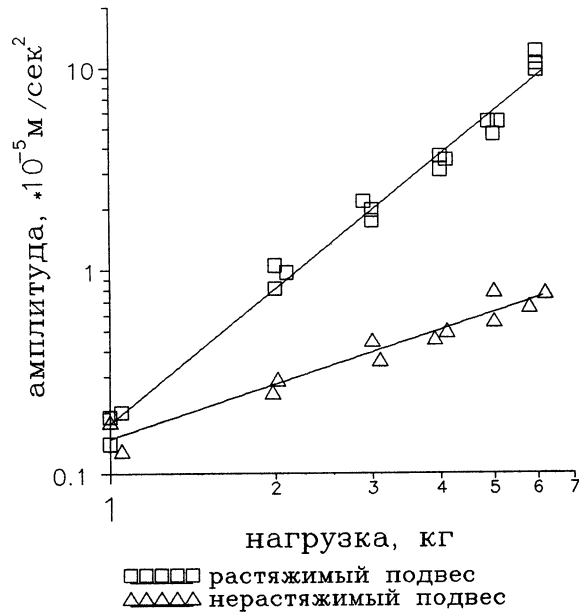
2.2 Результаты эксперимента

В ходе эксперимента было обследовано 10 здоровых человек в возрасте от 14 до 23 лет, каждый обследовался от двух до пяти раз. В результате измерений были выявлены следующие закономерности:

1. Спектр тремора имеет максимум на частоте 2-4 Гц, превышающий по амплитуде шум приблизительно в 20 раз. При этом зависимость амплитуды максимума спектра тремора от величины нагрузки может быть аппроксимирована степенной функцией с погрешностью 10% (рис. 2). Показатель степени 0.7 - 1.1, если подвес нерастяжимый; 1.5 - 1.9, если подвес растяжимый.
2. При использовании нерастяжимого подвеса частота максимума спектра тремора практически не меняется. При использовании растяжимого, как и в [19] - увеличивается на 1 - 4 Гц, (рис.3).
3. Фазовый портрет тремора предплечья представляет собой равномерно заполненную область (рис. 4), причем при фильтрации сигнала не образуется каких-либо незаполненных областей на фазовом портрете (рис.5).
4. Функция распределения огибающей амплитуды тремора имеет нецентрированный вблизи какого-либо ненулевого значения вид (рис.6), что характерно для хаотического процесса [18].

2.3 Обсуждение результатов

1. На основании анализа фазового портрета и функции распределения тремора при целенаправленном поддержании конечности можно сделать вывод: данный процесс, скорее всего, является хаотическим.
2. Изменение частоты максимума спектра тремора при нагружении конечности, по-видимому, может быть объяснено изменением массы колебательной системы и жесткости мышцы. По результатам эксперимента можно вычислить изменение жесткости мышцы при нагружении конечности. Конечность с подвешенным к ней грузом на упругом (в общем случае) подвесе



Р и с. 2. Зависимость амплитуды максимума спектра тремора предплечья от массы нагрузки на конечность

представляет собой два связанных осциллятора. Их движение описывается системой уравнений

$$\begin{cases} x_{tt} + \omega_1^2 \cdot x = N_1 \cdot (y - x) \\ y_{tt} + \omega_2^2 \cdot y = N_2 \cdot (x - y) \end{cases} \quad (3)$$

где x - удлинение мышцы, y - смещение подвешенного к руке груза от его состояния равновесия, ω_1 и ω_2 - парциальные частоты осцилляторов, N_1 и N_2 - коэффициенты связи осцилляторов. В случае слабой связанности первого осциллятора со вторым - при использовании упругого подвеса, т.е. при

$$\rho = \frac{N_1}{|\omega_1^2 - \omega_2^2|} \ll 1$$

система уравнений (3) примет вид (4):

$$\begin{cases} x_{tt} + \omega_1^2 \cdot x = 0 \\ y_{tt} + \omega_2^2 \cdot y = N_2 \cdot (x - y) \end{cases} \quad (4)$$

При этом частота колебаний предплечья

$$\omega = \sqrt{C \cdot \frac{k(m)}{m}} \quad (5)$$

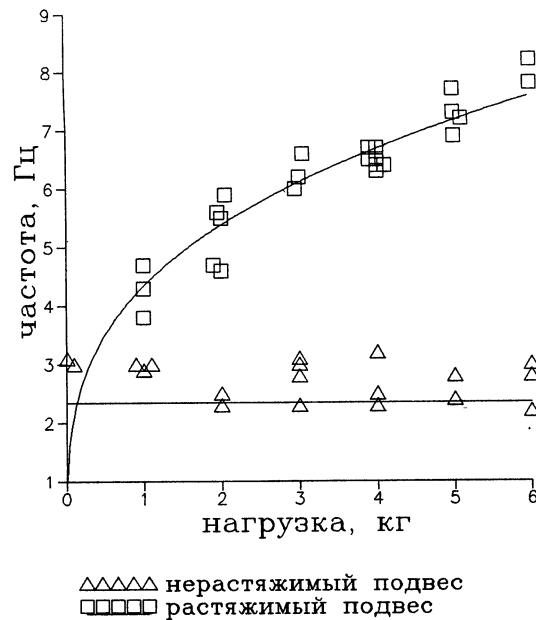
где C - константа, определяемая анатомическим строением конечности испытуемого. В случае сильной связанности осцилляторов - при использовании нерастяжимого подвеса, т.е. при $\rho \gg 1$ система уравнений (3) примет вид (6):

$$x_{tt} + \Omega^2 \cdot x = 0 \quad (6)$$

Частота колебаний предплечья в этом случае

$$\Omega = \sqrt{C \cdot \frac{k(m)}{M}} \quad (7)$$

где M - масса конечности с учетом массы подвешенного к ней груза. Соотношения (5) и (7) позволяют по экспериментальным данным зависимости частоты колебаний конечности от силы и характера нагрузки, приведенным на рис.3, найти изменение жесткости $m.biceps\ brachii$ при нагружении предплечья. График этой зависимости показан на рис.7. Она хорошо аппроксимируется прямой линией, что хорошо согласуется с тем общепризнанным представлением, что и усилие развиваемое мышцей и ее жесткость пропорциональны числу белковых (актомиозиновых) связей, имеющемуся в каждый момент мышечного сокращения.



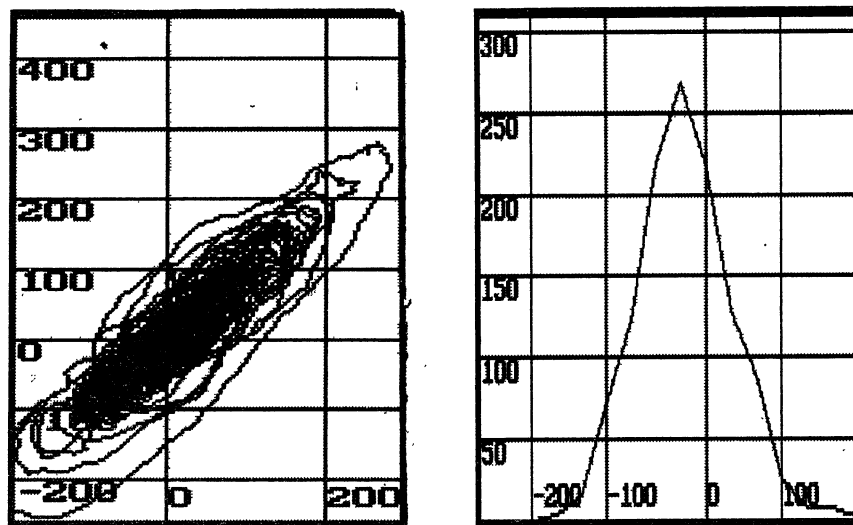
Р и с. 3. Зависимость частоты максимума спектра тремора предплечья от массы нагрузки на конечность

3. Для каждого из испытуемых оказалось, что относительное приращение амплитуды флуктуации силы, развиваемой мышцей, пропорционально относительному приращению массы нагрузки на конечность с погрешностью 10% (рис. 8), что соответствует закономерности (1) и позволяет аппроксимировать зависимость амплитуды флуктуации силы, развиваемой мышцей, от массы нагрузки на предплечье степенной функцией (рис.9). Таким образом, можно предполагать, что основой управления статическим положением конечности является сохранение относительной погрешности реакции конечности на нагружение во всем диапазоне рабочих нагрузок.

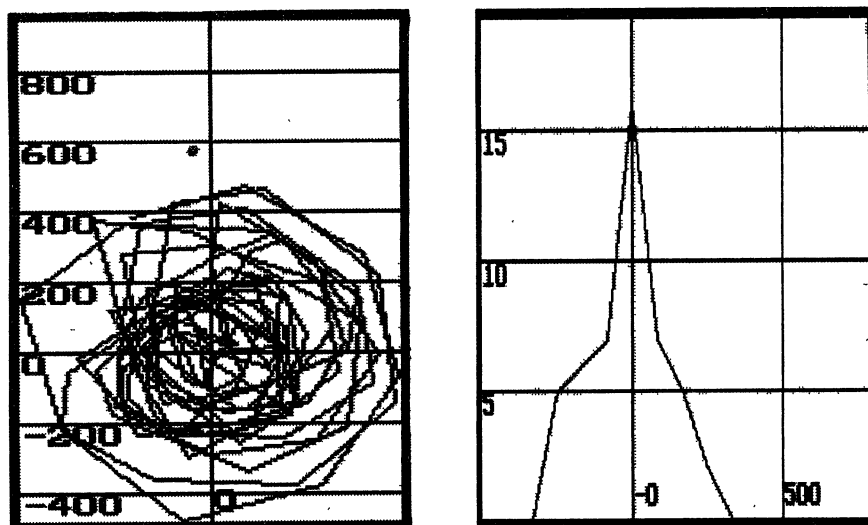
Такое удивительное совпадение имеет определенные морфологические основания. Известно, что мышца может быть рассмотрена как совокупность двигательных единиц (д.е.), т.е. групп мышечных волокон, иннервируемых одним мотонейроном [20,21]. Активность д.е. имеет импульсный характер. В процессе поддержания конечности наблюдается поочередное сокращение д. е.: после расслабления одной начинает сокращаться другая, которая развивает точно такую же или близкую к ней силу. В отдельные промежутки времени сила, развиваемая мышцей, может отличаться от той, которая необходима для уравнивания груза, именно тогда и наблюдается отклонение конечности от ее среднего равновесного положения.

Известно, что при статическом нагружении мышцы ее д. е. рекрутируются в определенной последовательности: чем больше нагрузка, тем более крупные д. е. вовлекаются в поддержание равновесия конечности (см., например, [20]). Они могут быть пронумерованы в порядке их рекрутирования, т.е. в зависимости от максимально возможной развиваемой ими силы. Зависимость силы F_i , развиваемой i -той д. е., от ее номера в порядке рекрутирования будем описывать функцией $\Phi(i)$. В таком случае, при малых флуктуациях номера i будут наблюдаться и флуктуации развиваемой силы, пропорциональные производной функции $\Phi(i)$ по i [14]. Анализ экспериментальных морфологических данных, приведенных в [21] для *m. soleus* и *m. gastrocnemius* кошки показывает, что $\Phi(i)$ может быть с погрешностью 10% аппроксимирована степенной функцией (рис.10) с показателями 1.3 и 1.9 соответственно. Тогда при сохранении флуктуации номера сокращающихся двигательных единиц во всем диапазоне нагрузок флуктуация силы сокращения также может описываться степенной функцией.

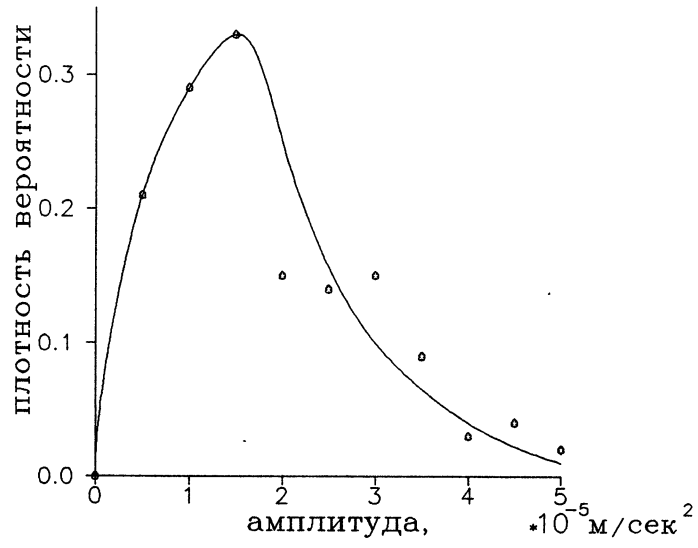
Таким образом, качественное совпадение данных сделанного нами физического эксперимента с данными психофизиологического [10,11] и морфологического [21] экспериментов позволяют с достаточной уверенностью использовать физические измерения для характеристики ощущений усилия мышечным анализатором и использовать их при создании человеко-машинных систем.



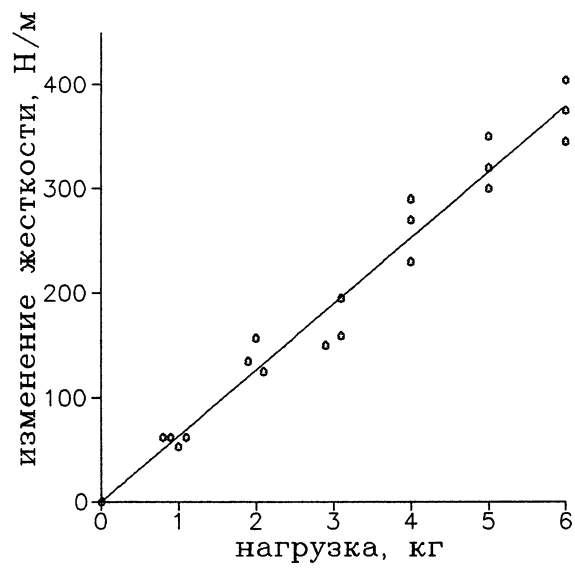
Р и с. 4. Фазовый портрет тремора (слева) и сечение фазового портрета (справа)



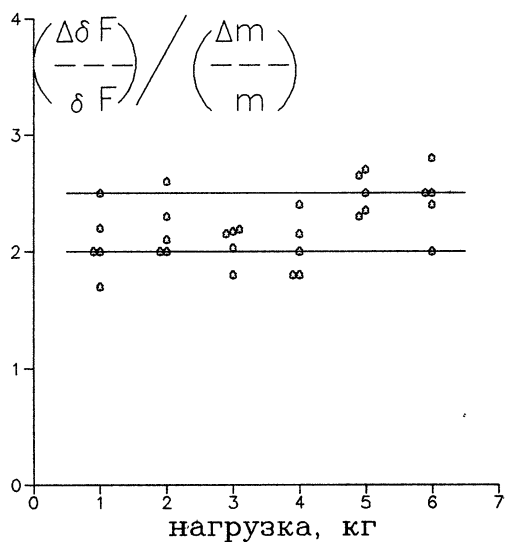
Р и с. 5. Фазовый портрет фильтрованного тремора (слева) и сечение фазового портрета (справа)
Использован полосовой фильтр шириной 1 Гц на максимума спектра тремора



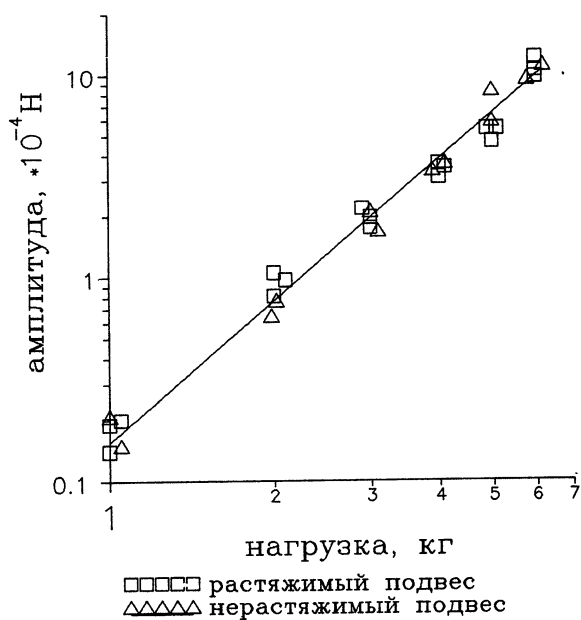
Р и с. 6. Функция распределения огибающей амплитуды тремора



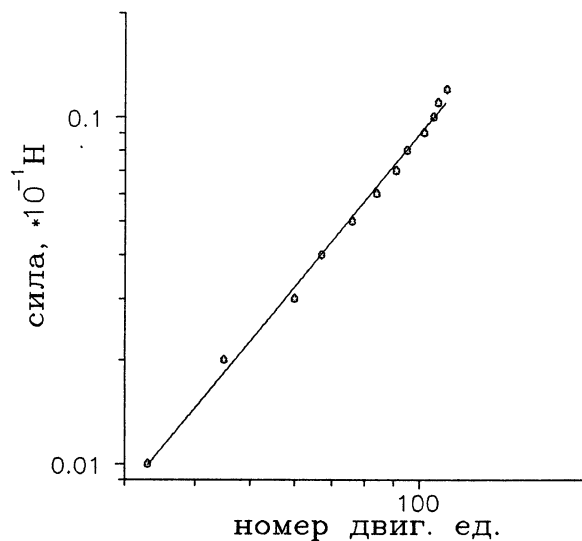
Р и с. 7. Изменение жесткости *m.biceps brachii* при нагружении предплечья



Р и с. 8. Относительное приращение амплитуды флуктуации силы, развиваемой *m. biceps brachii*, отнесенное к относительному приращению массы нагрузки на конечность



Р и с. 9. Зависимость амплитуды флуктуации силы, развиваемой *m. biceps brachii*, от массы нагрузки на конечность



Р и с. 10. Зависимость максимальной силы, развиваемой двигательными единицами *m.gastrocnemius*, от их номера в порядке рекрутирования

Заключение

В заключении хотелось бы заметить, что проблема синтеза искусственных сенсорных каналов и прямых нейро-компьютерных интерфейсов, по-видимому, более сложна, чем это описано в лекции. Однако и предложенная постановка позволила сформулировать новые задачи по исследованию нервной системы и получить новые результаты, дающие надежду на то, что такие каналы и интерфейсы могут быть построены. Авторы признательны А.К.Козлову за помощь в подготовке текста.

Ссылки

- [1] Цугутика К. Слияние биотехнологии и электроники // *Bio Industry (Japan)*. 1986. V.3. N 8. P.670.
- [2] Hiwatashi K. Ощущения и сенсоры с точки зрения бионики // *Ое будзур*. (Япония). 1985. Т.54. N 4. С.314.
- [3] Taylor R. New directions in biosensor (biochip) development // *World Biotechnol. Rept.Pric.Conf. San-Francisco*, 1986. V.2. Pt.5. N.Y.; L. P.7.
- [4] Антонец В.А., Зевеке А.В., Малышева Г.И. Возможность синтеза дополнительного сенсорного канала в системе "человек-машина" // *Сенсорные системы*. Т.6. N 4. С.100.
- [5] Зевеке А.В., Ефес Е.Д. Характеристика афферентной импульсации рецепторов кожи при действии потока воздуха // *Бюл. эксперим. биологии и медицины*. 1976. N 9. С.1030.
- [6] Зевеке А.В., Малышева Г.И. Исследование импульсных потоков от рецепторов кожи при ее охлаждении // *Нейрофизиология*. 1980. Т.12. N 4. С.413.
- [7] Малышева Г.И., Зевеке А.В. Некоторые характеристики афферентного потока при повреждающих воздействиях на кожу // *Нейрофизиология*. 1976. Т.8. N 2. С.168.
- [8] Малышева Г.И., Зевеке А.В. Структура афферентного потока при болевом и неболевом механическом раздражении кожи кошки // *Нейрофизиология*. 1976. Т.8. N 4. С.392.

- [9] Зевеке А.В. Принцип кодирования сенсорной информации в периферическом отделе кожного анализатора // докт.дисс. в форме доклада. Минск, 1991, 57 с.
- [10] Стивенс С.С. Психофизика сенсорной функции// Хрестоматия по ощущению и восприятию. М. Издательство МГУ, 1975. С.261.
- [11] Джералд Ф.А. Сенсорные шкалы// Там же. С. 253.
- [12] Самойлов А.Ф. И.М.Сеченов и его мысли о роли мышцы в нашем познании природы// Там же. С. 9.
- [13] Michel J., Cammann H., Uhlmann G., Orlov W. Computer-assisted dynamic electrocardiography with standardized psychic load - methodological enlargement of preventive cardiology. 2nd East European Conference on Biomedical Engineering, 1991. P. 73.
- [14] Антонец В.А., Ковалева Э.П. Оценка управления статическим напряжением скелетной мышцы по ее микродвижениям// Препринт N 345 ИПФ РАН Нижний Новгород, 1994, 20с.
- [15] Кузнецов В.В. Способ измерения упруго-инерционных свойств биомеханических звеньев. А.с. 1176888, СССР, опубл. в БИ,1985, N33 МКИ А61 В 5/10.
- [16] Анишкина Н.М., Антонец В.А., Ефимов А.П. Пьезоакселерометры ПАМТ и их применение для исследования механической активности физиологических систем человека. Препринт N 140 ИПФ АН СССР. Горький, 1986. 24 с.
- [17] Шустер Г.Г. Детерминированный хаос. М., Мир, 1988. С.123.
- [18] Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику, часть 1. М. Мир, 1976. С.416.
- [19] Кузнецов В.В. Свойства равновесных состояний биомеханических систем// Современные проблемы биомеханики, 1986, вып. 3, С 33.
- [20] Физиология человека: В 4-х т., Т.1 /Пер. с англ. под ред П.Г.Костюка.- М.: Мир, 1985. С.63.
- [21] Гранит Р. Основы регуляции движений, М., Мир, 1973, С.27-28.

NOVEL MAN/COMPUTER INTERFACES.

V. A.Antonets, E.P.Kovaleva, A.V.Zeveke, G.I.Malysheva, S.A.Polevaya

This lecture is an attempt to mark and partially formulate key directions in the solution of vital problems associated with development of a system to provide for man/computer interaction. The problem is to establish a direct bilateral contact between two electron data systems -an artificial system (a computer) and a natural biological (nerve) system. It means we are to construct sensor-effector channels which are not inherent to a man. As such a contact requires new type of interfaces which are to be implanted, the problem is to design , first of all, different electron prostheses (extremity , ocular and vision prostheses, prostheses for nerve system elements) whose operation cannot be accomplished via a keyboard or by vocal control. To design new type of interfaces we are in need of new data in the field of neuro- and psychophysiology but not that inherited from the classical works of the past. The lecture gives two concrete examples of how to solve experimental problems .It can be considered as an attempt to get new data in this challenging field of science.

Пространственно-временная динамика в модельных экономических системах.

Н.С. Беллюстин

НИРФИ, 603600, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская 25, e-mail: bell@helios.nirfi.nnov.su

В.Г. Яхно

ИПФ РАН, 603600, Нижний Новгород, ул. Ульянова 46, e-mail: yakhno@appl.sci.nnov.ru

Предложена модель распределенной неравновесной среды, которая может быть использована для описания коллективной активности связанных "экономических" элементов. Рассмотрены примеры эволюционной динамики характерных пространственно-временных структур активности в такой системе.

1. Введение.

Для исследования экономических систем из большого числа элементов можно использовать модель непрерывной распределенной среды, при этом анализ динамики сложноорганизованных социально-экономических систем будет характеризоваться структурами коллективной активности в такой неравновесной среде. В работах [1-4] обсуждались возможности конструирования экономических моделей такого типа с использованием абстрактных схем социально-экономических отношений, которые позволяют осуществить выбор действующих элементов такой среды и характерных связей между ними. Один из простейших вариантов моделирования эволюционной динамики можно реализовать на однородных нейроноподобных средах, элементы которых предполагаются одинаковыми по своей структуре и отличаются лишь своими функциональными состояниями. Такие модели отражают исходную "равноправность" элементов экономической деятельности, которую государства часто стараются обеспечить законодательно.

Первые попытки программной реализации таких идей и проведения вычислительных экспериментов [2-4] показали, что эволюционная динамика пространственных структур "деловой" активности оказывается весьма разнообразной, и для них можно найти прообразы в реальной экономической жизни. В то же время необходимо отметить, что описание экономических явлений на однородных нейроноподобных средах носит достаточно упрощенный характер, и с их помощью можно рассматривать лишь характерные качественные закономерности, связанные с известными общими принципами функционирования системы, но которые априори не очевидны.

Большие системы из однотипных элементов почти всегда характеризуются конкурентными отношениями между соседями, этот факт хорошо известен для химических, биологических, социальных систем. В биологических приложениях конкуренцию со стороны соседей обычно называют латеральным торможением. Конкурентные связи обеспечивают нетривиальную пространственно-временную динамику сложных систем, обеспечивают их устойчивость. В работе [5] отмечалось два типа возможного латерального торможения между взаимодействующими элементами. В первом случае торможение описывается отрицательными коэффициентами пространственных связей между элементами, во втором - спадающей функцией активации, т.е. уменьшающейся реакцией каждого элемента на слишком большое число активных соседей. Как показано в [5-7] каждый из этих типов торможения имеет свои особенности эволюции пространственно-временной динамики активности. Для элементов экономической деятельности оба типа реакций на соседей достаточно характерны, поэтому желательно рассматривать их совместно. В настоящей работе исследуется более развитая модель экономической системы, учитывающая также изменение связей каждого элемента с соседними в зависимости от величины запасенных ресурсов этого элемента.

2. Распределенная модель системы из связанных экономических элементов.

Сформулируем основные предположения о свойствах поведении элементов экономической системы, которые использовались при разработке ее формализованной математической модели. Считается, что каждый элемент рассматриваемой двумерной сети моделирует экономическую ячейку -- предприятие, состояние которой характеризуется переменными $U(x,y,t)$ и $g(x,y,t)$. Переменная $U(x,y,t)$ определяет уровень деловой активности данной экономической ячейки (значения вблизи нуля показывают, что предприятие выступает в основном как потребитель; значения вблизи единицы -- предприятие занимается в основном производственно-торговой деятельностью). Переменная $g(x,y,t)$ характеризует капитал, т.е. уровень материальных возможностей и ресурсов, которыми обладает данная экономическая ячейка. Ресурсы элементов-предприятий определяются количеством денег и количеством товара.

Рассмотрим случай, когда взаимодействие между экономическими элементами осуществляется на двумерной плоскости некоторого "коммуникативно - экономического" пространства (x, y) , учитывающего особенности связей между предприятиями. Несомненно, мера длины в таком пространстве имеет некоторое отношение к обычному расстоянию между элементами хозяйственной деятельности, но оно отражает также и некоторые особенности "экономического" и "коммуникационного" взаимодействия, зависящего от характера товарной продукции, транспортных и информационных связей, языковых барьеров и ряда других факторов. Строго говоря, после учета разнообразия основных типов взаимодействий и определения взаимных расстояний для пар элементов, все такие элементарные ячейки оказываются помещенными в некоторое пространство, размерность которого может быть сравнима числом элементов системы. Однако есть правдоподобная гипотеза на основе экспериментальных данных, что реальная размерность такого "коммуникационного" пространства равна двум. Это дает основания ограничиться на данном этапе исследованием пространственно - временной динамики сети связанных экономических элементов в двумерном пространстве. Связь между элементами определим функцией пространственной связи $\Phi_{\xi\eta}$, в предположении однозначной зависимости ее от расстояния между предприятиями-элементами в "экономическом" пространстве. Рассмотрим здесь весьма распространенный характер возможных социальных связей для однородно расположенных в пространстве элементов-предприятий: влияние ближайших соседей учитывается с положительным знаком, а воздействие удаленных элементов воспринимается негативно. Конкретный вид такой функции, описывающей латеральное торможение, представим в двухпараметрической форме, удобной для качественных оценок.

$$\Phi(r) = (1 - b(g)r^2)e^{-\alpha(g)r^2} \quad (1)$$

Принятие решения осуществляется каждым элементом на основе некоторой "психологической" оценки $Z = \left[-T_0 - \gamma_1 \cdot g + \delta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi_1(\xi - r)](U(\xi, t))d\xi \right]$, в которой результаты "опроса" окружающих ячеек $\left[\delta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi_1(\xi - r)](U(\xi, t))d\xi \right]$ сравниваются с определенным порогом $[T_0 + \gamma_1 \cdot g]$, зависящим от имеющихся ресурсов $g(x, y, t)$ для данного элемента. Обычно $\Pi[Z]$ -- вид функции принятия экономических решений имеет два порога. Вблизи первого порога $Z = T_1$ (обычно $T_1 = 0$) значения $\Pi[Z]$ резко увеличиваются, что связывают с решением элемента системы перейти в режим повышенной деловой активности. А после прохождения второго порога $Z = T_2$ происходит резкое снижение деловой активности, что означает потерю интереса к такой деятельности при соответствующей величине оценки деловой активности соседей. В данной работе запишем такую нелинейную функцию со спадающим откликом - $\Pi[Z]$ через две функции Хевисайда: $F[Z - T_1] - F[Z - T_2]$. В этом случае величина функции принятия решения отлична от нуля только в диапазоне $T_1 < Z < T_2$, т.е. между двумя заданными порогами. Балансные уравнения для такой системы взаимодействующих ячеек записываются в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U}{\tau_1} + \Pi \left[-T_0 - \gamma_1 \cdot g + \delta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi_1(\xi - r)](U(\xi, t))d\xi \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot g) + \alpha_3(g) S_1(U) \quad (3)$$

где: τ_1 - характеризует время реагирования при смене режима деятельности элемента; α_0 - величина, связанная с внешней подпиткой элемента (что-то вроде пособия по бедности); $(\alpha_1 + \alpha_2 \cdot g)$ - характеризует величину налогов и уровень потребления на повседневную жизнь; $\alpha_3(g) S_1(U)$ - величина прибыли, получаемой в процессе деловой активности элемента.

Зависимости, определяющие изменение пространственных связей элементов при росте капитала, выбраны в виде $b(g) = b_0(1 - d_0 g)$ и $a(g) = a_0(1 - d_1 g)$.

Таким образом модель, описываемая уравнениями (1)-(3), имеет замкнутый характер и может быть использована для качественного описания характера функционирования сети из "простейших" торгово-закупочных элементов-предприятий.

Характерные решения для такого вида уравнения могут иметь вид бегущих, неподвижных фронтов или импульсов [3-8], а также более сложных структур. Рассмотрим несколько вариантов пространственно-временной динамики в экономическом пространстве при различных значениях параметров искусственной нейронной сети, отвечающих за степень конкурентных отношений между элементами экономического процесса (степень латерального торможения) разных типов.

3. Пространственно-временные структуры "деловой" активности.

При достаточно высоком значении порога $[T_0 + \gamma_1 \cdot g]$ (повышенное давление на экономическую деятельность, например, за счет чрезмерно высоких налогов) происходит схлопывание области экономической активности при любых других параметрах и в результате все элементы переходят в нулевое состояние с течением времени, т.е. становятся "потребителями" при полном отсутствии "деловой" активности. Такой процесс может характеризоваться весьма нетривиальной пространственно-временной "агонией" экономической активности при достаточно крупномасштабных начальных условиях. В данной работе, однако, рассмотрены более разнообразные, разбегающиеся режимы, соответствующие очень небольшим величинам порога T_0 (аналог низких налогов) и описывающие воспроизводство активных состояний.

На рисунках 1-4 показаны серии пространственных распределений уровней экономической активности. Темные области соответствуют элементам в состоянии "деловой" активности. Примеры эволюции структур, показанные на Рис.1 и Рис.3б, получены при синхронном изменении параметров в функции связи (1) $[b(g) = b_0(1 - d_0 g) ; a(g) = a_0(1 - d_1 g)]$ таким образом, что отношение $b(g)/a(g)$, определяющее "степень латерального торможения", остается

постоянным. Для $d_0, d_1 > 0$ размер сферы "экономических интересов" элементов будет увеличиваться при накоплении капитала, т.е. роста g . Примеры на Рис.2, Рис.3а и Рис.4 рассчитывались при параметрах $b(g) = b_0(1 - d_0 g)$ и $a(g) = a_0 = \text{const}$. Это соответствует тому, что пространственный размер сферы интересов элементов не изменяется со временем, а "разбогатевшие" элементы (с увеличенным значением g) уменьшают силу латерального торможения, т.е. становятся более терпимыми к соседям - конкурентам.

Пример на рис. 1 демонстрирует, как достаточно сильное латеральное торможение за счет отрицательных пространственных связей приводит к неустойчивости внешнего фронта расширяющейся экономической зоны. Активность внутри области после прохождения фронта экономической деятельности в значительной степени определяется убывающей функцией активации, отражающей негативную реакцию каждого элемента на экономически активных соседей. В итоге внутренняя область характеризуется образованием причудливых динамических структур - специфических узоров в экономическом пространстве. На приведенной серии рисунков хорошо видно, как процесс накопления капитала, увеличивающий размеры области взаимного влияния экономических субъектов, способствует интеграции образовавшихся на промежуточной стадии развития нескольких изолированных экономически развитых областей в более крупное образование, расширяющееся с относительно устойчивым внешним фронтом. Однако внутри этих областей происходит достаточно динамичная перестройка областей деловой активности, характеризующаяся периодичными сменами статуса производителей на потребителей и со сложной, трудно предсказуемой пространственной динамикой. В значительной степени такое поведение определяется латеральным торможением второго рода (за счет убывающей отдачи элементов), хотя торможение за счет отрицательных связей может весьма существенно влиять на характер пространственных структур активности внутри "зоны повышенной экономической активности".

Второй пример (рис.2), реализующий ослабление латерального торможения с ростом капитала при фиксированном размере области влияния в экономическом пространстве ($a = \text{const}$), характеризуется более устойчивым внешним фронтом. Однако в этом случае оказались более ярко выраженными опасные периодические колебания экономической активности во внутренней области.

Динамические процессы, отраженные на рисунках 3 - 4 соответствуют ситуации, когда при отсутствии капитала латеральное торможение между элементами системы не слишком велико $b(g)/a(g) = 0,25$ [8,9], что обеспечивает достаточную пространственную устойчивость внешнего

фронта расширяющейся области экономической деятельности. При $g \rightarrow 0$ условия распространения фронтов активности в этих примерах совпадают, поэтому динамика внешней границы "деловой" активности в развивающейся зоне одинакова. Однако эти примеры сильно различаются по динамике экономической активности во внутренних областях, в которых реализуются разнонаправленные стратегии изменения функции связи с соседями при увеличении g , т. е. накоплении элементами значительных собственных ресурсов. На Рис. 3а и Рис. 3б показаны процессы формирования структур активности, когда сила латерального торможения на соседей уменьшается у элементов с большей величиной капитала. Это приводит к тому, что за фронтом деловой активности формируется квазихаотическая динамика областей с теми же (Рис. 3а) или увеличивающимися характерными пространственными масштабами (Рис. 3б). В случае, когда у элементов с возрастающим капиталом сила латерального торможения на соседей увеличивается $d_0 < 0$ (разбогатевшие субъекты начинают сильнее давить соседей - конкурентов) в центральной зоне (Рис. 4), за фронтом деловой активности, начинают формироваться неподвижные и более регулярные ряды элементов, занимающихся производственной деятельностью.

Проведенные расчеты показывают, что несмотря на достаточно простые исходные предположения, динамические процессы в модельной экономической системе могут быть весьма сложными и разнообразными. Сюжетная линия описания этих режимов может иногда оказаться не менее захватывающей, чем реально происходящие события. Сопоставление получаемых решений модельных систем с процессами в экономической жизни могут вызвать и практический интерес.

Исследования, описанные в этой статье, частично были поддержаны Международным Научным Фондом в рамках Гранта № R 8 Z 3 0 0 и Российским Фондом Фундаментальных Исследований в рамках Гранта 95-02-04936-а.

Литература

1. Nicolis, G. and Prigogine, I. *Self-Organization in Nonequilibrium Systems*, Wiley, New York, 1977.
2. Сандлер Ю.М., Сергеев В.М. Ансамбли нейронных сетей как модели коллективного поведения, *Итоги Науки и Техники ВИНТИ*, серия "Физические и математические модели нейронных сетей". том 1, часть 1, стр. 359-383, 1990.
3. Bellustin N.S., Zemskov S.P., Yakhno V.G. "Dynamics of neuron-like media consisting of adaptive elements", *Proceedings of SPIE "Optical Neural Networks"* ed. by A. Mikhaelian, v.2430, p.155-164, 1994
4. Bellustin N.S., Zemskov S.P., Yakhno V.G. Neuron-Like Elements for modeling of Social and Economic Problems.- *Proc. of The Second International Symposium on Neuroinformatics and Neurocomputers*, Rostov-on-Don, Russia, September, 20-23, 1995, p.p.311-315
5. Беллюстин Н.С. "О латеральной конкуренции в динамических нейронных сетях", *Радиофизика*, т.37, №8, 1994
6. Masterov A.V., Tolkov V.N., Yakhno V.G. "Spatio-Temporal Structures in Opto-Electronic Devices", in book: "Nonlinear Waves I. Dynamics and Evolution", eds. A.V.Gaponov-Grekhov, M.I.Rabinovich, J.Engelbrecht, Springer-Verlag, 1989, p.168-184
7. Yakhno V.G. Basic Models of Hierarchy Neuron-Like Systems and Ways to Analyse Some of their Complex Reactions. *OM&NN*, v 4, N2, pp 141-155, 1995.
8. Яхно В.Г., Беллюстин Н.С., Красильникова И.Г., Кузнецов С.О., Нуйдель И.В., Панфилов А.И., Перминов А.О., Шадрин А.В., Шевырев А.А. Исследовательская система принятия решений по фрагментам сложного изображения, использующая нейроподобные алгоритмы. - *Изв. вузов, Радиофизика*, том 37, N 8, с.961-986
9. Belliustin N.S., "Homogeneous ANN using in image processing and picture generation", *RNNS/IEEE Symposium on Neuroinformatics and Neurocomputers*, Rostov-on-Don, Russia, P.1221-1226, 1992

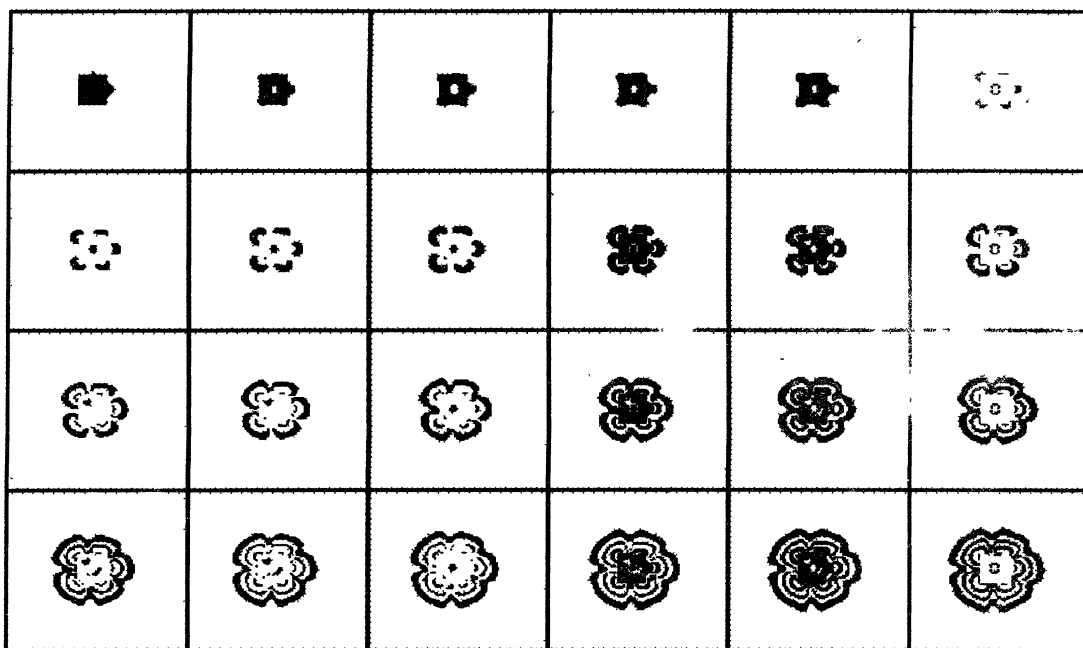


Рис. 1 Формирование "мозаичного" в пространстве распределения активности элементов в результате развития неустойчивости на плоском фронте возбуждения ($b_0=0,1$; $d_0=0,01$; $a_0=0,1$; $d_1=0,01$; $T_0=0,01$; $T_1=0$; $T_2=0,3$).

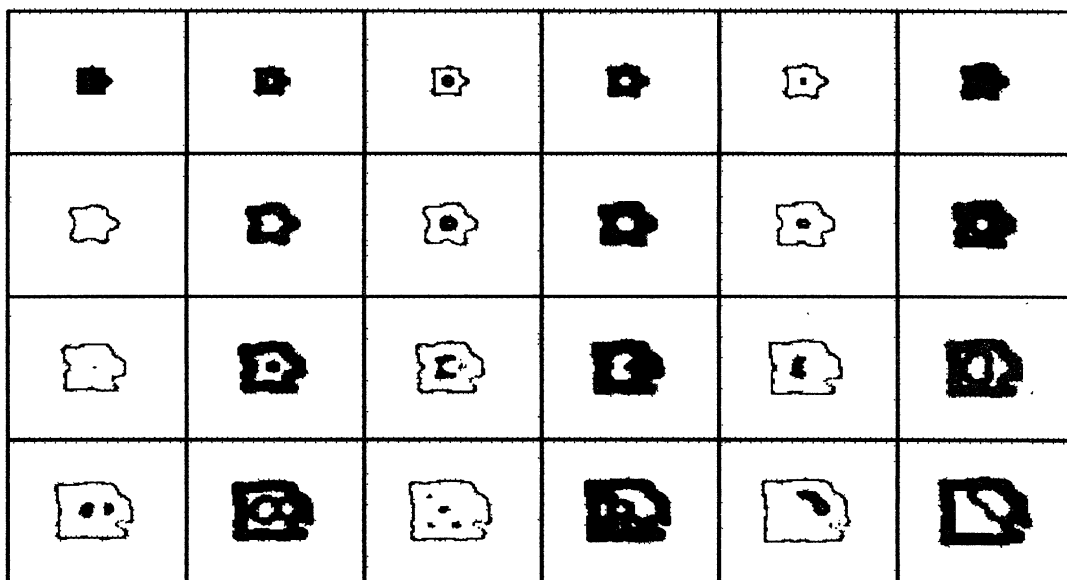


Рис. 2. Пример структур с "мигающим" изменением толщины фронта активности при параметрах: $b_0=0,1$; $d_0=0,01$; $a_0=0,1$; $d_1=0$; $T_0=0,01$; $T_1=0$; $T_2=0,3$.

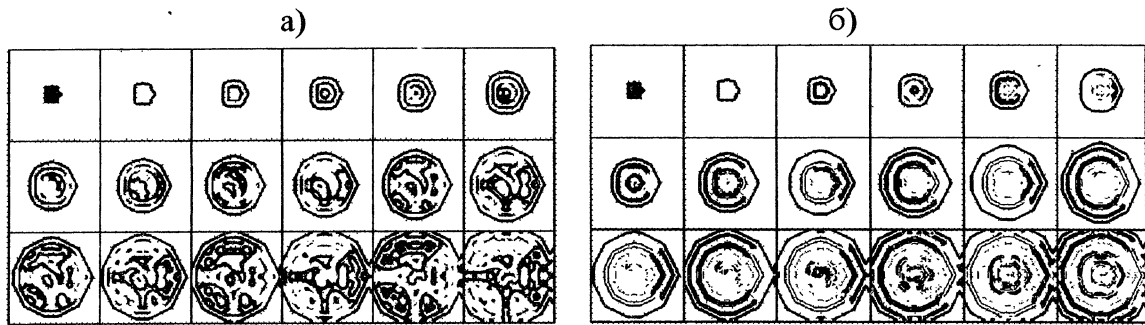


Рис. 3 Варианты эволюционной динамики структур активности при уменьшении степени латерального подавления соседей с ростом капитала:

а) случай, когда характерный размер функции пространственной связи не изменяется ($b_0=0,05$; $d_0=0,02$; $T_0=0,01$; $T_1=0$; $T_2=0,3$; $a_0=0,2$; $d_1=0$).

б) характерный размер функции пространственной связи увеличивается в соответствии с изменением степени латерального торможения ($b_0=0,05$; $d_0=0,02$; $T_0=0,01$; $T_1=0$; $T_2=0,3$; $a_0=0,2$; $d_1=0,02$);

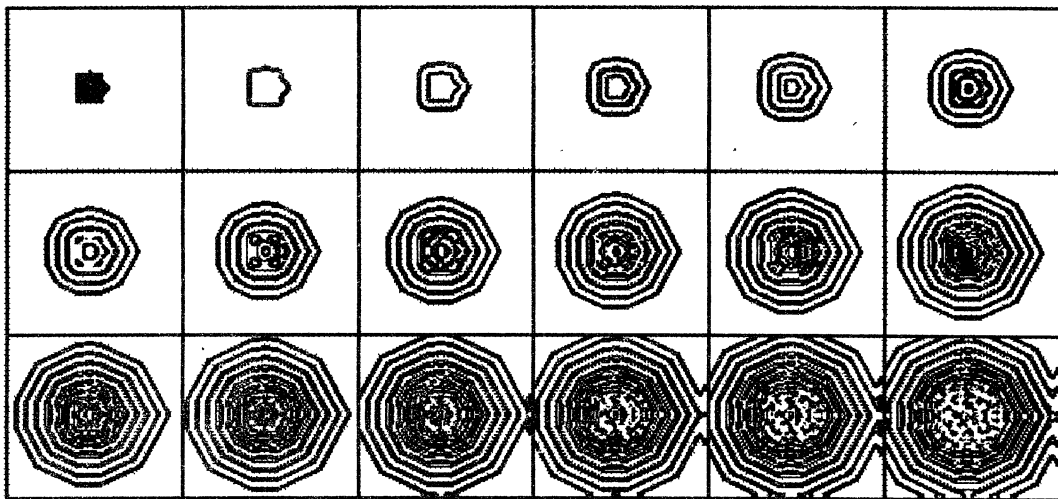


Рис. 4 Пример перестройки вида структур активности в случае, когда увеличение уровня обеспеченности элементов (капитала) приводит к росту характерного размера функции пространственной связи и возрастанию степени латерального торможения ($b_0=0,05$; $d_0=-0,02$; $T_0=0,01$; $T_1=0$; $T_2=0,3$; $a_0=0,2$; $d_1=0$).

ТУННЕЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ГАМИЛЬТОНОВСКОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМЕ

В.Я.Демиховский, Д.И.Каменев

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, ф-т ПФМ
603600, Россия, Нижний Новгород, Б.Покровская, 37
E-mail: pfm@nnucnit.nnov.su

Реферат

В работе рассмотрены эффекты туннелирования через динамические барьеры, которые в классическом пределе соответствуют сепаратрисам вырожденной гамильтоновской системы. Показано, что пространство квантовых состояний (Гильбертово пространство) разбивается на ячейки, которые соответствуют ячейкам классического фазового пространства, разделенным сеткой сепаратрис. Из численных расчетов следует, что проникаемость динамических барьеров в вырожденной системе, как и в невырожденной [1], экспоненциально мала. Рассмотрен случай неточного резонанса $\delta\omega \neq 0$, когда в соответствующей классической системе резонанс имеет место только в нескольких ячейках фазового пространства. Численно показано, что при $\delta\omega \neq 0$ в квантовомеханической системе резонансная область также ограничена в Гильбертовом пространстве.

1 Введение

Роль динамических барьеров в классической механике хорошо известна. На основе теоремы Колм-лгорова - Арнольда - Мозера мы можем сделать вывод, что хаотические области какой - либо динамической системы (если такие области существуют) на фазовой плоскости ограничивают инвариантные торы или КАМ - торы. Эти инвариантные торы действуют как непроницаемые барьеры, препятствующие диффузии частицы по фазовой плоскости. Возникает естественный вопрос о том, какова природа и роль динамических барьеров в квантовомеханических системах. Вопрос этот был поставлен в работе [1]. Для квантового ротатора в поле δ - образных импульсов было найдено, что в случае, если движение частицы на фазовой плоскости ограничено инвариантными кривыми, которым отвечают некоторые значения момента $-p_c$ и $+p_c$, то и в квантовомеханическом случае при соответствующем выборе начальных условий ассимптотическая плотность распределения будет заключена в интервале $[-p_c, +p_c]$. Таким образом, квантовую динамику частицы также ограничивают барьеры, которые, однако, имеют конечную прозрачность. Глубина проникновения плотности распределения за пределы области, ограниченной инвариантными кривыми, в модели квантового ротатора зависит от безразмерной постоянной Планка по закону $\lambda \sim \hbar^{0.66}$ [1], а вероятность туннелирования в классически недоступную область пропорциональна $\hbar^{2.5}$. В классической вырожденной системе роль динамических барьеров играют не КАМ - торы, а Π - торы [2]. Характерным примером вырожденной системы является заряженная частица, двигающаяся в однородном магнитном поле \mathbf{H} и поле монохроматической волны, распространяющейся перпендикулярно \mathbf{H} . Π - торы в этой системе представляют собой бесконечную в фазовом пространстве сетку сепаратрис в отличие от КАМ - торов, которые ограничивают определенную конечную область фазового пространства. Частицы движутся по замкнутым траекториям внутри ячеек этой сети. При наличии в гамильтониане вырожденной системы зависящих от времени нерезонансных членов (то есть в первом порядке резонансной теории возмущений) сепаратрисная сетка "одевается" стохастическим слоем экспоненциально малой толщины, двигаясь внутри которой частица может набирать энергию [2].

2 Резонанс в квантовой вырожденной системе

Последующее рассмотрение будет проведено на примере упомянутой выше системы, которая представляет собой заряженную частицу, движущуюся в постоянном однородном магнитном поле \mathbf{H} и поле монохроматической волны, распространяющейся перпендикулярно \mathbf{H} . Гамильтониан нашей задачи имеет вид

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} - V_0 \cos(kx - \omega t), \quad (1)$$

где $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$ — векторный потенциал, который мы выбрали так, что магнитное поле направлено вдоль оси z , m — масса, e — заряд частицы, \mathbf{p} — обобщенный импульс, k — волновой вектор, V_0 — амплитуда возмущения, c — скорость света. Мы предполагаем, что выполнено условие резонанса $\omega = \omega_c$, где $\omega_c = \frac{eH}{\hbar c}$ — циклотронная частота, \hbar — постоянная Планка. Поскольку k_y — интеграл движения, то для нас будет существенна зависимость волновой функции только от x и t . Будем искать решение нестационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом (1) в виде

$$\psi(x, t) = \sum_n \dot{C}_n(t) \psi_n(x) \exp(-iE_n t / \hbar), \quad (2)$$

где $\psi_n(x)$ — волновая функция гармонического осциллятора, E_n — энергия на уровне Ландау. Подставим (2) в уравнение Шредингера и оставим в правой части только резонансные члены, которые не зависят от времени. В результате получим [3]

$$i\hbar \dot{C}_n = \frac{V_0}{2} (V_{n,n+1} C_{n,n+1} + V_{n,n-1} C_{n,n-1}), \quad (3)$$

где матричные элементы $V_{n,m}$ симметричны по индексам и выражаются через функции Бесселя J_1 [3]

$$V_{n,n+1} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} e^{-\frac{\hbar}{2}} J_1(\sqrt{2n\hbar}), \quad (4)$$

\hbar — параметр, равный $(ka)^2$, $a = (\frac{\hbar c}{eH})^{1/2}$ — магнитная длина. На рис.1 изображен график зависимости матричных элементов $V_{n,n+1}$ в безразмерных единицах от номера n из которого видно, что гильбертово пространство ψ_n разбивается на ячейки, на границах которых матричные элементы $V_{n,n+1}$ малы. Это значит, что если начальное состояние выбрано в одной из ячеек, то в дальнейшем переходы, согласно [3], будут происходить главным образом внутри данной отдельной ячейки. Таким образом, уровни, расположенные на границе между ячейками отделяют одну группу состояний от другой и соответствуют в классической модели сепаратрисам, положение которых по действию определяется условием $J_1(\sqrt{2I_0}) = 0$, где I_0 — безразмерное действие (см. напр. [4]).

Так как Гамильтониан (1) периодически зависит от времени, мы можем, согласно теореме Флоке, ввести квазиэнергетические состояния, которые являются решением уравнения Шредингера с гамильтонианом (1). Разложим квазиэнергетические функции $\psi_q(x, t)$ по собственным функциям гармонического осциллятора [3]

$$\psi_q(x, t) = \exp(-iE_q t / \hbar) \sum_n A_n^q \psi_n(x) \exp(-iE_n t / \hbar), \quad (5)$$

где E_q — квазиэнергия. Коэффициенты разложения A_n^q и квазиэнергии E_q можно найти подставляя (5) в уравнение Шредингера. Тогда в резонансном приближении имеем систему алгебраических уравнений [3]

$$E_q A_n^q = V_0 (V_{n,n+1} A_{n+1}^q + V_{n,n-1} A_{n-1}^q). \quad (6)$$

Эволюцию нашей системы мы можем определить непосредственно решая систему уравнений (3) либо с помощью функции Грина, определив ее следующим образом:

$$G_{n,n'}(t, t_0) = \sum_q A_n^q A_{n'}^q e^{-iE_q(t-t_0)/\hbar}. \quad (7)$$

Тогда значение амплитуды распределения вероятностей на уровне n $C_n(t)$ мы можем выразить через амплитуды в момент времени $t = t_0$

$$C_n(t) = \sum_{n'} G_{n,n'}(t, t_0) C_{n'}(t_0), \quad (8)$$

Положим $t_0 = 0$ и $C_{n'}(0) = \delta_{n',n_0}$, тогда из (7) и (8) имеем

$$C_n(t) = \sum_q A_n^q A_{n_0}^q e^{-iE_q t / \hbar}. \quad (9)$$

3 Динамические барьеры в квантовой вырожденной системе

Численно была исследована эволюция системы с гамильтонианом (1) в резонансном приближении. Для расчетов была использована система, включающая 100 уровней Ландау, которые образуют в гильбертовом пространстве 3 ячейки (рис.1). Начальное состояние было выбрано в виде $C_n(0) = \delta_{n,n_0}$, где n_0 расположено в центре первой ячейки. Было установлено, что за время $\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}$, где $\tilde{\omega}$ — максимальное расстояние между квазиэнергетическими уровнями [3], волновой пакет расплывается по начальной ячейке. Как показано в [3], частота $\tilde{\omega}$ соответствует частоте малых колебаний вблизи центра резонанса в классической системе. Наряду с быстрой динамикой в пределах начальной ячейки происходит более медленный процесс диффузии плотности распределения в соседние ячейки. За время $T_{max} = \frac{2\pi}{\omega_{min}}$, где ω_{min} — минимальное расстояние между квазиэнергетическими уровнями, устанавливается стационарное состояние. На рис.2 показано асимптотическое распределение вероятностей, определяемое как $|C_n(T)|^2$, при $T = 4 * 10^5 T_c$, где T_c — циклотронный период, $\hbar = 0.53$, $V_0 = 3$. При выбранных параметрах характерные времена оказались порядка $T_{max} \simeq 750 T_c$, $\tilde{T} \simeq 10 T_c$. Согласно нашим численным расчетам, вероятностей не изменяется при $T = 4 * 10^3 T_c$, $T = 4 * 10^4 T_c$ и т.д.

Из полученных на рис.2 результатов можно сделать следующие выводы. i) Квантовые состояния остаются локализованными в пределах начальной ячейки, то есть границы ячеек (которые, напомним, в классическом случае соответствуют сепаратрисам) действуют как квантовые динамические барьеры (на рис.2 границы ячеек указаны стрелками). ii) Существует определенная вероятность туннелирования в соседние ячейки, то есть в классически недоступные области, причем проницаемость динамических барьеров в вырожденной системе (П-торов) как и в невырожденной (КАМ-торов [1]) экспоненциально мала. iii) Плотность распределения в среднем на 1.5-2 порядка выше вблизи краев ячеек, чем в центре. Это явление напоминает диффузию классической частицы по сепаратрисной сетке, когда в резонансном гамильтониане учитываются нерезонансные члены. iv) Результаты, представленные на рис.2 характерны и для случаев, когда начальное состояние выбрано в любой другой ячейке Гильбертова пространства. Это означает, что все Гильбертово пространство поделено на квантовые резонансные ячейки точно также, как и в классическом случае все фазовое пространство разбивается на резонансные ячейки, разделенные сеткой сепаратрис. Если мы включим в рассмотрение дополнительно несколько ячеек, то это не повлияет на распределение вероятностей в предыдущих ячейках из-за малой проницаемости барьеров, таким образом, представленные на рис.2 результаты справедливы и для бесконечного числа ячеек.

В случае неточного резонанса, когда $\omega = \omega_c + \delta\omega$, $\delta\omega \neq 0$, система уравнений (6) для определения квазиэнергетических состояний принимает вид

$$(E_q - \hbar n \delta\omega) A_n^q = \frac{V_0}{2} (V_{n,n+1} A_{n+1}^q + V_{n,n-1} A_{n-1}^q). \quad (10)$$

В случае, если выполнено условие $\hbar n \delta\omega \gg \frac{V_0}{2}$ мы имеем в нулевом порядке теории возмущений систему

$$(E_q - \hbar n \delta\omega) A_n^q = 0. \quad (11)$$

Решения этой системы имеют вид

$$E_q = \hbar q \delta\omega, \quad A_n^q = \delta_{n,q} \quad (12)$$

то есть все состояния с большими n локализованы и следовательно не являются резонансными. На рис.3 представлены результаты расчета с теми же параметрами, что и на рис.2, но с $\delta\omega = 0.03$. Как видно из рисунка в случае

$$\delta\omega \neq 0 \quad (13)$$

резонанс занимает конечную область в гильбертовом пространстве (на рис.3 всю первую и часть второй ячейки). Здесь мы уже не имеем бесконечной последовательности резонансных ячеек в описанном выше смысле, и каждый уровень (не только сепаратрисы) становится динамическим барьером (КАМ-тором в классическом случае). Подобную картину мы наблюдаем и в классической системе, где при выполнении условия (13) резонанс имеет место только в нескольких ячейках с малыми значениями действия I.

Вернемся к случаю точного резонанса. Следующий эффект является следствием дискретности Гильбертова пространства. В случае, если выполнено условие

$$V_{n_0, n_0+1} \sim J_1(\sqrt{2n_0\hbar}) = 0 \quad (14)$$

система уравнений (3) или (6) обрывается на n_0 -м члене и переходы через данный узел не совершаются. При уменьшении (или увеличении) параметра h условие (14) будет последовательно выполняться для $n_0 + 1$ -го, $n_0 + 2$ -го и т.д. уровней. Таким образом, вероятность туннелирования через данный узел будет периодически обращаться в ноль, и мы имеем осцилляции коэффициента прохождения в зависимости от h . На рис.4 представлен график зависимости коэффициента прохождения из второй ячейки в последующие (третью, четвертую), определяемого как $\sum_{n>n_0} |C_n(T)|^2$ (n_0 лежит на границе между второй и третьей ячейками), от h через $T = 4000T_c$ при $V_0 = 3$ (на графике вместо указанных выше нулевых значений коэффициента прохождения взята малая величина). Период осцилляций коэффициента прохождения зависит от величины приложенного магнитного поля, согласно (14), по закону $\frac{\Delta H}{H} = \frac{1}{n_0}$ и является переменной величиной. Описанные осцилляции имеют место только в резонансном приближении когда рассматриваются только переходы между ближайшими уровнями Ландау и выполнено условие $\tilde{\omega} \ll \omega$.

В заключении отметим еще раз некоторые интересные особенности изучаемой системы. Динамика нашей системы сохраняет основные черты в динамике соответствующей классической системы. Несмотря на то, что резонансная область в Гильбертовом пространстве ограничена и динамические барьеры имеют конечную прозрачность, все состояния являются локализованными. Локализация является следствием сделанного в [3] предположения о дискретности квазиэнергетического спектра. То, что спектр является дискретным не очевидно по той причине, что мы имеем бесконечное число уровней в конечном интервале энергий, причем основная часть уровней расположена вблизи точки сгущения $E = 0$.

Эта работа была поддержана грантом Грскомвуза по исследованиям в области фундаментального естествознания.

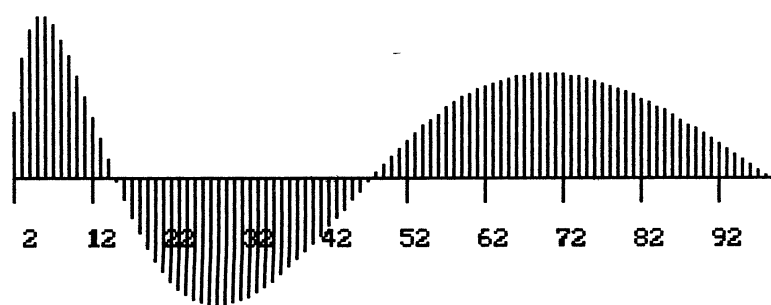
Литература

1. T.Geisel, G.Radons, and J.Rubner, "Kolmogorov - Arnold - Moser Barriers in the Quantum Dynamics of Chaotic System", *Phys.Rev.Lett.*, 1986, Vol.57, No 23, pp. 2883 - 2886.
2. Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев, Д.А.Усиков, А.А.Черников, *Слабый Хаос и Квазирегулярные Структуры*, Москва, Наука, 1990.
3. V.Ya.Demikhovskii, D.I.Kamenev, and G.A.Luna-Acosta, "Quantum Resonance in an Intrinsically Degenerated System. Nonlinear Cyclotron Resonance." *Phys.Rev.E*, October 1995.
4. А.Д. Лихтенберг, М.А.Либерман, *Регулярное и стохастическое движение* Москва, Наука, 1984, Глава 2.

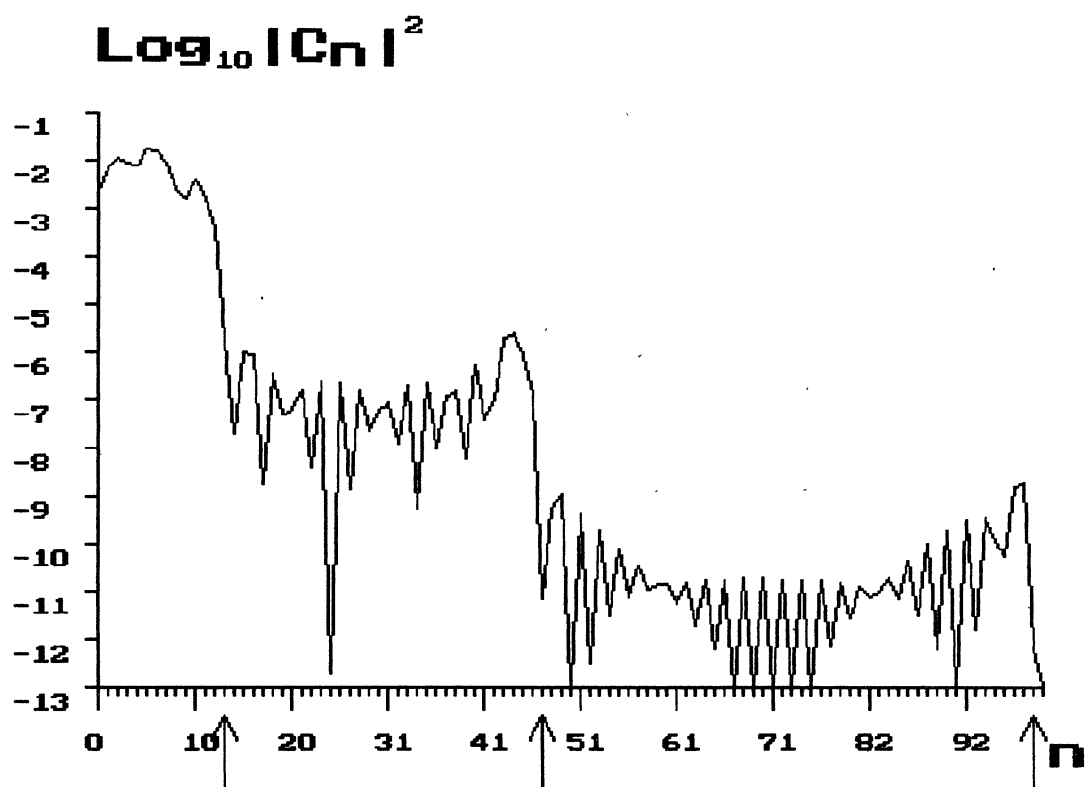
TUNNELING PHENOMENA IN AN INTRINSICALLY DEGENERATED SYSTEM

V. Ya. Demikhovskii, D. I. Kamenev

A role of the dynamical barriers in an evolution of a quantum Intrinsically Degenerated System (IDS) is explored. The problem of the dynamical barriers in a quantum system was studied by T.Geisel at all [1] for a model of kicked rotator in search of interplay between the classical phase space structure and quantum tunneling. They have shown that the quantum dynamical barriers are counterparts of KAM - tori in a classical mechanics. The model of the kicked rotator is so-called accidentally degenerated system (ADS). We have explored the phenomenon of dynamical barriers in the IDS. Our model is a charged particle, rotating in a uniform magnetic field and a field of a monochromatic wave, propagating perpendicularly to the magnetic field direction when the condition of the resonance $\omega = \omega_c$ (ω is the frequency of the wave, ω_c is the cyclotron frequency) is satisfied. By means of quasienergy eigenstates we have explored an evolution of our system. All the quantum states turned out to be localized in the Hilbert space in spite on infinity of the resonance zone in the space. For the near-resonance case it was found that the resonance spans a finite region in the Hilbert space. This result is in correspondence with the classical case where the resonance covers a finite area in the phase space (with small I, I-action).



PNC.1



PNC.2

$\text{Log}_{10} |C_n|^2$

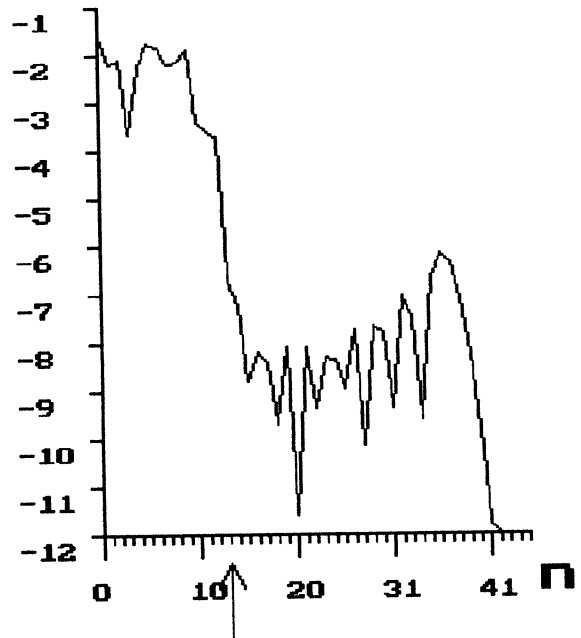


рис. 3

$\text{Log}_{10} (P)$

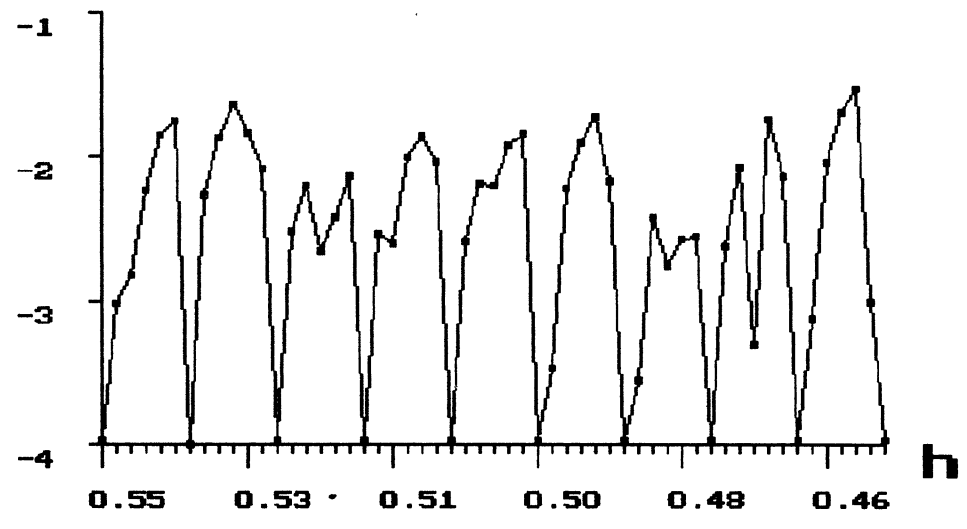


рис. 4

САМООРГАНИЗАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ КРОВΟΣНАБЖЕНИЯ В БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЯХ

Б. Н. Клочков, А. М. Рейман

Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences
46 Uljanov str., Nizhny Novgorod 603600, RUSSIA
E-mail: klochkov@appl.sci-nnov.ru

Предложены математические модели, описывающие пространственно – временную динамику в отдельном микрососуде и в ткани с кровеносными микрососудами. При этом в стенку микрососудов входят гладкомышечные волокна, за счет активности которых происходит изменение просвета и, как следствие, регуляция кровотока. Активация имеет не только электрическую, но и механическую природу. Учтено влияние сдвиговых напряжений в стенке на активацию волокон, а также действие гравитации.

Введение

Распределение кровотока в тканях живого организма неоднородно. При этом важным является моделирование распределения кровоснабжения в сосудах и тканях, а следовательно и насыщение тканей кислородом, при помощи нелинейных математических моделей. Модели должны количественно и качественно описывать динамику кровоснабжения участка ткани, что полезно для понимания некоторых биофизических и физиологических эффектов [1 – 4].

При изучении распределенных движений в кровеносных и лимфатических микрососудах существенным является математическое моделирование активных процессов в гладкомышечной стенке сосуда и гидродинамика крови внутри сосуда [5 – 13]. Материал стенки сосуда считается вязкоупругим, вводится активное напряжение гладкомышечных волокон, зависящее от деформации, напряжения, скоростей их изменения. Гидродинамическая часть моделей естественно сводится к закону Пуазейля с учетом силы тяжести. Исследованы самоорганизационные процессы в сосудистой системе ткани с учетом различных механизмов регуляции кровотока. Построены дисперсионные кривые, показано существование длинноволновой неустойчивости в сосудах за счет активности гладкомышечных волокон. Показано существование различного типа автоволн в сосуде (локализованных, перепадных, сокращения, расширения). Получены диссипативные структуры просвета сосуда. Учтено влияние изгиба и сдвига стенки сосуда, а также влияние гравитации. Получен эффект нелинейного транспорта биологической жидкости (крови, лимфы) в микрососуде (при помощи теории бифуркации Хопфа), причем эффект может быть разного знака в зависимости от величины активной нелинейности). Получена модель автоструктур распределения кровотока в ткани. На основе этой модели проведены аналитические и численные расчеты. Построены и исследованы в едином описании некоторые физические модели автоволнового типа отдельных звеньев сосудистой системы.

1 Структуры распределения кровотока в активном сосуде

Математическая модель состоит из двух уравнений (для стенки и для жидкости). Третье уравнение добавляется для параметра активности, который определяется механическими и электрическими величинами. Электрическое возбуждение задается пейсмекерами, имеющими характерный ритм пульсаций и локально расположенными по длине сосудистого русла.

Гидродинамическое уравнение получено осреднением исходных уравнений по сечению сосуда, уравнение для стенки сосуда с гладкой мышцей получено при помощи осреднения по сечению стенки. Ось x расположена вдоль сосуда. Изучается пространственно – временное поведение сосуда в переменных x и t . Тогда имеем

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\rho g R^2}{4\eta} (\cos \theta) \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{1}{16\eta R} \frac{\partial}{\partial x} \left(R^4 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\Lambda}{h} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p - p_e}{h} = \frac{4\mu(R - R_0)}{R_0^2} + \frac{4\mu_l}{R_0^2} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\gamma}{R} - \mu \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \mu_l \frac{\partial^3 R}{\partial t \partial x^2} \quad (2)$$

Здесь p – текущее внутрисосудистое давление; $p_e = p_e(t)$ – заданное давление вне сосуда; R – текущий внутренний радиус сосуда; R_0, h – его недеформированный радиус и толщина стенки; μ – модуль сдвига; μ_l – динамический коэффициент вязкости материала стенки; Λ – характерное время релаксации материала стенки по напряжению; η – вязкость жидкости; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; θ – угол между направлением силы тяжести и осью x (см. рис.1а).

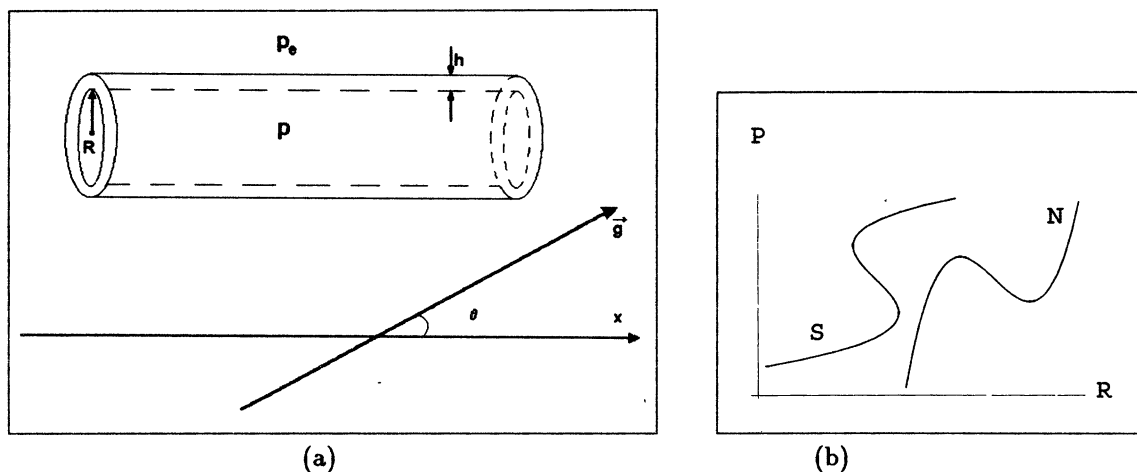


Рисунок 1: (а) схема сосуда, (б) S и N – характеристики активного сосуда.

Параметр активности $\gamma = \gamma(t, R, p, \sigma)$ появляется из-за наличия в стенке сосуда гладко-мышечных слоев и волокон. Существуют типы сосудов, имеющие различную регуляцию, причем γ будет зависеть от соответствующих определяющих величин: p, R , касательного напряжения на стенке $\sigma = -(R/2)(\partial p / \partial x)$ и других. На рис.1б, 2а изображены характерные типы квазистатических кривых, соответствующих сосудам с различной регуляцией: S-типа ($\gamma = \gamma(p)$) и N-типа ($\gamma = \gamma(R)$) в переменных (p, R) , немонотонными и имеющими падающий участок, а также σ -типа ($\gamma = \gamma(\sigma)$) в переменных (R, σ) , монотонной без падающего участка. Вторая производная по пространству в уравнении для стенки сосуда связана с учетом сдвиговых деформаций.

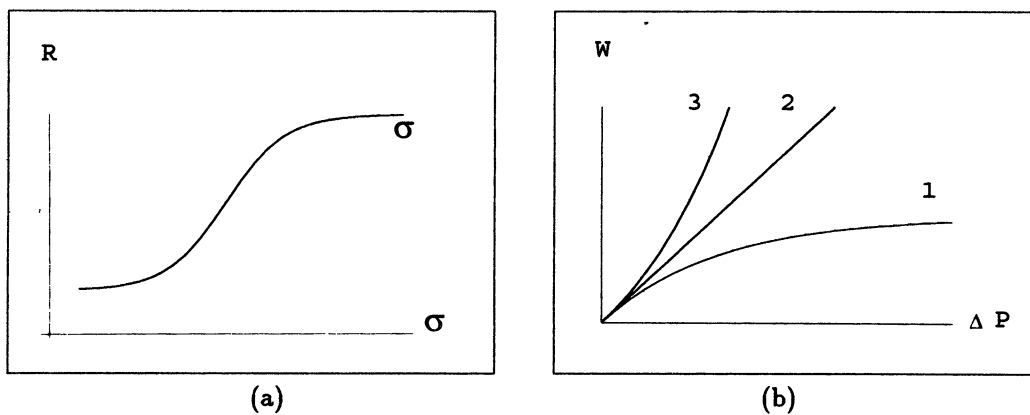


Рисунок 2: (а) σ – характеристика активного сосуда, (б) авторегуляция кровотока.

Классическая авторегуляция (постоянство) кровотока W при изменении перепада давления вдоль сосуда Δp иллюстрируется на рис.2б кривой 1, которая легко следует, например, из закона Пуазейля для S-сосуда; причем прямая 2 характерна для жесткой трубки, а кривая 3 – для упругой.

1.1 Автоколебательные процессы

Линеаризуем систему уравнений (1) – (2). Подставляя $(p, R) \sim \exp(i\omega t - kx)$ получим комплексное дисперсионное уравнение (в безразмерном виде) $i\omega = iO(k) + I(k)$, где

$$O(k) = k \frac{G(1 + 4rk^2 + q^2k^2 + rk^4) - qmk^2(4 - Q + k^2)}{(1 + 4rk^2 + rk^4)^2 + (qk)^2} \rightarrow (\text{частота}) \quad (3)$$

$$I(k) = -k^2 \frac{m(4 - Q + k^2)(1 + 4rk^2 + rk^4) - rqGk^2(4 + k^2)}{(1 + 4rk^2 + rk^4)^2 + (qk)^2} \rightarrow (\text{инкремент}) \quad (4)$$

Безразмерные параметры имеют следующие выражения:

пассивные: $r = Lh/(16\eta R_0)$ (вязкий), $m = \mu h/(16\omega_0 \eta R_0)$ (упругий);

активные: $Q = \gamma_0/\mu$ (основной), $q = (h/2R_0)(\partial\gamma/\partial\sigma)$ (сдвиговый);

гравитационный: $G = \rho g R_0/(4\eta\omega_0)$,

где ω_0 – характерная частота. Анализ дисперсионных характеристик показывает, что существует длинноволновый инкремент неустойчивости за счет достаточно сильной активности гладкомышечных волокон. Если параметр основной активности Q увеличивается, то область длинноволнового инкремента расширяется. На рис.3 представлены дисперсионные кривые при изменении параметра $Q = 0; 4; 8$ ($m = 1; r = 1; q = -2; G = 0$).

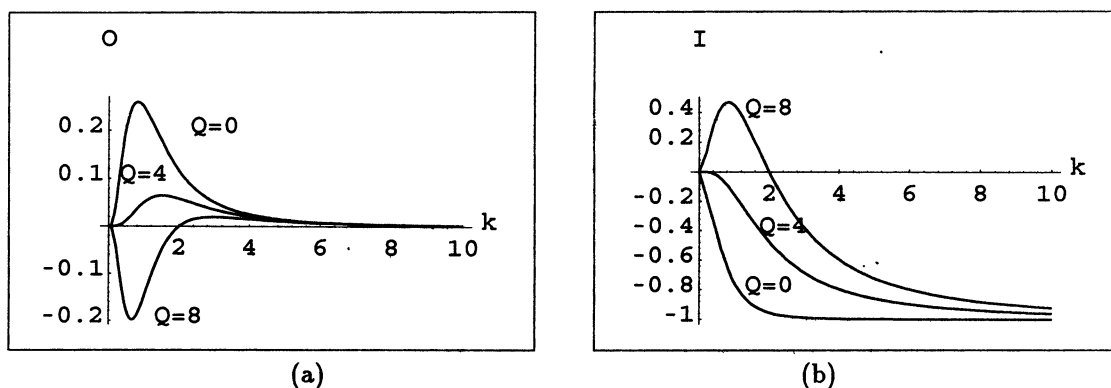


Рисунок 3: дисперсионные кривые от основной активности Q : (а) частота, (б) инкремент.

1.1.1 Сосуды с реакцией на кровоток

В этом случае давление внутри сосуда может быть постоянным. Данный тип регуляции характерен для мышечных артерий диаметром 0,1–1,5 мм. В данной модели активное напряжение зависит от сдвигового напряжения на стенке сосуда: $\gamma = \gamma(\sigma)$. Анализ показывает, что наличие такого рода регуляции может привести к стабилизации, устойчивости малых возмущений.

При увеличении параметра активного сдвигового напряжения q ($q < 0$) величина длинноволнового инкремента уменьшается. На рис.4 представлены дисперсионные кривые при изменении параметра $q = -1; -3; -9$ ($m = 1; r = 1; Q = 8; G = 0$).

1.1.2 Влияние силы тяжести

Влияние гравитации на течение крови в сосуде неоднозначно. При определенных соотношениях между параметрами гравитации (G) и сдвиговой активности (q) область неустойчивости может возникнуть и расширится. На рис.5 представлены дисперсионные кривые при изменении параметра $G = -8; 0; 5$ ($m = 1; r = 1; Q = 0; q = -1$). Здесь область неустойчивости в отличие от рис.3 и 4 не примыкает к $k = 0$.

Возникают периодические пульсации с характерным периодом единицы секунд. Эти пульсации являются неким начальным профилем. Исследование эволюции этого начального возмущения по сосудам других поколений показывает, что локальное расширение сосуда будет эволюционировать согласно обобщенного уравнения типа Бюргерса. Большая нелинейность, приводящая к укручению

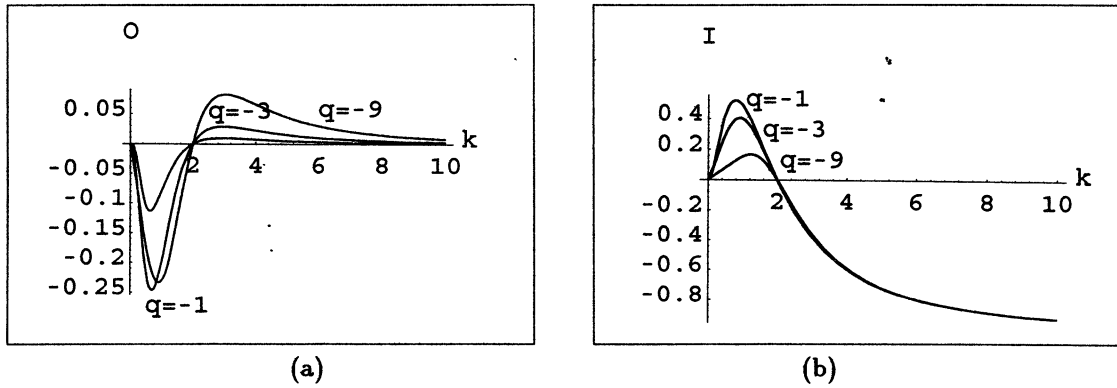


Рисунок 4: дисперсионные кривые от сдвиговой активности q : (а) частота, (б) инкремент.

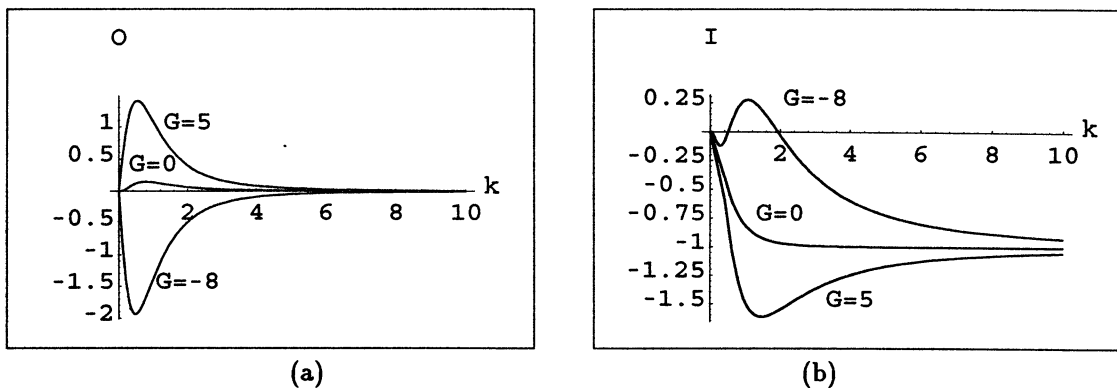


Рисунок 5: дисперсионные кривые от гравитации G : (а) частота, (б) инкремент.

фронта, определяется ускорением свободного падения. Укручение фронта профиля происходит довольно быстро – за доли секунды. В результате из-за достаточно большой скорости распространения возмущения получаются короткие во времени пульсации радиуса сосуда с крутым фронтом на фоне медленного расширения сосуда за счет его наполнения кровью при дозированных воздействиях.

1.2 Автоволновые процессы

Модель описывает автоволны в малых артериальных сосудах, а также в лимфатических сосудах диаметром от 20 – 100 мкм до 1 – 2 мм. Существуют работы, где описаны экспериментально наблюдаемые волновые процессы в сосудах. Приводятся значения скорости V распространения расширения сосуда от 0,2 – 5 мм/с до 10 мм/с.

Наличие падающего участка в сосудах S – и N – типа при определенных условиях может дать неустойчивость, приводящую к автоволнам. При этом характерный пространственный размер автоволны может быть существенно меньше длины сосуда. В сосуде могут существовать волны различного типа (локализованные, перепадные, сжатия, расширения) (см. рис.6–7а).

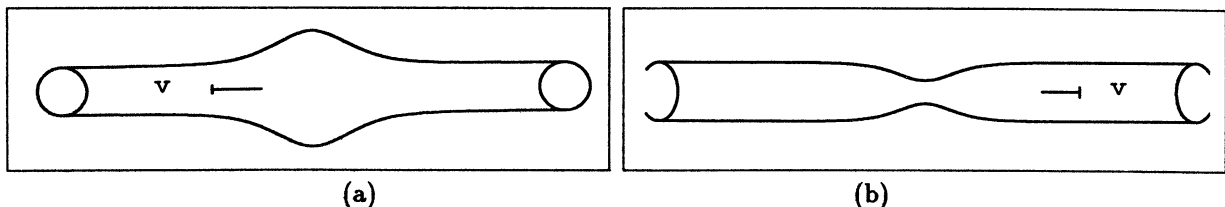


Рисунок 6: автоволны в S -сосуде: (а) локальное расширение, (б) локальное сжатие.

Кроме выраженных волновых процессов существуют колебательные — вазомции (спонтанные сокращения) с частотами 0,05 – 2 Гц. Возможны квазистохастические движения.

Рассчитаны эффекты транспорта жидкости (крови, лимфы) в микрососудах (при помощи теории бифуркации), причем эффект может быть как прокачивающим, так и запирающим в зависимости от величины активной нелинейности. Для артериальных микрососудов (S -тип) расход крови через сосуд локализован в пределах автоволны, причем эффект автопрокачки небольшой. Для сосудов лимфатического русла (N -тип), в котором отсутствует центральный насос (в отличие от сердца для артериальной системы) автоволна перепадного типа осуществляет значительную прокачку, причем наличие клапанов определяет ее направление.

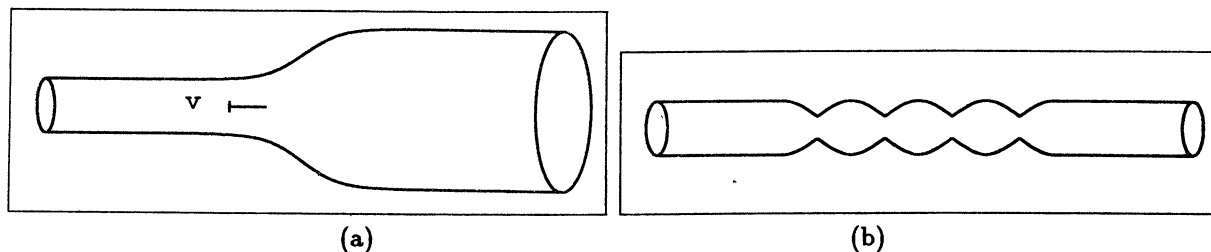


Рисунок 7: (а) автоволна расширения в N -сосуде, (б) автоструктуры в S -сосуде.

1.3 Стоячие диссипативные структуры

Существуют автоструктуры диаметра (просвета) сосуда, так называемые стоячие диссипативные структуры. Их относительный характерный пространственный размер, как следует из анализа модели, лежит в пределах 0,04–0,7; то есть – от очень узких пережатий до достаточно широких. Одним из важных режимов является существование при определенных параметрах неподвижных структур, похожих на гофрированную трубку (см. рис.7б).

2 Пространственные структуры кровотока в ткани

Структурная особенность биоткани заключается в наличии сильно разветвленной сети кровеносных сосудов разного порядка (калибра). Активность ткани связана с гладкомышечными клетками, входящими в стенку сосудов, а также со скелетной мышцей ткани, управляемой нервной системой. Трудности получения адекватных уравнений для описания волновых движений связаны с осреднением по пространству с учетом отмеченных структурных особенностей биоткани. Построенные

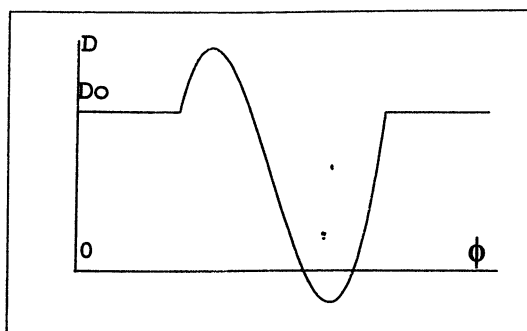


Рисунок 8: нелинейная диффузия.

модели призваны описывать диссипативные структуры (пятна на поверхности ткани) и волны кровонаполнения. Получена нелинейная математическая модель биологической ткани, содержащей активные кровеносные микрососуды, используя приближение двухфазной среды. Используются уравнения неразрывности фаз и их уравнения движения. Предполагается, что плотности фаз равны, среда (и фазы) несжимаемы, среда линейно – упругая и нелинейно – активная. Использован закон фильтрации Дарси. Пренебрегается инерционными слагаемыми (рассматриваются достаточно медленные процессы), активное напряжение считается изотропным (в среднем мышечные волокна микрососудов переплетены так, что нет выделенного направления). Возможны разные случаи в

зависимости от характера нелинейной активной функции γ . Пусть γ зависит от деформации. Тогда нелинейное уравнение относительно пористости ткани (объемного содержания крови) ϕ имеет вид:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (5)$$

$$D = D(\phi) = D_0(1 + U); U = \beta \frac{\partial \gamma}{\partial \phi}; D_0 = \frac{(\lambda + 2\mu)(1 - \phi_0)k}{\eta}; \beta = \frac{1 - \phi_0}{\lambda + 2\mu} \quad (6)$$

Здесь $D_0 > 0$ включает упругость твердой фазы (коэффициенты Ламе λ и μ), вязкость крови (η), эффективную проницаемость крови в ткани (k); U включает активность $\gamma(\phi)$, причем ϕ_0 – фоновая пористость. В зависимости от знака и величины U коэффициент диффузии D может быть как положительным, так и отрицательным. Последний случай имеет место, если уровень активности гладкомышечных элементов среды достаточно высок и рабочая точка находится на падающем участке кривой $\gamma(\phi)$ (см. рис.8).

Если в исходных уравнениях (1)–(2) пренебречь вязкостью стенки и ее изгибом, а также не учитывать гравитационные эффекты, оставить лишь активность, то получим уравнение диффузионного типа с активностью, по форме совпадающее с (5).

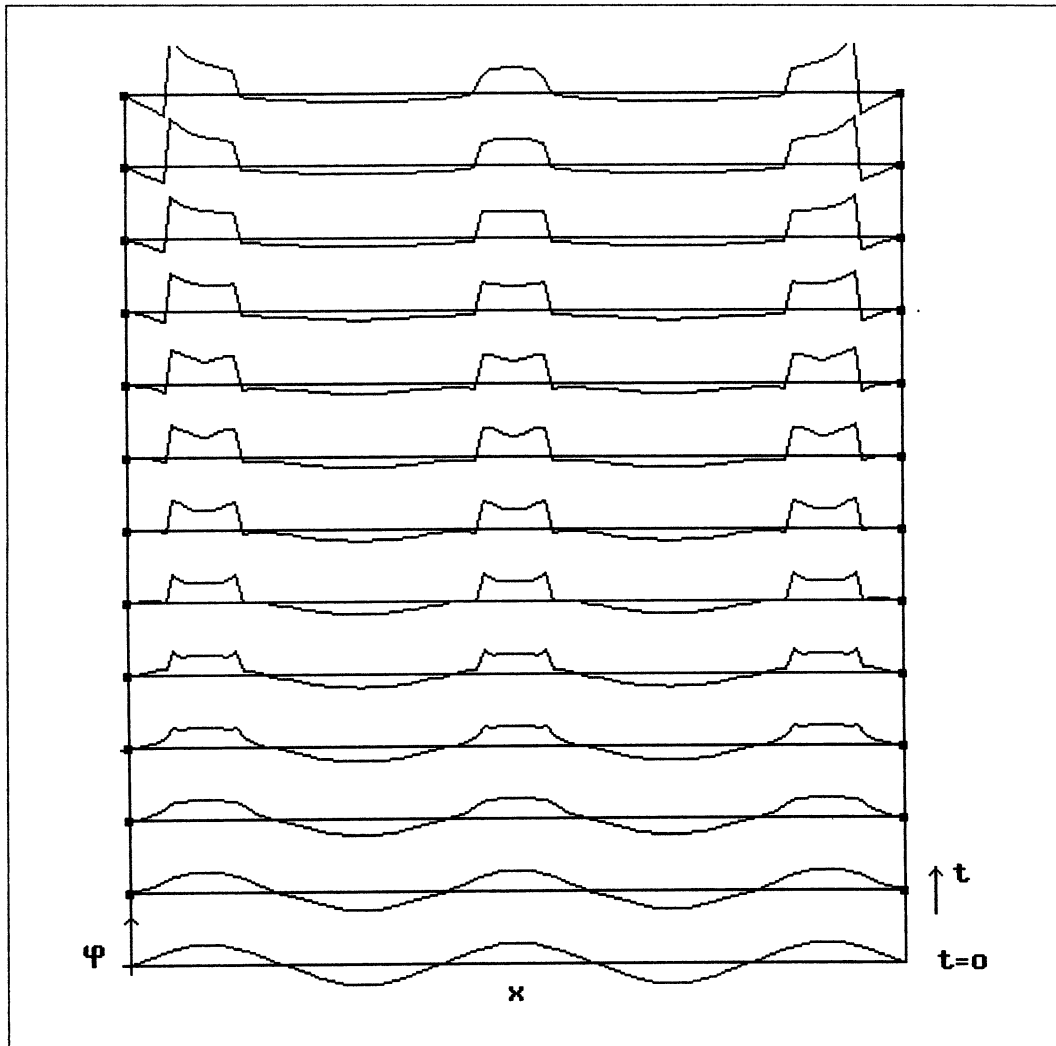


Рисунок 9: динамические структуры кровотока в ткани (5 полупериодов).

Легко видеть, что в линейной задаче имеется неустойчивость. Можно показать прямым интегрированием нелинейного уравнения (5) по всей оси x от $-\infty$ до $+\infty$, что справедливы инварианты

(моменты) по времени t для финитных зависимостях $\phi(x, t)$ и $\gamma(\phi)$. Это означает, что площадь под финитной кривой $\phi(x, t)$ сохраняется в любой момент времени; а также сохраняется центр тяжести этой кривой, что означает несмещение кривой. Моменты более высокого порядка, вообще говоря, не сохраняются.

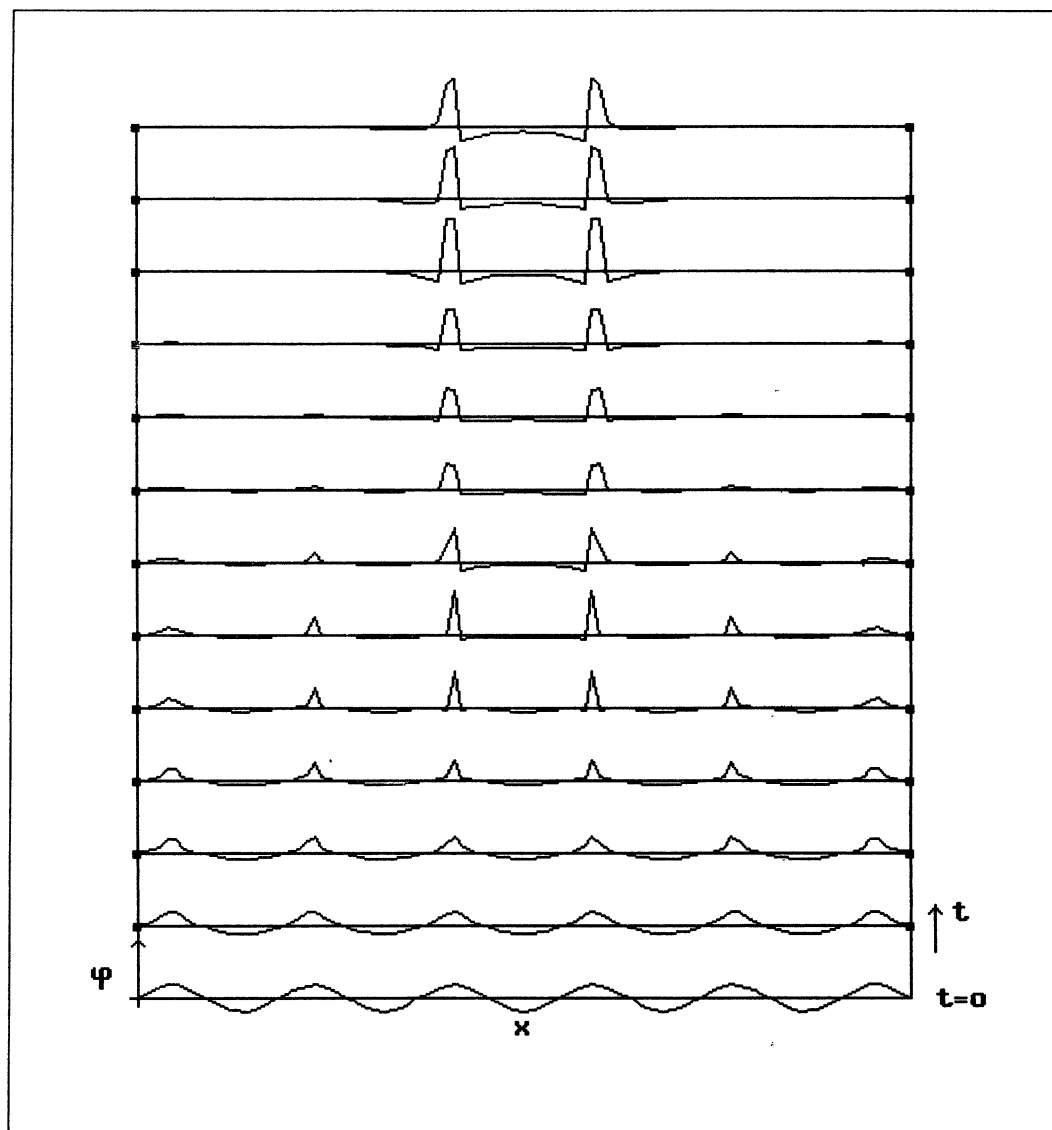


Рисунок 10: динамические структуры кровотока в ткани (11 полупериодов).

В общем случае пятна могут как бы вырастать из начальных условий. Численные решения полученных нелинейных уравнений дают процесс изменения распределения объемного содержания жидкости в такой среде при различных условиях (см., например, рис.9, 10).

Предложенное модельное описание соответствует наблюдениям на сосудах. Описанные явления могут быть использованы для оценки механических параметров сосуда и кровотока, а также в качестве тестирования уровня функционирования сосудистой периферии.

Благодарность

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (код проекта N 94-02-06075).

Литература

- [1] И.Г. Дик, И.З. Поясов “Моделирование процессов регуляции кровообращения”, *Физиология кровообр.: Регуляция кровообр. (Рук-во по физиол.)*, Л., Наука, 1986, сс. 546 – 573.
- [2] Д.Б. Бассингтуэйт, Дж.Х.Г.М. Ван Бек “Молния и сердце: фракталы в кардиологии”, *ТИИЭР*, 1988, Том 76, No 6, сс.60–67.
- [3] Э.Э. Годик, Ю.В. Гуляев, “Человек глазами радиофизики”, *Радиотехника*, 1991, No 8, сс.51–62.
- [4] В.А. Егоров, В.М. Москал, С.А. Регирер, Н.Х. Шадрина, “Механогенные реакции сосудов при пульсирующем потоке: теоретические предсказания”, *Физиол. журнал СССР*, 1991, Том 77, No 9, сс.115 —122.
- [5] Б.Н. Клочков, А.М. Рейман, Ю.А. Степанянц, “Нестационарные течения жидкости в трубках из вязкоупругого активного материала”, *Изв. АН СССР, Мех.жидк.газа*, 1985, No 3, сс.94–102.
- [6] Е.Е.Киреева, Б.Н.Клочков, “Волновые движения жидкости в активной вязкоупругой трубке вблизи границы неустойчивости”, *Изв. АН СССР, Мех.жидк.газа*, 1986, No 3, сс. 17–24.
- [7] С.А. Канышева, Б.Н. Клочков, В.Н. Толков, В.Г. Яхно, “Моделирование динамических структур в мышечной ткани”, *Медицинская биомеханика. Тез. докл. Межд. конф. “Достижения биомеханики в медицине”*, сентябрь 12–15, Рига, 1986, Том 4, сс.145 – 150.
- [8] Б.Н. Клочков, “О моделях течения жидкости в микрососудах”, *Коллективная динамика возбуждений и структурообразование в биол. тканях*, ИПФ АН СССР, Горький, 1988, сс.156–164.
- [9] Б.Н. Клочков, “О течении жидкости в мягкой оболочке под действием силы тяжести”, *Проблемы экологии и мягкие оболочки, Тез. докл. всесоюзн. конф.*, Севастополь, 1990, сс.35–36.
- [10] B.N. Klochkov, E.N. Pelinovsky, “Nonlinear models of blood flow in tissues”, *Lecture notes of the Int. Centre of Biocybernetics seminars, Biomechanics, Warsaw*, 1992, pp.70–81.
- [11] V.A. Antonets, B.N. Klochkov, “Blood vessels network as active medium”, *Second World Congress of Biomechanics, Abstracts*, July 10–15, Amsterdam, 1994, Vol.1, p.225.
- [12] B.N. Klochkov, E.N. Pelinovsky, A.M. Reyman, “Mathematical nonlinear model of inhomogeneous distribution blood flow in tissue”, *Proc. of XVth Congress of the Int. Society of Biomechanics*, July 2–6, Jyvaskyla, Finland, 1995, pp.486 –487.
- [13] Б.Н. Клочков, “Автоструктуры распределения кровотока в сосуде и в ткани”, *Критерии самоорганизации в физ., хим. и биол. системах, Тез. докл. Межд. конф.*, М.–Суздаль, 1995, с.48.

SELF-ORGANIZATION CIRCULATION IN TISSUE

B. N. Klochkov, A. M. Reiman

The objective of proposed research work is to develop physical models for separate links of the blood circulation system and to analyze the possibility of link matching, to investigate self-organization processes in vascular system. This processes include autowave motion in single vessel with different mechanisms of regulation of blood flow and nonuniform distribution blood in tissues. For investigate this phenomena there are proposed to use continuum description of tissues with vessels network as active medium and transport system, consisted of active links. This should help make up the idea of the physical science contribution to a better knowledge of blood circulation. Regulation of blood flow in active vessel is a result of action of pressure, deformation and velocity of blood flow on excitation vessel's soft muscle. Mathematical modeling show that there are existence of waves and vasomotion in vessels (self-wave processes in blood and lymphatic microvessels, distributed oscillations of radius, fluid transport effects). Influence of gravitation on dynamic structures of blood flow is investigated. The mechanics of continuum approach include a two-phase model of tissue blood supply. Mathematical nonlinear model of inhomogeneous distribution blood flow in tissue is received. This model describe the dissipative structures (the spots on the surface of tissue) and blood filling waves.

ДИНАМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ КОЛЛАПСА В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

П. М. Лушников

Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН,
ул. Косыгина, 2, ГСП-1, 117334, Москва, Россия
т. 339 09 86 (д) e-mail: lushniko@landau.ac.ru

Реферат

В силу оценки снизу кинетической энергии получено достаточное условие волнового коллапса в сверхкритическом нелинейном уравнении Шредингера (НУШ), что позволяет назвать критерий коллапса динамическим. Выявлена связь динамического критерия с сильным режимом коллапса НУШ. Численные расчеты подтверждают нетривиальность динамического условия коллапса. Используемая при выводе критерия коллапса аналогия с движением ньютоновской частицы в потенциале дает возможность обобщить достаточные условия коллапса в ряде других нелинейных уравнений в частных производных.

Волновые коллапсы или образование за конечное время особенностей в решениях нелинейных уравнений в частных производных играют важную роль во многих физических моделях взаимодействия нелинейных волн как эффективные механизмы концентрации энергии. Среди таких моделей одной из наиболее универсальных является нелинейное уравнение Шредингера (НУШ):

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0, \quad \sigma > 0, \quad (1)$$

описывающее самодействие волновых пакетов в средах с нелинейностью степени $2\sigma + 1$. Наиболее часто встречается случай $\sigma = 1$, тогда НУШ служит моделью распространения мощного лазерного импульса в среде с центром инверсии [1], эволюции ленгмюровских волн в плазме [2] и т.д. НУШ может быть записано в гамильтоновой форме:

$$i\psi_t = \frac{\delta H}{\delta \psi^*}, \quad H = \int (|\vec{\nabla}\psi|^2 - \frac{1}{\sigma+1}|\psi|^{2\sigma+2})d^D r \quad (2)$$

где гамильтониан H и число частиц $N = \int |\psi|^2 d^D r$ являются интегралами движения, а D – размерность пространства.

В квантовой механике (1) имеет буквальный смысл уравнения Шредингера для волновой функции конденсата слабо неидеального бозе газа с потенциалом притяжения $U = -|\psi|^{2\sigma}$ [3]. На этом основании будем рассматривать для НУШ кинетическую $\bar{K} = \frac{X}{N}$ и потенциальную $\bar{U} = -\frac{(\sigma+1)Y}{N}$ энергии, где $X = \int |\vec{\nabla}\psi|^2 d^D r$, $Y = \frac{1}{\sigma+1} \int |\psi|^{2\sigma+2} d^D r$.

Наличие коллапса в НУШ можно установить из рассмотрения эволюции во времени величины $A = \int r^2 |\psi|^2 d^D r$, имеющей смысл некоторой средней ширины начального распределения $|\psi|$. Используя (1), получаем для первой производной по времени:

$$A_t = 2i \int x_\alpha \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_\alpha} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \psi^* \right) d^D r, \quad (3)$$

где по повторяющимся индексам идет суммирование. Повторное дифференцирование величины A_t по времени и последующее интегрирование по частям приводят к равенству, часто называемому теоремой вириала:

$$A_{tt} = 8 \int |\vec{\nabla}\psi|^2 d^D r - \frac{4\sigma D}{\sigma+1} \int |\psi|^{2\sigma+2} d^D r = 4\sigma D H - 4(\sigma D - 2) \int |\vec{\nabla}\psi|^2 d^D r. \quad (4)$$

В случае $\sigma D \geq 2$ из последнего неравенства следует:

$$A_{tt} \leq 4D\sigma H \quad (5)$$

и при $H < 0$ положительно определенная величина A становится в силу (1) отрицательной за конечное время, что означает появление сингулярности в решении данного НУШ [2, 4]. Причем уменьшение величины A вблизи точки коллапса свидетельствует о самофокусировке (сжатии) исходного

волнового пучка. В случае $H > 0$, $\sigma D \geq 2$ возможен как коллапс, так и распыление начального возмущения. Хотя вблизи точки образования сингулярности НУШ теряет свою применимость и в действие вступают диссипативные или какие-либо другие ограничительные механизмы, значительное сжатие волнового пакета может быть описано в рамках НУШ. Коллапс таким образом оказывается эффективным механизмом диссипации энергии. В этой связи оказывается весьма важным уметь предсказывать наличие или отсутствие коллапса для различных классов начальных условий. При $\sigma D < 2$ коллапс невозможен [5]. Значение $\sigma D = 2$ является критическим, а зависимость $A(t)$ полностью определяется теоремой вириала (4). Везде ниже будет рассматриваться наиболее важное в приложениях сверхкритическое НУШ с $D = 3$, $\sigma = 1$. Все результаты однако тривиально обобщаются для любого сверхкритического ($\sigma D > 2$) НУШ. В рассматриваемом случае достаточное условие коллапса $H < 0$ было значительно уточнено в [5]. Было найдено, что при $X > X_N$ из (4) следует неравенство:

$$A_{tt} \leq 12(H - H_N), \quad (6)$$

где X_N и H_N - значения величин X и H на основном солитонном решении уравнения (1):

$$\psi_0 = \lambda R(\lambda \vec{x}) e^{i\lambda^2 t}, \quad -\lambda^2 R + \Delta R + R^3 = 0, \quad (7)$$

причем $\lambda^2 = \frac{N_0^2}{N}$, $N_0 = 18.94$, $H_N = \frac{N_0^2}{N}$, $X_N = \frac{3N_0^2}{N}$. Одновременно было показано, что при $H < H_N$, $X < X_N$ имеет место дефокусировка (т.е. распыление исходного волнового пакета). Численные расчеты показывают, что при $H > H_N$ возможны как коллапс, так и дефокусировка. Согласно (5) коллапс заведомо будет иметь место при условии ([5]):

$$A_t|_{t=0} \leq -4\sqrt{HA}|_{t=0}, \quad H > 0. \quad (8)$$

В настоящей работе найдено достаточное условие коллапса, основанное на оценке кинетической энергии НУШ. Это позволяет назвать, с некоторой степенью условности, полученный критерий коллапса "динамическим", в отличие от "статического" критерия [5], где оценивалась потенциальная энергия. Динамический критерий коллапса естественным образом дополняет результаты [5]. В частности, на основании исследования гауссовых начальных условий, будет показано, что при $H > H_N$ этот критерий может предсказывать коллапс и при нарушении неравенства (8). Кроме того, будет выявлена связь динамического критерия коллапса с режимом так называемого сильного коллапса НУШ ([6]).

Полагая $\psi = Re^{i\phi}$ ($R = |\psi|$) и используя далее неравенство Коши-Буняковского, получаем из теоремы вириала (3):

$$|A_t| = 4 \left| \int x_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} R^2 d^D r \right| \leq 4 \sqrt{\int r^2 |\psi|^2 d^D r} \sqrt{\int (\vec{\nabla} \phi)^2 R^2 d^D r}. \quad (9)$$

В тоже время, X можно переписать следующим образом:

$$X = \int |\vec{\nabla} \psi|^2 d^D r = \int (\vec{\nabla} R)^2 d^D r + \int (\vec{\nabla} \phi)^2 R^2 d^D r, \quad (10)$$

а число частиц N связать с величиной A :

$$N = \int |\psi|^2 d^D r = -\frac{2}{D} \int (\vec{x}, \vec{\nabla} R) R \leq \frac{2}{D} \sqrt{\int r^2 |\psi|^2 d^D r} \sqrt{\int (\vec{\nabla} R)^2 d^D r}. \quad (11)$$

Используя (9) – (11) и вспоминая, что мы положили $D = 3$, $\sigma = 1$, получаем из (4) основное дифференциальное неравенство:

$$A_{tt} = 12H - 4 \int |\vec{\nabla} \psi|^2 d^3 r \leq 12H - 9 \frac{N^2}{A} - \frac{A_t^2}{4A}. \quad (12)$$

С помощью замены $A = B^{\frac{4}{5}}$ это неравенство приобретает вид:

$$B_{tt} \leq 15HB^{\frac{1}{5}} - \frac{45}{4} \frac{N^2}{B^{\frac{3}{5}}}, \quad (13)$$

допускающий простую механическую аналогию. Чтобы понять ее запишем это неравенство в виде равенства:

$$B_{tt} = 15HB^{\frac{1}{5}} - \frac{45}{4} \frac{N^2}{B^{\frac{3}{5}}} - g^2(t), \quad (14)$$

где $g^2(t)$ - некоторая неизвестная неотрицательная функция времени. Тогда B имеет смысл координаты "частицы", движущейся под действием двух сил: консервативной силы $F_1 = -\frac{\partial U}{\partial B}$ с потенциалом:

$$U(B) = -\frac{25}{2}HB^{\frac{6}{5}} + \frac{225}{8}N^2B^{\frac{2}{5}} \quad (15)$$

и дополнительной силы $f_2 = -g^2(t)$, тянущей частицу к началу координат $B = 0$. За счет этой силы энергия "частицы" зависит от времени: $E(t) = \frac{B_t^2}{2} + U(B)$. Коллапсу соответствует достижение "частицей" начала координат за конечное время. Причем если "частица" достигнет нуля без учета силы $-g^2(t)$, то она по-прежнему достигнет нуля при учете этой дополнительной отрицательной силы. При $H < 0$ частица всегда упадет в начало координат. Везде далее будем рассматривать случай $H > 0$, тогда потенциальная энергия $U(B)$ имеет барьер с максимумом в точке $B = B_m$, где $B_m = \left(\frac{3}{4} \frac{N^2}{H}\right)^{\frac{5}{4}}$. Значение энергии $E_m = U(B_m)$ является критическим, так как частица сможет преодолевать барьер только при $E(0) > E_m$. Это дает достаточные условия коллапса:

а) при $B(t=0) < B_m$, $E(0) < E_m$ "частица" не сможет перевалить барьер вправо и поэтому всегда упадет в нуль за конечное время;

б) при $E(0) > E_m$, $B_t(t=0) < 0$ "частица" гарантированно перевалит барьер справа-налево в случае $B(t=0) > B_m$ и, соответственно, упадет в нуль за конечное время; тем более она упадет в нуль в случае $B(t=0) \leq B_m$.

Рассмотрим поведение решения уравнения (14) при $B \rightarrow 0$, $B_t < 0$, соответствующее коллапсирующему решению. В этом случае величины $B^{\frac{6}{5}}$, $B^{\frac{2}{5}}$ являются исчезающе малыми и, пренебрегая ими, получаем после двукратного интегрирования этого уравнения:

$$B(t) = -\int_{t_0}^t \sqrt{2E(t_0) - \int_{t_0}^{t''} g^2(t') B_t' dt' dt''} \leq -\sqrt{2E(t_0)}(t - t_0),$$

где $B(t_0) = 0$, $t \leq t_0$. Или возвращаясь к переменной A :

$$A = B^{\frac{1}{5}} \leq (2E(t_0))^{\frac{2}{5}}(t_0 - t)^{\frac{1}{5}}. \quad (16)$$

Заметим, что A_t обращается в $-\infty$ в точке $t = t_0$, в отличие от использовавшихся ранее критериев коллапса [2, 5], где падение "частицы" в нуль происходило с конечной скоростью A_t . Так, согласно (6), при $A \rightarrow 0$, $A_t < 0$ имеем:

$$A(t) \leq 12(H - H_N)t_0(t - t_0) \quad (17)$$

Поэтому критерий (12) обеспечивает большую скорость падения "частицы" в начало координат, чем (6). Наибольший интерес представляет однако не скорость падения сама по себе, а время падения в нуль: $A(t_0) = 0$. Это время будет, вообще говоря, различным для (17) и (16). Обозначим это время через t_{0a} и t_{0b} для (16) и (17) соответственно. А через $A^{(a)}$ и $A^{(b)}$ - соответствующие решения уравнений (6) и (12), где знаки неравенств заменены на точные равенства. Пусть при $t = t_i$ начальные условия для обоих решений совпадают:

$$A^{(a)}(t_i) = A^{(b)}(t_i), \quad A_t^{(a)}(t_i) = A_t^{(b)}(t_i) < 0. \quad (18)$$

При этом $A^{(a,b)}(t_i)$ полагаются достаточно малыми, чтобы при $t \leq t_i$ были справедливы зависимости (17) и (16). Подставляя их в (18), получаем, что $t_{0b} < t_{0a}$. Таким образом, критерий (12) обеспечивает более быстрое, при одинаковых начальных условиях, достижение нуля, чем (6). Подчеркнем, что этот результат получен только для асимптотической области $A(t) \rightarrow 0$.

Режим (16) обращения A в нуль соответствует так называемому сильному коллапсу уравнения (1) - квазиклассическому сжатию волнового пакета [6]. При сильном режиме коллапса в особенность захватывается конечная энергия в противоположность слабому коллапсу [6], при котором в точку особенности попадает формально говоря нулевая энергия. Это связано с тем, что слабый коллапс описывается автомодельным решением

$$\psi = \frac{1}{(t_0 - t)^{\frac{1}{2} + i\alpha}} \chi\left(\frac{r}{(t_0 - t)^{\frac{1}{2}}}\right), \quad \alpha = 0.545 \dots, \quad (19)$$

справедливым лишь в ограниченной окрестности точки сингулярности и с учетом этого в коллапс захватывается конечное количество энергии, определяемое характерными значениями $|\psi|$, при которых нарушается применимость уравнения (1).

Численные и аналитические исследования показывают, что на практике реализуется слабый коллапс, а сильный оказывается неустойчивым [6, 7]. Однако полученный выше критерий коллапса (12) "ничего не знает" об устойчивости или неустойчивости конкретных решений НУШ и указывает на существование решений, обращающихся в нуль более быстро, чем решение (19). Несмотря на то, что данный критерий является достаточным, но не необходимым, он дает нижнюю оценку зависимости $A(t)$, совпадающую с ответом, отвечающим режиму сильного коллапса. В частном случае квазиклассических начальных условий сильный коллапс может наблюдаться в численном счете, где неустойчивость не успевает разрушить зависимость $A \sim (t_0 - t)^{\frac{1}{2}}$ [9].

В работе [5] была показана особая роль основного солитонного решения (7). На этом решении неравенство (6) превращается в точное равенство и небольшие вариации (7) могут привести как к коллапсирующим, так и дефокусирующим (расплывающимся) решениям. Найдем теперь при каких начальных условиях дифференциальное неравенство (12) превращается в точное равенство. Для этого достаточно заметить, что с квантовомеханической точки зрения неравенства (9) – (11) представляют собой соотношения неопределенности Гейзенберга. Эти неравенства становятся точными на классе функций:

$$\psi_0 = p e^{-\alpha r^2 - i\kappa r^2}, \quad (20)$$

где p, κ - произвольные числа, $\alpha > 0$. Для начальных условий (20) величины $A|_{t=0}, A_t|_{t=0}, H, N$ вычисляются явно. К примеру, при $\kappa = 0$, $p^2/\alpha = 2^{5/2}$ получаем: $\frac{H}{H_N} = \frac{16\pi^3}{N_0^2} \simeq 1.38 \dots$, $B|_{t=0} = B_m$, $B_t|_{t=0} = 0$, т.е. "частица" находится на вершине барьера с нулевой начальной скоростью. Если теперь, оставляя неизменным отношение p^2/α , положить $\kappa = \delta^2$, где δ^2 - сколь угодно малое положительное число, то начальная скорость $B_t|_{t=0} < 0$ и критерий (12) гарантирует наличие коллапса. При этом неравенство (8) оказывается нарушенным при указанных значениях параметров p, κ, α поскольку начальная "скорость" $B_t|_{t=0}$ может быть взята сколь угодно близкой к нулю. Поэтому критерий [5] не предсказывает коллапс в этом случае и данный частный вид начальных условий показывает нетривиальность динамического критерия коллапса. В тоже время, для (20) существует область параметров, где $H/H_N \gg 1$, $\kappa > 0$, причем как критерий (12), так и [5] предсказывают коллапс. Аналогичные результаты могут быть получены и для гипергауссовых начальных условий $\psi_0 = p \exp(-\alpha r^n - i\kappa r^n)$, $n > 1$. Однако уже в этом случае область значений параметров p, κ, α , для которой только динамический критерий предсказывает коллапс, сильно изменяется с ростом величины n . Поэтому эта область существенным образом зависит от начальных условий и, в отличие от критерия коллапса [5], по-видимому не может быть определена в общем случае в терминах интегралов движения H, N . Таким образом при $H > H_N$ конструктивный путь для выяснения возможности коллапса состоит в исследовании как выполнения неравенства (8), так и динамического критерия (12). В случае $H \leq H_N$ исчерпывающий ответ дан в [5] и применение динамического критерия излишне, хотя и в этой области он может предсказывать наличие коллапса.

Численный эксперимент показал, что при гауссовых начальных условиях зависимости $A(t)$, найденные как прямым численным интегрированием (1), так и интегрированием уравнения (14), где член $-g^2(t)$ полагался пренебрежимо малым, совпадают с хорошей точностью вплоть до точки коллапса. Численный расчет проводился при $D = 3$, $\sigma = 1$ для сферически-симметричного уравнения (1) со схемой типа предиктор-корректор с граничными условиями, аналогичными использовавшимся в [7] и начальным условием (20). Коллапс реально наступает при $A > 0$, он является слабым и в окрестности точки сингулярности следует автомодельному закону (19). Так как коллапс слабый, то в него захватывается только конечная доля полного числа частиц N , а вклад от коллапсирующей области в A оказывается пренебрежимо малым при $t \rightarrow t_0$ и в этом пределе динамика $A(t)$ определяется медленно эволюционирующими хвостами распределения $|\psi|$. Это объясняет, почему критерий (12) правильно описывает динамику $A(t)$ вплоть до самой точки коллапса.

При некоторых параметрах коллапс возможен даже при условии возрастания $A(t)$. В частности, для гауссовых начальных условий это будет иметь место при $\kappa = 0$, $\alpha = 0$, $2.0768 \dots < p < 2.3774 \dots$. Эта область параметров не может быть описана критерием коллапса (12). Таким образом, для гауссовых начальных условий точность критерия коллапса (12) оказывается близкой к точности достаточного условия коллапса в критическом $\sigma D = 2$ НУШ [4], где, как следует из (4), динамика $A(t)$ известна точно. В этом случае коллапс заведомо происходит при $H < 0$, однако он возможен и при условии возрастания A при $H > 0$ [8]. Указанная аналогия между точностью критериев коллапса в $3D$ и $2D$ носит однако очень ограниченный характер, поскольку она имеет место для

частного класса начальных условий сверхкритического НУШ. Для негауссовых начальных условий точность критерия коллапса (12) ухудшается и он в лучшем случае может давать лишь качественно верную динамику $A(t)$.

Помимо НУШ достаточные условия коллапса получены для различных модификаций уравнения Буссинеска [10, 11], трехмерного кубического уравнения Кадомцева-Петвиашвили [12], нелинейного уравнения Клейна-Гордона [13]. Аналогично (12) все известные мажорирующие дифференциальные неравенства, используемые при выводе достаточных условий коллапса, могут быть приведены к уравнению Ньютона для движения частицы с координатой R под действием потенциальной силы и дополнительной знакопостоянной силы $\alpha g(t)^2$, где R - некоторая положительно определенная величина, $\alpha = const$. В зависимости от знака α возможны две ситуации:

i) $\alpha < 0$ Если положительно определенная величина R достигнет нуля за конечное время без учета силы $\alpha g^2(t)$, то она заведомо достигнет нуля и при учете этой отрицательной силы. Этому случаю соответствуют критерии коллапса НУШ [5] и (12).

ii) $\alpha > 0$ Если координата частицы R обратится в бесконечность за конечное время без учета положительной силы $\alpha g^2(t)$, то она заведомо обратится в бесконечность при добавлении этой силы. Этому случаю соответствуют критерии коллапса для уравнения Буссинеска и нелинейного уравнения Клейна-Гордона.

Заметим, что полученные условия i),ii) являются более общими, чем рассматривавшиеся ранее [5], поскольку не налагают ограничений на знак $R_t|_{t=0}$. К примеру, это позволяет отказаться от условия $R_t|_{t=0} > 0$ в работе [14]. Условие ii) обобщает также результат [15], согласно которому при $\alpha > 0$ для коллапса достаточно, чтобы потенциальная сила, действующая на частицу была всегда положительной (конечно здесь подразумевается, что потенциал спадает достаточно круто, чтобы привести к коллапсу).

В заключение автор благодарит Е.А.Кузнецова за полезные обсуждения. Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант 94-01-00898) и INTAS (Грант 93-2492) в рамках программы Международного Центра Фундаментальной Физики в Москве.

Ссылки

- [1] А.Л.Берхоер, В.Е.Захаров. ЖЭТФ, **58**, 903 (1970).
- [2] В.Е.Захаров. ЖЭТФ, **62**, 1745 (1972).
- [3] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М. Наука (1980).
- [4] С.Н.Власов, В.А.Петрищев, В.И.Таланов. Изв.ВУЗ. Радиофизика, **12**, 1353 (1970).
- [5] S.K.Turitsyn. Phys.Rev.E., **47**, R13 (1993). Е.А.Kuznetsov, J.J.Rasmussen, K.Rypdal and S.K.Turitsyn. Physica D (1995) (in press).
- [6] В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов. ЖЭТФ, **91**, 1310 (1986).
- [7] N.E.Kosmatov, V.F.Shvets and V.E.Zakharov. Physica D, **52**, 16 (1991).
- [8] S.Dyachenko, A.C.Newell, A.Pushkarev and V.E.Zakharov. Physica D, **57**, 96 (1992).
- [9] В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов, С.Л.Мушер. Письма в ЖЭТФ, **41**, 125 (1985).
- [10] В.Калантаров, О.А.Ладыженская. Записки научн. семинара ЛОМИ **69**, 77 (1977).
- [11] S.K.Turitsyn. Phys.Rev.E, **47**, R796 (1993).
- [12] С.К.Турицын, Г.Е.Фалькович. ЖЭТФ, **89**, 258 (1985).
- [13] Е.А.Кузнецов, П.М.Лушников. ЖЭТФ (1995) (в печати).
- [14] S.K.Turitsyn. Phys.Lett. A, **173**, 267 (1993).
- [15] L.Berge. Unpublished (1994).

DYNAMICAL COLLAPSE CRITERION FOR NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

П. М. Лушников

Wave collapse or the formation of singularities in the wave systems in a finite time plays an important role in various branches of physics as one of the most effective mechanism for the localization of the wave energy. From the mathematical point of view, collapse means that the solution of Cauchy problem for some evolution partial differential equation exists only for finite time until some definite moment t_0 and can not be continued for $t > t_0$. The nonlinear Schrödinger equation (NLSE)

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0, \quad \sigma > 0,$$

which is a generic equation modelling a variety of wave phenomena, plays a central role in the wave collapse theory. The development of collapse is associated with a spatial contraction of wave packet. Near to the singularity point NLSE loses its applicability and the growth of amplitude is quenched by some dissipative or any other effects. So the collapse is very effective mechanism of energy dissipation. An important physical task is therefore to find some criteria for the existence of collapse for different classes of initial conditions.

NLSE has integrals of motions such as the Hamiltonian: (2) and the number of particles: $N = \int |\psi|^2 d^D r$. According to the so-called virial theorem [2, 4] for the NLSE we have:

$$A_{tt} = 8 \int |\bar{\nabla}\psi|^2 d^D r - \frac{4\sigma D}{\sigma + 1} \int |\psi|^{2\sigma+2} d^D r = 4\sigma DH - 4(\sigma D - 2) \int |\bar{\nabla}\psi|^2 d^D r,$$

where $A = \int r^2 |\psi|^2 d^D r$ is proportional to the mean-square size of the distribution. Vanishing of A in a finite time imply the formation of singularity in NLSE. According to the virial theorem it takes place for example if $H < 0$, $\sigma D > 2$. We study the case $H > 0$, $\sigma = 1$, $D = 3$ as the most interesting one in physics. But all results can be directly reproduced for the more general case $H > 0$; $\sigma D > 2$.

By using the Cauchy-Schwarz inequalities (9) – (11), one can obtain from the virial theorem the main majoring inequality (12). The majoring inequality is based on the estimation of the kinetic energy of NLSE: $\bar{K} = \frac{\int |\bar{\nabla}\psi|^2 d^D r}{N}$. This is the reason why the sufficient collapse condition obtained is called dynamical criterion. Under the simple substitution (12) reads as (13). This equation allows simple mechanical analogy. To clear up this analogy it is possible to write inequality (13) as equality (14), where $g^2(t)$ is some unknown non-negative function of time. Then B has the meaning of the "particle" coordinate. This "particle" moves under the influence of two forces. The first one is the potential force $f_1 = -\frac{\partial U}{\partial B}$. Its potential is (15). The second one $f_2 = -g^2(t)$ tends to move the "particle" to origo. Due to f_2 the energy of the particle is time dependent: $E(t) = \frac{B^2}{2} + U(B)$. The collapse of NLSE corresponds to the "particle" dropping to origo $B = 0$. If the "particle" reaches origo without taking into account f_2 then it is certain to reach origo under the influence of f_2 . It is possible then to write the sufficient collapse conditions as follows:

- a) $B(t = 0) < B_m$, $E(0) < E_m$
- b) $E(0) > E_m$, $B_t(t = 0) < 0$,

where $B_m = \left(\frac{3}{4} \frac{N^2}{H}\right)^{\frac{5}{4}}$, $E_m = U(B_m)$. The collapse takes place if any of these conditions is satisfied.

On the basis of asymptotic $B \rightarrow 0$ it is possible to show that the dynamical collapse criterion is closely related to the so-called strong wave collapse of NLSE [6].

The comparison of dynamical criterion (12) to [5] is made. It is shown on the example of initial condition (20) that dynamical criterion can predict collapse in the region $H > H_N$, where criterion [5] failes (H_N is the value of Hamiltonian on the ground-state solution (7) of NLSE).

It is pointed out that the above considered mechanical analogy allows us to generalize the sufficient collapse conditions in the number of other nonlinear partial differential equations.

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В ШИРОКОАПЕРТУРНЫХ НЕЛИНЕЙНООПТИЧЕСКИХ И ЛАЗЕРНЫХ СИСТЕМАХ

Н. Н. Розанов

Научно-исследовательский институт лазерной физики
Научный Центр "Государственный оптический институт им. С.И.Вавилова"
Санкт-Петербург 199034, Биржевая линия 12, Россия
E-mail: rosanov@ilph.spb.su

Сопоставлены основные типы и свойства локализованных структур когерентного излучения в описываемых единым обобщенным квазиоптическим уравнением трех случаях: (1) пространственных солитонов в прозрачной пассивной среде с насыщающейся нелинейностью показателя преломления; (2) "лазерных автосолитонов" – локализованных структур в широкоапертурных лазерах с насыщением поглощения; (3) "дифракционных автосолитонов" – локализованных структур в возбуждаемом внешним излучением широкоапертурном нелинейном интерферометре. Рассмотрены свойства одиночных структур и их взаимодействия друг с другом.

1 Введение

Локализованные структуры света, в которых обычное дифракционное (дисперсионное) расплывание уравновешивается нелинейной фокусировкой, обсуждаются в нелинейной оптике практически с момента ее возникновения [1-3]. В сплошной нелинейной среде такие структуры отвечают режиму самоканализирования и именуются обычно пространственными солитонами. В дальнейшем, главным образом в связи с исследованиями оптической бистабильности [4], возник интерес и к локализованным структурам света в системах с обратной связью. Терминология здесь не вполне устоялась; по крайней мере, достаточно кратким служит термин "автосолитон" [5] с соответствующей оптической добавкой. При этом имеется в виду, что соотношение между солитоном и автосолитоном примерно такое же, как между волной и автоволной.

Оптические локализованные структуры вписываются в общий круг явлений самоорганизации (синергетики) [6-8], привнося в него свою специфику. Важным моментом служит замена диффузии, типичной для более традиционных задач самоорганизации в химии, биологии и т.д., на характерную для оптики дифракцию с присущими ей осцилляциями поля. Видимо, в оптике было осознано и особое богатство локализованных диссипативных структур в условиях бистабильности, где для их формирования не требуется развития каких-либо неустойчивостей. Эти обстоятельства стимулировали интенсивные исследования оптических структур, как служащих достаточно прямыми аналогами известных неоптических, так и существенно новых типов [9-11].

В данной работе прослеживается соотношение между локализованными структурами различных типов на довольно простой основе – едином обобщенном квазиоптическом уравнении для огибающей поля. Хотя каждый из вариантов представляет самостоятельный физический интерес, здесь для нас более важно, что такой подход позволяет в наиболее чистом виде выявить влияние характера диссипации и симметрии уравнения на свойства локализованных структур.

Далее в разделе 2 выписывается исходное уравнение и обсуждаются его общие свойства. В следующем разделе 3 рассматриваются пространственные (двумерные) солитоны в прозрачной среде с насыщающейся нелинейностью показателя преломления (диссипация отсутствует). Затем в разделе 4 для схемы лазера с насыщением поглощения (или же сплошной среды с нелинейностью усиления и потерь) демонстрируется значительный рост разнообразия типов локализованных структур (лазерных автосолитонов) в условиях бистабильности. Наконец, в разделе 5 рассматриваются локализованные структуры в возбуждаемом внешним излучением нелинейном интерферометре – дифракционные автосолитоны. Основные выводы содержатся в Заключение.

2 Обобщенное квазиоптическое уравнение

Локализованные структуры в нелинейнооптических системах, рассматриваемых в следующих разделах, описываются обобщенным квазиоптическим уравнением вида

$$i\frac{\partial E}{\partial \zeta} + \Delta_d E + f(|E|^2)E + E_i = 0. \quad (1)$$

Здесь используются безразмерные величины и переменные: E – медленно-меняющаяся комплексная амплитуда (огибающая) электрической напряженности поля, E_i – амплитуда внешнего излучения, Δ_d – оператор Лапласа размерности d ($d = 1, 2, 3$). Комплексная функция f представляет безынерционную оптическую нелинейность среды, в нее же включаются оптические потери. В системе без обратной связи ζ имеет смысл продольной координаты z , а в лазере и интерферометре ζ отвечает времени (само уравнение (1) получается при этом усреднением квазиоптического уравнения по продольной координате). Возможная поперечная неоднородность системы и временная модуляция ее параметров учитывается дополнительной зависимостью f и E_i от поперечных координат x, y и времени t (такие случаи будут оговариваться особо). Взаимодействие нескольких локализованных структур с сильно различающимися осями распространения описывается системой связанных квазиоптических уравнений вида (1).

В силу поперечной и временной однородности рассматриваемых систем квазиоптическое уравнение (1) инвариантно относительно следующих преобразований:

$$E(\vec{r}, t) \rightarrow E(\vec{r} + \delta\vec{r}, t + \delta t) \exp(i\delta\Phi), \quad E_i \rightarrow E_i \exp(i\delta\Phi), \quad (2)$$

$$E(\vec{r}, t) \rightarrow E(\vec{r} - \vec{v}t, t) \exp(i\vec{v}\vec{r}/2) \exp(-iv^2/4), \quad E_i \rightarrow E_i \exp(i\vec{v}\vec{r}/2) \exp(-iv^2/4). \quad (3)$$

Здесь \vec{r} и \vec{v} – d -мерные векторы "поперечных" координат и скоростей, $\delta\vec{r}$, δt и $\delta\Phi$ – произвольные сдвиги координат, времени и фазы (сдвиг скорости \vec{v} также произволен).

Свойства локализованных структур существенно определяются следующими условиями. Во-первых, присутствует ли в системе заданный внешний сигнал, то есть отлична ли от нуля амплитуда E_i . Во-вторых, имеется ли при заданной функции f би- или мультистабильность для решений уравнения (1) в виде плоских волн. Важность этих обстоятельств поясняют следующие соображения.

При $E_i = \text{const} \neq 0$ для плосковолновых решений из (1) следует $f(|E|^2)E = -E_i$, или, для интенсивностей $I = |E|^2$ и $I_i = |E_i|^2$,

$$|f(I)|^2 I = I_i. \quad (4)$$

Следующая из (4) зависимость $I(I_i)$ может быть многозначной. Би- или мультистабильность означает наличие двух или более корней уравнения (4), которые отвечают режимам, устойчивым относительно малых возмущений.

Если внешний сигнал отсутствует, $E_i = 0$, то интенсивность плосковолнового режима, вообще говоря, задается корнями мнимой части f :

$$\Im f(I) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) также может иметь несколько изолированных корней, так что здесь вновь возможен аналог би- (мульти)стабильности. В случае же прозрачных сред, когда потери в системе отсутствуют, соотношение (5) выполняется тождественно по I . Далее мы увидим, как указанные условия влияют на свойства локализованных структур.

3 Поперечно-двумерные пространственные солитоны в среде с насыщением нелинейности показателя преломления

Рассмотрим сначала распространение непрерывного излучения в прозрачной среде с безынерционной нелинейностью показателя преломления; потери, внешний сигнал и обратная связь отсутствуют, см. уравнение (5). Сохраняется мощность излучения

$$P = \int |E|^2 d\vec{r}, \quad (6)$$

имеется и ряд других интегралов движения. Напомним, что в этом случае, когда условие (5) выполняется тождественно, в среде могут распространяться плоские волны с произвольной интенсивностью. Если показатель преломления среды возрастает с интенсивностью, $df/dI > 0$, то распространение таких волн неустойчиво относительно мелкомасштабной самофокусировки, то есть имеет место филаментация излучения [12]. При наличии филаментации, по крайней мере при небольших интенсивностях, возможным оказывается распространение пучков излучения с неизменным поперечным профилем амплитуды поля

$$E(\vec{r}, \zeta) = F(\vec{r}) \exp(i\gamma\zeta). \quad (7)$$

Постоянная распространения γ служит собственным значением в нелинейном уравнении для собственной функции F :

$$\Delta_d F + [f(|F|^2) - \gamma]F = 0. \quad (8)$$

Функция F должна достаточно быстро убывать на периферии, так что мощность излучения P конечна. Спектр решений сплошной, то есть имеется семейство решений с непрерывным изменением параметра – постоянной распространения γ (или же максимальной амплитуды или мощности пучка).

В одномерной геометрии ($d = 1$) и при керровской нелинейности среды ($f(I) = f_2 I$) уравнение (1) допускает точное решение методом обратной задачи теории рассеяния [13]. Исходный (при $\zeta = 0$) пучок излучения произвольного профиля и достаточной мощности разбивается (при $f_2 > 0$ и больших ζ) на набор солитонов, число которых растет с мощностью. При взаимодействии солитонов меняются лишь их фазы. Если нелинейность отклоняется от керровской, число солитонов может изменяться в результате их взаимодействия (слияние или расщепление солитонов) [14].

В двумерной геометрии ($d = 2$) возможен более разнообразный набор локализованных структур. В цилиндрических координатах r, φ уравнение (1) допускает решения вида

$$E_{n,m,\gamma}(r, \varphi, \zeta) = F_{n,m,\gamma}(r) \exp(i\gamma\zeta + im\varphi). \quad (9)$$

Радиальная функция F вещественна; $F \sim r^m$ при малых r . Целое число m (азимутальный индекс, или топологический заряд) характеризует порядок дислокации волнового фронта (амплитуда поля обращается в 0 в центре дислокации, а при ее обходе по замкнутому контуру в поперечной плоскости фаза поля меняется на величину $2\pi m$). Радиальный индекс n указывает число нулей радиальной функции на интервале $0 < r < \infty$. Основной, или фундаментальный солитон не содержит нулей поля на конечном расстоянии ($n = m = 0$); он устойчив, если $dP/d\gamma > 0$ [15].

Для керровской среды в двумерной (и трехмерной) геометрии устойчивых локализованных структур нет. Для излучения достаточно большой мощности нелинейная фокусировка среды не уравновешивается дифракционным (или дисперсионным) расплыванием, что приводит к бесконечным значениям пиковой интенсивности на конечном расстоянии ζ (явление коллапса). Устойчивые локализованные структуры (пространственные солитоны) формируются в среде с насыщающейся нелинейностью $f(I) = I/(1+I)$ [15]. Неустойчивыми оказываются локализованные структуры с высшими радиальными ($n \neq 0$) [16,17] и азимутальными индексами ($m \neq 0$) [18]. Малые возмущения приводят к распаду таких структур на несколько фундаментальных солитонов, как это демонстрирует рис. 1.

Соотношение (3) свидетельствует о произвольности направления распространения солитона (ориентации его оси). Результат взаимодействия двух устойчивых (фундаментальных) солитонов определяется протяженностью области их перекрытия, то есть в первую очередь углом между их осями. Если этот угол не слишком мал, взаимодействие солитонов оказывается слабым и описывается теорией возмущений [18]. В ее первом порядке оказывается, что при столкновении двух солитонов меняются их фазы и направления распространения (последнее – для нелобового столкновения). Критический угол между осями отвечает нелинейному фазовому набегу, индуцированному "чужим" солитоном в области перекрытия, порядка 1. При меньших углах взаимодействие солитонов оказывается сильным и, в зависимости от параметров, имеет место перекачка мощностей солитонов [19,20], их слияние (рис. 2) и расщепление (рис. 3).

Локализованные структуры в трехмерной геометрии получили название "световых пуль" [21]. Фундаментальные солитоны и здесь устойчивы [15]; взаимодействие "световых пуль" друг с другом численно анализировались в [22].

4 Автосолитоны в широкоапертурном бистабильном лазере

Построение простых моделей лазерных систем, протяженных хотя бы в одном пространственном направлении, таит опасности. Действительно, если в теории допустить протяженность бесконечно большой, то физически в этом направлении будет неограниченно усиливаться спонтанное излучение, а математически режимы, найденные без учета этого обстоятельства, окажутся неустойчивыми по отношению к развитию подобных возмущений. Это означает, что более реалистическая модель должна включать какой-либо механизм подавления "паразитного" излучения, например за счет угловой селекции.

В данном разделе рассматривается модель широкоапертурного лазера с плоскопараллельным резонатором, в котором среда состоит из атомов двух сортов: с инвертированной и неинвертированной заселенностями рабочих уровней [23,24]. Соотношения между линейными потерями и усилением, а также интенсивностями насыщения усиления и поглощения выбраны так, что в слабом поле потери выше, чем усиление. Поэтому слабые возмущения (в том числе спонтанное излучение) будут затухать, и устойчивым оказывается режим отсутствия генерации. Полагаем, что интенсивность насыщения для усиления больше, чем для поглощения. Тогда генерация может быть возбуждена жестко (достаточно сильным начальным возмущением), в том числе на ограниченном участке апертуры. Таким образом возникают устойчивые локализованные лазерные структуры – островки генерации на фоне безгенерационного режима на остальной части апертуры, или лазерные автосолитоны [24,25].

Считаем, что основным механизмом поперечной связи в лазере служит дифракция излучения (а не диффузия среды). В пределе малых изменений поперечной структуры поля за один проход через резонатор допустимо усреднение поля в продольном (осевом) направлении [26]. Тогда приходим к уравнению (1), в котором величина $\zeta = t$ представляет время, внешний сигнал отсутствует, $E_i=0$, размерность $d = 1$ или 2 , а функция $f = a + \sum_l b_l / (1 + I/I_l)$ комплексна. Здесь a отвечает линейным потерям и отклонению оптической длины пути резонатора от среднего значения, b_l представляют линейные (ненасыщенные) усиление и поглощение в среде для атомов l -го сорта, I_l – интенсивности их насыщения. При наличии в схеме неоднородностей величины a и b_l оказались бы уже не постоянными. Заметим, что то же уравнение описывает и распространение лазерного излучения в среде, состоящей из различных сортов атомов (с инвертированной и неинвертированной заселенностями). Для такой среды с частотной дисперсией (в отсутствие резонатора, то есть без обратной связи) реализуется случай $d = 3$.

В отличие от предыдущего раздела, соотношение (5) для плосковолновых режимов не выполняется тождественно, а определяет некоторые фиксированные уровни интенсивности. Как пояснялось выше, нас здесь будет интересовать случай бистабильности или мультистабильности, когда уравнение (5) имеет несколько изолированных корней, отвечающих устойчивым режимам (для нас существенна устойчивость главным образом безгенерационного режима). Бистабильность реализуется в диапазоне изменения управляющего параметра – накачки g_0 : $g_{min} < g_0 < g_{max}$. Ввиду наличия усиления и потерь мощность генерации P , вообще говоря, не сохраняется во времени. Для нее из (1) следует

$$\dot{P} = -2 \int \Im f(I) I d\vec{r}, \quad (10)$$

Для лазерных автосолитонов интеграл в правой части (10) обращается в нуль. Стационарные лазерные автосолитоны существуют в более узком, чем в условии бистабильности, интервале накачек: $g_1 < g_0 < g_2$. Поскольку во всем этом интервале устойчив и безгенерационный режим $I = 0$, лазерные автосолитоны могут быть возбуждены только жестко – достаточно крупным начальным импульсом. Отметим также следующее из соотношения (3) общее свойство лазерных автосолитонов. Пусть имеется локализованная структура с неподвижным "центром тяжести" $\vec{R} = 0$, где $\vec{R} = \int \vec{r} I d\vec{r} / P$. Тогда имеются и структуры с тем же распределением интенсивности, движущимся в поперечном направлении с произвольной (достаточно малой) скоростью v . Поэтому для одиночных лазерных автосолитонов без ограничения общности можно считать $\vec{R} = 0$.

Стационарный лазерный автосолитон обладает распределением поля вида (7). В свою очередь, амплитуда F теперь комплексна и описывает пространственное изменение как интенсивности, так и фазы поля. Существуют различные типы автосолитонов. "Фундаментальный" лазерный автосолитон, как и фундаментальный пространственный солитон в предыдущем разделе, обладает колоколообразным (безузловым) распределением интенсивности. Удовлетворительным приближением для движущегося лазерного автосолитона (в том числе при наличии в схеме плавных неоднородностей)

служит гауссово распределение

$$E \approx A_M \exp[-(\vec{r} - \vec{r}_0)^2/w^2] \exp[-i[\Phi_0 + \vec{\Phi}_1(\vec{r} - \vec{r}_0) + \Phi_2(\vec{r} - \vec{r}_0)^2]]. \quad (11)$$

Здесь скалярные A_M , Φ_0 , Φ_2 и векторные \vec{r}_0 , $\vec{\Phi}_1$ величины – функции времени. Замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для этих величин можно получить, если приближенно заменить уравнение (1) уравнениями для его первых моментов. Для этого следует подставить (11) в уравнение (1), домножить его на $E^*(\vec{r} - \vec{r}_0)^k$, где $k = 0, 1$ и 2 , и провести интегрирование по пространственным аргументам. В рамках (11) нетрудно определить не только стационарные режимы, но и исследовать их устойчивость относительно класса описываемых (11) возмущений [27]. Родственный приближенный метод моментов был предложен ранее в [28] для описания солитонов в одномодовом нелинейном световоде.

На рис. 4 показано сравнение результатов расчета максимальной интенсивности $I_M = A_M^2$ стационарного одиночного фундаментального одномерного ($d = 1$) лазерного автосолитона в рамках приближенного метода моментов и при непосредственном численном решении уравнения (1). Видно, что результаты весьма близки при небольших накачках. С ростом накачки профиль автосолитона искажается, что и ограничивает применимость приближенного метода моментов. Аналогично согласуются результаты расчета частотного сдвига $\nu = \gamma$. Для ширины автосолитона согласие не столь хорошее, поскольку здесь еще важно выбрать уровень, по которому определяется ширина.

Левая граница g_1 интервала существования лазерных автосолитонов отвечает слиянию устойчивого и неустойчивого стационарных распределений поля типа (11). При увеличении накачки максимальная интенсивность I_M и ширина w стационарного автосолитона растут, а частотный сдвиг ν уменьшается. Это относится к фундаментальным лазерным автосолитоном с любой геометрической размерностью d (см. рис. 4). Наконец, при накачке $g_0 = g_2$ искажения профиля солитона приводят к потере его устойчивости. При превышении критического значения g_2 стационарный лазерный автосолитон превращается в пульсирующий (рис. 5), а при дальнейшем увеличении накачки возникают более сложные нестационарные режимы.

Характер взаимодействия поперечно-одномерных лазерных автосолитонов существенно определяется относительной скоростью их поперечного движения [25]. При большой относительной скорости время взаимодействия автосолитонов мало, взаимодействие оказывается слабым и сопровождается лишь малым изменением их характеристик. При меньшей относительной скорости реализуются сильные взаимодействия фундаментальных лазерных автосолитонов, включая столкновения с изменением их числа (рис. 6). На рис. 7 представлены связанные состояния поперечно-одномерных автосолитонов; отметим, что интенсивность между максимумами точно обращается в ноль (что сопровождается скачком фазы на π).

Еще одно важное отличие от рассмотренных в предыдущем разделе пространственных солитонов состоит в существовании, помимо фундаментальных, других типов устойчивых локализованных лазерных структур более сложного вида. Поясним это для поперечно-двумерной геометрии ($d = 2$), используя цилиндрические координаты r, φ . Устойчивыми оказываются локализованные структуры с осесимметричным распределением интенсивности вида:

$$E = F(r) \exp(im\varphi) \exp(-ivt), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

и с асимметричным распределением интенсивности (отсутствует осевая симметрия, но сохраняется центральная), вращающимся в поперечном направлении вокруг центра симметрии с постоянной угловой скоростью Ω :

$$E = F(r, \varphi - \Omega t) \exp(-ivt). \quad (13)$$

Эти структуры представлены на рис. 8 и 9, полученных численным решением уравнения (1) [29].

Центр тяжести лазерного автосолитона с поперечными координатами \vec{R} в отсутствие неоднородностей движется равномерно и прямолинейно

$$\ddot{\vec{R}} = 0. \quad (14)$$

В рамках приближенного метода моментов можно показать, что наличие плавных неоднородностей приводит к появлению в правой части (14) интегральных членов, сводящихся в случае плавных неоднородностей к их градиентам. Это обстоятельство позволяет, в частности, описать явление "пространственного гистерезиса" (гистерезиса пространственных распределений в нелинейных системах достаточно больших размеров [30]) в условиях существования лазерных автосолитонов.

5 Дифракционные автосолитоны в нелинейном интерферометре

Рассмотрим широкоапертурный кольцевой или двухзеркальный (Фабри-Перо) интерферометр с плоскими зеркалами, заполненный пассивной средой с безынерционной нелинейностью и возбуждаемый внешним когерентным излучением. В приближении малого изменения поперечной структуры поля за один проход через интерферометр оправдано усреднение поля в продольном направлении, что отвечает уравнению (1) с пропорциональной амплитуде внешнего сигнала величиной $E_i \neq 0$, геометрической размерностью $d = 1, 2$ и представляющей время переменной $\zeta = t$ [31]. Наличие внешнего сигнала приводит к фиксации частоты и фазы излучения. Мы не обсуждаем здесь более сложные схемы, в которых внутри интерферометра помещены дополнительные элементы – пространственные фильтры или элементы, приводящие к вращению и другим линейным преобразованиям поля [9].

Наиболее интересен случай би- или мультистабильности, когда в отсутствие поперечных неоднородностей (бесконечная апертура, внешний сигнал – плоская волна) уравнение (4) в некотором интервале $I_{min} < I_i < I_{max}$ интенсивностей внешнего сигнала $I_i = |E_i|^2$ имеет изолированные корни, отвечающие по крайней мере двум устойчивым режимам $E = E_n$, $n = 1, 2$. Тогда имеются и поперечно-неоднородные режимы с распределением поля вида

$$E(\vec{r}, t) = E(\vec{r} - \vec{v}t), \quad E(\pm\infty) = E_n. \quad (15)$$

Наиболее простой моделью, в рамках которой можно продемонстрировать основные свойства структур поля типа (15), служит интерферометр с пороговой нелинейностью [32,33]:

$$f(I) = \begin{cases} f_1, & I < I_{th}, \\ f_2, & I > I_{th}. \end{cases} \quad (16)$$

Дифракционные волны переключения, для которых $E(-\infty) \neq E(+\infty)$, в простейшем случае представляют пространственный переход между двумя занимающими полубесконечные области апертуры поперечно-однородными состояниями с амплитудами E_1 и E_2 . При этом фронт волны переключения, вблизи которого имеются заметные дифракционные осцилляции поля, движется в поперечном направлении со скоростью \vec{v} , определяемой интенсивностью I_i и направлением распространения падающей на интерферометр плоской волны. Волны переключения такого типа существуют во всем диапазоне бистабильности. В рамках модели (16) указанные свойства дифракционных волн переключения выявляются весьма просто.

В несколько более узком, по сравнению с интервалом бистабильности, диапазоне существуют устойчивые локализованные структуры – дифракционные автосолитоны, представляющие собой "островки" одного из поперечно-однородных состояний на фоне другого состояния [34]. Ввиду устойчивости поперечно-однородных состояний возбуждение автосолитонных структур может быть только жестким. Для одиночного дифракционного автосолитона $E(-\infty) = E(+\infty)$ и в случае нормального падения внешнего сигнала (вдоль оси интерферометра) $\vec{v} = 0$. Конструктивной служит интерпретация дифракционных автосолитонов как связанных состояний дифракционных волн переключения [35]. Свойства одиночного дифракционного автосолитона иллюстрирует рис. 10, полученный в модели пороговой нелинейности (16). Имеются "светлые" (увеличение интенсивности по сравнению с фоновой) и "темные" (ее уменьшение) дифракционные автосолитоны. Спектр ширины одиночного автосолитона дискретен, причем "квантовым числом" удобно считать число осцилляций интенсивности вблизи его вершины. Интервал существования более "возбужденных" (с большим числом осцилляций) автосолитонов более узок. В зависимости от ширины инициирующего пучка/импульса возбуждаются различные типы дифракционных автосолитонов.

При наличии в схеме поперечных неоднородностей или при наклонном падении внешнего излучения одиночный автосолитон движется в поперечном направлении со скоростью, определяемой градиентами неоднородностей, например, интенсивности I_i и фазы Φ_i внешнего излучения:

$$\dot{\vec{R}} = a \nabla \Phi_i I_i + b \nabla I_i. \quad (17)$$

Смысл скалярных величин a и b поясняется в [36]. "Механическое" уравнение (17) позволяет, в частности, описать специфику пространственного гистерезиса в условиях существования дифракционных автосолитонов.

При более сложном возбуждении формируются многочастичные структуры – связанные дифракционные автосолитоны. Их основные свойства также можно извлечь из анализа модели интерферометра с пороговой нелинейностью (16). Расстояния между составляющими автосолитонами обладают дискретным спектром, "квантовым числом" для которых служит число осцилляций интенсивности поля. Если сопоставить одиночному дифракционному автосолитону "атом", который может находиться в "основном" и в "возбужденных" состояниях, то многочастичные структуры будут аналогичны "молекулам", обладающим свойством изомерии. Примеры поперечно-одномерных многочастичных структур представлены на рис. 11. При нормальном падении внешнего излучения симметричные многочастичные структуры поперечно-неподвижны ($\vec{v} = 0$), а асимметричные движутся с постоянной скоростью ($\vec{v} = \text{const} \neq 0$), см. рис. 12.

Дифракционные автосолитоны существуют не только в условиях устойчивости стационарных поперечно-однородных режимов. Нетрудно видеть, например, что модуляционная неустойчивость состояний верхней ветви гистерезисной кривой не влияет на свойства автосолитона в "основном" состоянии, поскольку в поперечном профиле автосолитона протяженность области, отвечающей неустойчивой ветви, невелика [37]. Устойчивые стационарные локализованные структуры могут формироваться даже в условиях неустойчивости и верхней, и нижней ветвей, но при этом "фон" оказывается пространственно промодулированным [37]. Различные типы нестационарных ("пульсирующих") локализованных дифракционных структур представлены в [38].

6 Заключение

Проведенный анализ показывает, что характер и свойства локализованных структур света существенно зависят от характера диссипации и наличия свойства бистабильности. В отсутствие диссипации спектр одиночных структур – пространственных солитонов – сплошной, то есть максимальная интенсивность в структуре является непрерывно изменяемым параметром. При этом (для двумерных структур) устойчивы только фундаментальные пространственные солитоны, тогда как структуры с дислокациями волнового фронта неустойчивы. Взаимодействие пространственных солитонов друг с другом, в зависимости от протяженности области их перекрывания, может быть как слабым (с малым изменением направления распространения), так и сильным, в том числе с изменением числа солитонов.

При наличии диссипации максимальная интенсивность в одиночной локализованной структуре уже не произвольна, а принимает ряд дискретных значений, при которых достигается баланс между притоком и потерями излучения (бистабильность или мультистабильность). Для существования локализованных структур не требуется наличия поперечной модуляционной неустойчивости. Разнообразие локализованных структур в оптических системах с диссипацией существенно возрастает. Возможно жесткое возбуждение стационарных и пульсирующих, неподвижных и движущихся в поперечном направлении локализованных структур. Для широкоапертурного лазера с жестким возбуждением генерации в двумерной геометрии устойчивы локализованные структуры – лазерные автосолитоны – с дислокациями волнового фронта различного порядка, а также структуры с несимметричным распределением интенсивности, вращающимся с постоянной угловой скоростью. Возможно поперечное движение структур с произвольной (достаточно малой) скоростью. При взаимодействии локализованных структур может меняться не только их число, но и типы структур.

В возбуждаемом внешним излучением (плоской монохроматической волной) интерферометре, заполненном нелинейной средой, дифракционные осцилляции поля существенно определяют свойства локализованных структур – дифракционных автосолитонов. В отсутствие поперечной модуляционной неустойчивости дифракционные автосолитоны удобно интерпретировать как связанные состояния дифракционных волн переключения. Спектр ширины одиночных дифракционных автосолитонов, равно как и расстояний между ними в многочастичных структурах, дискретен. Симметричные структуры неподвижны, а асимметричные движутся в поперечном направлении со скоростью, определяемой интенсивностью внешнего излучения. Фундаментальные дифракционные автосолитоны формируются и в условиях поперечной модуляционной неустойчивости.

Представленные результаты были получены совместно с Н. В. Высотиной, Л. А. Нестеровым, В. Е. Семеновым, В. А. Смирновым, А. В. Федоровым, С. В. Федоровым и Г. В. Ходовой, и автор

пользуется случаем поблагодарить их. Работа частично поддержана Международным научным фондом (гранты R53000, R53300) и Российским фондом фундаментальных исследований (проект 95-02-03830-а).

Литература

- [1] Г. А. Аскарьян, "Воздействие градиента поля интенсивного электромагнитного луча на электроны и атомы", *ЖЭТФ*, 1962, Т.42, No.6, с.1567–1570.
- [2] R. J. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, "Self-trapping of optical beams", *Phys. Rev. Lett.*, 1964, Vol.13, No.15, pp.479–482.
- [3] В. И. Таланов, "О самофокусировке электромагнитных волн в нелинейных средах", *Изв. вузов, Радиофизика*, 1964, Т.7, No.3, с.564–565.
- [4] Х. Гиббс, *Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света*, Мир, М., 1988.
- [5] Б. С. Кернер, В. В. Осипов, *Автосолитоны*, Наука, М., 1991.
- [6] Г. Николис, И. Пригожин, *Самоорганизация в неравновесных системах*, Мир, М., 1979.
- [7] Г. Хакен, *Синергетика*, Мир, М., 1980.
- [8] В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно, *Автоволновые процессы*, Наука, М., 1987.
- [9] *Новые физические принципы оптической обработки информации*, под ред. С. А. Ахманова и М. А. Воронцова, Наука, М., 1990.
- [10] N. B. Abraham, W. J. Firth, eds., Special issue on transverse effects in nonlinear-optical systems, *J. Opt. Soc. Am. B.*, 1990, Vol.7, No.6 & 7.
- [11] N. N. Rosanov, A. A. Mak, A. Z. Grasiuk, eds. Transverse patterns in nonlinear optics, *Proc. SPIE*, 1992, Vol.1840.
- [12] В. И. Беспалов, В. И. Таланов, "О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях", *Письма в ЖЭТФ*, Т.3, No.12, с.471–476.
- [13] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [14] S. Gatz, J. Herrmann, "Soliton collision and soliton fusion in dispersive materials with linear and quadratic intensity depending refraction index change", *IEEE J. Quant. Electron.*, 1992, Vol.28, No.7, pp.1732–1738.
- [15] Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов, "Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщением нелинейности", *Изв. вузов, Радиофизика*, 1973, Т.16, No.7, с.1020–1028.
- [16] А. А. Колоколов, А. И. Суков, "Неустойчивость высших мод нелинейного уравнения", *Ж. прикл. мех. технич. физ.*, 1975, No.4(92), с.56–60.
- [17] J. M. Soto-Crespo, D. R. Heatley, E. M. Wright, N. N. Akhmediev, "Stability of the higher-bound states in a saturable self-focusing medium", *Phys. Rev. A*, 1991, Vol.44, No.1, pp.636–644.
- [18] Н. В. Высотина, Л. А. Нестеров, Н. Н. Розанов, В. А. Смирнов, "Столкновения поперечно-двумерных пространственных солитонов в среде с насыщающейся нелинейностью показателя преломления", в печати.
- [19] Н. В. Высотина, Н. Н. Розанов, В. А. Смирнов, "Взаимодействие пространственных солитонов в среде с насыщающейся нелинейностью", *Опт. и спектр.*, 1994, Т.76, No.5, с.774–784.
- [20] N. N. Rosanov, V. A. Smirnov, N. V. Vyssotina, "Numerical simulations of interaction of bright solitons in medium with saturable nonlinearity", *Chaos, Solitons & Fractals*, 1994, Vol.4, No.4, pp.1767–1782.

- [21] Y. Silberberg, "Collapse of optical pulses", *Opt. Lett.*, 1990, Vol.15, No.22, pp.1282–1284.
- [22] R. H. Enns, D. E. Edmundson, "Guide to fabricating bistable-soliton-supporting media", *Phys. Rev. A*, 1993, Vol.47, p.4524.
- [23] Н. Н. Розанов, "О поперечной структуре поля в лазере с насыщающимся поглощением", *Опт. и спектр.*, 1982, Т.52, No.3, с.548–552.
- [24] Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, "Дифракционные волны переключения и автосолитоны в лазере с насыщающимся поглощением", *Опт. и спектр.*, 1992, Т.72, No.6, с.1394–1399.
- [25] Н. Н. Розанов, А. В. Федоров, С. В. Федоров, Г. В. Ходова, "Частичеподобные структуры поля в широкоапертурном лазере с насыщающимся поглощением", *ЖЭТФ*, 1995, Т.107, No.2, с.376–392.
- [26] А. Ф. Сучков, "Влияние неоднородностей на режимы работы квантовых генераторов на твердом теле", *ЖЭТФ*, 1965, Т.49, No.5(11), с.1495–1503.
- [27] Н. Н. Розанов, "Характеристики лазерных автосолитонов в рамках метода моментов", *Опт. и спектр.*, 1996 (в печати).
- [28] А. И. Маймистов, "Эволюция уединенных волн, близких к солитонам нелинейного уравнения Шредингера", *ЖЭТФ*, 1993, Т.104, No.5(11), с.3620–3629.
- [29] Н. Н. Розанов, А. В. Федоров, С. В. Федоров, Г. В. Ходова, "Новые типы локализованных структур лазерного излучения", *Опт. и спектр.*, 1995, Т.79, No.5, с.868.
- [30] Н. Н. Розанов, "Гистерезисные явления в распределенных оптических системах", *ЖЭТФ*, 1981, Т.80, No.1, с.96–108.
- [31] L. F. Lugiato, R. Lefever, "Spatial dissipative structures in passive optical systems", *Phys. Rev. Lett.*, 1987, Vol.58, No.21, pp.2209–2211.
- [32] Н. Н. Розанов, "Дифракционные волны переключения и автосолитоны в интерферометре с пороговой нелинейностью", *Опт. и спектр.*, 1991, Т.70, No.6, с.1342–1344.
- [33] Н. Н. Розанов, "Пары связанных дифракционных автосолитонов в интерферометре с пороговой нелинейностью", *Опт. и спектр.*, 1991, Т.71, No.5, с.816–819.
- [34] Н. Н. Розанов, Г. В. Ходова, "Автосолитоны в бистабильных интерферометрах", *Опт. и спектр.*, 1988, Т.65, No.6, с.1375–1377.
- [35] N. N. Rosanov, G. V. Khodova, "Diffractive autosolitons in nonlinear interferometers", *J. Opt. Soc. Am B*, 1990, Vol.7, No.6, pp.1057–1065.
- [36] N. N. Rosanov, "Switching waves, autosolitons, and parallel digital-analogous optical computing", *Proc. SPIE*, 1992, Vol.1840, pp.130–143.
- [37] S. V. Fedorov, G. V. Khodova, N. N. Rosanov, "Soliton-like field transverse structures in passive and active optical bistable systems", *Proc. SPIE*, 1992, Vol.1840, pp.208–215.
- [38] Ю. И. Балкарей, М. Г. Евтихов, М. И. Елинсон, А. С. Коган, В. С. Посвянский, "Особенности динамики поперечных структур поля в интерферометре Фабри-Перо с керровской нелинейной средой", *Квант. электрон.*, 1995, Т.22, No.7, с.669–672.
- [39] Н. Н. Розанов, А. В. Федоров, С. В. Федоров, Г. В. Ходова, "Новые типы локализованных структур лазерного излучения", *Опт. и спектр.*, 1995, Т.79, No.5, с.868.
- [40] N. N. Rosanov, A. V. Fedorov, S. V. Fedorov, G. V. Khodova, "Characterization of localized transverse structures in wide-aperture lasers", *Physica D*, 1996 (in print).
- [41] N. N. Rosanov, A. V. Fedorov, G. V. Khodova, "Switching waves, autosolitons, and discrete-analogous methods for nonlinear optical processing", *Proc. SPIE*, 1993, Vol.2051, pp.349–356.

LOCALIZED SPATIO-TEMPORAL PATTERNS IN WIDE-APERTURE NONLINEAR OPTICAL AND LASER SYSTEMS

N. N. Rosanov

The main features of localized structures of coherent light described by a generalized parabolic equation (1) for the field envelope E are compared for three cases: (i) transparent medium with saturation of self-focusing; (ii) wide-aperture lasers with saturation of absorption; (iii) driven wide-aperture nonlinear interferometers.

For the case (i) and two-dimensional geometry, only fundamental (without envelope nodes) spatial solitons are stable while localized structures with nodes decay into a number of fundamental solitons under influence of weak perturbations, Fig. 1. Spectrum of fundamental solitons is continuous, their maximum local intensity $I = |E|^2$ being arbitrary. Interaction of the spatial solitons is weak if length of their overlapping is small; then only small changes of parameters of interacting solitons take place. With small angles between axes of the solitons propagation, their interaction is strong and it changes even a number of spatial solitons, Fig. 2, Fig. 3.

For systems with losses and sources of radiation (ii) and (iii), variety of localized structures is especially rich under conditions of bistability. These structures – autosolitons – represent islands of one state on a background of other state. Their maximum local intensity is not arbitrary, but determined from condition of energy balance. There is a discrete spectrum of parameters of stationary and pulsing localized structures of different types. Modulation instability is not necessary for the localized structures existence. These structures have to be formed by hard excitation only, while small initial perturbations dissolve with time.

For two-dimensional laser systems (ii), there are motionless, moving and rotating laser autosolitons with different topological indices, equations (12), (13), Fig. 8 and Fig. 9. The laser autosolitons interaction can also be weak or strong, depending on duration of their overlapping (or on relative velocity of their approaching), Fig. 6. Stable and pulsing laser autosolitons with different geometrical dimensionality $d = 1, 2, 3$ exist in the interval of pump more narrow than bistability region, Fig. 4, Fig. 5, as well as their coupled states, Fig. 7.

For passive driven nonlinear interferometers (iii), diffractive autosolitons with different width exist in some intervals of intensity of external radiation I_i , Fig. 10. Different types of the autosolitons coupled states are characterized by a discrete spectrum of equilibrium distances between the individual autosolitons, Fig. 11. Symmetric coupled states of diffractive autosolitons are motionless, and asymmetric coupled states move in the transverse direction with constant velocity, Fig. 12.

Features of the optical localized patterns and possibility of control of their location, velocity, type and number make them promising for optical information processing.

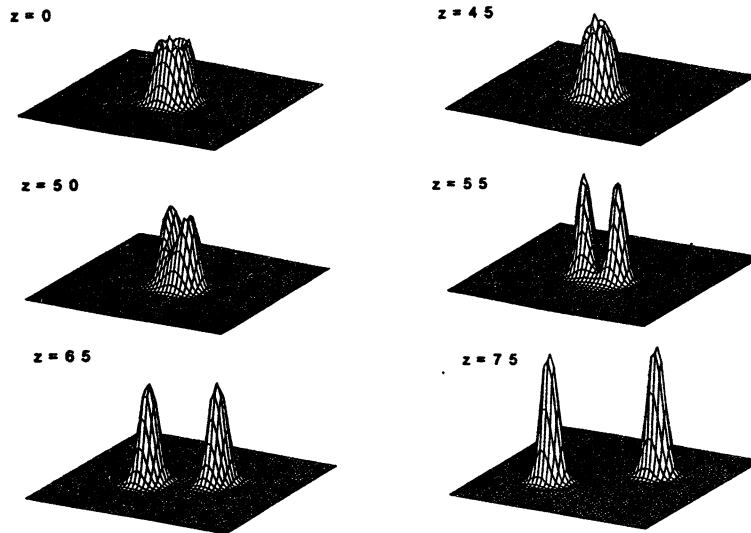


Рис. 1: Поперечные распределения интенсивности при различных значениях продольной координаты z , демонстрирующие распад локализованной структуры с $m = 1$ и малыми исходными возмущениями ($z = 0$) на два фундаментальных пространственных солитона [18].

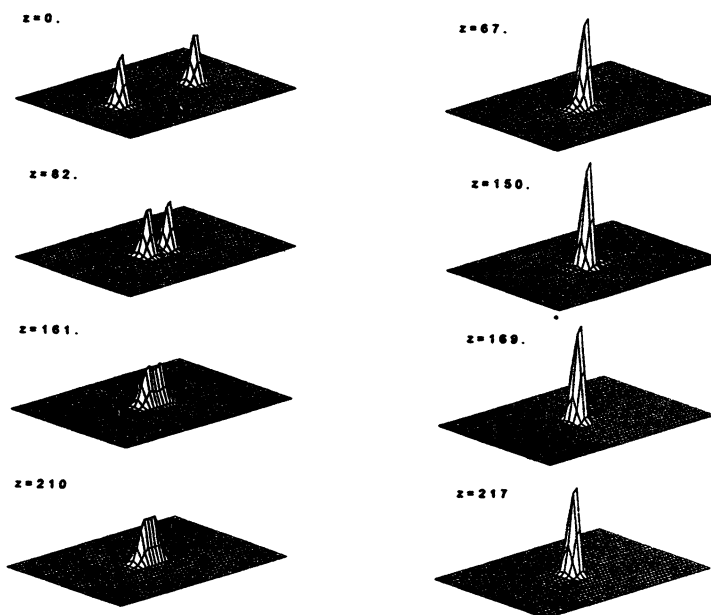


Рис. 2: Поперечные распределения интенсивности для случая слияния двух сталкивающихся фундаментальных пространственных солитонов [18].

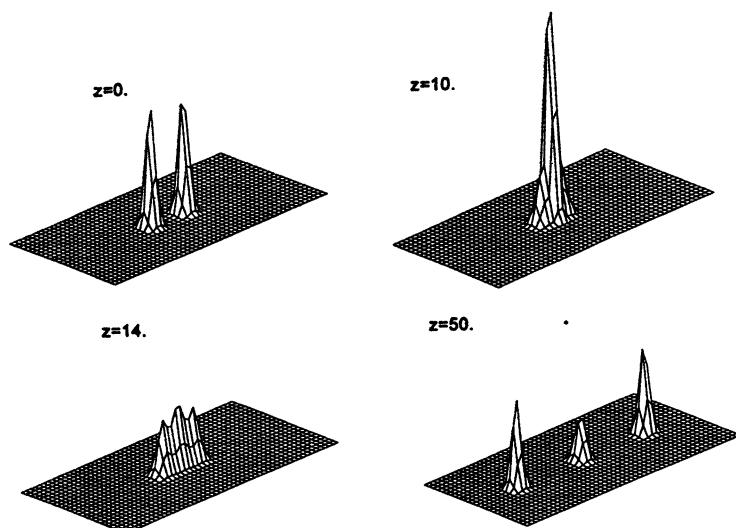


Рис. 3: Поперечные распределения интенсивности для случая преобразования двух сталкивающихся фундаментальных пространственных солитонов в три [18].

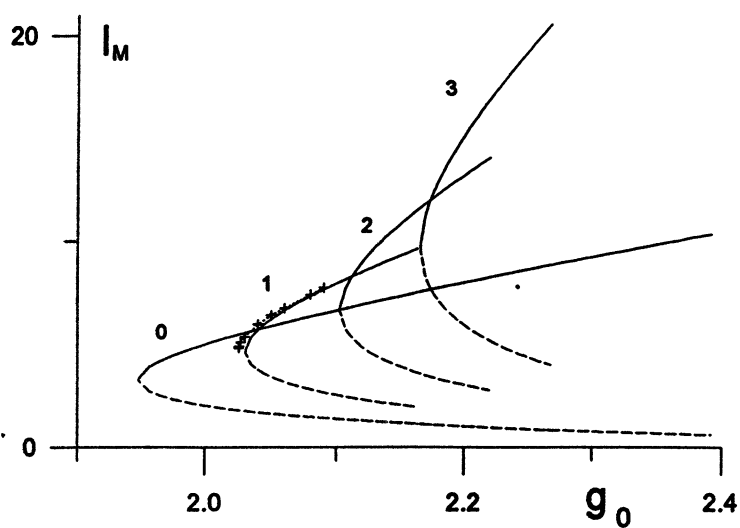


Рис. 4: Зависимость максимальной интенсивности I_M лазерного автосолитона от накачки g_0 . Цифры у кривых – геометрическая размерность d , кривая 0 – гистерезисная зависимость интенсивности для поперечно-однородных режимов. Штриховые линии отвечают неустойчивым режимам. Сплошные линии получены в рамках приближенного метода моментов, крестики – расчет по уравнению (1) [32].

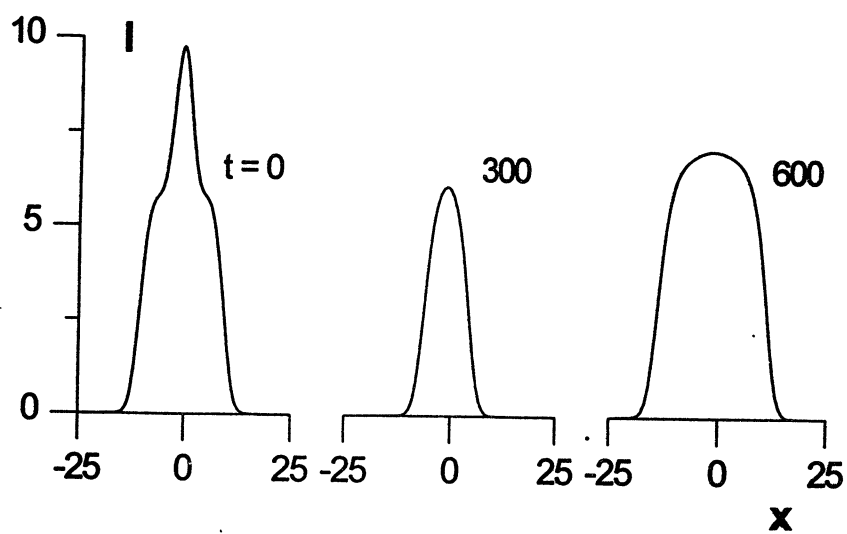


Рис. 5: Поперечные распределения интенсивности для режима периодических пульсаций (с периодом $T \approx 900$) одиночного поперечно-одномерного лазерного автосолитона. Время t указано в числах проходов света через резонатор [39].

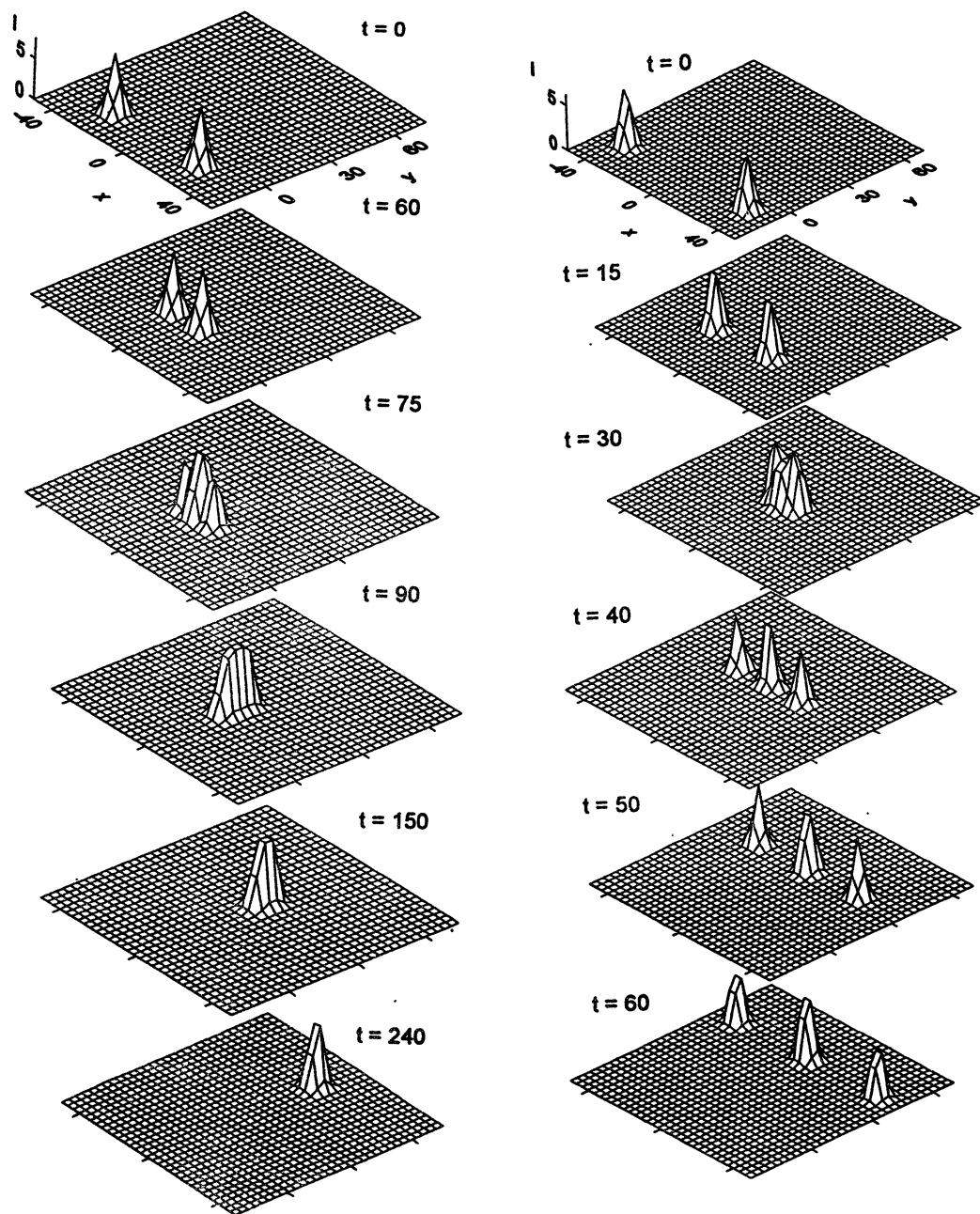


Рис. 6: Слияние (левый ряд) и расщепление (правый ряд) поперечно-двумерных лазерных авто-солитонов [40].

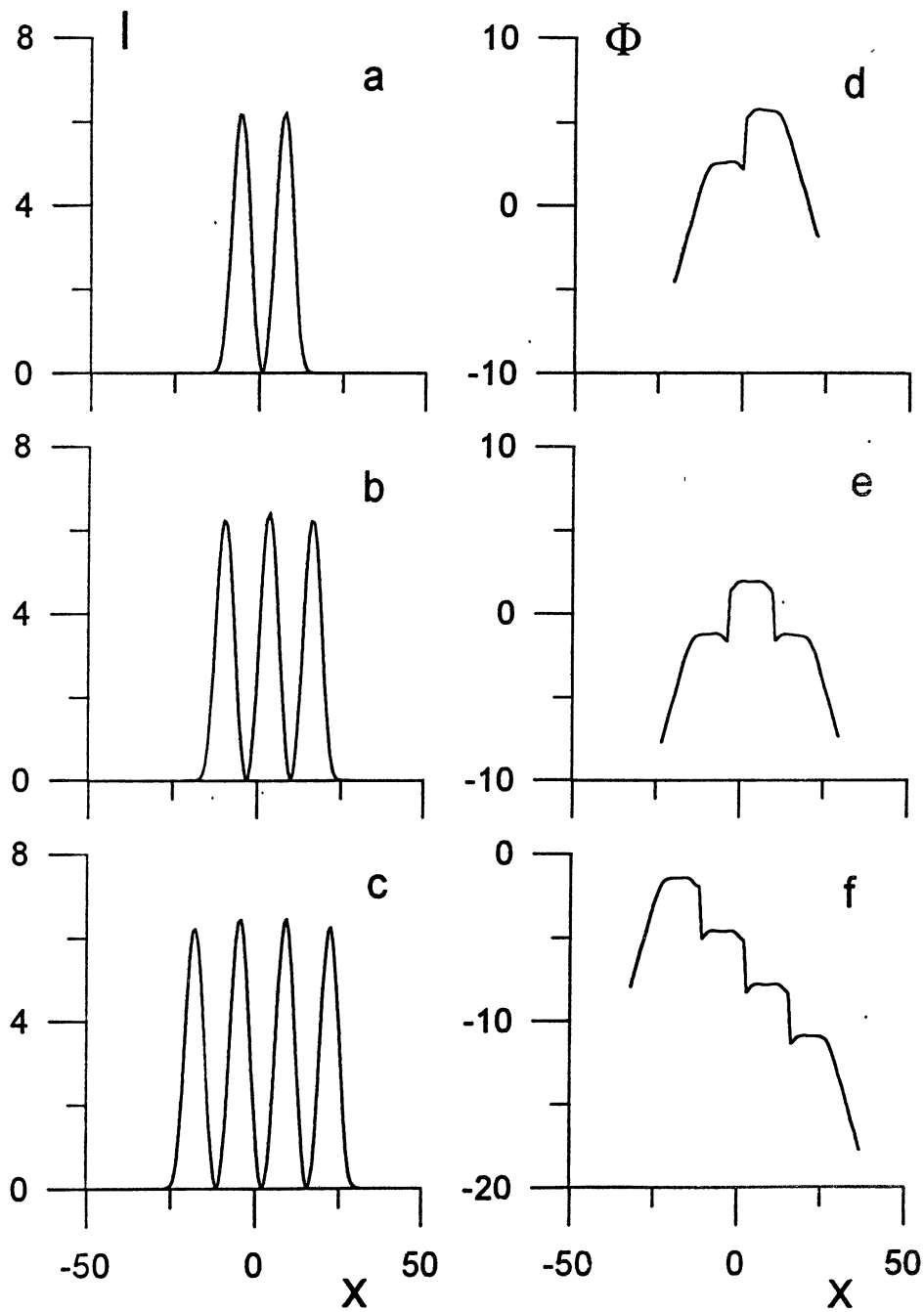


Рис. 7: Поперечные распределения интенсивности (a – c) и фазы (d – f) в связанных состояниях поперечно-одномерных лазерных автосолитонов [39].

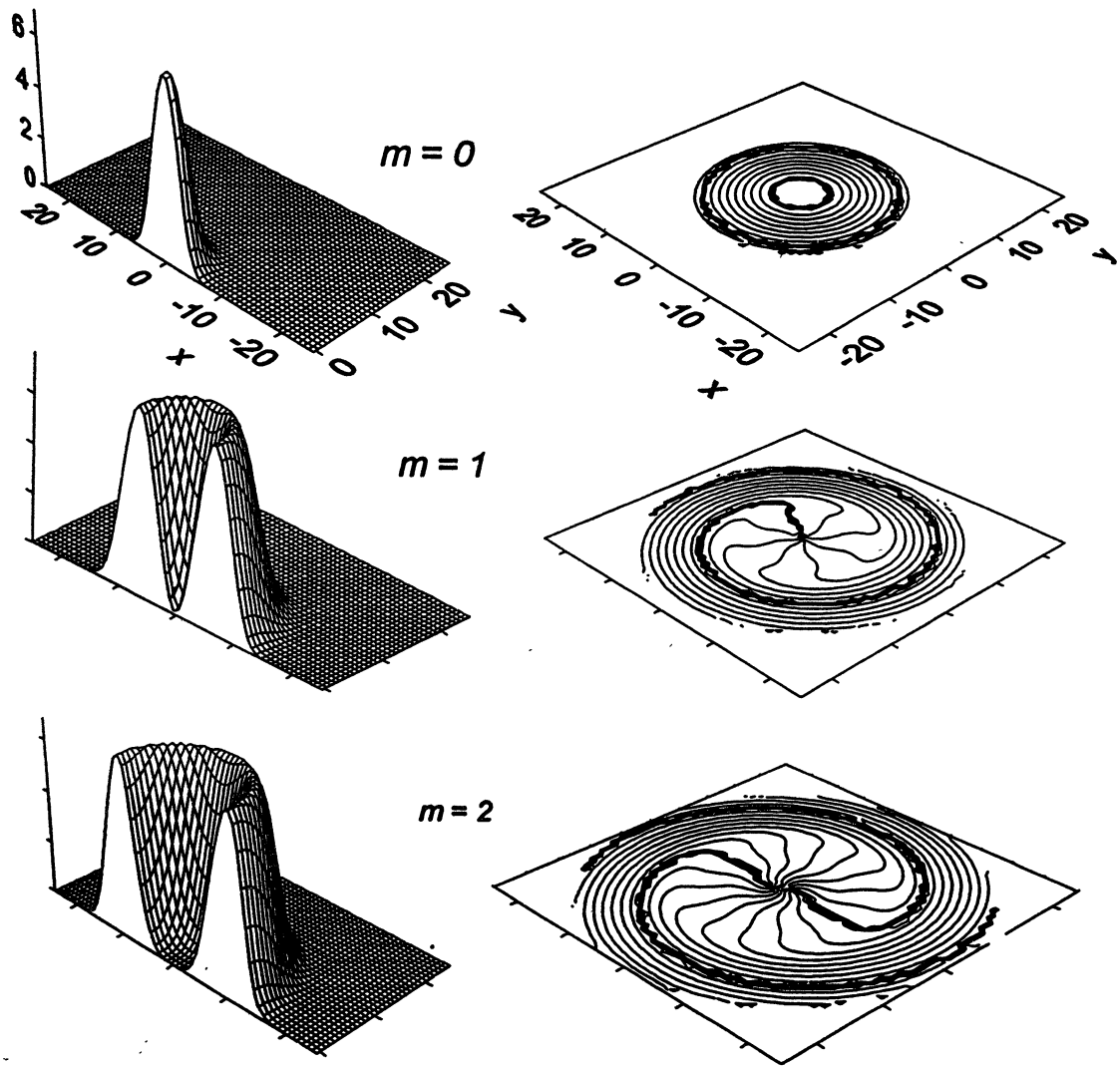


Рис. 8: Осесимметричные распределения интенсивности (слева) и линии равной фазы (справа) для поперечно-двумерных лазерных автосолитонов с топологическим зарядом m [29].

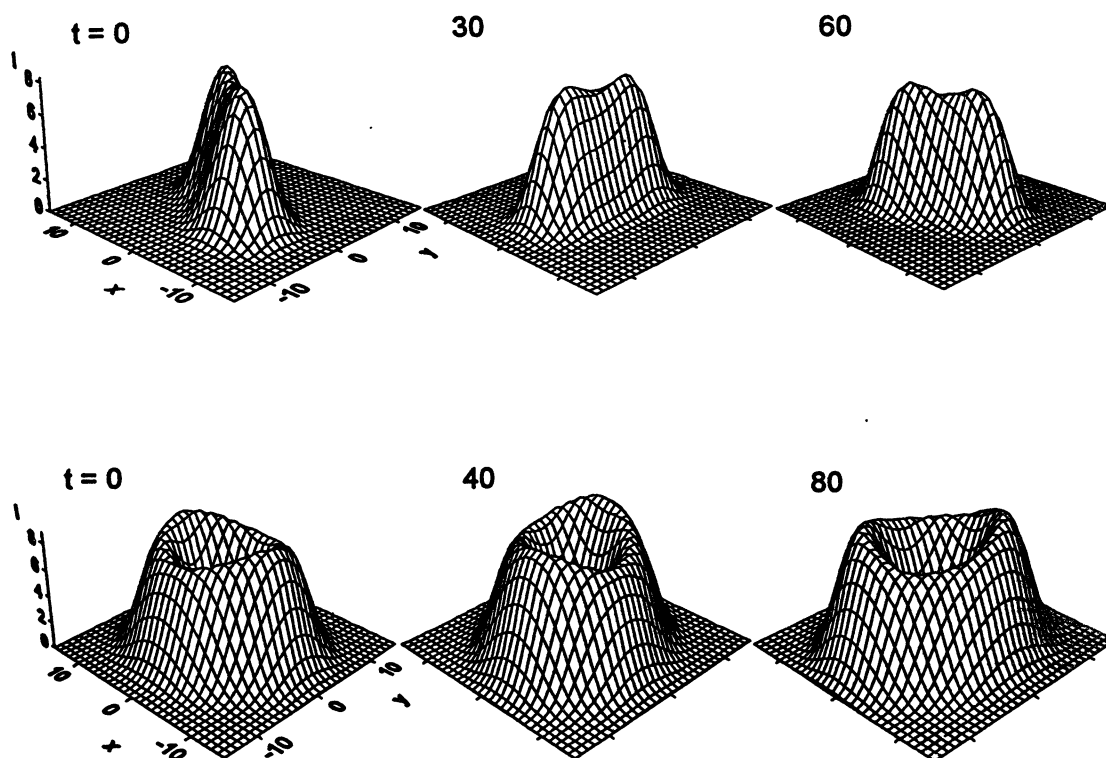


Рис. 9: Распределения интенсивности для вращающегося лазерного автосолитона с $m = 0$ (верхний ряд) и $m = 1$ (нижний ряд) [29].

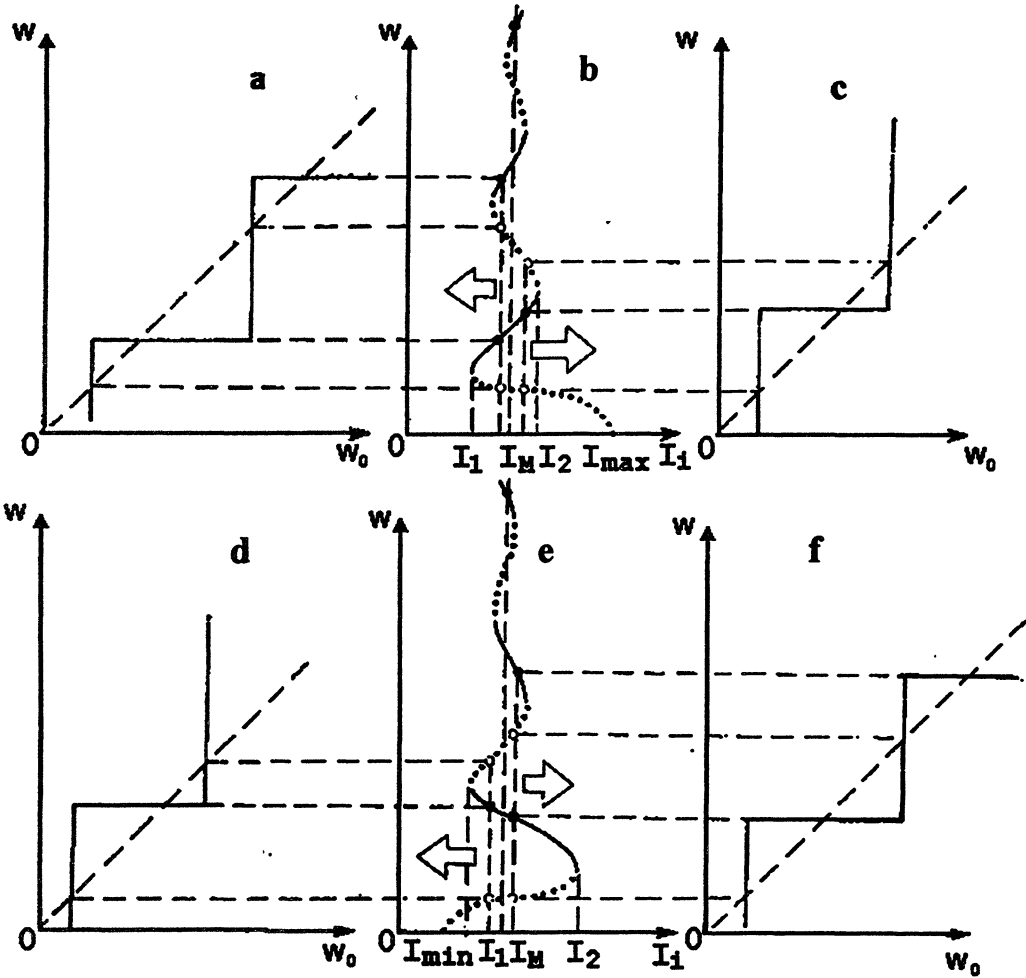


Рис. 10: Зависимость ширины w светлых (a – c) и темных (d – f) одиночных дифракционных автосолитонов от интенсивности I_i падающей на интерферометр плоской волны и от ширины формирующих их начальных выбросов w_0 . Пунктир отвечает неустойчивым режимам. Диапазоны интенсивности $I_{min} < I_i < I_M$ – a,d; $I_M < I_i < I_{max}$ – c,f [32].

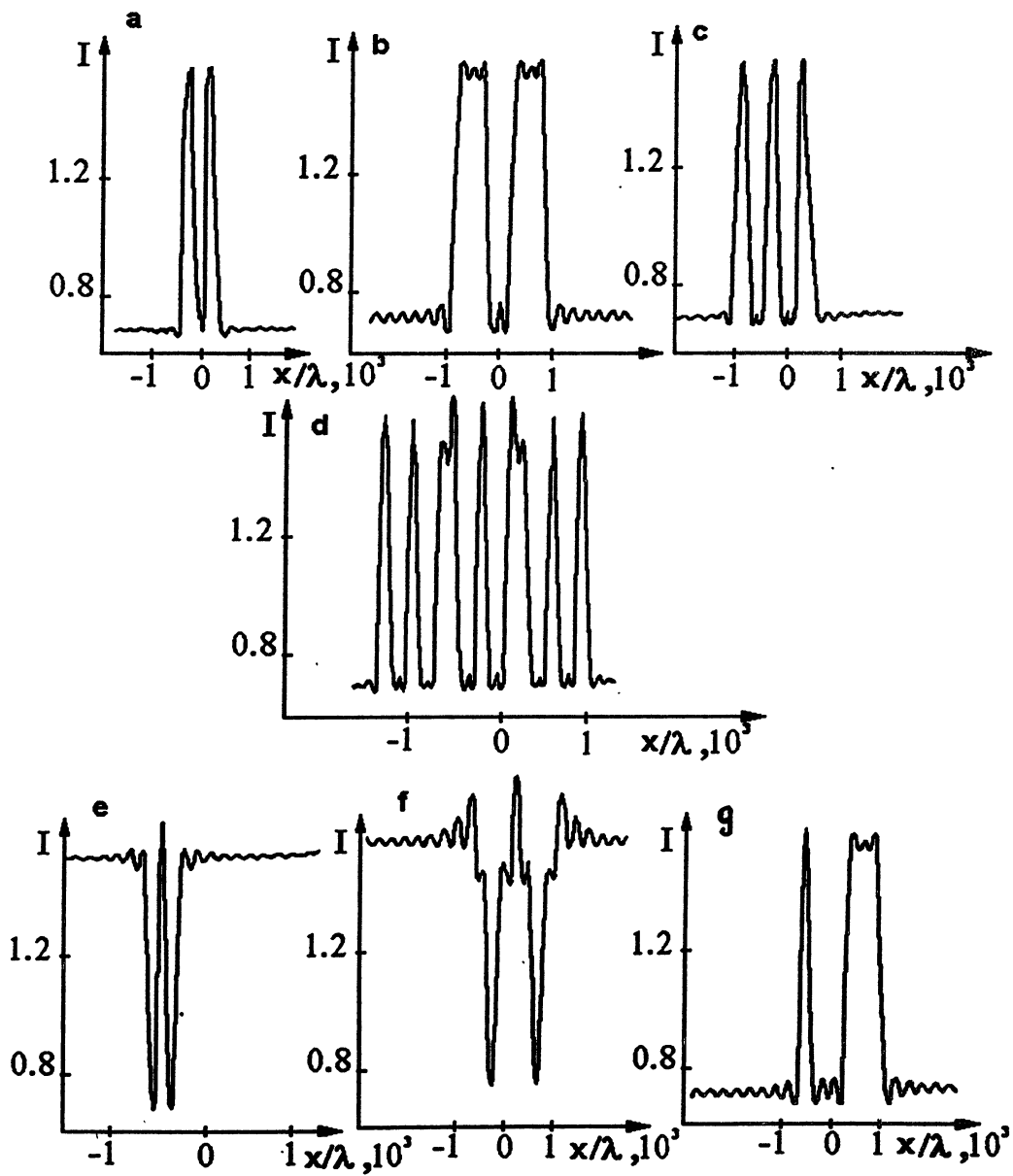


Рис. 11: Поперечные распределения интенсивности для связанных состояний поперечно-одномерных дифракционных автосолитонов; λ – длина волны света [35].

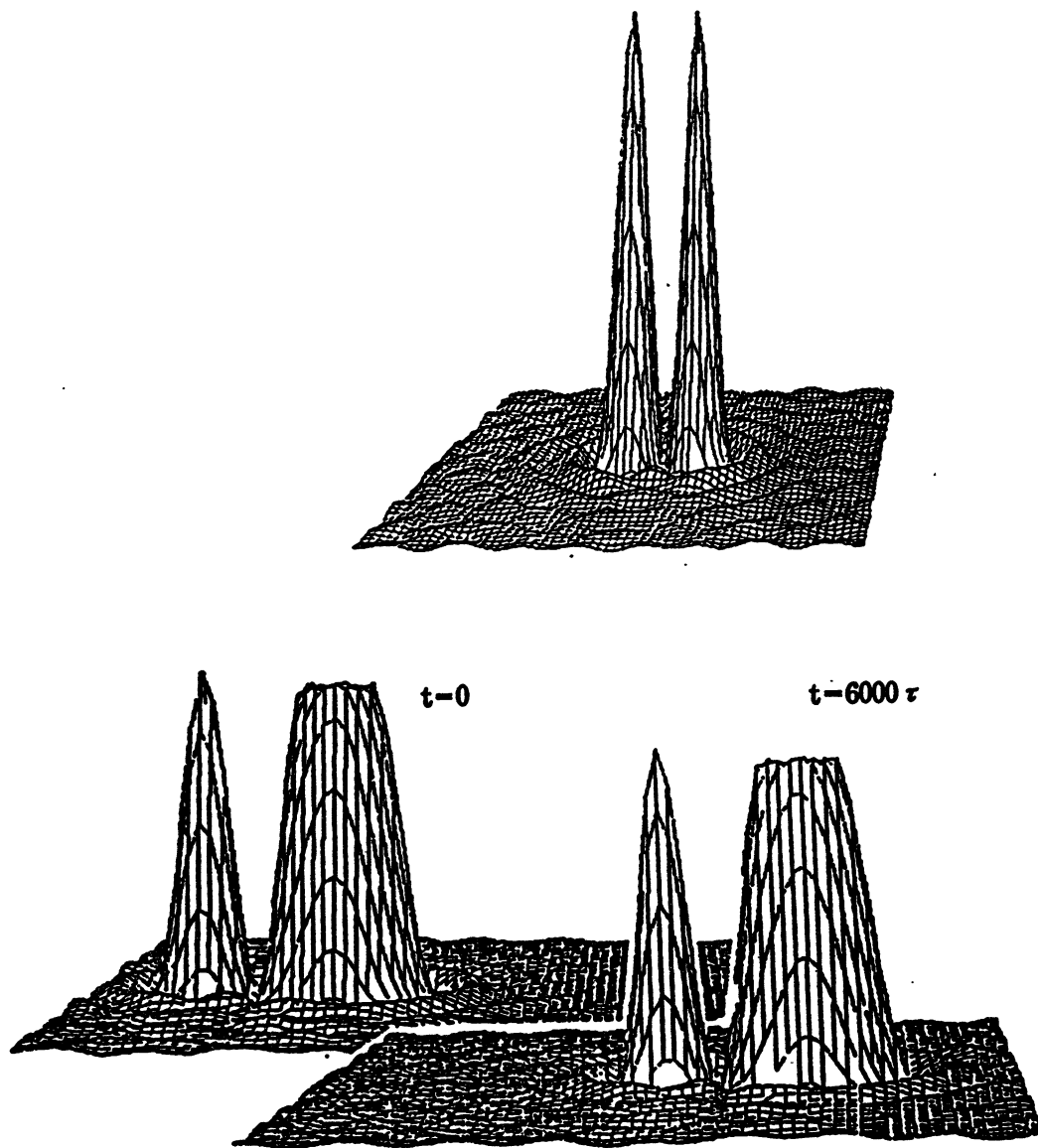


Рис. 12: Распределения интенсивности для неподвижной симметричной (сверху) и движущейся асимметричной (внизу) пар связанных дифракционных автосолитонов [35],[41].

РЕГУЛЯРНЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ДЖОУЛЕВОМ РАЗОГРЕВЕ ТОНКИХ ВТСП-ПЛЕНОК В КИПАЮЩЕМ АЗОТЕ

В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН
620219, Екатеринбург, ГСП-828, Первомайская, 91

Представлены результаты экспериментального исследования динамики термоэлектрических автоколебаний при джоулевом разогреве тонких ВТСП-пленок в жидком азоте. Исследован отклик системы на внешнее гармоническое воздействие. Определены динамические характеристики различных колебательных режимов. Обнаружен эффект синхронизации периодических автоколебаний нормальной зоны и теплогидродинамических осцилляций, вызванных кипением азота на поверхности пленок.

Протекание транспортного тока через сверхпроводник может сопровождаться развитием тепловой неустойчивости, приводящей к состоянию тепловой бистабильности (в общем случае - мультистабильности) системы [1]. Бистабильный сверхпроводник с током является частным случаем нелинейных систем, в которых наблюдаются автоволновые и автоколебательные процессы. К усложнению динамики таких процессов приводят нелинейные тепловые и гидродинамические явления в жидком охладителе, связанные с кипением.

В работе приведены результаты экспериментального исследования динамики колебательных процессов в тонких пленках высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, включенных во внешнюю цепь и охлаждаемых жидким азотом.

Эксперименты проводились на тонкопленочных мостиках $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, полученных методом магнетронного распыления на постоянном токе [2]. Образцы подключались в цепь источника постоянного напряжения последовательно с нагрузочным сопротивлением и индуктивностью. Для изучения влияния внешнего периодического воздействия в цепь параллельно образцу и нагрузочному сопротивлению подключался дополнительный источник гармонических колебаний. Во время опытов пленки погружались непосредственно в жидкий азот.

При включении образцов в цепь источника постоянного напряжения с индуктивностью в системе возникали периодические автоколебания нормальной зоны. При добавлении к постоянному напряжению гармонической составляющей регистрируемый отклик системы зависел от частоты и амплитуды внешнего воздействия [3].

Для характеристики наблюдаемого отклика системы по экспериментальным реализациям определялись спектральная плотность, отображение Пуанкаре, корреляционная размерность и максимальный показатель Ляпунова. Спектральная плотность находилась методом быстрого преобразования Фурье. Для построения отображения Пуанкаре реализации снимались с выборкой по времени, равной периоду внешних синусоидальных колебаний. На рис. 1 приведены экспериментальные реализации транспортного тока (1), спектральные плотности (2) и отображения Пуанкаре (3) для режима периодических автоколебаний нормальной зоны (а) и нерегулярного режима при внешнем гармоническом воздействии на систему с частотой f_d .

Для определения корреляционной размерности по экспериментальным реализациям использовались хорошо известная методика расчета корреляционных интегралов [4]. На рис.2 (а) приведены корреляционные интегралы, рассчитанные по экспериментальной реализации нерегулярного режима (приведенной на рис.1). Сходимость корреляционных интегралов к постоянному наклону наблюдалась при размерностях вложения $m \geq 3$. Корреляционная размерность для указанного режима составила $\nu = 2.1 \pm 0.1$.

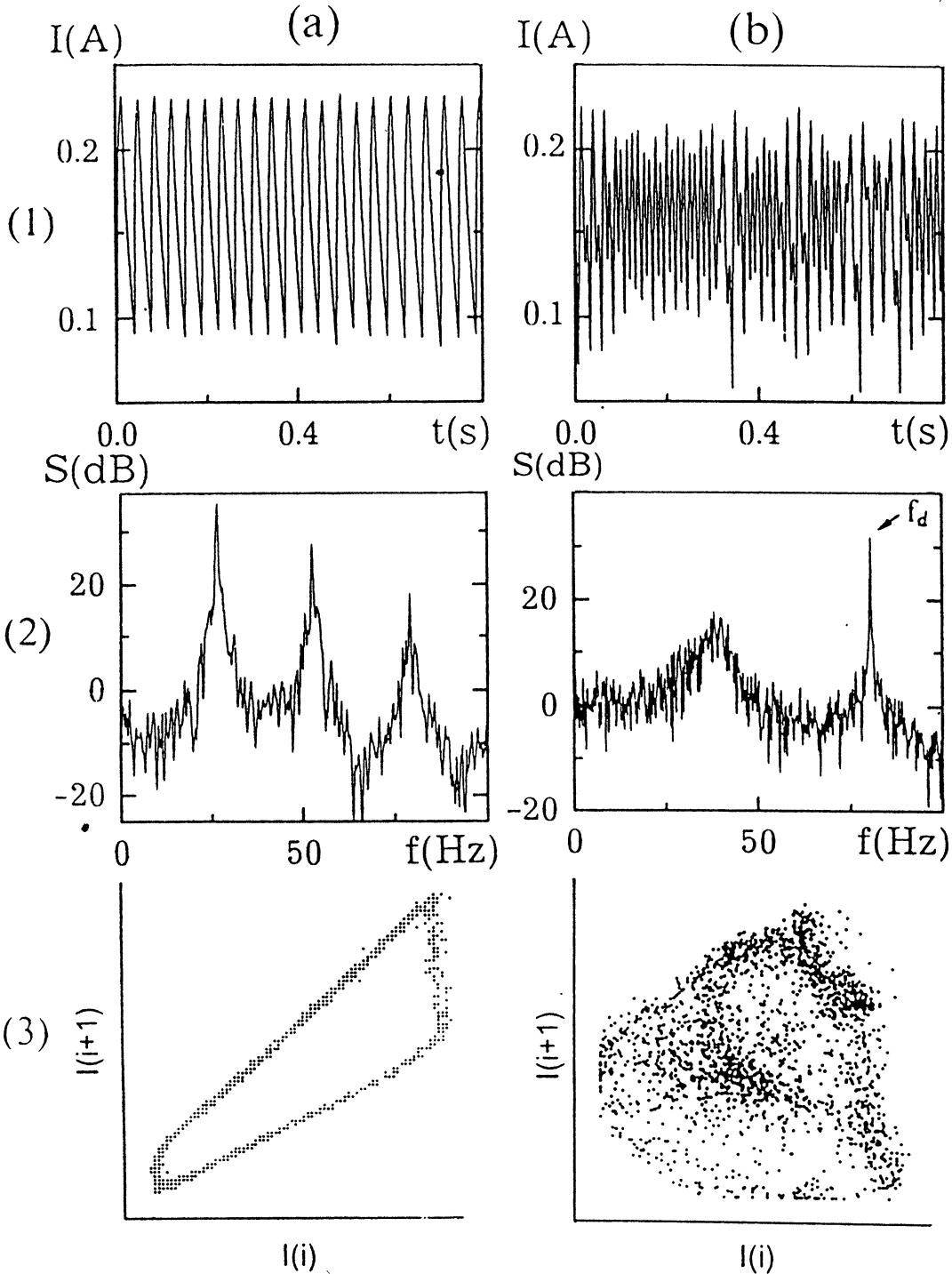


Рис.1: экспериментальные реализации (1), спектральные плотности (2), отображения Пуанкаре (3) для периодического (а) и хаотического (б) режимов.

Максимальный показатель Ляпунова оценивался по экспериментальным данным с использованием методики [5]. Как и при вычислении корреляционных интегралов, вначале конструировалось m -мерное пространство вложения. Для каждой j -ой точки реконструированного пространства определялась пара ближайших соседей. Ближайшие соседи находились по минимуму расстояния между точками, временной интервал между которыми превышал средний период колебаний. Далее, следуя [5], предполагалось, что эволюция расстояния между j -ой парой ближайших соседей в m -мерном пространстве определяется максимальным показателем Ляпунова. Алгоритм был испытан нами на модельных системах: гармонических колебаниях, двумерном торе, логистическом отображении, отображении Эно, модели Лоренца. Модельные реализации, по которым рассчитывалась величина λ_1 максимально соответствовали экспериментальным (длина реализации, амплитудное разрешение, время запаздывания). Погрешность определения показателя Ляпунова по модельным реализациям, максимально приближенным к экспериментальным, составляла менее 10%.

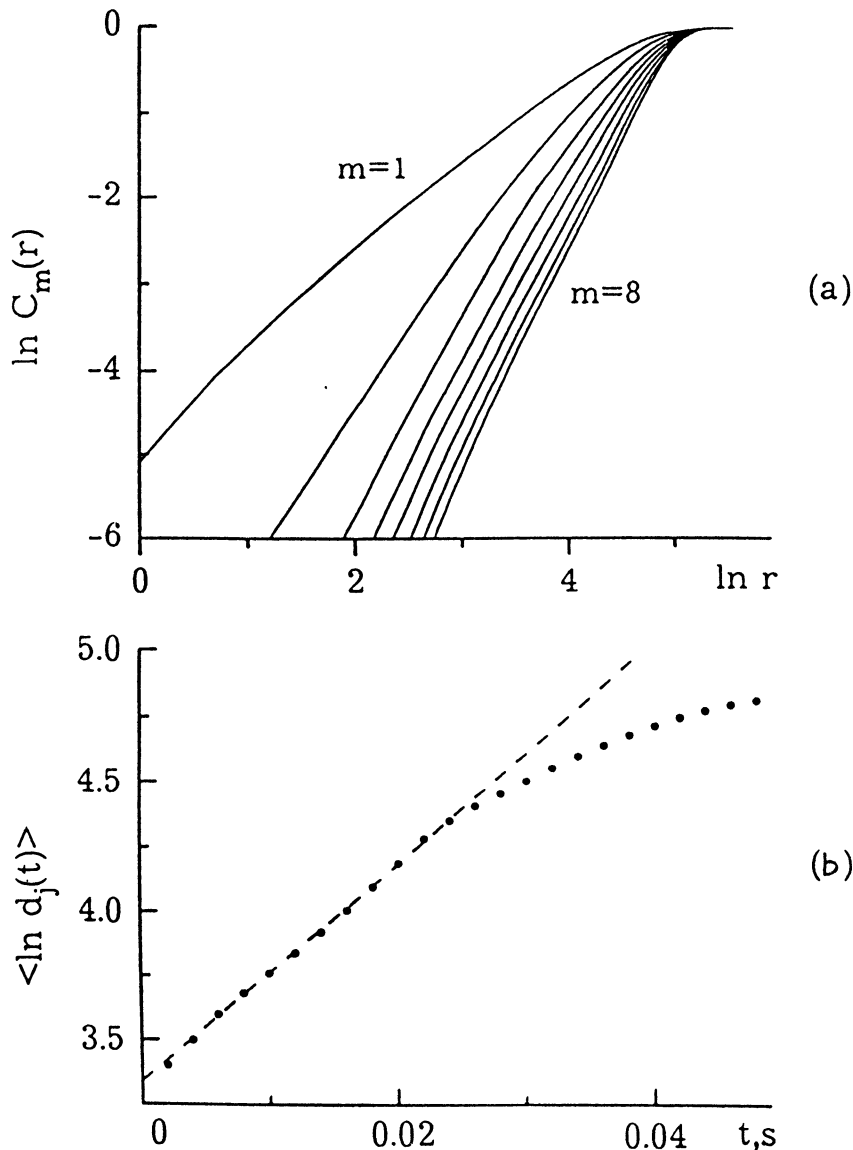


Рис.2: а - корреляционные интегралы; б - эволюция среднего логарифма расстояния.

На рис.2 (b) приведена типичная зависимость среднего логарифма расстояния между ближайшими соседями от времени для экспериментальной реализации колебаний транспортного тока (для размерности пространства вложения $m = 8$). Значение максимального показателя Ляпунова (наклон графика при $t \rightarrow 0$) составило $\lambda_1 = 42.5c^{-1}$.

Совокупность полученных результатов (вид спектральной плотности и отображения Пуанкаре, дробная корреляционная размерность, положительный показатель Ляпунова) позволяют сделать вывод о хаотической динамике системы.

На рис.3 приведены "фазовая" диаграмма системы в координатах "частота - амплитуда" внешнего гармонического воздействия. Область (1) на рис.3 соответствует собственным периодическим автоколебаниям системы. Область (2) - колебания, захваченные на вынуждающей частоте. Область (3) - сложные двухчастотные движения. Область (4) соответствует хаотическим колебаниям. Внутри этой области корреляционная размерность изменялась от 2.1 до 2.5.

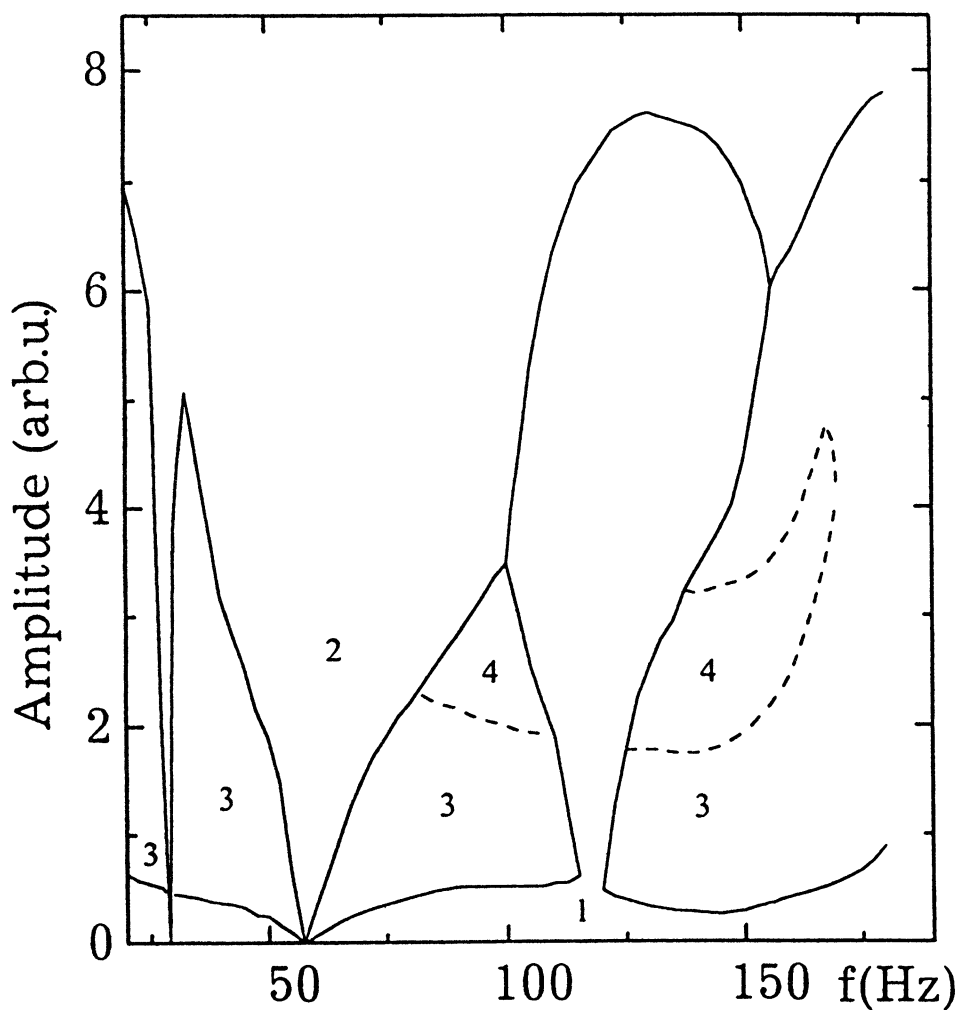


Рис.3: "фазовая" диаграмма системы при внешнем гармоническом воздействии.

Приведенные выше результаты относятся к исследованию отклика системы на периодическое внешнее воздействие. Ниже приводятся результаты изучения отклика системы на увеличение постоянного напряжения источника в отсутствие внешнего гармонического воздействия. При охлаждении тонких пленок в вакууме или разреженном газе

(в отсутствие непосредственного контакта с азотом) с увеличением постоянного напряжения источника, частота автоколебаний возрастала и при некотором критическом значении автоколебания внезапно прекращались. Прекращение автоколебаний сопровождалось быстрым уменьшением до нуля амплитуды. В том случае, когда образец находились в непосредственном контакте с жидким азотом, на их поверхности вследствие джоулева тепловыделения происходило кипение азота. Если в электрической цепи отсутствовали индуктивность, то на осциллограммах падения напряжения или транспортного тока наблюдались стохастические осцилляции, связанные с зарождением и отрывом паровых пузырьков. При включении индуктивности возникали периодические автоколебания. При этом кипение азота переставало быть стохастическим. Генерация пузырьков упорядочивалась и ее частота становилась равной частоте автоколебаний. Другими словами, в системе возникала синхронизация собственных периодических колебаний нормальной зоны и тепло - гидродинамических осцилляций, связанных с кипением азота. С увеличением напряжения источника частота возрастала, как и в отсутствие кипящего азота. Однако, потеря устойчивости периодического движения происходила иначе и внешне напоминала перемежаемость (рис.4).

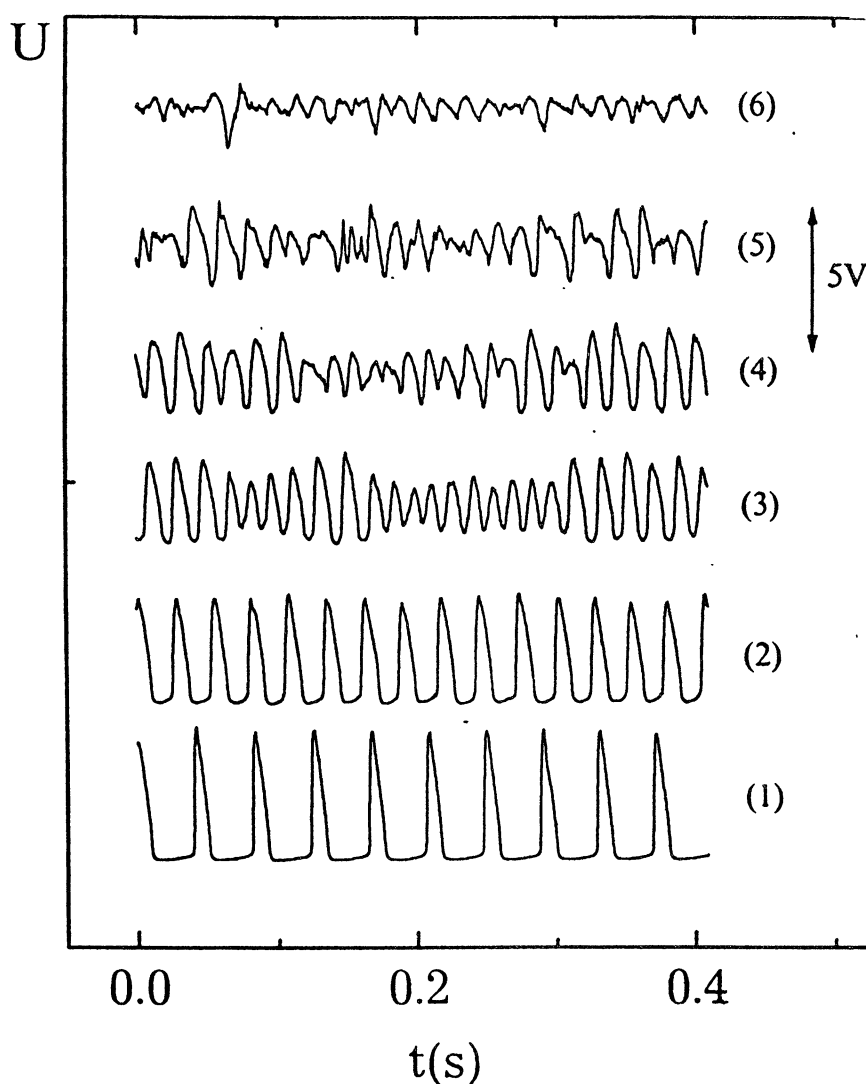


Рис.4: экспериментальные реализации падения напряжения на потенциальных контактах при увеличении напряжения источника.

Таким образом, в настоящей работе экспериментально исследованы релаксационные автоколебания нормальной зоны в тонких ВТСП-мостиках, включенных во внешнюю цепь с индуктивностью. Обнаружены эффекты синхронизации релаксационных колебаний нормальной зоны с тепло- гидродинамическими осцилляциями, вызванными генерацией и отрывом паровых пузырьков, с последующим переходом к хаотическому поведению. Показана возможность существования регулярных и хаотических режимов колебаний нормальной зоны в тонких ВТСП-пленках, включенных во внешнюю цепь с индуктивностью и периодической вынуждающей силой. Определена "фазовая" диаграмма системы.

Summary

We presented the results of an experimental study of the dynamics of oscillations of a normal zone in thin HTSC - films connected to an external circuit with an inductance and cooled by boiling nitrogen. Spectral and dynamical characteristics of the observed oscillative motions have been determined. We showed with connection of an additional sinusoidal oscillator to the circuit a complicated response of the system under observation, in particular, a chaotic behavior the mathematical image of which is a strange attractor. The phase diagram of the system in the driving frequency - amplitude plane has been determined.

We showed that in cooling samples directly with boiling nitrogen there arose a correlation between nonlinear processes inside of the superconductor and in the volume of the coolant. This correlation leads to the synchronization of periodic self-oscillations of a normal zone and thermo- hydrodynamical oscillations caused by boiling.

Литература

- [1] А.Вл. Гуревич, Р.Г. Минц, *Тепловые автоволны в нормальных металлах и сверхпроводниках.*, ИВТАН, М., 1987.
- [2] V.N. Skokov, V.P. Koverda, "Thermal multistability of thin YBCO films carrying direct current", *Cryogenics.*, 1993, Vol.33, No. 11, pp.1072-1076.
- [3] V.N. Skokov, V.P. Koverda and N.M. Semenova, "Self-sustained oscillations and chaotic transitions in current-carrying thin HTSC-films cooled by boiling nitrogen", *Phys. Lett. A*, 1994, Vol.193, pp.144-147.
- [4] P. Grassberger and I. Procaccia, "Characterization of Strange Attractors", *Phys. Rev. Lett.*, 1983, Vol.50, pp.346-349.
- [5] M.T. Rosenstein, J.J. Collins and C.J. De Luca, "A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets", *Physica D*. 1993, Vol. 65, pp.117-134.

НЕКОТОРЫЕ ПРИНЦИПЫ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

А. В. Сморгонский

Институт прикладной физики Российской академии наук
Нижний Новгород 603600, ул. Ульянова 46, РОССИЯ

Реферат

В работе делается попытка сформулировать общие законы экономической динамики.

Введение

Экономика — весьма почтенная по возрасту общественная наука, изучающая производственный базис общества и законы, им управляющие. Объект исследований — предприятия, фирмы, банки, условия их взаимодействия материальными и денежными потоками, особенности принятия экономических решений группами людей или даже отдельными личностями — столь разнороден и сложен, что вплоть до начала XX века основные результаты удавалось получить лишь в описательной форме некоторых качественных соотношений и зависимостей. Только в последние 60-80 лет в экономике стали интенсивно развиваться количественные подходы, создаваться определенные модели, позволяющие не только рассчитать конкретную ситуацию, но и дать надежный прогноз. Не обходится здесь и без пережестов. Порой в статье, несущей экономическое название, сосредотачивается такое обилие определений, теорем, лемм, их доказательств и промежуточных формул, что становится понятным, что здесь резвился математик, пожелавший пристроить свой опус в экономический журнал. Эти математические "заплывы", несмотря на их кажущуюся глубину и фундаментальность, редко дают заметный сдвиг в экономических знаниях. Неудивительно поэтому, что во многих учебниках, да и научных статьях до сих пор зачастую доминируют словесные описания, либо приводятся графики различных зависимостей в системах координат, масштабы на осях которых не указываются.

Важнейшей тенденцией в развитии экономической науки в последнее время стало проникновение в нее физических и математических методов исследований сложных систем (см., например, [1, 2]), ведущих свое начало от изучения неравновесных процессов в термодинамике и в более широком смысле в динамике диссипативных систем. Однако физика до применения этих методов прошла довольно долгий путь изучения равновесных термодинамических процессов.¹ В этой области сформулированы основные законы, вытекающие из так называемых принципов термодинамики. Вводятся такие принципы феноменологически, на основании данных многочисленных экспериментов. Хотя они и не могут быть строго доказаны, однако вера в их справедливость столь велика, что любое утверждение, противоречащее хотя бы одному из этих принципов, отбрасывается физиками практически без колебаний, как заведомо ложное. Именно хорошее знание законов равновесной термодинамики — науки концептуально обоснованной, позволяет физикам безбоязненно углубляться в дебри динамики неравновесных процессов, где многие связи и соотношения еще только выявляются или угадываются.

Что же касается экономики, то для нее формулировка основных принципов в области, которую по аналогии с термодинамикой можно было бы назвать экономической динамикой или, сокращенно, эконодинамикой, становится насущной задачей, поскольку переход к изучению сильно неравновесных процессов, столь популярных сейчас при изучении "экономик переходного периода", без знания твердо установленных законов равновесной экономики может сильно затормозить это продвижение. Попытке сформулировать некоторые такие принципы в экономике и посвящена данная работа.

1 Объекты, изучаемые в экономике

В зависимости от степени агрегирования (объединения) или, как сказал бы физик — усреднения, в экономике принято различать микро- и макро- уровень. Микроэкономика — это законы функционирования отдельного предприятия или одной фирмы. Иногда эту область так и называют — теория фирмы. Макроэкономика — это законы функционирования экономики целой страны или отдельного крупного региона, когда взаимодействие товарами и денежными средствами рассматривается на

¹С этой точки зрения термодинамику правильнее было бы называть термостатикой.

уровне отраслей производства, внешнеторгового баланса страны в целом и т.п., т.е. когда действия многих микрообъектов экономики оцениваются в среднем по суммарному результату.

Добавим, что еще одним важнейшим объектом изучения экономики являются рынки. По своей экономической сущности они занимают промежуточное положение между микро- и макро- экономикой, хотя теснее примыкают все же к макроэкономическим объектам, т.к. являются как бы "средним полем" цен, вырабатываемых в результате многочисленных обменов товарами, деньгами и прочее между отдельными предприятиями, фирмами и даже отдельными людьми. В то же время рассмотрение условий функционирования одного предприятия в микроэкономике обязательно включает в себя и анализ рынков (рынка факторов — сырья, материалов, рабочей силы и рынка готовой продукции, т.е. рынка товаров и услуг), с которыми приходится взаимодействовать данному предприятию (см.рис.1). По своей физической природе рынки могут быть совершенно различны — от маленького базарчика на центральной площади какого-нибудь городка до мирового рынка. И все же у них есть нечто общее, что и следует, по-видимому, положить в основу определения понятия, обозначаемого словом "рынок". Это общее — единство информационного пространства, где основная информация представлена ценами на товары и услуги, продаваемые и покупаемые на этом рынке. Отметим, что вопрос передачи информации с помощью цен весьма подробно обсуждается в книге [3].

Именно обладание информацией о ценах на рынке как продавцами, так и покупателями вынуждает их искать компромисс и вырабатывать то, что называется "справедливой" или рыночной ценой сделок.

2 Бухгалтерский учет — "экспериментальная" основа экондинамики

Для того, чтобы иметь возможность сформулировать основополагающие принципы какой-либо отрасли знания, необходимо иметь и грамотно проанализировать большое число результатов экспериментов, выявляя то общее, что и должно составить содержание закона или принципа. Прямые эксперименты в экономике невозможны, однако ежедневная практика функционирования многочисленных микроэкономических объектов — предприятий, фирм, бирж, банков и т.п. дает богатый материал для анализа. Дело существенно упрощается еще и в силу того, что на каждом предприятии, в каждой фирме ведется бухгалтерский учет, метод осуществления которого был предложен ровно 500 лет назад (в 1494 г.) итальянским математиком Лукой Пачоли [4].

Этот метод предполагает детальный учет каждой операции, производимой на предприятии. Покупка сырья и материалов, формирование внутренней цены (себестоимости) на производимые товары или услуги, куда включаются все основные затраты на производство, продажа продукции по более высоким ценам и, как следствие, получение прибыли — все эти процессы находят отражение в бухгалтерских проводках. При этом так называемый принцип двойной записи в бухгалтерском учете предполагает, что каждая операция обязательно отражается одновременно на двух счетах — в дебете одного и в кредите другого счета.

Другими словами, бухгалтерские проводки фиксируют переходы и взаимные трансформации материальных ценностей, затрат и денежных средств, причем так, что общая их сумма может измениться только за счет взаимодействия предприятия с внешним миром.

3 Закон сохранения стоимости

Операции, которые не меняют величину суммарной стоимости средств, находящихся в распоряжении предприятия, либо являются чисто внутренними операциями — передача материальных ценностей со склада на производство или перевод денег с расчетного счета в кассу и т.п., либо являются операциями эквивалентного обмена — оплата поступивших материалов, продажа части средств по себестоимости и т.д. Если операции являются внутренними, то предприятие с точки зрения физики можно назвать изолированным. В этом случае в бухгалтерских проводках участвуют только так называемые активные счета.

В противоположном случае, когда имеет место обмен с внешним миром (эквивалентный или нет — это неважно) в проводках обязательно участвуют пассивные счета, фиксирующие приток или отток средств с предприятия (возникновение или погашение его долгов). Обмен с внешним миром осуществляется и через материальные и через денежные потоки (рис.1), существенным же является тот факт, что для каждого предприятия в целом или для отдельной учетной категории средств (в

том числе и денежных) баланс прихода, расхода и величины остатка всегда имеет форму закона сохранения величины стоимости:

$$Q_n = Q_{n-1} + InF - OutF, \quad (1)$$

где Q_n — значение учетной величины на конец периода, Q_{n-1} — ее остаток на конец предыдущего периода времени, InF — приток, $OutF$ — отток этой величины за период (На языке бухгалтерского учета величины "InF" и "OutF" называются оборотами по дебету или по кредиту, а величины "Qi" — сальдо по счету).

Таким образом, можно сделать вывод, что в экономике существует закон сохранения стоимости, вполне аналогичный закону сохранения энергии в физике, который утверждает, что стоимость каких-либо материальных или денежных средств не исчезает бесследно и не появляется из ничего даже при изменении физической сущности средств, а изменения ее величины связаны с добавлением или вычитанием стоимости, которые согласно правилам бухгалтерского учета будут отражены в ее перераспределении по другим счетам.²

4 Предельная рентабельная возобновляемого (циклического) производства

Полный учет изменения величины стоимости предприятия по бухгалтерским расчетам завершается составлением баланса. Баланс в укрупненных учетных категориях показывает все произведенные за отчетный период затраты и все полученные доходы. Разность этих величин составляет прибыль предприятия (или убыток), что и отражается на специальном балансирующем счете, демонстрирующем конечный результат деятельности предприятия (со знаком "плюс" или "минус").

Обращаясь к рис.1, важно еще раз подчеркнуть, что работающее предприятие есть на физическом языке открытая система, обменивающаяся с внешним миром материальными и денежными потоками.

Рынки, с которыми периодически взаимодействует предприятие, представляют собой трансформаторы материальных потоков в денежные и наоборот. Каждый рынок характеризуется несколькими параметрами — прежде всего, естественно, "коэффициентом трансформации", временем задержки, возможными потерями, количеством "пузырьков", которые он подмешивает в идущий от него на предприятие поток (для потока денежных средств "пузырьками" можно считать векселя и другие письменные обязательства, а для материальных потоков, например, договора с предоплатой и с отсрочкой поставки).

Наиболее существенным с экономической точки зрения является факт продажи товара по цене более высокой, чем себестоимость, т.е. трансформации потока товаров в денежный поток с коэффициентом больше единицы. Именно эта разница цен и дает прибыль предприятию, т.е. оправдывает целесообразность его функционирования (с точки зрения собственника). Цикличность процесса производства и получение положительного эффекта в результате его периодических контактов с рынками с разными ценами наводит на прямую аналогию этих процессов с циклом Карно в физике.

Вспомним кратко как описывается цикл Карно в термодинамике и каковы основные выводы из его рассмотрения.

Обратимся к рис.2а, где изображен цилиндр с газом, удерживаемым поршнем, который периодически находится в тепловом контакте то резервуаром (большим телом) с температурой T_1 , ("холодильником"), то с резервуаром с температурой T_2 ("нагревателем"). Тогда, когда цилиндр контактирует с первым телом и температура газа равна T_1 ($T_1 < T_2$), поршень сжимает газ, т.е. совершает работу (точки 1,2 на диаграмме, рис.2а). Затем цилиндр выводится из соприкосновения с первым резервуаром, но газ под действием поршня продолжает сжиматься и температура его повышается (2,3). (Цилиндр считается в это время теплоизолированным от внешнего мира, т.е. на физическом языке осуществляется адиабатический процесс сжатия). Температура газа растет и в какой-то момент достигает величины T_2 . Цилиндр приводится в тепловой контакт со вторым резервуаром, при

²Интересно отметить, что опубликованная в английском журнале "Nature" в 1938 г. статья немецкого геофизика Р.Эмдена, посвященная роли энергии и энтропии в термодинамических процессах и озаглавленная "Зачем мы имеем зимнее отопление" была затем полностью включена в монографии таких крупнейших физиков - теоретиков как А.Зоммерфельд, Р.Кубо и некоторых других. Заканчивалась эта статья словами: "В гигантской фабрике естественных процессов... закон сохранения энергии играет роль бухгалтера, который приводит в равновесие дебет и кредит".

этом он, сохраняя свою температуру на уровне T_2 , уже сам совершает работу над поршнем (3,4). В некоторый момент контакт цилиндра с резервуаром прерывается, газ, продолжая расширяться и совершать работу, охлаждается до температуры T_1 (4,1). Цилиндр вновь приводится в тепловой контакт с резервуаром с температурой T_1 и процесс повторяется.

Полезная работа, совершенная газом (т.е. разница между полной работой газа над поршнем и работой поршня по сжатию газа) определяется площадью между кривыми — двумя изотерамами и двумя адиабатами (рис.2а), а предельный коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины — отношением этой работы к теплу, переданному от более нагретого (второго) тела. КПД цикла Карно, как известно [5], равен

$$\eta = 1 - T_1/T_2, \quad (2)$$

зависит только от разности температур "нагревателя" и "холодильника" и не зависит от природы "рабочего тела" (газа).

Обратимся теперь к предпринятию, закупающему, т.е. затрачивающему имеющиеся у него денежные средства, на рынке с ценами P_1 сырье и материалы, а затем, будучи "изолированным от внешнего мира", переводящему это сырье и материалы в готовую продукцию с ценой P_2 (рис.2в). Продавая эту продукцию, т.е. получая денежные средства от более "горячего" рынка, предприятие получает больше денежных средств, чем оно затратило. Полученные "излишки" оно зачисляет себе в прибыль, т.е. выводит их из оборота, тратя на что-то полезное для себя, а с первоначальной суммой средств вновь входит в контакт с "холодным" рынком сырья с ценами P_1 . Цикл повторяется, и эффективность работы предприятия может быть рассчитана (по аналогии с вычислением КПД цикла Карно) как отношение полученной прибыли к валовому доходу³

$$r = \frac{(P_2 - P_1)^n}{P_2 n} = 1 - P_1/P_2, \quad (3)$$

где n — количество сырья и материалов или готовой продукции, выраженное в физических единицах. Величину r можно назвать предельной рентабельностью производства по отношению к доходу, поскольку более высокой рентабельности в возобновляемом циклическом производстве достичь невозможно. При выводе формулы (3) учтены только принципиально необходимые для процесса производства затраты на покупку сырья и материалов, все же остальные затраты (зарплата персонала, налоги и т.д.) считаются пренебрежимо малыми, подобно тому, как не учитывается трение и потери тепла при расчете КПД цикла Карно.

Таким образом, в экономике может быть сформулирован принцип о невозможности получения в возобновляемом производственном цикле рентабельности (определенной по отношению к валовому доходу) свыше ста процентов. При этом устанавливается также, что предельная рентабельность не зависит от конкретного вида производственного процесса (это может быть обработка и сборка, расфасовка и плавка, это может быть оказание каких-то услуг, например, просто перевозка товара с одного места на другое, это может быть аккумуляция денег у вкладчиков и выдача их в кредит заемщикам и т.д.), а определяется только разностью цен на рынке факторов и рынке товаров.

В заключение заметим, что роль бухгалтерского учета в экономике аналогична роли кинетики в физике. Зная все детали многочисленных взаимодействий, можно рассчитать достаточно точно любую величину. Однако для анализа общих тенденций обычно удобнее пользоваться некими усредненными (в определенном смысле макроскопическими) показателями, которые могут быть получены с помощью статистики или введены эмпирически. Несомненно, что в экономике важную роль должны играть такие понятия как энтропия, энтальпия и т.п., естественно, соответствующим образом определенные. Однако в физике они более тесно связаны именно со статистическими понятиями и подходами, которых нам здесь практически удалось избежать. В силу этого корректное введение их и формулировка соответствующих принципов в экономике требуют, по-видимому, специального рассмотрения.

³ В экономике существует несколько понятий рентабельности [6]. Наиболее близкой по смыслу к введенной величине является "рентабельность продукции", равная отношению прибыли к издержкам на их производство, т.е. в данном случае $r = \frac{P_2 - P_1}{P_1}$. Об определениях, как известно, не спорят, однако формула (3) кажется нам в данном случае предпочтительней, поскольку определенная по ней рентабельность (по аналогии с понятием КПД в физике) никогда не может превышать 100%.

ССЫЛКИ

- [1] The economy as an evolving complex system. *The proceedings of the evolutionary paths of the global economy workshop, held september 1987 in Santa Fe, New Mexico, v.5. Edited by Philip W. Anderson, Kenneth J. Arrow, David Pines. Addison-Wesley Publ. Comp. Inc.*
- [2] Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т.39, вып.1 (Специальный выпуск). РАН, М.: "Наука", "ТВП".
- [3] Э.Маленво. *Лекции по микроэкономическому анализу. М.: "Наука". 1985.*
- [4] Бухгалтерский учет. 1994. N 8. (Специальный выпуск).
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Статистическая физика, ч.1. М.: Изд-во "Наука", 1976, параграф 19.*
- [6] Статистический словарь. М., Изд-во "Финансы и статистика". 1989.

SOME PRINCIPLES OF ECONOMICAL DYNAMICS

A. V. Smorgonskii

In this paper we attempt to formulate the most common laws of economical dynamics like it was done in physics when the thermodynamical principles were formulated. Analysis of basic principles of book-keeping shows that there exists in economics the law of value conservation similar to the law of energy conservation in physics. Investigation of the conditions of simple reproduction for an enterprise which interacts with the factor market of goods and services indicates that there exists a law that restricts the maximum profitability of cyclical production process.

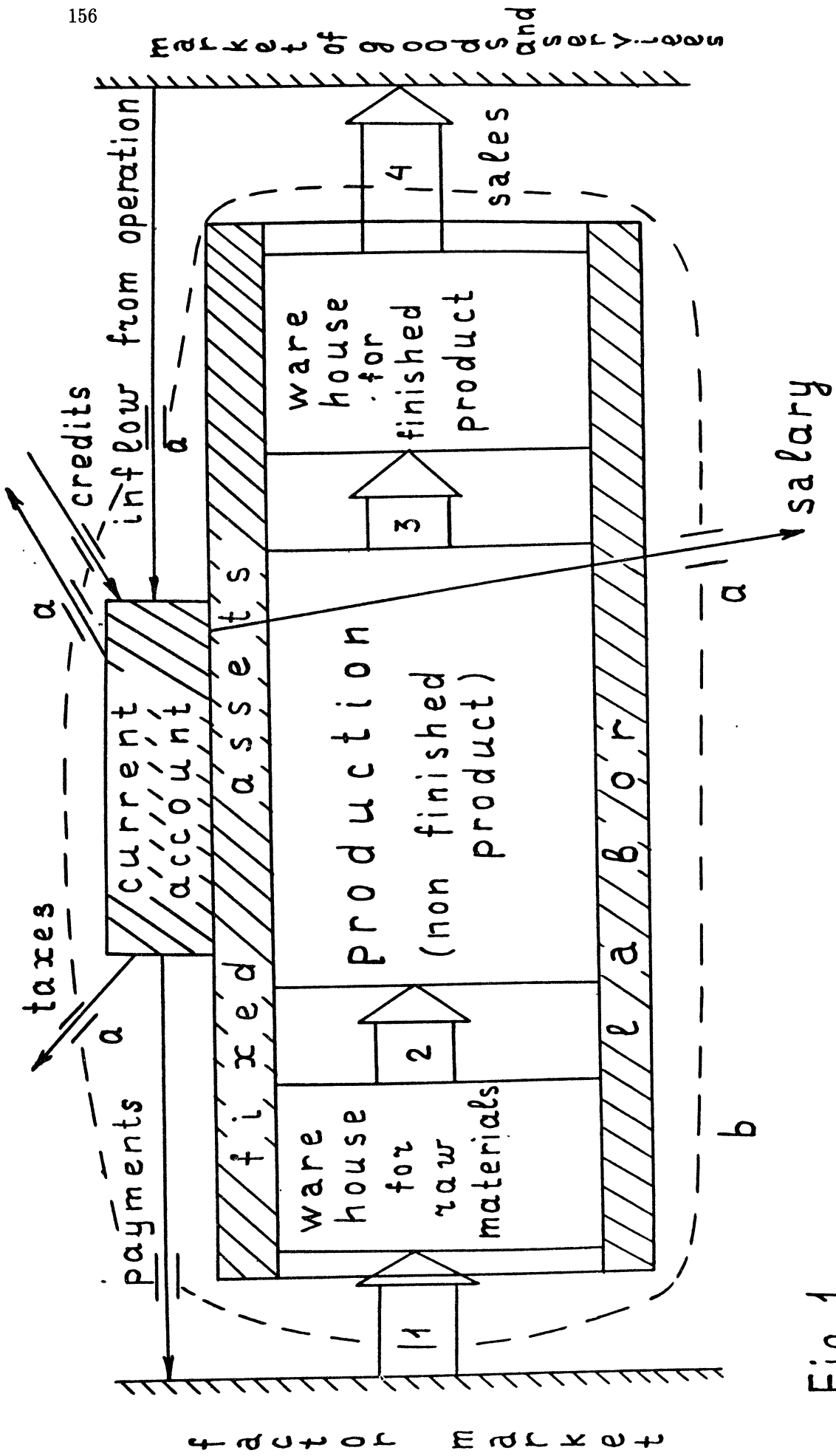
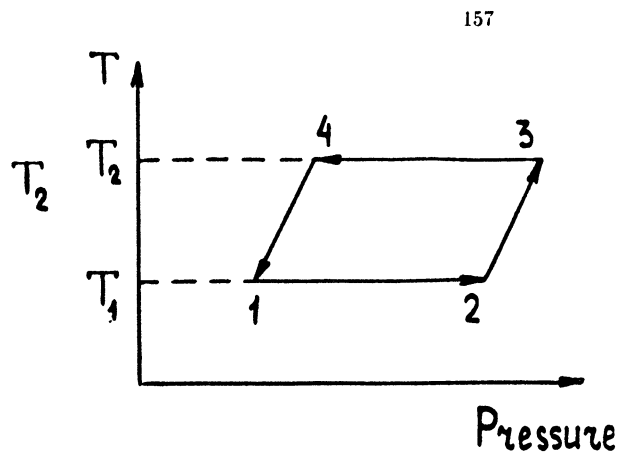
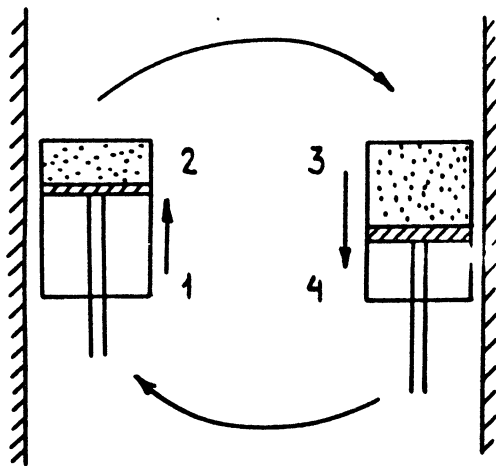
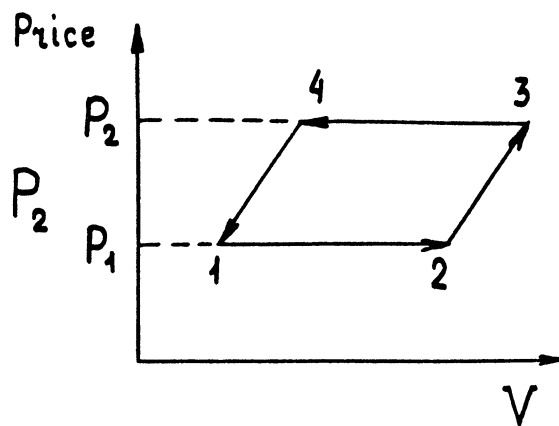
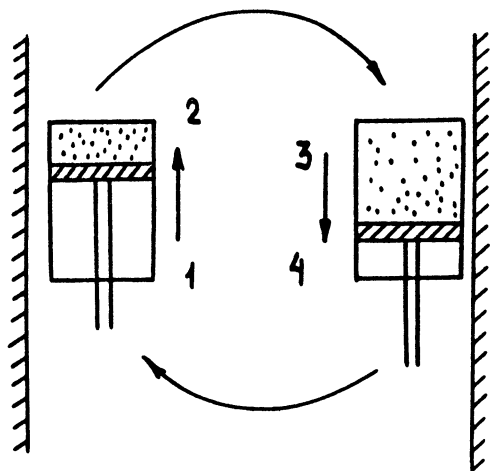


Fig. 1.



$$\eta_{\max} = 1 - T_1/T_2$$

a



$$\eta_{\max} = 1 - P_1/P_2$$

b

Fig. 2

Анонс Анонс Анонс Анонс Анонс Анонс Анонс Анонс Анонс Анонс Анонс Анонс Анонс

The International Conference on
Nonlinear Dynamics and Chaos
Applications in Physics, Biology and Medicine

ICND – 96

Saratov

July 8–15, 1996

Russia

The International conference ICND–96 will be held in Saratov, Russia; with main sessions on a chartered boat on the Volga river.

Concurrently the SPIE International Workshop on Nonlinear Dynamics and Structures in Biology and Medicine: Optical and Laser Technologies will be held.

Conference topics

- Bifurcations and Chaos
- Nonlinear Waves and Structure Formation
- Noise-Induced Phase Transitions
- Self-Organization
- Nonlinear Brownian Motion
- Numerical Methods and Computer Simulations
- Controlling Chaos
- Statistical and Qualitative Theories of Dynamical Systems
- Stochastic Resonance
- Stochastic Processes and Their Applications in Biology
- Granular Media
- Dynamics of Electronic Circuits and Systems
- Signal Processing and Diagnostics in Medicine and Biology
- Lasers and Optical Systems
- Laser and Optical Technologies in Biomedicine

Addresses

G.Strelkova, ICND–96 Secretariat
Lab. of Nonlinear Dynamics
Dept. of Physics, Saratov State University
Astrakhanskaya str. 83, 410071 Saratov, Russia

e-mail: ICND@chaos.ssu.runnet.ru, ICND@chaos.saratov.su
WWW home page: <http://chaos.ssu.runnet.ru/conf.html>

INDEX

- Andrienko A. V. , 5, 7 (2)
 Anfinogentov V. G. , 7 (1)
 Bazhenov M. , 9 (2)
 Bezruchko B. P. , 13 (1)
 Bohr T. , 9 (2)
 Chernov V. V. , 19 (1)
 Demikhovskii V. Ya. , 15 (2)
 Denisov S. V. , 79 (1)
 Denisyuk V. A. , 15 (2)
 Glebsky L. Yu. , 21, 25 (2)
 Gorshkov K. , 9 (2)
 Gromov E. M. , 23 (1)
 Gushchin V. V. , 19 (1)
 Kipchatov A. A. , 69 (1)
 Kocharovskaya O. , 31 (2)
 Kocharovskiy V. V. , 37 (2)
 Kocharovskiy Vl. V. , 37 (2)
 Kozlov A. K. , 47 (1)
 Kozlov V. V. , 53 (1)
 Krasichkov L. V. , 69 (1)
 Kukushkin V. A. , 55 (2)
 Lehmann N. , 59 (2)
 Lerman L. M. , 25 (2)
 Manakov S. V. , 65 (2)
 Mchedlova E. S. , 75 (1)
 Medvedev S. B. , 69 (2)
 Prokhorov M. D. , 13 (1)
 Protogenov A. P. , 73 (2)
 Rabinovich M. , 9 (2)
 Radeonychev Ye. , 79 (2)
 Rostovtsev Yu. V. , 31, 73 (2)
 Safonov V. L. , 5, 7 (2)
 Savin D. V. , 59 (2)
 Seleznev E. P. , 13 (1)
 Shakir'yanov M. M. , 85 (2)
 Shalfeev V. D. , 47 (1)
 Sokolov V. V. , 59 (2)
 Sommers H.-J. , 59 (2)
 Talanov V. I. , 23 (1)
 Tolstova N. P. , 55 (2)
 Usatenko O. V. , 79 (1)
 Zenchuk A. I. , 65 (2)
 Антонец В. А. , 87 (2)
 Беллюстин Н. С. , 99 (2)
 Волков Н. Б. , 85 (1)
 Демиховский В. Я. , 105 (2)
 Езерский А. Б. , 91 (1)
 Ермошин Д. А. , 91 (1)
 Зевеке А. В. , 87 (2)
 Зубарев Н. М. , 85 (1)
 Зубарева О. В. , 85 (1)
 Искольдский А. М. , 85 (1)
 Каменев Д. И. , 105 (2)
 Кияшко С. В. , 91, 103 (1)
 Клочков Б. Н. , 111 (2)
 Ковалева Э. П. , 87 (2)
 Кузнецов С. П. , 111 (1)
 Куркин А. А. , 117 (1)
 Лушников П. М. , 119 (2)
 Малышева Г. И. , 87 (2)
 Осипов Г. В. , 121 (1)
 Павлов И. С. , 127 (1)
 Полевая С. А. , 87 (2)
 Потапов А. И. , 127, 133 (1)
 Потапова С. А. , 133 (1)
 Рейман А. М. , 111 (2)
 Розанов Н. Н. , 125 (2)
 Сатаев И. Р. , 111 (1)
 Скоков В. Н. , 145 (2)
 Сморгонский А. В. , 151 (2)
 Сущик М. М. , 121 (1)
 Яхно В. Г. , 99 (2)

CONTENTS

Andrienko A. V., Safonof V. L. Evidence of nonequilibrium Bose condensation of phonons in antiferromagnet under microwave noisy pumping	5
Andrienko A. V., Safonof V. L. Observation of coupled photon-phonon oscillations at microwave pumping of antiferromagnet	7
Bazhenov M., Bohr T., Gorshkov K., Rabinovich M. The stationary and quasistationary solutions of complex Ginzburg-Landau equation	9
Demikhovskii V. Ya., Denisyuk V. A. Chaos in quantum semiconductor structure in tilted magnetic field	15
Glebsky L. Yu. Spectrum of multi-circuit localized solutions	21
Glebsky L. Yu., Lerman L. M. Instability of small stationary localized solutions to a class of reversible 1+1 PDEs	25
Kocharovskaya O., Rostovtsev Yu. Thermodynamics' restrictions on amplification without inversion	31
Kocharovskiy V. V., Kocharovskiy V. V. Unstable quantum field theory solves the problem of quantum gravity	37
Kukushkin V. A., Tolstova N. P. Nonlinear absorption and velocity dispersion of acoustic pulses in superconductors	55
Lehmann N., Savin D. V., Sokolov V. V., Sommers H.-J. Properties of time delay in quantum chaotic scattering	59
Manakov S. V., Zenchuk A. I. The dual $\bar{\partial}$ -problem and (2+1)-dimensional nonlinear evolution equations	65
Medvedev S. B. Two examples of normal forms for the shallow water equations	69
Protogenov A. P., Rostovtsev Yu. V. Quantum group diffusion over roots of unity	73
Radeonychev Ye. Amplification without inversion via field-dependent relaxation	79
Shakir'yanov M. M. Solvability of the Cauchy problem for the Davey-Stewartson-II equations	85
Антонец В. А., Ковалева Э. П., Зевеке А. В., Малышева Г. И., Полевая С. А. Новые человеко-машинные интерфейсы	87
Беллюстин Н. С., Яхно В. Г. Пространственно-временная динамика в модельных экономических системах	99
Демиховский В. Я., Каменев Д. И. Туннельные эффекты в гамильтоновской вырожденной системе	105
Клочков Б. Н., Рейман А. М. Самоорганизационные процессы кровоснабжения в биологических тканях	111
Лушников П. М. Динамический критерий коллапса в нелинейном уравнении Шредингера	119
Розанов Н. Н. Локализованные пространственно-временные структуры в широкоапертурных нелинейнооптических и лазерных системах	125
Скоков В. Н. Регулярные и хаотические термоэлектрические колебания при джоулевым разогреве тонких ВТСП-пленок в кипящем азоте	145
Сморгонский А. В. Некоторые принципы экономической динамики	151
Index	159
Contents	161

Нелинейные волны. Синхронизация и структуры. Ч.2.
Под редакцией М.И.Рабиновича, М.М.Сушика, В.Д.Шалфеева.

ИБ 569

Тем. план 1995, позиция 134

Лицензия N 020235 от 16.01.91

Подписано к печати *15.01.96г.* . Формат 70 × 108 1/16

Бумага типографская N . Печать офсетная. Усл.печ.*14 л.*

Уч.-изд.л. . Заказ N *36* . Тираж *300* экз. С.162.

Издательство Нижегородского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета им. Н.И.Лобачевского
603600, г.Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Типография ННГУ. Ул. Б.Покровская, д.37.