

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Физика и астрофизика



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Физика и астрофизика

Сборник научных трудов



МОСКВА "НАУКА"

1993

УДК 530.182 + 517.9 : 539.18

Нелинейные волны: Физика и астрофизика. — М.: Наука, 1993. — 357 с. — ISBN 5-02-000153-8

Сборник посвящен памяти Я.Б. Зельдовича. В книге содержатся обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на IX Всесоюзной школе по нелинейным волнам, Горький (Нижний Новгород), март 1989. Обсуждаются проблемы гравифизики (происхождение галактик, крупномасштабная структура Вселенной), квантовой физики и физики твердого тела, рождения и формирования структур, проблемы самоорганизации и многие другие проблемы с общих позиций нелинейной динамики.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся исследованиями нелинейных явлений.

Nonlinear waves: Physics and astrophysics / Eds A.V. Gaponov-Grekhov, M.I. Rabinovich. — Moscow: Nauka, 1993. — 357 p.

The book is dedicated to the memory of Ya.B. Zel'dovich. The book contains reviews and original papers based on lectures of IX All-Union Workshop on Nonlinear Waves (Gorky, March, 1989). The problems of gravitational physics (the origin of galaxies, the large-scale structure of the Universe), quantum physics and solid state physics, structure birth and formation, problems of self-organization and many other problems from general positions of nonlinear dynamics are discussed.

The book is intended for specialists in nonlinear phenomena.

Ответственные редакторы
академик *А.В. Гапонов-Грехов*,
член-корреспондент РАН *М.И. Рабинович*

Рецензенты
Д.И. Трубецков, В.Д. Шалфеев

Н $\frac{1604000000-341}{042(02)-93}$ 504—91, II полугодие

© Коллектив авторов, 1993
© Российская академия наук, 1993

ISBN 5-02-000153-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

На IX Всесоюзной школе по нелинейным волнам, Горький (Нижний Новгород), март 1989, была нарушена замечательная традиция – на ней не было Якова Борисовича Зельдовича. Научные интересы Я.Б. были исключительно широки, а его результативность в самых различных областях физики – от астрофизики и до химической технологии – поистине удивительны. Поэтому, конечно, нелинейная физика и нелинейная динамика не вправе "монополизировать" Я.Б., однако если обратиться к трудам Я.Б., его книгам и учебникам, то трудно не согласиться с тем, что нелинейные проблемы волновали его на протяжении всей жизни. Это относится и к началу его деятельности, и к последним двум десятилетиям, которые он в основном посвятил исследованию проблем происхождения галактик и крупномасштабной структуры Вселенной. Когда он рассказывал об этих проблемах на Конгрессе по самоорганизации в Пушкино (1983 г.), он сам полуслуштя заметил: "Всю жизнь занимался синергетикой, но только недавно узнал, как это называется".

Работы Я.Б. по экзотермическим химическим реакциям и теории горения, начатые еще в 30-е годы, фактически были одними из первых по теории пространственно-временных структур, которая является одним из главных направлений современной нелинейной динамики. Принципиальная нелинейность этих задач (связанная, в частности, с зависимостью скорости химических реакций горения от температуры) потребовала от Я.Б. исключительной изобретательности и выработки разнообразных подходов для их решения. Здесь понадобились и его замечательная физическая интуиция, и виртуозное владение математикой. Именно Зельдович построил теорию нелинейных волн горения и детонации, им (совместно с Д.А. Франк-Каме-нецким) была получена связь скорости распространения пламени и устойчивости фронта горения с реальной химической кинетикой системы. Идейным продолжением этих работ явились его классические исследования по теории ударных волн.

Нелинейные задачи с их специфической постановкой, асимптотическими и качественными методами, формулированием адекватных моделей в первую очередь привлекали Я.Б. в связи с проблемами квантовой механики и теории частиц, космологии и, конечно, астрофизики. В этом кратком предисловии не предоставляется возможности даже упомянуть о многих из его замечательных нелинейных результатов. Несомненно, они будут продолжены и развиты его многочисленными сотрудниками и учениками.

Добавим здесь, что Яков Борисович находил исключительное удовлетворение и радость в работе с молодыми, он писал для них учебники, проводил семинары, читал лекции. Так, несмотря на исключительную занятость,

Я.Б. всегда с удовольствием приезжал на Горьковские школы. Неповторимое обаяние лекций Я.Б., вызывавшее у слушателей чувство сопричастности к научным открытиям, его фантастический темперамент, над которым, казалось, не властны годы, его заинтересованность в аудитории снижали ему горячую любовь слушателей Горьковских нелинейных школ. Его же стиль и метод исследования Природы, казалось, специально синтезирован в проекции на нелинейные науки. Действительно: "В исследованиях природы необходимо все: владение математическим аппаратом и преодоление математических трудностей, идейная смелость и физическая интуиция, умело поставленный эксперимент и математическое моделирование — все эти разные подходы равно необходимы, только сплав их ведет к продвижению вперед" (*Зельдович Я.Б., Яглом И.М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. М.: Наука, 1982*).

Книга открывается статьей профессора Г.И. Баренблатта о Я.Б. Зельдовиче. Автор этой статьи много лет сотрудничал с Яковом Борисовичем и пользовался его неизменным уважением. Многие статьи, помещенные в книге, написаны учениками Я.Б., а другие — теми, кто его многократно слышал. Всем им приносим свою искреннюю признательность.

*А.В. Гапонов-Грехов
М.И. Рабинович*

ЯКОВ БОРИСОВИЧ ЗЕЛЬДОВИЧ, КАКИМ Я ЕГО ЗНАЛ

Г.И. БАРЕНБЛАТТ

1. Уже можно уверенно говорить, кто и в чем был уникален в быстро уходящем двадцатом столетии. Яков Борисович был уникален в классической физике. Он охватил ее своими трудами почти целиком, а понимал в ней — все. Сравнить его в классике этого столетия можно с лордом Рэлеем, все же Рэлей захватил в двадцатом столетии полтора десятилетия активной работы. Как раз столько, сколько Я.Б. не дожид до его конца.

Было и существенное отличие. Рэлей в конце жизни подчеркнуто отстранялся от новой физики — квантовой и релятивистской, считая это делом следующих поколений. Я.Б. до самого конца участвовал в гонках по новым областям.

Более того. Волной своей славы, ставшей в конце жизни всемирной, Я.Б. был обязан в первую очередь именно своим трудам последних десятилетий, прежде всего своим достижениям в астрофизике и физике частиц. Достаточно прочесть некролог Я.Б. в "Nature", написанный А.Д. Сахаровым. Он упоминает об их совместной работе над атомным и водородным оружием, говорит об их жизни в другом городе. Однако, говоря о научных результатах Я.Б. и тамошних дискуссиях, Сахаров пишет почти исключительно об астрофизике и частицах, очевидно, не для таких дискуссий их там собрали. Второго некролога в "Nature" не будет, так что для многих Я.Б. предстанет только астрофизиком и "частичником" или, в лучшем случае, люди будут спрашивать, как спросил меня в 1966 г. в Кембридже М. Гелл-Манн, один из лидеров тогдашней физики: "Правда ли, что Зельдович что-то там сделал по пламенам и взрывам?". Не сомневаюсь, однако, что в благодарной памяти человечества Я.Б. останется навсегда прежде всего как крупнейший физик-классик двадцатого столетия.

Еще один аргумент. Мне довелось участвовать в представлении Я.Б. на наиболее престижную международную премию. Сейчас это сказать можно: такая премия не присуждается умершим. Там требуется формула представления. После долгого обсуждения она прозвучала так: за определяющий вклад в новую область физики — физику самоорганизующихся систем в активных средах. Дело щепетильное. Как полагается, очень осторожно, обиняком, было выяснено мнение самого Я.Б.: "Я.Б., как вы считаете, что было самым значительным вкладом в науку в вашей жизни? Правильно ли думать так?" — "Зачем вам это?" — "Так просто. Для интеркалибрации". Я.Б. после некоторого размышления согласился. Я спросил прямо: "А как же астрофизика, космология, "блины", частицы и т.д.?" Ответ был очень определенным: "Эти результаты — более преходящие и в них я разделяю успех с другими". В какой-то мере эта точка зрения отражена

в ставшем знаменитым автобиографическом послесловии к собранию его трудов¹.

И действительно: пламя, воспламенение, детонация — явления очень важные сами по себе. Объект интереса всех людей начиная с доисторических времен — достаточно напомнить легенду о Прометее. Создание теории этих процессов — дело непреходящей важности. Однако от волшебного прикосновения Я.Б. к этим проблемам произошло нечто гораздо большее. Теоретические подходы к этим явлениям, развитые в трудах Я.Б. (в ряде случаев — с коллегами и учениками) в 30–40-е годы и продолжавшиеся им до конца, стали важным элементом сегодняшнего теоретического естествознания в целом. Для сравнения уместно вспомнить: в свое время Рэлей в Англии, Л.И. Мандельштам и его школа в нашей стране создали общее учение о колебаниях. Возникла даже полезная концепция "колебательной взаимопомощи", когда трудности, возникающие в исследовании колебаний одной физической природы, понимались и преодолевались анализом более понятных по тем или иным причинам колебаний другой природы. То же произошло с физикой самоорганизующихся нелинейных волн — произошло при определяющем участии Я.Б. Сегодня эти концепции успешно работают в десятках областей, в том числе весьма далеких от породившей их теории горения.

2. Автор этих строк по профессии — механик, занимался в основном гидродинамикой и прочностью. Однако в течение многих лет жизни, более тридцати, я имел привилегию постоянного научного и личного общения с Я.Б. Наши совместные работы были связаны прежде всего с промежуточными асимптотиками, начиная с формулировки основных представлений. Мы вместе занимались автомодельными решениями второго рода. В этих решениях показатели степени автомодельных переменных находятся решением задачи на собственные значения, а не из анализа размерностей. В конце жизни Я.Б. увидел, как развивавшиеся при его определяющем участии одновременно, но исходя из разных соображений разными людьми и в разных местах идеи масштабной инвариантности (скейлинг), фрактальности и неполной автомодельности (автомодельности второго рода) слились в единую систему представлений. Эти представления оказались фундаментальными для широкого и непрерывно расширяющегося круга задач точного естествознания. Я.Б. это постоянно интересовало до самого конца. В печати и устно Я.Б. высказал много замечательных мыслей, определивших развитие этого круга идей. Вместе с Я.Б. мы подошли по-новому к устойчивости автоволновых процессов. Мы обнаружили, что их устойчивость не нарушается, если возмущенное решение стремится со временем не к невозмущенному решению, а к решению, сдвинутому относительно невозмущенного по фазе. Это меняет определение устойчивости инвариантных, в том числе автомодельных решений, включая в спектр нулевое

¹ Так получилось, что на заседании редколлегии Собрания трудов Я.Б. мне пришла в голову счастливая мысль завершить это Собрание таким авторским послесловием. Главный редактор Собрания Ю.Б. Харитон счел это предложение неожиданным и отнесся к нему сдержанно, но присутствовавший автор сразу же согласился и быстро послесловие написал. В благодарность за идею я получил от Я.Б. четыре школьные тетрадки с черновиком. Вообще я как-то довольно рано понял, что нельзя выбрасывать ни одной бумажки, написанной рукой Я.Б.

собственное значение. В то же время в совершенно другой области физики математически аналогичная идея была высказана Голдстоуном. Были у нас и другие работы, связанные, в частности, с устойчивостью пламен. Я.Б. придавал большое значение нашей книге "Математическая теория горения и взрыва", которую мы написали вместе с В.Б. Либровичем и Г.М. Махвиладзе.

Но не только это было предметом наших обсуждений и общих дел. Я.Б. интересовало в классической физике буквально все. Узнав о новом всплеске работ по разрушению, он высказал идею о возможности взаимного упрочнения трещин в каскаде дефектов. Эта идея особенно заиграла сейчас, когда множественное разрушение оказалось в центре внимания. Другой случай: Я.Б. узнал об эффекте гашения турбулентности малыми добавками полимеров и объяснении этого эффекта наличием в потоках агрегатов, состоящих главным образом из иммобилизованных молекулами полимеров молекул растворителя. Он высказал идею возможной проверки этого объяснения, которая мгновенно сработала. И так далее, таких примеров множество.

3. Здесь уместно рассказать мои впечатления о Я.Б. как о личности. Я.Б. был совершенно, глубоко внутренне равнодушен к вещам (мебели и т.д.). Есть стол и стулья (на столе надпись детской рукой: Гуга—дура²), служат более или менее удобно и ладно. Просто не помню у них серьезных ремонтов. Деньги интересовали Я.Б. лишь постольку, поскольку была большая семья, много детей, потом внуков. Каждому надо было как-то и в чем-то помочь. Одевался он, как и все члены его семьи, более чем скромно.

Помню такой случай. Мне довелось быть в прихожей квартиры модной московской портнихи. Модная портниха любезно уступила мне одно из десяти или двадцати имевшихся у нее приглашений на открытие международной книжной ярмарки (на Выставке достижений народного хозяйства). Уступила после того, как я убедил ее, что по этим приглашениям "книжного дефицита" давать не будут: ни одной книги на приглашение. Для сравнения: отдел научно-технической литературы Агентства по авторским правам имел одно приглашение для всех своих авторов. Мне было сказано: оно достанется Е.М. Лифшицу — решение было совершенно справедливым. Было обещано: они будут интриговать, и если достанут второе — оно мое. Не достали. Так вот, дожидаясь в прихожей, пока вынесут приглашение, я поймал себя на мысли, что одна люстра в этой прихожей стоит дороже, чем все движимое имущество Я.Б. Пожалуй, кроме гипсового слепка бюста Я.Б., так и не отлитого в бронзе. Автор этого бюста сейчас один из наиболее выдающихся американских скульпторов. Он происходил из Польши, но долгое время жил в Москве. По действовавшему в то время соглашению выехал в Польшу, но задержался там (это было в конце 60-х) недолго: время не благоприятствовало там таким людям, как он. К одному

²Свидетельствую, что это утверждение глубоко неправильно. Теперь Гуга, пожелавшая остаться под детским прозвищем, — доктор физико-математических наук, великоколепный физик (здесь я опираюсь на мнение многих коллег, прежде всего на нелицеприятное мнение М.А. Леонтовича). Она украшает любое общество, в котором появляется.

из дней рождения Я.Б. мы, несколько его друзей, заказали этому скульптору бюст Я.Б.

Бюст получился примечательным. Я.Б. представлен обнаженным, волосяная грудь пробрита в трех местах и там укреплены звезды Героя. В то время тройное геройство Я.Б. не афишировалось и ему, как и, по его словам, немногим другим трижды Героям (И.В. Курчатову, Ю.Б. Харитону), не рекомендовалось появляться с тремя звездами публично. Единственный трижды Герой Социалистического Труда, о котором говорилось открыто, был (хочется думать, заслуженно) председатель колхоза из Узбекистана Хамракул Турсункулов. Появляясь изредка на людях с тремя звездами (об одном таком случае ниже) и выслушивая за это мягкие, но жесткие упреки тех, кому ведать надлежало, Я.Б. оправдывался тем, что он похож на Хамракула. В праздничный день бюсте, покрытый простыней, был установлен на домашней лестнице-стремянке. Витя Голдманский (уже тогда знаменитый физико-химик; он теперь большой человек, академик, лауреат, директор Института химической физики, возглавляет у нас Пагуошское движение) наговорил на магнитофон голосом Левитана "Указ Президиума Верховного Совета об установлении бюста академика Я.Б. Зельдовича на квартире награжденного по такому-то адресу". На мою долю выпала часть сдернуть покрывало: бюст чуть не упал. Я вспомнил все это, снявшись специально с бюстом Я.Б., действительно установленным по настоящему такому Указу в Минске, где Я.Б. родился. -- Я.Б. нравилась эта фотография, и мы послали ее многим зарубежным коллегам. Я не помню, чтобы мы на самом деле фотографировались вместе.

Вообще дарить Я.Б. подарки ко дню рождения было очень непросто: подарок должен был быть нужным, иначе он увозился на дачу или передавался. Помню, я подарил ему доску (на которой пишут мелом): т.е. кто бывал у Я.Б., помнят ее, она висит слева от входа в большой комнату. Вместе с А.С. Компанейцем мы подарили Я.Б. вращающееся кресло. Надпись, придуманная А.С. Компанейцем, восхитила Я.Б.: "Гений — это усидчивость плюс поворотливость". Я.Б. был неистощим на выдумки, когда дарил подарки сам. Однажды ко дню рождения подарил мне рюмки и компас. Как объединить такое? Надпись гласила: "Пей, но ходи прямо!" Его надписи на книгах, которые им были мне подарены, очень серьезные и глубоки. Они поддерживают меня в трудную минуту; эти книги будут сохраняться в нашей семье, а потом — в семьях моих детей как самые дорогие реликвии.

4. Я.Б. обладал мужеством, которое проявлялось в действительно трудных ситуациях. Несколько таких ситуаций были связаны со мной: расскажу об одной из них.

Мой отец, участник-доброволец гражданской и Отечественной войн, давнишний член партии, был известным в Москве врачом-эндокринологом. по отзывам многих, — замечательным. После XX съезда он высказал мнение, что Хрущев не имел морального права говорить о Сталине, не упоминая о себе, так как у него самого руки по локоть в крови невинных жертв. Отец знал, что говорил, — в 30-е годы он работал в Лечсанупре Кремля. Высказал он это трем своим друзьям с первого класса витебской гимназии; помню их фамилии: Шур, Немец и Брауде. Преодолев, как тогда говорилось, ложное чувство товарищества, они заявили куда следует

(или куда не следует). К этому добавилось (а может быть, этому предшествовало, мне не удалось установить) заявление двух пациентов отца, выгашенных им с того света, Довгалева (племянница бывшего советского посла в Париже) и старика Болотина: он-де рассказывал им политические анекдоты³.

Короче, 8 апреля 1957 г. отца арестовали. Я.Б. узнал об аресте отца не от меня и приехал ко мне немедленно. На лацкане три звезды. Обругал меня за молчание⁴ и велел собираться. Куда мы едем? В Московский городской суд: там скоро будет слушаться дело. Приезжаем. Охрана Я.Б. сменяет бабушку с наганом, стоящую у входа. Поднимаемся в приемную: помню расширенные донельзя глаза секретарши, замороженно глядящей на звезды. Я.Б. проходит к председателю: "Прошу допустить меня на суд!" – (суд должен был быть закрытым). – "Зачем Вам?" – "Буду на Вас жаловаться, если засудите!" На суд председатель не пустил, но визитное дело сделал.

Первый суд происходил 22 июня 1957 г. Вершителям правосудия право же можно было посочувствовать: они просто не знали, как судить. Дело в том, что в этот день шел Пленум ЦК, обсуждавший решение Президиума ЦК о снятии Хрущева. Как известно, Хрущева тогда поддержал Г.К. Жуков, и он в 1957 г. снят не был. Но это стало известно вечером, а как быть судьям днем? Все же судьи свое дело знали – они отправили отца на медицинскую экспертизу. Я.Б. пришел в суд, опять при звездах, и некоторое время сидел в коридоре, вместе с родственниками. Отец видел Я.Б. (когда шел на суд под конвоем с закинутыми назад руками), и это его морально поддержало.

Дальше делом занялся А.Д. Сахаров – опять по собственной инициативе. Он написал письмо Хрущеву с просьбой освободить отца. Хрущев письмо получил и сказал Суслову: "Я тут необъективен, ты, Михаил Андреевич, реши это дело по совести". Однажды в январе 1958 г. А.Д. Сахаров был вызван из города, где он работал, в Москву для разговора с Сусловым. Разговор был трудным для А.Д. (помню комнату депутатов Казанского вокзала, куда А.Д. меня позвал ночью перед отходом обратного поезда, чтобы рассказать результаты), но весной отец из лагеря вышел.

5. Мне несколько раз приходилось бывать с Я.Б. в поездках. Из них особенно вспоминаю первую – поездку в альпинистский лагерь Белала-кая на Кавказе ранней весной 1960 г. Мы приехали туда вчетвером: Я.Б., его

³ Эти пятеро и были свидетелями обвинения на суде. Поскольку я знал отцовских товарищей, они пытались ко мне подойти. По древнему обычаю, я очертил вокруг себя круг и предупредил, что плюну, если войдут. Когда отец вышел, все трое у него лечились – ничего не поделаешь, отец давал клятву Гиппократу.

⁴ В то время Я.Б. постоянно очень цветисто выражался: я не нашел многих из употреблявшихся им слов не только в Толковом словаре Даля, но и в дополнении к этому словарю, вышедшему под редакцией известного слависта профессора Бодуна де Куртене. После перехода на работу в Академию наук в 1964 г. эта привычка исчезла у Я.Б. примерно в течение года. Исчезла вроде бы бесследно, но когда Я.Б. начинал даже чисто технический разговор о разного типа современном оружии (в том числе, о проблеме "ядерной зимы"), привычка восстанавливалась с прежней силой. Было бы интересно объяснить это явление с точки зрения учений Павлова и Фрейда.

первая жена Варвара Павловна Константинова, скоропостижно скончавшаяся летом 1976 г., его двоюродный брат Александр Григорьевич Зельдович, физик, специалист по низким температурам, тоже, увы, ушедший из жизни, и я. Поселились в одной комнате.

Варвара Павловна была человеческим чудом. Ее фотография поныне висит на стене в моем кабинете, память о ней согревает душу. Сам Я.Б. говорил: "Варя — человек без недостатков". Она была старше Я.Б. и уже тогда нездорова. Тем не менее центром нашего общества была именно Варвара Павловна и все мы радостно подчинялись ее предводительству. Нас влили в группу неумелых лыжников, и прекрасный инструктор, к сожалению, не помню его имени, сочетал в своих действиях уважение к Я.Б. и его спутникам с заботой о том, как бы нам не повредиться при лыжных спусках. В лагере было самообслуживание, все по очереди дежурили, помогая на кухне и подавая в столовой еду, чай и компот, которого давали сразу по две чашки. В день дежурства Я.Б. и его команды все, кто имел фотоаппараты, явились в столовую с ними — уникальная возможность снять Я.Б. в роли официанта. Этому не суждено было осуществиться: мы с А.Г. Зельдовичем взяли на себя удвоенную нагрузку в столовой, а Я.Б. и Варвара Павловна сосредоточили свои усилия на кухне. Подходя к кухне, слышал громкий голос Я.Б., предлагавшего усовершенствования, и увещевания В.П.

В день перед отъездом В.П. сказала, проснувшись: "О, Боже, сейчас нас будут пытать лыжами". У Я.Б. были две ковбойские рубашки, одна зеленая, другая красная. Они назывались рубашка первого рода и рубашка второго рода и надевались на лыжные тренировки поочередно. В.П. и Я.Б. заспорили, которой сегодня очередь. Занятия пропускать не разрешалось никому и не разрешалось пропускать спуски с горы. Однажды я пропустил свой спуск, спрятавшись за деревом: этот случай долго служил предметом веселого оживления в доме Зельдовичей.

Все было прекрасно, по вечерам были даже семинары с неизвестно откуда взявшейся маленькой доской, и вдруг — все оборвалось: пришло известие о внезапной смерти И.В. Курчатова. Выехать сразу же потрясенному и опечаленному Я.Б. не удалось из-за лавин. Помню, как мы долго сидим на почте, дожидаясь соединения с Москвой. Потом я рассказываю В.П. свои впечатления о нашей беседе с телеграфисткой и каких-то ее мыслях. Я.Б. слушает и подтверждает. В.П.: "Да бросьте вы! Я ее видела, — в лагере все ели вместе, — хорошенькая бойкая девчонка. Если бы не это, — черта с два вы бы вообще стали ее слушать, а тем более вспоминать тот вздор, который она несла".

Последняя наша совместная поездка была летом 1983 г. на Симпозиум по синергетике в Пушкино. Мы снова жили в одном номере, на этот раз гораздо большем. На симпозиуме было немало интересных людей из-за границы, среди них — Пригожин и Хакен; руководил дискуссией Б.Б. Кадомцев. По поводу синергетики Я.Б. чертыхался: "Никогда не думал, что всю жизнь говорю прозой". Мне, наоборот, казалось, что такое объединение вполне полезно: междисциплинарный единый подход, выработка общего стиля мышления. Впоследствии хотя Я.Б. нередко и пользовался термином "синергетика", но в этом всегда сквозила доля иронии, по крайней мере в разговорах со мной.

6. Атмосферу в доме Зельдовичей определяло удивительное сочетание Я.Б. и Варвары Павловны. До 1964 г. Я.Б. появлялся в Москве наездами, вначале при нем даже были "секретари", влиявшие на распорядок. Секретари были разные, помню одного — эlegantного молчаливого молодого человека. Второй был постарше и погрузнее, его звали Василий Иванович. У него были очень большие зубы, и всякий раз, видя его, я вспоминал Красную Шапочку.

Заметим, что никогда, ни в то время, ни после наши разговоры не касались занятий Я.Б. в другом городе.

Я.Б. тогда назначал встречи на раннее время, обычно в полседьмого—семь утра: дальнейшее расписание было заполнено по минутам. Осень 1957 г., я докладываю в большой комнате. Телефонный звонок, Я.Б. с некоторым любопытством и удивлением: "Вас!" Так я узнал о рождении моей старшей дочери Нади.

В другой раз, прощаясь у выхода по завершении дел, Я.Б. сказал мне с улыбкой: "Да, чуть не забыл. Послезавтра ваша первая лекция на физтехе. Курс называется "Математическая теория горения". Детали — у Франка (Д.А. Франк-Каменецкий, в то время — декан факультета в МФТИ)". Как? Что? — я рванулся назад к Я.Б. Секретарь, любезно улыбаясь, назад не пустил (это явно было согласовано, секретари такой власти обычно не имели). Среди слушателей этого первого курса были А.Г. Истратов и ныне уже ушедший из жизни В.Б. Либрович, в дальнейшем наши с Я.Б. общие ученики. Впоследствии они сделали замечательные работы по теории горения, в частности, разрешили очень принципиальный парадокс, связанный с неустойчивостью пламен по Ландау.

В 1964 г. Я.Б. возвратился в Москву, основным местом его работы стал Институт прикладной математики Академии наук. По-моему, это было ошибкой — надо было выждать немного и договориться все же с Н.Н. Семеновым о возвращении в Институт химической физики. Я.Б. смущало здесь явное смещение его интересов в астрофизику. Но Институт химической физики был для Я.Б. родным домом, и там признали бы любые его занятия. В ИПМ Я.Б. был в целом чужим, хотя безусловно там были несколько человек ему симпатичных (среди них К.И. Бабенко, О.В. Локуциевский, К.В. Брушлинский, Д.Е. Охоцимский, Т.М. Энеев). Он это чувствовал. Без малейших колебаний Я.Б. принял предложение П.Л. Капицы перейти в Институт физических проблем на должность заведующего теоретическим отделом после смерти И.М. Лифшица.

7. Однажды, придя к Я.Б. ранним утром, я увидел, что кто-то спит на диване в большой комнате, мы в этот раз прошли через большую комнату на цыпочках и занимались в комнате Я.Б. "Кто это?" — спросил я у Оли (дочери Я.Б.). — "Дядя Боря". Так я впервые увидел Б.П. Константинова. Его памяти Я.Б. посвятил статью, вошедшую во второй том Собрания трудов. Б.П., директор Ленинградского физтеха, в надежде сделать больше для физтеха и Академии в целом, не отказался от должности вице-президента и переезда в Москву. Его влияние при этом не возросло. (Я помню разговор в доме Зельдовичей: кто имеет большее влияние — директор единственного в стране Уралмаша или заместитель министра соответствующего машиностроения?) Дальше — тяжелая зависимость, даже в мелочах, по существу бесправие и бессилие внешне могуществен-

ного человека. Это отразилось на сердце, с детства больном, как у всех Константиновых. Как потом и М.Д. Миллионщиков, он рано сошел в могилу, и немало общего было в их внешне блестящих, а по существу трагических судьбах. Максимум — не всегда оптимум.

Я.Б. был человеком априори доброжелательным. У него было немало друзей, несколько — близких, хотя он всегда "держал" дистанцию. Вместе с тем он имел врагов. Не противников в дискуссиях или научных взглядах, в таких случаях отношения с Я.Б. не осложнялись, а именно врагов — по зависти, антисемитизму и т.д. Отношение Я.Б. к врагам не было ни христианским всепрощением, ни ветхозаветным "око за око, зуб за зуб", ни промежуточным. Это было желание выбросить их из своей жизни, нежелание тратить на них время и силы, когда столько хорошего еще лежит несделанным. С отвращением отвечал на недобросовестную критику, когда это становилось необходимым. Особенно памятен один такой ответ, ответ на критику книги Я.Б. по высшей математике для начинающих. Я.Б. написал эту книгу, когда увидел, как противоестественно, по его словам, учат в старших классах математике его детей. Он хотел показать в этой книге, что на самом деле математика — естественно-научная дисциплина. Я.Б. ориентировался, как он сам писал, не на упирающегося читателя, а на читателя, который сам тянется вперед, на читателя, которого не надо "подталкивать", читателя, с которым можно идти рядом и дружески беседовать. Характерно, что широко признанный американский математик и преподаватель математики Липман Берс в предисловии к своему курсу анализа назвал книгу Я.Б. одной из двух, оказавших на его педагогические воззрения наибольшее влияние.

Недавно я прочел о Феллини. В итальянской газете после нового фильма критическая статья: "Феллини как художник умер". Глупо, грубо, а главное — вопиюще несправедливо. Что делает Феллини, как он отвечает? Никак, — никого не спрашивая, делает новый фильм. Во всяком случае не идет с жалобой в ЦК христианско-демократической партии. Но Я.Б. был не в Италии, в Италию он съездил потом на несколько дней. (Был принят папой, у меня хранится прекрасная фотография: святой отец держит под локтем первый том Собрания трудов, Я.Б. явно взволнован.) Книгу переиздавать не разрешили: это был период глубокого застоя. С трудом, благодаря обращению влиятельного и благородного человека в ЦК, дали ответить на критическую статью в том же номере журнала. Кто выиграл? Никто. Кто проиграл — наш школьник, который не может получить книгу Я.Б. И это Я.Б., с его славой и звездами. . .

8. Хорошо помню, как я впервые увидел Я.Б. воочию. Это было весной 1952 г., я в ту пору был аспирантом А.Н. Колмогорова. К А.Н. пришли Н.Н. Семенов и А.С. Компанец. Они просили А.Н. о заступничестве. Предстояла публичная дискуссия с Н.С. Акуловым о цепных реакциях. Всем была хорошо памятна сессия ВАСХНИЛ в 1948 г., и во многих областях науки появились свои добровольцы-претенденты на роль Лысенко, нуждавшиеся в авторитетных в науке жертвах⁵.

⁵ Еще раньше такой претендент появился в математике. В Московском математическом обществе претендент выступил с докладом о вейсманизме-морганизме в математике. Он начал свой доклад со следующих слов: "Один видный московский

А.Н. Колмогоров был немногословен. Он сухо пообещал прийти, и, если это ему покажется целесообразным, выступить. Поэтому я пошел на дискуссию. Помню выступление сотрудника химического факультета В.П. Лебедева, он показывал на эпидиаскопе статью В.И. Гольданского. Все обратили внимание на номера, проставленные на страницах красным карандашом. Что это? "А это, — торжественно сказал докладчик, — я показываю, сколько раз Гольданский, любимый и ближайший ученик Н.Н. Семенова (неявно подразумевалось, и зять), цитирует Хиншелвуда". Это через четыре года сэр Сирил Хиншелвуд, впоследствии президент Лондонского Королевского общества, разделит с Н.Н. Семеновым Нобелевскую премию по химии. А тогда — разгар борьбы с космополитизмом и преклонением перед иностранщиной. . .

На трибуне появился Я.Б. На груди звезда, тон очень серьезный. "Не вижу дискуссии двух направлений, — сказал он. — С одной стороны — действительно научное направление, блестящие теоретические изыскания, эксперименты, новое развитие теории. С другой стороны — только абстрактные рассуждения сомнительной правильности о кинетических уравнениях". Сразу после Я.Б. — А.Н. Колмогоров. Надо было знать Андрея Николаевича, чтобы оценить его убийственную иронию. А.Н. начал с того, что он не согласен с предыдущим выступавшим. Напротив, он видит здесь отчетливое новое направление, причем не только в физической химии, но и в математике: предлагаемые Н.С. Акуловым решения достаточно ясных уравнений приводят к результатам, явно не укладывающимся в традиционные представления сегодняшней математики. Представители нового направления могут обратиться на кафедру математики, все же существующую на физфаке, и он надеется, он даже просто уверен, что там смогут разъяснить существующие на этот счет в обычной математике споры, может быть, даже просто покажут, как эти уравнения решать. . . , и т.д.

А.Н. не учел, что его речь, будучи записанной — при записи акценты исчезают, — даже при небольших по объему изъятиях может оказаться похвалой "новому направлению". Он был расстроен, узнав от меня, что так и произошло, запись его речи появилась в стенгазете физфака. Но на самой дискуссии позиция А.Н. Колмогорова сомнений не вызывала, и он оказал Н.Н. Семенову существенную поддержку.

Я хорошо запомнил день, когда мы с Я.Б. последний раз долго сидели на балконе его дома, 10 июня 1987 г. Он подарил мне отпечаток, поставил на нем дату и даже, чего раньше никогда не было, — место дарения: "балкон, д. № 6". Против обыкновения, мы что-то выпили. Он и я тщательно избегали отклонения разговора от вещей, действительно важных для нас обоих.

математик, ознакомившись с наметками моего доклада, сказал мне, что я дурак, . . ." Л.А. Люстерник, замечательный математик и по-настоящему хороший поэт, пожевал губами и пустил эпиграмму:

"Сказали мне, что я дурак,
И доказал я досконально,
В докладе длинном и нахальном,
Что это — так!"

Сейчас докладчик уже давно известен своими левыми выступлениями. Еще при И.Г. Петровском он хотел перейти в Московский университет на кафедру философии. И.Г. ему в этом отказал.

То, что он говорил, останется со мной навсегда. Потом мы много раз виделись, но как-то на бегу: у него дома, на работе. Говорили по телефону. С Инной Юрьевной Я.Б. пришел ко мне на день рождения. Вместе выступали на похоронах В.Б. Либровича – противоестественное дело хоронить ученика. 26 ноября в Институте проблем механики А.Ю. Ишлинского был семинар. Я докладывал о микромеханике – новом направлении в механике сплошных сред. Выступали с докладами мои ученики, семинар длился целый день. Я.Б. должен был быть, это как-то само собой подразумевалось. Утром он позвонил: "Вы не обидитесь, если мы с Инной не придем?" – "Что вы, Яков Борисович, готов повторить доклад для вас одного, когда вы захотите!" – какая-то тревога закралась, но я ее отогнал. Вечером Я.Б. позвонил: "Как прошло?" Спрашивал детали. Еще раз позвонил. . . Больше я его живым не видел и не слышал.

Яков Борисович умер, как хотел, – на лету. Он не хотел быть старым, быть в тягость, терять силу и класс постепенно. В памяти тех, кто его знал, он останется навсегда на взлете, бегущим и стремящимся к высоким и видным немногим вершинам. Я перечитываю конец его автобиографического послесловия к Собранию трудов: "В середине 80-х годов в тугой узел сплетаются самые трудные и самые принципиальные вопросы естествознания. Нет у меня желания более сильного, чем дожидаться ответа и понять его". Горько читать это – не сбылось. Но, если вдуматься, – все как он хотел. Самый короткий путь от вершины к вершине – по прямой, так говорил Заратустра. Для этого надо иметь длинные ноги. Я.Б. их имел. Со взятой вершины открываются новые – этому нет конца. Он не хотел дожить до того часа, когда дальнейшее движение перестанет его интересовать. Сейчас Я.Б. ушел – в вечность. Быстро исчезнут в наших воспоминаниях маленькие слабости. Навсегда останутся его влияние, сделавшее нас другими людьми, и постоянное чувство благодарности судьбе, подарившей близость к великому человеку и дружбу с ним.

ВСЕЛЕННАЯ, ЧАСТИЦЫ, ПОЛЯ

УДК 524

ПРОБЛЕМЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ГРАВИФИЗИКИ

А.М. ФРИДМАН

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Определение гравифизики

Так мы предлагаем называть оформившуюся к настоящему времени область науки, изучающую физическую эволюцию астрономических объектов под действием гравитационных сил. Эволюция "классических" астрономических объектов (к которым можно отнести планеты, звезды, звездные скопления, галактики, их группы и скопления), определяемая ньютоновскими силами тяготения, рассматривается в рамках нерелятивистской, или классической, гравифизики. Соответственно релятивистская гравифизика изучает эволюцию релятивистских объектов (черных дыр, нейтронных звезд, в том числе пульсаров), различные релятивистские эффекты (в частности, наблюдаемые в Солнечной системе) и главным образом космологические проблемы.

Стандартный путь исследования эволюции выбранного астрономического объекта состоит в следующем. Прежде всего рассматривается условие *равновесия* такого объекта: в каждой точке координатного пространства векторная сумма всех действующих на тело сил приравнивается нулю. Поскольку даже для тел с точной симметрией гравитационный потенциал представляется в виде интеграла по координатному пространству, условие равновесия уже в простейшем случае записывается в виде интегродифференциального уравнения.

Очевидно, при строгом выполнении условия равновесия эволюция системы *отсутствует*. При *малом отклонении* от равновесного состояния эволюция системы определяется ее *устойчивостью*. Область *устойчивого положения равновесия* характеризуется *малыми колебаниями*. Эволюция системы в этом случае также *отсутствует*. При отклонении от *неустойчивого* положения равновесия система *эволюционирует*.

Линейная теория устойчивости, исследуя *малые отклонения*, определяет лишь *скорость эволюции* системы в начальный момент времени (при ее удалении от положения равновесия) и условия неустойчивости.

Традиционное исследование *нелинейных явлений* в гравитирующих системах проводилось в двух противоположных предельных случаях. *Нелинейные волны*, в частности *солитоны*, рассматривались как результат взаимодействия монохроматических волн с коррелированными фазами. Альтернативная ситуация исследовалась в случае, когда в системе возбуждено много волн с различными волновыми числами и частотами. Их взаимодействие приводит к перекачке энергии из одних мод в другие и установлению *турбулентных спектров*.

Все четыре основных раздела гравифизики: равновесие, устойчивость, нелинейные волны и турбулентность – непременно включают *астрофизические приложения* – “поставщика” большинства теоретических задач.

Здесь мы ограничимся лишь изложением основных результатов по равновесию и устойчивости сферически-симметричных систем (а также принципиальных вопросов джинсовской неустойчивости), поскольку изложение аналогичных результатов, относящихся к системам другой геометрии, а также описание нелинейных волн и турбулентности гравитирующих систем читатель может найти в этом и предыдущих выпусках сборников “Нелинейные волны”.

Два первых раздела гравифизики – равновесие и устойчивость – ее фундамент.

1.2. Равновесие

Этот раздел имеет наиболее продолжительную историю. Его возникновение связано с работами Лапласа на рубеже XVIII и XIX столетий по исследованию фигур равновесия небесных тел. В XIX и начале XX вв. теория основных фигур вращения в приближении несжимаемой жидкости была в основном построена трудами классиков естествознания и в первую очередь Ляпуновым и Пуанкаре. Приложение этих замечательных результатов к астрономическим объектам ограничивается наукой о форме планет. Последние составляют небольшую часть видимого вещества: более 90 % видимой материи в Метагалактике содержится в *звездных системах*, являющихся *бесстолкновительными*. Принципиальное отличие последних от фигур вращения несжимаемой жидкости проявляется уже в формах фигур равновесия. Иллюстрацией к сказанному выше является пример *вращающейся бесстолкновительной сферически-симметричной системы* [1], который указывает на отсутствие связи между формой бесстолкновительной гравитирующей системы и моментом ее вращения. Напротив, в приближении несжимаемой жидкости условие равновесия определяет однозначную (или после “прохождения” точки бифуркации – двузначную) функцию зависимости формы от момента вращения. Следствием этого является невозможность существования несжимаемого гравитирующего шара.

1.2.1. Равновесные состояния бесстолкновительных гравитирующих систем описываются функцией распределения $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, массовой плотностью $\rho_0(\mathbf{r})$ и определяемым ее гравитационным потенциалом $\Phi_0(\mathbf{r})$. Очевидно, эти функции должны удовлетворять системе стационарных ($\partial/\partial t = 0$) уравнений Власова (G – гравитационная постоянная)

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \Phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (2)$$

$$\rho_0 = \int f_0 d\mathbf{v}. \quad (3)$$

Среди реальных астрофизических систем часто встречаются дисковые, эллиптические, сферические, т.е. системы, обладающие пространственной симметрией. Учет последней существенно упрощает решение системы уравнений (1)–(3).

Если функция Φ_0 известна, то кинетическое уравнение (1) представляет собой одноуровневое дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных. Как известно из теории дифференциальных уравнений [2], общее решение уравнения (1) есть произвольная функция от первых интегралов соответствующих уравнений характеристик

$$\frac{d\mathbf{r}}{v} = \frac{d\mathbf{v}}{-\partial\Phi_0/\partial\mathbf{r}} = dt. \quad (4)$$

Первые интегралы уравнений движения (4) называются интегралами движения. Из физических соображений должны выполняться условия однозначности тех интегралов движения, которые служат аргументами функции распределения. Из записи уравнений движения в декартовых координатах

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_x}{-\partial\Phi_0/\partial x} = \frac{dv_y}{-\partial\Phi_0/\partial y} = \frac{dv_z}{-\partial\Phi_0/\partial z} = dt \quad (5)$$

следует, что имеется всего шесть независимых интегралов, пять из которых не содержат явно времени t . Эти интегралы являются однозначными, вообще говоря, лишь в локальном смысле: при аналитическом продолжении вдоль траектории движения частицы значения интегралов на разных витках траектории могут не совпадать.

В общем случае однозначными являются только те интегралы, существование которых связано со свойствами однородности времени (энергия) или однородности и изотропности пространства (соответственно импульсы и угловые моменты). Остальные интегралы движения, как правило, являются неоднозначными.

Таким образом, одним из аргументов f_0 всегда может служить энергия частицы в поле Φ_0 :

$$E = v^2/2 + \Phi_0. \quad (6)$$

Если рассматриваемая система обладает симметрией вращения вокруг оси z , то появляется еще один однозначный интеграл движения: z -компонента углового момента частицы $L_z = rv_\varphi$ (в цилиндрических координатах). В случае полной сферической симметрии интегралом является вектор углового момента \mathbf{L} и, в частности, его величина L ($L^2 = r^2(v_\theta^2 + v_\varphi^2)$ — в сферических координатах).

Если же система инвариантна по отношению к трансляциям вдоль какого-либо направления (x), то интегралом является x -компонента импульса P_x (или скорости v_x). Такие системы, очевидно, должны быть неограниченными. Примером может служить рассмотренный ниже цилиндр с бесконечной образующей.

Обратимся вновь к системе стационарных уравнений (1)–(3). Потенциал Φ_0 , от которого зависит функция распределения f_0 , представляет самосогласованное гравитационное поле: оно определяется совместным действием всех звезд системы. Необходимость самосогласованного решения делает задачу о нахождении функции распределения довольно сложной, так что до настоящего времени найдено относительно небольшое число точных решений.

1.3. Джинсовская неустойчивость – основная неустойчивость гравитирующих систем

1.3.1. Классический результат Джинса. Его некорректность. В своей классической книге [3] Джинс привел свои исследования устойчивости самой простой, по его мнению, гравитирующей системы – бесконечно протяженной (по всем направлениям) однородной среды. Джинс принял исходя из однородности и изотропии такого равномерно/заполненного материей ньютоновского мира, что гравитационная сила в любой точке равна нулю и система стационарна. Стационарные величины здесь и далее будем отличать индексом 0, а малые отклонения от стационарных величин – индексом 1. Будем считать, что до момента времени $t = 0$ (т.е. при $t < 0$) система стационарна, причем $v_0 = 0$, а при $t \geq 0$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}, t), \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 + \Phi_1(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

Запишем линеаризованные уравнения движения, непрерывности, Пуассона и состояния¹

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial \mathbf{r}}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0, \quad (9)$$

$$\Delta \Psi_1 = 4\pi G \rho_1, \quad (10)$$

$$P_1 = c_0^2 \rho_1. \quad (11)$$

Действуя оператором ∇ на (8) и используя (9) (при условии $\rho_0 = \text{const}$) и (10), получаем

$$\partial^2 \rho_1 / \partial t^2 - (\omega_0^2 + c_0^2 \Delta) \rho_1 = 0, \quad \omega_0^2 \equiv 4\pi G \rho_0. \quad (12)$$

Коэффициенты системы уравнений (8)–(11) не зависят от координат и времени, поэтому общее решение можно искать в виде

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}} \rho(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}. \quad (13)$$

Исходные уравнения (8)–(11) линейные, т.е. справедлив принцип суперпозиции. Следовательно, достаточно рассмотреть эволюцию произвольно выбранной гармоники. В результате подстановки ее в (12) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = -\omega_J^2, \quad \omega_J^2 \equiv \omega_0^2 - k^2 c_0^2. \quad (14)$$

Условие неустойчивости (в данном случае – экспоненциального роста со временем амплитуды возмущений) $\omega_J^2 > 0$ выполняется, как следует из (14), для достаточно больших длин волн:

$$\lambda > \lambda_J \equiv c \sqrt{\pi / G \rho_0}, \quad (15)$$

ω_J называется *джинсовской частотой*, а λ_J – *джинсовской* (или *критической*)

¹Здесь используется баротропное уравнение состояния $P = P(\rho)$, $c_0^2 \equiv \partial P_0 / \partial \rho_0$ – квадрат скорости звука.

кой) длиной волны. Физический смысл условия (15) чрезвычайно прост: с увеличением размера области возмущения гравитационная сила растет, а градиент давления падает. При $\lambda = \lambda_J$ обе силы уравновешивают друг друга, при $\lambda > \lambda_J$ гравитационная сила оказывается преобладающей.

Запишем стационарные уравнения

$$\rho_0^{-1} \nabla P_0 + \nabla \Psi_0 = 0, \quad (16)$$

$$\Delta \Psi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (17)$$

$$P_0 = P_0(\rho_0). \quad (18)$$

Из принятого Джинсом условия $\rho_0 = \text{const}$ и уравнения (18) следует, что первое слагаемое в (16) обращается в нуль, значит, $\Psi_0 = \text{const}$. Подстановка последнего решения в (17) приводит к абсурду: $\rho_0 = 0$, откуда следует вывод об исследовании Джинсом устойчивости *несуществующего* стационарного состояния бесконечно протяженной однородной среды. Как мы увидим в дальнейшем, *существуют стационарные системы, неустойчивые* по Джинсу. А сейчас опишем корректный способ исследования джинсовской неустойчивости нестационарной системы.

1.3.2. Джинсовская неустойчивость расширяющегося шара. Пусть шар расширяется так, что расстояние между любой парой материальных точек A и B изменяется со временем по закону

$$dr_{AB}/dt = Hr_{AB}. \quad (19)$$

Закон (19) описывает (в ньютоновском приближении) обнаруженное впервые Хабблом расширение Метагалактики. Определим, как меняются со временем плотность $\rho(t)$ и коэффициент пропорциональности $H(\rho)$ в любом шаре заданной массы $M = \text{const}$ при увеличении его радиуса по закону

$$dR/dt = u = HR. \quad (20)$$

Взяв полную производную по времени от $\rho = M(4/3\pi R^3)^{-1}$ и воспользовавшись (20), получаем $d\rho/dt = -3H\rho$. Если плотность шара по мере его расширения остается постоянной, т.е. не зависит от координат, $\rho = \rho(t)$, то имеем

$$d\rho/dt = -3H\rho. \quad (21)$$

Из выражения для ускорения частицы на поверхности шара $d^2R/dt^2 = -GM/R^2$ и из (20) находим

$$dH/dt = -H^2 - 4/3\pi G\rho. \quad (22)$$

Вид решения системы двух нелинейных уравнений (21), (22) для двух неизвестных ρ и H нетрудно определить из размерности

$$H = A/t, \quad \rho = B/t^2.$$

После подстановки в уравнения определим коэффициенты A и B . Окончательно имеем

$$H = 2/3t, \quad \rho = (6\pi Gt^2)^{-1}, \quad (23)$$

откуда

$$\omega_0 = t^{-1}(2/3)^{1/2}. \quad (24)$$

Рассмотрим случай длинных волн, $\lambda \gg \lambda_J$ — тогда $\omega_J \approx \omega_0$. Для не зависящего от времени ω_J имеем $\delta\rho/\rho \sim e^{\omega_J t}$. По какому закону будут расти возмущения плотности расширяющегося шара, у которого $\omega_J \approx t^{-1}(2/3)^{1/2}$

Закон $a \sim e^{\pm\omega_J t}$, где a — возмущение, является решением уравнения $da/dt = \pm\omega_J a$. Теперь же имеем $da/dt = \pm\omega_J(t)a$, откуда $a \sim e^{\pm\int\omega_J dt}$. В данном случае $\pm\int\omega_J dt = (2/3)\ln t$, откуда $e^{\pm\int\omega_J dt} = t^{\pm\sqrt{2/3}} \approx t^{\pm 0,81}$. Точные значения показателя степени, полученного для этой задачи Лифшицем [4] (в ОТО) и Боннером [5] (в ньютоновском приближении): $n_1 = 0,67$ и $n_2 = -1$. Если же, следуя [5], рассмотреть вещество с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$, то вместо $n = \pm 0,81$ получаем $n_1 = 0,65$ и $n_2 = -0,98$ (что на 0,02 ниже точных значений).

Из вышеизложенного следует, что при *качественном* рассмотрении устойчивости на *нестационарном* фоне можно искать решения в виде $\sim e^{-i\int\omega(t)dt}$ вместо $e^{-i\omega t}$ в случае стационарного фона. Сейчас приведем пример джинсовской неустойчивости стационарной системы.

1.3.3. Джинсовская неустойчивость вращающегося цилиндра. Рассмотрим вращающийся вдоль оси z цилиндр однородной плотности. Длину цилиндра L будем считать много больше всех других характерных масштабов: радиуса R , длины волны возмущения λ . При $L \gg R$, λ время продольного "коллапса" намного превосходит другие характерные времена. Тогда из условия равновесия по r

$$\partial\Phi_0/\partial r = V_{0\varphi}^2/r \quad (25)$$

и уравнения Пуассона (с учетом $L \gg R$)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \right) = 4\pi G\rho_0 \quad (26)$$

найдем угловую скорость вращения однородного цилиндра:

$$\Omega_0^2 = 2\pi G\rho_0 = \text{const}. \quad (27)$$

Пусть вдоль образующей цилиндра движется волна возмущения, зависящая только от z . Определим смещение ξ следующим образом:

$$V_z = \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (28)$$

Однако $V_{0z} = 0$, поэтому слагаемое $V_z \partial\xi/\partial z$ оказывается второго порядка малости по амплитуде возмущений. В этом пункте мы имеем дело только с линеаризованными уравнениями, поэтому $V_z \partial/\partial z \ll \partial\xi/\partial t$.

Запишем линеаризованное уравнение движения вдоль оси Oz :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = - \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z}. \quad (29)$$

Подставляя в (28), (29) решение ξ в виде

$$\xi(z, t) = \tilde{\xi} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (30)$$

получаем соответственно $V_z = -i\omega\xi$ и

$$\omega^2 \xi = ik\Phi_1 + ikc_0^2 \rho_1 / \rho_0. \quad (31)$$

Из уравнения непрерывности находим

$$\rho_1 = -ik\rho_0 \xi. \quad (32)$$

В дальнейшем будем интересоваться лишь длинными волнами как наиболее неустойчивыми. При этом условии, подставляя (32) в (31), получаем

$$\xi = ik\Phi_1 / \omega^2. \quad (31')$$

Для трех возмущенных функций ξ , Φ_1 и ρ_1 пока имеем два уравнения (31') и (32). Третье уравнение — интегральная связь между Φ_1 и ρ_1 внутри цилиндра, которую можно записать так:

$$\Phi_1(r, z) = -G \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R r' dr' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1(z') dz'}{|z' - z|}. \quad (33)$$

Здесь использовано два упрощающих предположения²: 1) возмущение зависит только от координаты z ; 2) длина волны возмущения $\lambda \gg R$, что позволило выразить знаменатель в последнем интеграле в столь простом виде.

Решая совместно систему трех уравнений (31'), (32) и (33) для трех неизвестных функций и используя (27), находим дисперсионное уравнение в виде

$$\omega^2 = - \frac{\Omega_0^2}{2} k^2 R^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(z' - z)} dz'}{|z' - z|}. \quad (34)$$

Нас интересует сейчас чисто джннсовская неустойчивость цилиндра, поэтому считаем ω^2 действительной величиной (случай комплексной ω^2 соответствует анизотропной неустойчивости цилиндра и рассмотрен в [7]). Следовательно, вместо $e^{ik(z' - z)}$ будем писать $\cos k(z' - z)$. Тогда под интегралом в (34) стоит четная функция, причем нижний предел интегрирования $|z' - z|_{\min} = R$, так как мы полагали выше $|z' - z| \gg R$. Вводя переменную $x \equiv |z' - z| / R$, получаем [8]

$$\omega^2 = \Omega_0^2 k^2 R^2 \text{Ci}(kR) \approx \Omega_0^2 k^2 R^2 \ln(kR), \quad (35)$$

где мы воспользовались разложением интегрального косинуса $\text{Ci}(kR)$ при $kR \ll 1$ [8]. Выражение (35) описывает джннсовскую неустойчивость вращающегося однородного цилиндра радиуса R :

$$\omega = \pm ik V_0 \ln^{1/2}(1/kR), \quad V_0 \equiv R\Omega_0. \quad (36)$$

При получении (36) мы использовали условие $|\omega| \gg c_0$. Следовательно, из (36) имеем $\ln(1/kR) \gg c_0^2 / V_0^2$, или $kR \ll \exp(-c_0^2 / V_0^2)$. Отсюда

$$k_{\max} \approx R^{-1} \exp(-c_0^2 / V_0^2). \quad (37)$$

² В общем виде эта задача решена в [6].

Из (36) имеем $\gamma_{\max} \equiv (\text{Im}\omega)_{\max} \approx k_{\max} V_0 \ln^{1/2} l/k_{\max} R$, откуда с помощью (37) найдем

$$\gamma_{\max} \approx \Omega_0 (c_0/V_0) \exp(-c_0^2/V_0^2). \quad (38)$$

Как мы видим, для "холодного" цилиндра

$$c_0/V_0 \ll 1, \quad \gamma_{\max} \ll \Omega_0, \quad (39)$$

аналогично для "горячего" цилиндра

$$c_0/V_0 \gg 1, \quad \gamma_{\max} \ll \Omega_0. \quad (40)$$

В обоих предельных случаях инкремент джинсовской неустойчивости γ оказался много меньше джинсовской частоты "холодного" цилиндра: $\omega_0 \equiv (4\pi G\rho_0)^{1/2} = \varrho^{1/2}\Omega_0$. Это естественно, поскольку мы ограничились лишь длинноволновыми возмущениями $\lambda \gg R$. Действительно, минимальная длина волны возмущения, определяемая из (37),

$$\lambda_{\min} \approx 2\pi R \exp(c_0^2/V_0^2), \quad (41)$$

т.е. даже для "холодного" цилиндра (39) $\lambda_{\min} \approx 2\pi R$. Следовательно, рассматриваемые нами возмущения выделяют узкий цилиндрический столб. Сила притяжения между двумя противоположными плоскостями цилиндра, расположенными на расстоянии $\lambda/2$ друг от друга (вдоль образующей), много меньше силы притяжения между двумя противоположными плоскостями куба со стороной $\lambda/2$. В последнем случае мы имеем инкремент $\gamma \sim \omega_0$; очевидно, что в случае цилиндра с $\lambda \gg R \ll \omega_0$.

Последний пример нам показывает, как сильно инкремент джинсовской неустойчивости зависит от геометрии рассматриваемой системы и вида возмущения. В этом мы будем неоднократно убеждаться и дальше.

1.3.4. Джинсовская неустойчивость гетерогенной среды. Возможность асинфазных колебаний с $\lambda \gg \lambda_J$ [9, 10]. До сих пор мы рассматривали джинсовскую неустойчивость в *гомогенной* среде. Чаше в метагалактике встречаются *гетерогенные* среды: различные подсистемы галактик пронизывают друг друга, холодные плотные межзвездные облака "плавают" в горячем разреженном галактическом газе.

Рассмотрим последний случай. Пусть пространственно неограниченная среда состоит из холодной и горячей компонент. Такая связь характеризуется двумя джинсовскими масштабами: λ_c — для холодной среды и λ_h — для горячей. Посмотрим, как ведут себя возмущения с разными длинами волн в такой гетерогенной среде.

Ограничимся случаем одномерных возмущений, зависящих только от x . Стационарные параметры будем считать пространственно однородными³ (и по-прежнему будем обозначать индексом "0"). Для каждой из сред

³ Тем самым мы в точности повторяем за Джином его постановку задачи, но для двухкомпонентной среды. Несмотря на отмеченную выше некорректность такой задачи (стационарное решение отсутствует!), мы на этом простейшем примере выявим новую физику неустойчивости двухкомпонентной среды, качественно "работающую" и в пространственно ограниченных стационарных системах (ср. п. 1.3.1 с п. 1.3.2 и 1.3.3).

линеаризованные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{\rho_{0j}} \frac{\partial P_j}{\partial x}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{0j} v_j) = 0,$$

$$P_j = c_{0j}^2 \rho_j$$

где $j = c, h$. Таким образом, мы имеем две системы уравнений соответственно для холодной и горячей сред. Эти две системы уравнений связаны между собой уравнением Пуассона

$$\partial^2 \Psi / \partial x^2 = 4\pi G(\rho_c + \rho_h). \quad (43)$$

Поскольку возмущения развиваются на фоне пространственно однородной и стационарной среды, их можно представлять в виде

$$\Psi(x, t) = \sum_{k, \omega} \Psi_{k, \omega} e^{ikx - i\omega t}.$$

Так как исходные уравнения линейны, то справедлив принцип суперпозиции, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением произвольной гармоники ряда Фурье:

$$\Psi(x, t) = \Psi_{k, \omega} e^{ikx - i\omega t}.$$

Подставляем это решение в исходную систему уравнений (42), опуская в дальнейшем индексы k и ω у возмущенных величин. Из получившейся в результате системы алгебраических уравнений находим

$$\rho_j = \rho_{0j} k^2 \Psi / (\omega^2 - k^2 c_{0j}^2). \quad (44)$$

Подстановка (44) в (43) приводит к следующему дисперсионному уравнению:

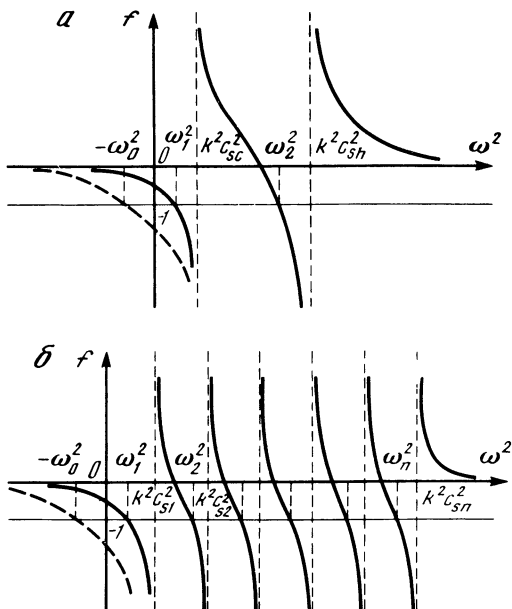
$$\frac{\omega_{0c}^2}{\omega^2 - k^2 c_c^2} + \frac{\omega_{0h}^2}{\omega^2 - k^2 c_h^2} = -1, \quad \omega_{0j}^2 \equiv 4\pi G \rho_{0j}. \quad (45)$$

Обозначив левую часть уравнения (45) через $f(\omega^2)$, изобразим эту функцию на рис. 1, а. Корни дисперсионного уравнения соответствуют точкам пересечения кривых $f(\omega^2)$ с прямой $f = -1$. Из рис. 1, а видно, что дисперсионное уравнение может иметь только один отрицательный корень $\omega^2 = -\omega_0^2$ в том случае, если левая кривая $f(\omega^2)$ пойдет аналогично штриховой кривой (пересечет прямую $f = -1$ в области отрицательных значений ω^2). Если же левая кривая $f(\omega^2)$ пойдет аналогично сплошной кривой, то оба корня $\omega_{1,2}^2 > 0$.

Вопрос, на который мы сейчас должны ответить: какие возмущения участвуют в аperiodической неустойчивости гетерогенной системы, а какие распространяются в виде воли? Решение дисперсионного уравнения (45) есть

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \{ -(\omega_{Jc}^2 + \omega_{Jh}^2) \pm [(\omega_{Jc}^2 - \omega_{Jh}^2) + 4\omega_{0c}^2 \omega_{0h}^2]^{1/2} \}, \quad (46)$$

$$\omega_{Jj}^2 \equiv \omega_{0j}^2 - k^2 c_j^2.$$



Р и с. 1. Случаи 2-компонентной среды ($\nu_{0i} = 0$) (а) и n -компонентной среды ($\nu_{0i} = 0$) (б)

Рассмотрим четыре предельных случая.

1. Длина волны возмущения меньше джинсовских длин в холодной и горячей компонентах, $\lambda \ll \lambda_c, \lambda_h$. Из эквивалентных неравенств $k^2 c_c^2 \gg \omega_{0c}^2$, $k^2 c_h^2 \gg \omega_{0h}^2$ следует $\omega_{Jc}^2 \approx -k^2 c_c^2$, $\omega_{Jh}^2 \approx -k^2 c_h^2$. Подставляя это в (46), находим две ветви колебаний

$$\omega_1^2 \approx k^2 c_c^2, \quad \omega_2^2 \approx k^2 c_h^2, \quad (47)$$

описывающие распространение звука соответственно в холодной и горячей средах.

2. Длина волны возмущения меньше джинсовской длины в горячей компоненте и больше джинсовской длины в холодной компоненте, $\lambda_c \ll \lambda \ll \lambda_h$. Из эквивалентных неравенств $k^2 c_c^2 \ll \omega_{0c}^2$, $k^2 c_h^2 \gg \omega_{0h}^2$ следует $\omega_{Jc}^2 \approx \omega_{0c}^2$, $\omega_{Jh}^2 \approx -k^2 c_h^2$. Подставляя это в (46), получаем

$$\omega_1^2 \approx k^2 c_h^2, \quad \omega_2^2 \approx -\omega_{0c}^2. \quad (48)$$

Первое решение описывает колебания в гетерогенной среде, скорость которых совпадает со скоростью звука в горячей компоненте. Второе решение описывает джинсовскую неустойчивость, инкремент которой определяется плотностью только холодной компоненты.

3. Длина волны возмущения меньше джинсовской длины в холодной компоненте и больше джинсовской длины в горячей компоненте, $\lambda_c \gg \lambda \gg \lambda_h$. В дисперсионное уравнение (46) индексы c и h входят симмет-

рично, поэтому запишем ответ по аналогии с (48) :

$$\omega_1^2 \approx k^2 c_c^2, \quad \omega_2^2 \approx -\omega_{0h}^2. \quad (49)$$

Первое решение описывает колебания в гетерогенной среде, скорость которых совпадает со скоростью звука в холодной компоненте. Второе решение описывает джинсовскую неустойчивость, инкремент которой определяется плотностью только горячей компоненты.

4. *Длина волны возмущения больше джинсовских длин в холодной и горячей компонентах, $\lambda \gg \lambda_c, \lambda_h$.* Из эквивалентных неравенств $k^2 c_c^2 \ll \omega_{0c}^2, k^2 c_h^2 \ll \omega_{0h}^2$ после ряда вычислений из (46) получаем

$$\omega_1^2 \approx -\omega_0^2, \quad \omega_2^2 \approx (k^2 c_h^2 \omega_{0c}^2 + k^2 c_c^2 \omega_{0h}^2) / \omega_0^2, \quad \omega_0^2 \equiv \omega_{0c}^2 + \omega_{0h}^2. \quad (50)$$

Первое решение описывает джинсовскую неустойчивость гетерогенной системы, квадрат инкремента которой равен сумме квадратов инкрементов неустойчивостей, каждая из которых могла бы развиваться только в соответствующей компоненте среды. Второе решение описывает распространение колебаний.

Естественен вопрос о возможности существования *колебаний* с длиной волны, *намного превосходящей джинсовскую*. Казалось бы, такая возможность противоречит отмеченному ранее очевидному факту роста гравитационной силы и одновременного уменьшения градиента давления при возрастании масштабов возмущений. При размерах возмущений, превосходящих джинсовский, гравитационная сила превосходит градиент давления, что приводит к коллапсу возмущений.

Так происходит в гомогенной среде. В гетерогенной среде, кроме коллапса возмущений с $\lambda \gg \lambda_J$, что описывает первый корень в (50), существует звуковая ветвь колебаний (второй корень в (50)), причина которой состоит в следующем. Как видно из рис. 1, *a*, этот второй корень ω_2 лежит между двумя значениями $k^2 c_c^2$ и $k^2 c_h^2$ (порядок которых не имеет значения): $k^2 c_c^2 < \omega_2^2 < k^2 c_h^2$. Последнее влечет за собой разность знаков у ρ_c и ρ_h (см. формулу (44)), $\rho_c / \rho_h < 0$.

Таким образом, в двухкомпонентной гравитационной среде колебания плотности в двух различных компонентах находятся в противофазе друг с другом, т.е. минимумы плотности в одной из компонент совпадают с максимумами плотности в другой. В результате суммарная возмущенная плотность гетерогенной системы может быть близка к нулю — нет причины для гравитационной конденсации.

Такие собственные колебания мы назвали *асинфазными* [9]. Они родственны ленгмюровским колебаниям в плазме, оптическим колебаниям кристаллической решетки, колебаниям молекул и т.п.

Проведенный выше анализ для двухкомпонентной среды нетрудно обобщить на случай *n*-компонентной системы. Суммируя парциальные плотности ρ_j из (44) и подставляя сумму в уравнение Пуассона, получим аналогично (45)

$$\sum_{j=1}^n \frac{\omega_{0j}^2}{\omega^2 - k^2 c_j^2} = -1. \quad (51)$$

Обозначив снова левую часть (51) через $f(\omega^2)$, представим последнюю на

рис. 1, б. Из рис. 1, б видно, что дисперсионное уравнение для n -компонентной системы может иметь только один отрицательный корень ($\omega^2 < 0$) в том случае, если самая левая кривая $f(\omega^2)$ пойдет аналогично штриховой кривой. Все остальные корни положительны.

Нетрудно получить условие неустойчивости, т.е. условие, при котором $\omega^2 = -\omega_0^2$. Подставляя $\omega^2 = -\omega_0^2$ в (51), получаем

$$\sum_{j=1}^n \frac{\omega_{0j}^2}{\omega_0^2 + k^2 c_j^2} = 1.$$

Из очевидного неравенства

$$\sum_{j=1}^n \frac{\omega_{0j}^2}{k^2 c_j^2} > \sum_{j=1}^n \frac{\omega_{0j}^2}{\omega_0^2 + k^2 c_j^2} = 1$$

следует условие неустойчивости

$$\sum_{j=1}^n \frac{\omega_{0j}^2}{k^2 c_j^2} > 1. \quad (52)$$

Обобщение на случай n -компонентной системы рассмотренных выше четырех типов возмущений для двухкомпонентной среды выглядит следующим образом.

1. Возмущения с длиной волны, меньшей наименьшей из n джинсовских длин, приводят к возникновению n различных ветвей колебаний, каждая из которых определяется параметрами своей подсистемы.

2. Возмущения с длиной волны, большей джинсовских длин m компонент среды и меньшей джинсовских длин $(n-m)$ компонент, приводит к неустойчивости системы, причем квадрат собственной частоты оказывается равным сумме квадратов m джинсовских частот, взятой со знаком минус:

$$\omega^2 = - \sum_{j=1}^m \omega_{0j}^2,$$

и к возникновению $(n-1)$ ветвей колебаний.

При $m = n$ мы приходим к последнему рассмотренному выше случаю 4.

Асинфазность собственных колебаний n -компонентной системы легко усматривается из рис. 1, б. За исключением самого левого корня, который может соответствовать неустойчивости, любой j -й корень лежит между $k^2 c_{j-1}^2$ и $k^2 c_j^2$:

$$k^2 c_{j-1}^2 < \omega^2 < k^2 c_j^2. \quad (53)$$

Как следует из выражений для возмущенных плотностей (44), наибольший вклад для j -го корня вносят как раз слагаемые ρ_{j-1} , ρ_j , которые согласно (53) имеют противоположные знаки — колебания плотности в различных компонентах компенсируют друг друга. В результате только один (левый) корень может описывать джинсовскую неустойчивость n -компонентной системы; остальные $(n-1)$ корней описывают колебания.

Итак, может быть сформулирована следующая

Т е о р е м а. *В гетерогенной системе, состоящей из n однородных по плотности компонент, может развиваться только одна аperiodическая неустойчивость при условии (52). Остальные $(n-1)$ коллективные моды представляют собой асинфазные колебания.*

2. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. Предмет исследования

Говоря о сферических бесстолкновительных системах, мы прежде всего имеем в виду сферические галактики и шаровые скопления звезд. Приблизительно сферической формой обладают эллиптические галактики малой сплюснутости. "Частицами" в таких системах являются звезды. Компактные скопления галактик с достаточно большим числом членов мы также относим к таким системам: для их изучения можно использовать тот же математический аппарат, только "частицами" в этом случае следует считать отдельные галактики. Еще одним примером является система шаровых скоплений звезд, например, в нашей Галактике. Она тоже, как известно, имеет распределение плотности, близкое к сферически-симметричному, причем центр симметрии этого распределения определяет центр Галактики. "Частицами" здесь, очевидно, служат отдельные шаровые скопления. Оценка среднего времени парных столкновений показывает, что бесстолкновительное приближение является достаточно хорошим для исследования колебаний и устойчивости всех этих систем.

2.2. Кинетическое уравнение

Бесстолкновительное кинетическое уравнение в сферических координатах r, θ, φ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t, r, \theta, \varphi, v_r, v_\theta, v_\varphi) \equiv & \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \dot{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{dv_r}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_r} + \\ & + \frac{dv_\theta}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_\theta} + \frac{dv_\varphi}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь $\dot{A} \equiv dA/dt$.

Входящие в уравнение полные производные по времени определим из уравнений движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

которые для $L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - V(r, \varphi, \theta)$ — функции Лагранжа в сферических координатах для частиц единичной массы — имеют вид

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = r \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r},$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}) = - \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad (55)$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = r \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Введем физические составляющие скорости:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \sin \theta \cdot \dot{\varphi}, \quad (56)$$

с помощью которых перепишем уравнение (55) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} &= \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} - \frac{\partial V}{\partial r}, \\ \frac{dv_\varphi}{dt} &= - \frac{v_r v_\varphi}{r} - \frac{v_\theta v_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ \frac{dv_\theta}{dt} &= \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} - \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (57)$$

Используя (56), (57), перепишем кинетическое уравнение (54) в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \left(\frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} - \frac{\partial V}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \left(\frac{v_r v_\varphi}{r} + \right. \\ \left. + \frac{v_\varphi v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} + \left(\frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} - \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\theta} = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Перейдем в пространстве скоростей к цилиндрической системе координат: введем вместо переменных v_θ и v_φ новые переменные v_\perp и α , где

$$\begin{aligned} v_\perp &= (v_\theta^2 + v_\varphi^2)^{1/2}, \quad v_\theta = v_\perp \cos \alpha, \\ \alpha &= \operatorname{arctg}(v_\varphi/v_\theta), \quad v_\varphi = v_\perp \sin \alpha. \end{aligned} \quad (59)$$

В новых переменных уравнение (58) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\perp \sin \alpha}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{v_\perp \cos \alpha}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \left(\frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial V}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \left(\frac{v_r v_\varphi}{r} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \alpha}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\perp} - \frac{1}{r v_\perp} \left(v_\perp^2 \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \theta + \frac{\cos \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \right. \\ \left. - \sin \alpha \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Уравнение (60) — традиционный вид записи кинетического уравнения для исследования динамики сферически-симметричных гравитирующих систем.

2.3. Интегралы движения частиц в невозмущенной системе

Пусть стационарная система является сферически-симметричной. Это значит, что $V_0 = V_0(r) \equiv \Phi_0$. Будем считать f_0 не зависящей от углов φ и θ в координатном пространстве и от угла α в пространстве скоростей, т.е. $f_0 = f_0(r, v_r, v_\perp)$. Тогда для стационарной функции f_0 из (60) имеем следующее уравнение:

$$v_r \frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{v_r v_\perp}{r} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} + \left(\frac{v_\perp^2}{r} - \frac{d\Phi_0}{dr} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_r} = 0. \quad (61)$$

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка в частных производных есть произвольная функция от первых интегралов *соответствующей* системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [2]

$$\frac{dr}{v_r} = - \frac{dv_\perp}{v_r v_\perp / r} = \frac{dv_r}{v_\perp^2 / r - d\Phi_0 / dr} = dt. \quad (62)$$

Из (62) имеем

$$\frac{v_\perp dv_\perp}{-v_r v_\perp^2 / r} = \frac{v_r dv_r}{v_r (v_\perp^2 / r - d\Phi_0 / dr)} = dt.$$

Сделаем тождественное преобразование, разделив сумму числителей на сумму знаменателей первых двух дробей:

$$\frac{d((v_\perp^2 + v_r^2)/2)}{-(d\Phi_0/dr)(dr/dt)} = dt,$$

откуда получаем $dE/dt = 0$, где

$$E \equiv (v_r^2 + v_\perp^2)/2 + \Phi_0 = \text{const}. \quad (63)$$

Из первого равенства (62)

$$dr = -(r/v_\perp) dv_\perp$$

находим второй интеграл движения: $dL = 0$, где

$$L \equiv r v_\perp = \text{const}. \quad (64)$$

Итак, решением уравнения (61) является произвольная функция от двух интегралов движения E и L :

$$f_0 = f_0(E, L). \quad (65)$$

2.4. Об аналогии бесстолкновительных сферических систем с газовыми шарами

Наблюдения свидетельствуют об *анизотропии* звездных систем различных масштабов. Как правило, вместо $f_0 = f_0(E, L)$ (65) пишут

$$f_0 = f_0(E, L^2). \quad (65')$$

Для такой функции распределения компоненты тензора "напряжений" $T_{\alpha\beta} \equiv \int f_0 v_\alpha v_\beta dv$ или "давления" суть

$$P_r \equiv T_{rr} \equiv \int f_0 v_r^2 dv, \quad P_\tau \equiv T_{\theta\theta} = T_{\varphi\varphi} \equiv \frac{1}{2} \int f_0 v_\perp^2 dv. \quad (66)$$

Точнее, в данном случае следует говорить не о "давлении", а о дисперсии скоростей в радиальном ($c_r^2 \sim P_r/\rho_0$) и трансверсальном ($c_\tau^2 \sim P_\tau/\rho_0$) направлениях.

Естественно использовать гидродинамическую аналогию прежде всего для систем с изотропной функцией распределения $f_0(E)$. В этом случае легко найти плотность $\rho_0(r)$ и давление $P_0(r)$, для чего удобно перейти к сферическим координатам в пространстве скоростей

$$\rho_0 = 4\pi \int_0^{v_{\max}} f_0(E) v^2 dv, \quad (67)$$

где $E = v^2/2 + \Phi_0$. Переходя к переменной интегрирования E , получаем

$$\rho_0(r) = 4\pi \cdot 2^{1/2} \int_{\Phi_0(r)}^0 f_0(E) (E - \Phi_0)^{1/2} dE. \quad (68)$$

Полагая в (66) $P_r = P_\tau \equiv P_0$, $v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2 = v^2$, имеем

$$P_0 = \frac{1}{3} \int v^2 f_0(E) dv = \frac{4\pi}{3} \int_0^{v_{\max}} f_0(E) v^4 dv, \quad (69)$$

или

$$P_0(r) = \frac{8\pi}{3} \cdot 2^{1/2} \int_{\Phi_0(r)}^0 f_0(E) (E - \Phi_0)^{3/2} dE. \quad (70)$$

Дифференцируем⁴ (70) по r :

$$\frac{dP_0}{dr} = -4\pi \cdot 2^{1/2} \frac{d\Phi_0}{dr} \int_{\Phi_0(r)}^0 f_0(E) (E - \Phi_0)^{1/2} dE. \quad (71)$$

Сравнивая (71) с (68), находим

$$-dP_0/dr = \rho_0 d\Phi_0/dr. \quad (72)$$

⁴ Напомним правило дифференцирования интеграла, зависящего от параметра в случае, когда и пределы интегрирования зависят от параметра. Пусть $I(y) \equiv \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$. Тогда $I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta' f(\beta(y), y) - \alpha' f(\alpha(y), y)$. В нашем случае $\beta = \text{const}$, поэтому $\beta' = 0$, а $f(\alpha(y), y) = 0$, поэтому последнее слагаемое также отсутствует.

Это хорошо известное условие гидродинамического равновесия, изучавшееся, например, в теории равновесия звезд. Для получения равновесных конфигураций его нужно дополнить (кроме уравнения Пуассона) уравнением состояния $P_0 = P_0(\rho_0)$. В данном случае уравнением состояния являются соотношения (68), (70), которые параметрически задают зависимость $P_0 = P_0(\rho_0)$; в явном виде уравнение состояния можно получить исключением параметра Φ_0 .

Сказанное позволяет сделать заключение о возможности использования достаточно развитой теории равновесия отдельных звезд для исследования соответствующих стационарных состояний звездных систем.

2.4.1. Примеры изотропных распределений.

1. Хорошо известны решения Эмдена для политропного газового шара с давлением $P_0 = k\rho_0^{1+1/n} \equiv k\rho_0^\gamma$ (γ — показатель адиабаты, n — показатель политропы). Соответствующие функции распределения бесстолкновительных систем имеют, оказывается, вид [11, 12]

$$f_0 = C[\Phi_0(a) - E]^\alpha \quad (C = \text{const}). \quad (73)$$

Действительно, подставляя (73) в (67) и переходя к новой переменной $x = v/v_{\max}$, где $v_{\max} = [2(\Phi_0(a) - \Phi_0(r))]^{1/2}$, получаем

$$\rho_0 = C_1 [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]^{\alpha+3/2}, \quad C_1 = 4\pi C \cdot 2^{3/2} \int_0^1 (1-x^2)^\alpha x^2 dx. \quad (74)$$

Аналогично подставляя (73) в (69), имеем

$$P_0(r) = C_2 [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]^{\alpha+5/2}, \quad (75)$$

$$C_2 = \frac{4\pi}{3} C \cdot 2^{5/2} \int_0^1 (1-x^2)^\alpha x^4 dx.$$

Сравнивая (74) и (75), видим, что $P_0 \sim \rho_0^{(\alpha+5/2)/(\alpha+3/2)}$, т.е.

$$P_0 \sim \rho_0^\gamma, \quad \gamma = \frac{2\alpha+5}{2\alpha+3}, \quad n \equiv \frac{1}{\gamma-1} = \alpha + 3/2. \quad (76)$$

Итак, каждому α соответствует из (76) определенный показатель адиабаты γ или определенный показатель политропы n .

Подставим выражение для плотности (74) в уравнение Пуассона:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_0}{dr} = 4\pi GC_1 [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]^{\alpha+3/2}. \quad (77)$$

Введя безразмерную переменную $x = r/r_0$, перепишем (77) в виде уравнения Эмдена:

$$xy'' + 2y' + xy^n = 0, \quad (78)$$

где

$$y \equiv [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]/\Phi_0^*, \quad r_0^{-2} = 4\pi GC_1 \Phi_0^{n-1}. \quad (79)$$

Свойства решений уравнения Эмдена хорошо изучены в теории внут-

ренного строения звезд. Значение $\alpha = 7/2$ является граничным, оно разделяет решения с конечными и бесконечными радиусом и массой системы.

Если $n \geq 5$, то решение должно удовлетворять следующим условиям [13]: 1) $y \geq 0$ при $x > 0$ и 2) $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. В частном случае $n = 5$ (т.е. $\alpha = 7/2$) имеем [13] следующее решение уравнения (78):

$$\Phi_0(a) - \Phi_0(r) = \Phi_* \left[\frac{3C}{r^2/r_0^2 + 3C^2} \right]^{1/2}. \quad (80)$$

Подставляя (80) в (74), приходим к известному закону Шустера [14]

$$\rho_0(r) = \rho_0(0) (1 + r^2/r_0^2)^{-5/2}. \quad (81)$$

Если интересоваться решениями уравнения Эмдена в элементарных функциях, то, кроме случая $n = 5$ ($\alpha = 7/2$), таких случаев еще три:

$$n = 0 \ (\alpha = -3/2), \quad n = 1 \ (\alpha = -1/2), \quad n = 3 \ (\alpha = 3/2). \quad (82)$$

Однако первое из решений не существует в бесстолкновительном случае, так как нетрудно убедиться в том, что при $\alpha \leq -1$, используя функцию распределения (73), приходим к расходящемуся интегралу C_1 (74).

Покажем, что уравнению состояния идеального газа $P_0 \sim \rho_0^{5/3}$ соответствует функция распределения типа Ферми–Дирака с нулевой температурой.

Как видно из (76), величина $\gamma = 5/3$ соответствует $\alpha = 0$ и $n = 3/2$. Из (73) при $\alpha = 0$ получаем $f_0 = \text{const}$, а согласно [13] (см. выше) при $n = 3/2 < 5$ решение $y \equiv [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]/\Phi_*$ не может быть всюду положительным при $x \equiv r/r_0 > 0$. В реальной физической системе $y > 0$ при $r < a$ и $y = 0$ при $r > a$, где a – радиус системы. Действительно, в системе, характеризующейся потенциалом $\Phi_0(r)$, в точке r могут находиться частицы с энергией $E < \Phi_0(r)$. Частицы с энергией $E > \Phi_0(r)$ за время большее, чем время пробега системы, должны покинуть последнюю. Таким образом, для такой системы $f_0(\Phi_0(a) - E) = f_0(\Phi_0(a) - E)\theta(\Phi_0(a) - E)$, где $f_0(\Phi_0(a) - E)$ – произвольная функция, θ – единичная функция Хевисайда. Выбирая f_0 в виде (73), при $\alpha = 0$ находим

$$f_0(\Phi_0(a) - E) = C_0\theta(\Phi_0(a) - E), \quad C_0 = \text{const}. \quad (83)$$

Нетрудно видеть, что аналогичная функция характеризует распределение Ферми–Дирака f_{FD} при температуре $T \rightarrow 0$:

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_{(FD)_k} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \exp((E_k - \mu)/T)} = \begin{cases} 0 & \text{при } E_k > \mu, \\ 1 & \text{при } E_k < \mu. \end{cases} \quad (84)$$

Химический потенциал μ при $T \rightarrow 0$ называется энергией Ферми E_0 . Таким образом, получаем

$$f_k = \text{const } \theta(E_0 - E_k). \quad (85)$$

Аналогичность записи (83) и (85) доказывает сформулированное выше утверждение.

2. Рассмотрим бoльцмановскую функцию распределения

$$f_0(E) = Ce^{-E/T}, \quad (86)$$

где C и T – константы, причем T играет роль ”температуры” звездного ”газа”.

Подставляя (86) в (67), получим

$$\rho_0(r) = \text{const } e^{-\Phi_0(r)/T}. \quad (87)$$

Не решая уравнения Пуассона, можно заключить, что плотность вида (87) описывает системы с бесконечной массой. Предположим противное: пусть масса системы ограничена и равна M . Тогда при $r \rightarrow \infty$ потенциал $\Phi_0(r) \rightarrow 0$ (как $-GM/r$), следовательно, $\rho_0(r) \rightarrow \text{const}$, откуда следует, что $M \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Определим теперь функциональную зависимость $\rho_0(r)$, для чего подставляем (87) в уравнение Пуассона. Ищем решение в виде $\Phi_0(r) = C_1 \ln r + C_2$. Тогда при условии $C_1 = 2T = 4\pi G \text{const}$ получаем

$$\rho_0(r) = \text{const } r^{-2} e^{-C_2/T}. \quad (88)$$

Такая радиальная зависимость плотности может привести к конечной массе лишь при ограниченных размерах системы. Для этого следует ”обрезать” бoльцмановское распределение, т.е. рассмотреть $f_0(E) = Ce^{-E/T} \theta(E_0 - E)$. Уравнение Пуассона при наличии такой функции распределения может быть решено только численно [15, 16].

2.4.2. Простейшие анизотропные функции распределения.

1. Простейшей анизотропной функцией распределения является функция распределения частиц, вращающихся по круговым траекториям (рис. 2)

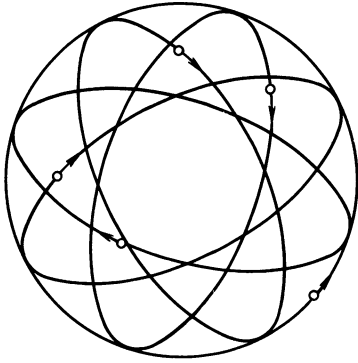
$$f_0 = \frac{\rho_0(r)}{2\pi v_0(r)} \delta(v_r) \delta(v_\perp - v_0(r)), \quad (89)$$

где $v_\perp^2 \equiv v_\theta^2 + v_\phi^2$, $v_0^2 = r\dot{\Phi}_0$, δ – дельта-функция Дирака. Частицы удерживаются на круговых орбитах вследствие точного равенства гравитационного притяжения и центробежной силы. Поскольку система, описываемая функцией (89), состоит из набора сфер, любая из которых находится в поле тяжести только внутренних (теорема Ньютона), то промежутки между сферами можно выбирать совершенно произвольными, регулируя соответственно функцию $v_0(r)$. Следовательно, плотность $\rho_0(r)$ может быть произвольной.

Такая модель звездной системы впервые была предложена Эйнштейном в 1939 г. [17] и носит его имя.

Системы с орбитами звезд, близкими к круговым, могут встречаться вблизи компактных объектов, поскольку последние захватывают звезды с вытянутыми траекториями.

2. Рассмотрим противоположный предыдущему пример анизотропной системы с радиальными орбитами частиц. Такая система описывается



Р и с. 2. Модель Эйнштейна шарового скопления звезд

функцией распределения

$$f_0 = AF(E)\delta(L^2), \quad A > 0. \quad (90)$$

Заметим, что реальные звездные системы, например шаровые скопления, характеризуются сильно вытянутыми траекториями звезд.

Если звездная система с круговыми орбитами может иметь произвольное распределение плотности, то система, описываемая функцией распределе-

ния (90), предъявляет определенные требования к выбору функции $\rho_0(r)$. Покажем, например, что последняя не может быть всюду однородной, т.е. иметь вид

$$\rho_0(r) = \rho_0(0)\theta(a-r), \quad (91)$$

где a — радиус шара. Гравитационный потенциал $\Phi_0(r)$ однородного шара радиуса a легко находится из уравнения Пуассона:

$$\Phi_0(r) = -C + \frac{2}{3}\pi G\rho_0(0)r^2, \quad 0 \leq r \leq a.$$

Переходя от интегрирования функции (90) по пространству скоростей

$$\theta(a-r)\rho_0(0) = 2\pi A \int_{-v_{r\max}}^{-v_{r\max}} F(E)dv_r \int_0^\infty \delta(L^2)v_\perp dv_\perp$$

к интегрированию по фазовому пространству $dLdE$, $L \equiv rv_\perp$, $E \equiv v_r^2/2 + v_\perp^2/2 + \Phi_0(r)$, и производя следующие замены:

$$E = -\xi, \quad F(-\xi) = U(\xi), \quad -\Phi_0(r) = x, \quad f(x) = 3\theta(a-r)(C-x)/(2A\pi^2G),$$

приходим к интегральному уравнению Абеля

$$f(x) = \int_{-E_{\max}}^x \frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{x-\xi}}. \quad (92)$$

Из (92) видно, что, как и следует, $f(-E_{\max}) = 0$, так как $r = a$ при $E = E_{\max}$.

Решение уравнения (92) есть [13]

$$U(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_{-E_{\max}}^{\xi} \frac{f(x)dx}{\sqrt{\xi-x}}$$

Подставляя сюда $f(x)$, получаем

$$F(E) = \frac{3}{2A\pi^3G} \frac{C + 2E - E_{\max}}{\sqrt{E_{\max} - E}}$$

Так как всюду в системе $E < 0$, то $E_{\max} - E \geq 0$. В произвольной точке r $F(E_{\min}) \sim (r^2/a^2 - 1/2)$, где $E_{\min} = -C + 2/3 \pi G \rho_0 r^2$, т.е. $F(E_{\min}) < 0$ при $a/r \sim 1/\sqrt{2} \approx 0,7$. Находясь в этой пространственной области ($r/a < 0,7$), функция $F(E) < 0$ на конечном интервале энергии

$$E_{\min} < E < 1/2 (E_{\max} - C),$$

что и доказывает невозможность системе звезд с функцией распределения (90) иметь плотность вида (91).

Если с помощью уравнения Пуассона определить функциональную связь $\rho_0(r)$ с $\Phi_0(r)$ и построить функцию

$$f(x) \equiv r^2 \rho_0(r) \theta(a-r) / \sqrt{2} \pi A,$$

где $x \equiv -\Phi_0(r)$, то задача определения из (90) $F(E) = U(\xi)$ сводится к решению уравнения Абеля (92). В частном случае, воспользовавшись аналогией с (73),

$$F(E) = \text{const} [\Phi_0(a) - E]^\alpha \theta(\Phi_0(a) - E),$$

получим с помощью полной функции распределения (90):

$$\rho_0(r) = \beta r^{-2} [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]^{\alpha + 1/2}, \quad (93)$$

где

$$\beta = \frac{A \text{ const}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha dx > 0.$$

В частном случае $\alpha = -1/2$, подставляя (93) в уравнение Пуассона, получаем

$$\Phi_0(r) = 4\pi G \beta (\ln(r/a) - 1), \quad \rho_0(r) = \beta r^{-2}. \quad (94)$$

3. "Анизотропным обобщением" функции распределения (73) являются следующие [18]:

$$f_0 = AL^\beta [\Phi_0(a) - E]^\alpha, \quad \beta > -2, \quad \alpha > -1, \quad A > 0. \quad (95)$$

Определив плотность

$$\rho_0(r) = \text{const} r^\beta [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]^{\alpha + (\beta+3)/2}, \quad (96)$$

подставим это выражение в уравнение Пуассона. В результате получаем уравнение Эмдена-Фаулера

$$xy'' + 2y + x^{\beta+1} y^{\alpha + (\beta+3)/2} = 0;$$

$$x \equiv r/r_0, \quad r_0^{\beta+2} = (4\pi G \text{ const} \Phi_*^{\alpha-1 + (\beta+3)/2})^{-1}, \quad (97)$$

$$y \equiv [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)] / \Phi_*.$$

Вычисление средних квадратов радиальной и поперечной скоростей для функции распределения (95) приводит к соотношению:

$$2\overline{v_r^2} / \overline{v_\perp^2} = 2/(\beta + 2). \quad (98)$$

Отсюда следует, что при $\beta \rightarrow -2$ функция (95) описывает конфигурацию с чисто радиальным движением звезд; при $\beta = 0$ система становится изотропной, а $\beta \rightarrow \infty$ соответствует системам с круговыми орбитами.

4. Возможны два различных подхода к нахождению равновесных состояний.

Первый. По заданной функции распределения вида $f_0 = f_0(E, L^2)$ плотность $\rho_0(r)$ вычисляется двойным интегрированием:

$$\rho_0(r) = \frac{\pi}{r^2} \iint f_0(E, L^2) [2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2]^{-1/2} dE dL^2. \quad (99)$$

Второй. Соотношение (99) можно рассматривать и как интегральное уравнение для $f_0(E, L^2)$, если считать $\rho_0(r)$ и $\Phi_0(r)$ заданными. При этом по функции одной переменной $\rho_0(r)$ нужно согласно (99) определить функцию двух переменных $f_0 = f_0(E, L^2)$. В этом случае можно ожидать, что решение интегрального уравнения (99) будет неоднозначным. Вопрос об отыскании всех решений (99) остается пока нерешенным [19].

2.5. О вращении бесстолкновительных сферически-симметричных систем

Такой вопрос для газовых шаров был бы бессмысленным: при вращении газовый шар приобретает форму эллипсоида. Однако свойство "бесстолкновительности" в корне меняет ситуацию. По-видимому, впервые на это обратил внимание Линден-Белл [20], который качественно указал на принципиальную возможность вращения бесстолкновительной сферически-симметричной системы. Действительно ясно, что исходя из невращающейся сферы с $f_0 = f_0(E, L)$ всегда можно получить бесконечное множество функций распределения, соответствующих вращающимся системам (параметр $0 \leq \alpha \leq 1$):

$$f_0(E, L) \rightarrow \varphi_0(E, L, L_z) = \alpha \xi_0(E, L) \theta(L_z) + (1 - \alpha) \xi_0(E, L) \theta(-L_z).$$

Это преобразование означает, что мы обратили скорости некоторой группы частиц так, что частиц с $L_z > 0$ стало α , а частиц с $L_z < 0$ — $(1 - \alpha)$. При этом очевидно, что не изменятся ни плотность $\rho_0(r)$, ни, следовательно, потенциал $\Phi_0(r)$.

В качестве примера рассмотрим модель Эйнштейна шарового скопления звезд [17]. Функция распределения (89) соответствует случаю, когда в плоскости, касательной к произвольной сфере в любой ее точке, все векторы скоростей частиц в сумме составляют нулевой вектор — отсутствует вращение шара как целого. Выделим условно ось z , и пусть в экваториальной плоскости число частиц, вращающихся в одну сторону, превышает число частиц, вращающихся в противоположную сторону. Пусть, кроме того, на полюсе такое различие отсутствует (оно уменьшается при удалении от экватора). Построенная таким образом система обладает отличным от нуля моментом вращения.

В стационарном случае $\partial f_0 / \partial t = 0$, считая, что функция распределения

сферически-симметричной системы $\Phi_0 = \Phi_0(r)$ не зависит от угла φ ($\partial f_0 / \partial \varphi = 0$), из (60) имеем

$$v_r \left(\frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{v_{\perp}}{r} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \right) + \frac{v_{\perp}}{r} \left(\cos \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \alpha \cdot \text{ctg} \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) f_0 + \left(\frac{v_{\perp}^2}{r} - \frac{d\Phi_0}{dr} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_r} = 0. \quad (100)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что уравнению (100) удовлетворяет, например, функция [21]

$$f_0 = \frac{\rho_0}{2\pi v_0} \delta(v_r) \delta(v_{\perp} - v_0) (1 + \mu \sin \theta \cdot \sin \alpha), \quad |\mu| \leq 1, \quad (101)$$

которая описывает систему с конечным полным моментом

$$L_z = \int f_0 r \sin \theta v_{\perp} \sin \alpha dv_r v_{\perp} dv_{\perp} d\alpha r^2 dr dO$$

(dO — элемент телесного угла) и сферически-симметричным распределением плотности (и, следовательно, потенциала).

Нетрудно вычислить угловую скорость вращения шара, определяемого функцией распределения (101),

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\varphi} &\equiv \frac{1}{\rho_0} \int f_0 v_{\varphi} d^3 v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v_r) dv_r \int_0^{\infty} v_{\perp}^2 \delta(v_{\perp} - v_0) dv_{\perp} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \sin \alpha (1 + \mu \sin \theta \cdot \sin \alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \mu v_0 \sin \theta = \frac{1}{2} \mu \Omega_0 r \sin \theta. \end{aligned}$$

Частицы в сферическом слое радиуса r , находящемся на "параллели" с углом θ , вращаются вокруг оси z с угловой скоростью Ω_{rot} согласно формуле

$$\bar{v}_{\varphi}(r, \theta) = \Omega_{\text{rot}} r \sin \theta.$$

Сравнивая последнее выражение с предыдущим, видим, что $\Omega_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \mu \Omega_0(r)$. Из условия равновесия следует, что $\Omega_0(r) = \text{const}$ при $\rho_0 = \text{const}$. Таким образом, однородный шар, характеризующийся функцией распределения (101), вращается твердотельно с угловой скоростью $\Omega_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \mu \Omega_0$.

2.6. Устойчивость модели Эйнштейна шарового скопления звезд

2.6.1. Радиальные колебания модели Эйнштейна. Устойчивость таких систем относительно радиальных возмущений, при которых не происходит самопересечения слоев, достаточно очевидна [22].

Эффективная потенциальная энергия $U_{\text{эф}}$ шара (см. рис. 2) равна

$$U_{\text{эф}} = \sum_i \left(-\frac{GM_i m_i}{r_i} + \frac{L_i^2}{2m_i r_i^2} \right), \quad (102)$$

где M_i — масса внутри $r = r_i$; m_i — масса i -го (от начала координат)

сферического слоя; L_i^2 — сумма квадратов моментов частиц i -го сферического слоя. Поскольку радиальные смещения сохраняют момент каждой k -й частицы ($L_{ik} = \text{const}$), то при этих смещениях $L_i^2 = \text{const}$. Пусть в результате радиального возмущения эффективная потенциальная энергия стала $U'_{\text{эф}}$, которая получается из формулы (102) заменой $r_i \rightarrow r'_i$. Условие устойчивости системы есть

$$\Delta U_{\text{эф}} = U'_{\text{эф}} - U_{\text{эф}} > 0. \quad (103)$$

Эффективная потенциальная энергия i -го слоя $U_{\text{эф}}$ равна выражению под знаком суммы в (102). Условие минимума этой энергии

$$\frac{\partial U_{\text{эф}(i)}}{\partial r_i} = \frac{Gm_i M_i}{r_i^2} - \frac{L_i^2}{m_i r_i^3} = 0 \quad (104)$$

определяет условие равновесия i -го слоя.

Пусть в результате радиальных возмущений системы любой i -й слой с радиуса r_i переместился на радиус r'_i . Пользуясь условием равновесия (104) и выражением (103) для $\Delta U_{\text{эф}}$, находим

$$\Delta U_{\text{эф}} = \sum_i \frac{L_i^2}{2m_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r'_i} \right)^2 > 0. \quad (105)$$

Полученное неравенство доказывает устойчивость модели Эйнштейна относительно радиальных возмущений, не меняющих массы M внутри i -го слоя. Покажем, что при пересечении слоев в результате радиальных возмущений устойчивость системы только возрастает [22]. Пусть пересечению подвержены лишь два соседних слоя. Согласно теореме Ньютона все внешние (по отношению к рассматриваемым) слои не оказывают на два исследуемых никакого воздействия. Обозначив сумму всех внутренних (по отношению к исследуемым) слоев через M , запишем эффективные потенциальные энергии двух слоев до и после пересечений в виде

$$\begin{aligned} U_{\text{эф}}(1) &= -\frac{Gm_1 M}{r_1} + \frac{L_1^2}{2m_1 r_1^2}, \\ U_{\text{эф}}(2) &= -\frac{Gm_2(M+m_1)}{r_2} + \frac{L_2^2}{2m_2 r_2^2}, \\ U'_{\text{эф}}(1) &= -\frac{Gm_1(M+m_2)}{r'_1} + \frac{L_1^2}{2m_1 r_1'^2}, \\ U'_{\text{эф}}(2) &= -\frac{Gm_2 M}{r'_2} + \frac{L_2^2}{2m_2 r_2'^2}. \end{aligned}$$

Рассматриваемый тип радиальных возмущений означает, что $r'_1 > r'_2$ (хотя $r_1 < r_2$), т.е. "внутренний" слой после возмущения становится "внешним" и наоборот. Определяя $\Delta U_{\text{эф}}$ согласно (103), приходим к следующей положительно определенной форме:

$$(\Delta U_{\text{эф}})' = \Delta U_{\text{эф}} + Gm_1 m_2 (1/r'_2 - 1/r'_1) > 0. \quad (106)$$

Здесь $\Delta U_{\text{эф}}$ — изменение эффективной потенциальной энергии за счет радиальных возмущений, не приводящих к пересечению слоев (см. фор-

мулу (105)); последнее слагаемое описывает изменение эффективной потенциальной энергии за счет пересечения слоев. Поскольку $r'_2 < r'_1$, это слагаемое положительно, т.е. система по отношению к последнему типу возмущений (с пересечением слоев) более устойчива, чем к предыдущему [22].

2.6.2. Критерий неустойчивости системы вложенных цилиндров относительно произвольных возмущений [23]. В 1968 г. Я.Б. Зельдович высказал гипотезу о том, что критерий устойчивости модели Эйнштейна шарового скопления звезд относительно произвольных возмущений должен совпадать с критерием устойчивости цилиндрической системы относительно желобковых возмущений, $k_z = 0$ (Oz – ось, параллельная образующей цилиндра). Предполагается, что последняя система состоит из двух взаимопроникающих холодных (пылевых) цилиндров равной плотности, вращающихся в противоположные стороны. Если плотность системы однородна, то она оказывается устойчивой [23]. В холодной однородной плазме наличие двух встречных пучков одинаковой плотности приводит к неустойчивости при условии [24] $k_{\parallel} \ll \omega_p/V^5$. В нашем случае $k_{\parallel} = k_{\varphi} \equiv m/r$, где m – номер азимутальной моды, $\omega_p = \omega_0 = \sqrt{2} \Omega_0$, $V = r\Omega_0$, и условие неустойчивости системы относительно азимутальных возмущений есть $m \ll 1$, что бессмысленно.

Если же вложенные и вращающиеся навстречу цилиндры имеют неоднородную по радиусу плотность (хотя их парциальные плотности по-прежнему равны), то такая система оказывается неустойчивой при условии [23]

$$d\Omega_0^2/dr \sim d\rho_0/dr > 0. \quad (107)$$

Поскольку одиночный вращающийся цилиндр при условии (107) оказывается устойчивым [23], то данная неустойчивость может быть названа пучково-желобковой.

2.6.3. Критерий устойчивости модели Эйнштейна относительно произвольных возмущений. В работе [25] предложен метод нахождения собственных функций и собственных значений линеаризованных кинетического уравнения и уравнения Пуассона, описывающих произвольные малые возмущения модели Эйнштейна шарового скопления звезд.

Линеаризованное уравнение (60) запишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{L}f_1 + v_r \left(\frac{\partial f_1}{\partial r} - \frac{v_{\perp}}{r} \frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp}} \right) + \left(\frac{v_{\perp}^2}{r} - \frac{d\Phi_0}{dr} \right) \frac{\partial f_1}{\partial v_r} = \\ = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial f_0}{\partial v_2} + \frac{1}{r} \left(\cos \alpha \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}}, \end{aligned} \quad (108)$$

где

$$\hat{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_{\perp}}{r} \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \alpha \cdot \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right),$$

⁵Точная граница устойчивости [24] $k_{\parallel} < \sqrt{2} \omega_p/V$ приводит в нашем случае к условию $m < 2$, т.е. к $m = 1$. Однако мода $m = 1$ оказывается устойчивой [23], а при $m = 2$ имеем безразличное равновесие [23]. Очевидно, что, когда длина волны возмущения оказывается сравнима с радиусом кривизны цилиндра, становятся существенными неинерциальные эффекты, отсутствующие при выводе приведенного выше критерия из [24].

а Φ_1 определяется из уравнения Пуассона

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \int f_1(\Phi_1) d^3 v. \quad (109)$$

Рассмотрим сначала систему однородной плотности с круговыми орбитами частиц, $f_0 = (\rho_0/2\pi v_0) \delta(v_r) \delta(v_\perp - v_0)$. Априори не очевидно, что такая система устойчива. Во-первых, данная функция распределения анизотропна, следовательно, в принципе возможно развитие анизотропной неустойчивости [7]. Во-вторых, если проинтегрировать эту функцию распределения по v_r и v_θ , то получим $f_0(v_\varphi) \sim (v_\perp^2 - v_\varphi^2)^{-1/2}$, т.е. $\partial f_0 / \partial v_\varphi > 0$, что является необходимым условием развития пучковой неустойчивости в гравитирующей среде [6, 25, 26] (так же как и в плазменной [24]).

Возмущенную функцию f_1 в виде

$$f_1 = \delta(v_r) [A\delta(v_\perp - v_0) + B\delta'(v_\perp - v_0)] - C\delta'(v_r)\delta(v_\perp - v_0) \quad (110)$$

подставим в уравнение (108). Приравнивая нулю коэффициенты, стоящие при δ -функции и ее производных, получаем три уравнения для трех неизвестных коэффициентов A , B и C .

Φ_1 выберем в виде

$$\Phi_1(r, \theta, \varphi, t) = \chi_1(r) \Phi_1^l(t, \theta, \varphi),$$

где

$$\Phi_1^l = e^{-i\omega t} \Upsilon_m^l(\theta, \varphi), \quad \Upsilon_m^l(\theta, \varphi) = e^{-im(\pi/2 - \varphi)} P_{m0}^l(\cos \theta),$$

$P_{m0}^l(\cos \theta)$ — функции, с точностью до коэффициентов совпадающие с полиномами Лежандра [27].

После громоздких и долгих вычислений [25] (см. также [19]) приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$a_l = \sum \alpha_{ls} \frac{3}{(\omega/\Omega_0 - s)^2 - 4} = -1,$$

где $\alpha_{ls} \equiv |P_s^l(0)|^2$.

Как показывают исследования [25] (см. также [19]), это уравнение имеет только действительные корни.

Рассмотрим теперь аналогичную систему частиц с орбитами, близкими к круговым [28]

$$f_0 = \frac{\rho_0}{2\pi v_0} \left\{ \delta_r \delta_\perp \left(1 + \frac{\theta}{2v_0^2} \right) + \delta_r \delta'_\perp \frac{\theta}{2v_0} + \frac{\theta}{2} \delta_r \delta''_\perp + \frac{\theta}{2} \delta'_r \delta_\perp \right\},$$

где $\delta_r \equiv \delta(v_r)$, $\delta_\perp \equiv \delta(v_\perp - v_0)$ и θ — средний квадрат радиальной скорости. Выбирая возмущенную функцию в виде

$$f_1 = A\delta_r \delta_\perp + B\delta_r \delta'_\perp - C\delta'_r \delta_\perp + \theta [C_1 \delta'_r \delta'_\perp + C_2 \delta_r \delta''_\perp + C_3 \delta'_r \delta''_\perp + C_4 \delta_r \delta'''_\perp + C_5 \delta_r \delta'' \delta_\perp + C_6 \delta'_r \delta''_\perp + C_7 \delta_r \delta''_\perp]$$

и проводя все вычисления, аналогичные предыдущим, находим, что все собственные частоты только действительные [28].

Как показано в [21], общее вращение модели Эйнштейна, описывае-

мой функцией распределения (101), не изменяет вывод об устойчивости такой системы с *однородной* плотностью.

Устойчивость модели Эйнштейна с *неоднородной* плотностью впервые рассматривалась в работе [29] на частном примере $\rho_0 \sim r^{-2}$. В статьях [30, 31] показано, что критерий устойчивости модели Эйнштейна полностью совпадает с критерием (107), как это и предсказывал Зельдович.

Сферически-симметричная система с близкими к круговым орбитами звезд и неустойчивым *профилем* плотности, растущим с радиусом, может возникнуть в окрестности черной дыры. Все звезды с малым моментом вращения имеют малый прицельный параметр относительно центра и потому захватываются черной дырой. Таким образом, в окрестности последней возникает инверсия момента $L (\partial f_0 / \partial L > 0)$ в дополнении к инверсии плотности ($\partial \rho_0 / \partial r > 0$). Обсуждение устойчивости такой системы читатель найдет в [19].*

2.7. Джинсовская неустойчивость шарового скопления с радиальными орбитами звезд. О невозможности линден-белловской релаксации в реальных системах

Орбиты звезд в сферических галактиках и шаровых скоплениях сильно вытянуты по радиусу. В связи с этим естествен вопрос об устойчивости сферически-симметричных систем с орбитами частиц, близкими к радиальным.

Для чисто радиальных движений ответ на этот вопрос представляется очевидным [32, 33]: такие системы должны быть неустойчивыми. Действительно, если, например, при движении по круговым орбитам существует некоторый аналог упругих сил, то при чисто радиальных движениях ничто не препятствует "слипанию" соседних орбит: дисперсия скоростей частиц в тангенциальном направлении, которая стабилизировала бы систему, в этом случае отсутствует.

Убедимся в существовании такой неустойчивости и оценим минимальную дисперсию скоростей в тангенциальном направлении, при которой эта неустойчивость стабилизируется. Будем следовать работе [34].

При возмущении любой сферически-симметричной системы собственные функции суть шаровые функции

$$\Phi_l(r, \theta, \varphi) \sim R(r) P_m^l(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

Для доказательства самого факта неустойчивости системы достаточно показать неустойчивость относительно раскачки любой гармоники собственной функции. Выберем возмущение в виде $l = m \gg 1$:

$$P_m^m(\cos \theta) = (2m - 1)!! \sin^m \theta.$$

При $m \gg 1$ угол θ не может быть сильно отличающимся от $\pi/2$, т.е. $\theta \approx \pi/2$.

В кинетическом уравнении стоят два дифференциальных оператора $\partial/\partial\varphi$ и $\partial/\partial\theta$; $\partial\Phi_1/\partial\varphi = im\Phi_1$; $\partial\Phi_1/\partial\theta = m\Phi_1 \operatorname{ctg} \theta$. Так как $\operatorname{ctg} \theta \ll 1$ при $\theta \rightarrow \pi/2$, то $|\partial\Phi_1/\partial\varphi| \gg |\partial\Phi_1/\partial\theta|$, т.е. слагаемым $\sim \partial\Phi_1/\partial\theta$ в кинетическом уравнении можно пренебречь.

Поскольку $\theta \rightarrow \pi/2$, возмущения сосредоточены вблизи экваториальной

плоскости, т.е. в некотором "диске", погруженном в сферически-симметричное гало. Такая постановка задачи является классической в динамике галактического диска. Время джинсовской неустойчивости τ_J "диска", состоящего из частиц с радиальными орбитами, определяется плотностью "диска". Потребуем, чтобы последняя была много меньше плотности гало. Тогда период колебаний частицы по радиальной траектории τ_{pass} оказывается много меньше τ_J , $\tau_{\text{pass}} \ll \tau_J$, или $\omega \ll \Omega_{\text{pass}}$, где ω – характерная коллективная частота возмущений ($\omega \sim \omega_J$), Ω_{pass} – характерная частота колебаний частиц вдоль радиальной орбиты. Это значит, что за время неустойчивости траектории отдельных частиц сольются в треки, т.е. мы будем видеть вращающиеся с частотой прецессии Ω отдельные узкие эллипсы – "спицы". Функция распределения таких спиц $f = f(t, \alpha, \Omega)$, где $\Omega = \dot{\alpha}$. Уравнение Лиувилля $df/dt = 0$ перепишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Omega \frac{\partial f}{\partial \alpha} + P \frac{\partial f}{\partial \Omega} = 0, \quad (111)$$

где

$$P \equiv d\Omega/dt = d^2\alpha/dt^2.$$

Уравнение движения: $I\ddot{\alpha} = M_{\text{tot}}$, где M_{tot} – момент силы, действующей на спицу со стороны других спиц; I – момент инерции отдельной спицы относительно центра диска. Равновесная функция распределения $f_0(\Omega)$ (это распределение по угловым скоростям прецессии) может быть в принципе произвольной. В сферически-симметричной невозмущенной системе для каждой частицы $d\Omega_0/dt \equiv P_0 = 0$. Линеаризованное уравнение (111) имеет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \Omega \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = -P_1 \frac{\partial f_0}{\partial \Omega}. \quad (112)$$

Коэффициенты уравнения (112) Ω и $\partial f_0/\partial \Omega$ не зависят от t и α , поэтому искать решение (112) можно в виде

$$f_1(t, \alpha, \Omega) = \tilde{f}_1(\Omega) e^{i(m\alpha - \omega t)}. \quad (113)$$

Подставляя (113) в (112), найдем функцию распределения

$$\tilde{f}_1(\Omega) = -i \frac{P_1 \partial f_0 / \partial \Omega}{\omega - m\Omega}. \quad (114)$$

Пусть α – угол между двумя осями x и y и вдоль каждой из осей ориентирована спица; dx и dy – произвольные элементы каждой из спиц. Обозначим через δM_{xy} момент силы, действующей на элемент dx со стороны элемента dy ,

$$\delta M_{xy} = F \cos \beta \cdot x, \quad (115)$$

где x – координата элемента dx ; β – угол между прямой, соединяющей элементы dx и dy , и нормалью к элементу dx ; F – сила притяжения элементов dx и dy друг к другу,

$$F = G\rho_L(x) dx \cdot \rho_L(y) dy / r_{xy}^2, \quad (116)$$

где $\rho_L(x)$ — линейная плотность спицы x ; $r_{xy}^2 \equiv x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$. По теореме синусов имеем $y \sin^{-1}(\beta + \pi/2) = r_{xy} \sin^{-1} \alpha$, откуда

$$\sin(\beta + \pi/2) = \cos \beta = (y/r_{xy}) \sin \alpha. \quad (117)$$

Подставляя (116) и (117) в (115), получим

$$\delta M_{xy} = \frac{G \rho_L(x) x dx \cdot \rho_L(y) y dy \sin \alpha}{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha)^{3/2}}. \quad (118)$$

Момент силы, действующий со стороны спицы y на спицу x , есть

$$M(\alpha) = G \iint_{-a}^a dx dy \frac{xy \sin \alpha \cdot \rho_L(x) \cdot \rho_L(y)}{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha)^{3/2}}. \quad (119)$$

Вычислим ускорение, с которым вращается спица под действием всех остальных спиц,

$$P_1 = \frac{M_{\text{tot}}}{I_0} = \frac{1}{I_0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\alpha) f_1(\alpha, \Omega') d\Omega' d\alpha. \quad (120)$$

Подставляем (120) в (114) и интегрируем по $d\Omega$:

$$1 = - \frac{i}{I_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial f_0 / \partial \Omega) d\Omega}{\omega - m\Omega} \int_{-\pi}^{\pi} M(\alpha) e^{im\alpha} d\alpha. \quad (121)$$

Очевидно, что холодная в трансверсальном направлении система ($f_0 = \delta(\Omega)$) является наиболее неустойчивой (по Джинсу). При подстановке этой функции распределения в (121) получаем

$$\omega^2 = \frac{im}{I_0} \int_{-\pi}^{\pi} M(\alpha) e^{im\alpha} d\alpha. \quad (122)$$

Из (119) следует, что $M(\alpha)$ — нечетная функция, следовательно, при подстановке $e^{im\alpha} = \cos m\alpha + i \sin m\alpha$ в (122) отличным от нуля будет выражение

$$\omega^2 = - \frac{mG}{I_0} \int_{-a}^a dx dy x y \rho_L(x) \rho_L(y) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \alpha \cdot \sin m\alpha d\alpha}{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha)^{3/2}},$$

которое можно переписать в виде

$$\omega^2 = - \frac{8m^2 G}{I_0} \int_0^a dx dy \rho_L(y) L_m(x, y), \quad (123)$$

где

$$L_m(x, y) \equiv \int_0^{\pi} \frac{\cos m\alpha d\alpha}{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha)^{1/2}}. \quad (124)$$

Распишем двойной интеграл в (123), для чего положим для простоты $\rho_L(x) = \rho_L(y) = \text{const}$:

$$\omega^2 = - \frac{16m^2 G \rho^2}{I_0} \int_0^a dx \int_0^x d\left(\frac{y}{x}\right) \int_0^{\pi} \frac{\cos m\alpha d\alpha}{[1 + y^2/x^2 - 2(y/x) \cos \alpha]^{1/2}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^\pi \frac{\cos m\alpha d\alpha}{[1 + y^2/x^2 - 2(y/x)\cos\alpha]^{1/2}} = \int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty P_n(\cos\alpha) \left(\frac{y}{x}\right)^n \cos m\alpha d\alpha = \\
& = \int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!} \left[\cos n\beta + \frac{n}{2n-1} \cos(n-2)\beta + \right. \\
& \left. + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\beta + \dots \right] \cos m\alpha \left(\frac{y}{x}\right)^n d\alpha = \\
& = \pi \sum'_{n=m}^\infty \alpha_n \left(\frac{y}{x}\right)^n. \tag{125}
\end{aligned}$$

Здесь $\sum'_{n=m}^\infty$ означает сумму, начиная с $n = m$, затем $n = m + 2$, $n = m + 4$, т.е. $n = m + 2k$, $k = 1, 2, \dots$, что является следствием соотношения $\int_0^\pi \cos m\alpha \cdot \cos n\alpha d\alpha = \pi \delta_{mn}$; через α_n обозначены соответствующие численные коэффициенты, $\alpha_n > 0$. Окончательно находим

$$\omega^2 = - \frac{16m^2 \pi G \rho^2 a}{I_0} \sum'_{n=m}^\infty \frac{\alpha_n}{n+1}. \tag{126}$$

Мы видим, что $\omega^2 < 0$, что означает неустойчивость системы с радиальными траекториями частиц. Оценим теперь критическую величину трансверсальной дисперсии угловых скоростей Ω_T^{cr} . Возникновение последней является результатом развития описанной выше неустойчивости системы с радиальными траекториями частиц. Увеличение трансверсальной дисперсии скоростей спиц происходит до тех пор, пока вызвавшая их неустойчивость не окажется подавленной (принцип Ле Шателье).

Пусть в результате неустойчивости в системе установилось нормальное (максвелловское) распределение спиц по скоростям прецессии Ω :

$$f_0(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Omega_T} e^{-\Omega^2/\Omega_T^2}. \tag{127}$$

Подставляем (127) в (121) и считаем, что система находится на границе устойчивости, т.е. $\omega = 0$. Получаем

$$1 = \frac{i}{mI_0} \int_{-\infty}^\infty \frac{(\partial f_0/\partial \Omega) d\Omega}{\Omega} \int_{-\pi}^\pi M(\alpha) e^{im\alpha} d\alpha.$$

Интегрируя по частям интеграл по Ω и вводя новую переменную $t = (\Omega/\Omega_T)^2$, получаем

$$1 = \frac{i\Gamma(-1/2)}{\sqrt{\pi} mI_0 (\Omega_T^{cr})^2} \int_{-\pi}^\pi M(\alpha) e^{im\alpha} d\alpha, \quad \Gamma(-1/2) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = -2\sqrt{\pi}.$$

Окончательно находим

$$(\Omega_T^{cr})^2 = - \frac{2i}{mI_0} \int_{-\pi}^\pi M(\alpha) e^{im\alpha} d\alpha. \tag{128}$$

Сравнивая это выражение с (122), видим, что они различаются знаками, как и должно быть. Используя полученное выше значение интеграла по α , получаем требуемую величину $(\Omega_{\tau}^{\text{cr}})^2$.

Появление в результате неустойчивости $\Omega_{\tau}^{\text{cr}}$ означает, что у частиц возникает момент L (который ранее был равен нулю на чисто радиальной траектории). Таким образом, релаксация системы с радиальными траекториями частиц идет не по пути, предложенном Линден-Беллом [35]: $f_0(E) \rightarrow f_F(E)$, где $f_F(E)$ — функция Ферми, а по пути $f_0(E) \rightarrow F_0(E, L)$ (подробнее см. в [9]).

3. ПРОБЛЕМЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Теория слабой турбулентности вращающихся баротропных систем изложена в этом сборнике (см. статью В.В. Долотина и А.М. Фридмана). Мы хотели бы обратить внимание читателей также на работы [36–38], где рассмотрена нелинейная стадия развития джинсовской неустойчивости в расширяющейся Вселенной в холодном бездиссипативном газе. Показано, что за время, превосходящее джинсовское, в окрестности произвольно выбранного минимума потенциала в достаточно широком классе начальных условий формируется бездиссипативная гравитационная сферически-симметричная стационарная динамическая структура, имеющая в своей основе сингулярность — БГС (бездиссипативная гравитационная сингулярность).

Плотность газа в БГС (при $r \rightarrow 0$) обращается в бесконечность, $\rho \sim r^{-12/7}$, потенциал гравитационного поля $\Psi \sim r^{2/7}$.

Турбулентное состояние возникает как результат развития неустойчивости при нерегулярном начальном распределении плотности. Оно представляет собой структуру вложенных друг в друга БГС разных масштабов со скейлинговым законом $\rho(l) \sim l^{-12/7}$. Этот закон хорошо соответствует известному скейлингу распределения галактик в скоплениях и скоплениях в крупных Эйбеловских скоплениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фридман А.М. Равновесие и устойчивость бесстолкновительных гравитирующих систем // Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: ВИНТИ, 1975. С. 61–159. (Итоги науки и техники. Астрономия; Т. 10).
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950.
3. Jeans J. Astronomy and cosmology. Cambridge: Cambridge Univ. press, 1929.
4. Либишиц Е.М., Халатников И.М. Проблемы релятивистской космологии // УФН. 1963. Т. 80, № 3. С. 391–438.
5. Bonner W.B. Jeans' formula gravitational instability // Month. Notic. Roy. Astron. Soc. 1957. Vol. 117, N 1. P. 104–117.
6. Михайловский А.Б., Фридман А.М. Пучковая неустойчивость в гравитирующих средах // ЖЭТФ. 1971. Т. 61, № 2. С. 457–468.
7. Поляченко В.Л., Фридман А.М. Анизотропная гравитационная неустойчивость // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 5. С. 1–14.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
9. Поляченко В.Л., Фридман А.М. Колебания и неустойчивости многокомпонентной гравитирующей среды // ЖЭТФ. 1981. Т. 81, № 1. С. 13–21.
10. Грищук Л.П., Зельдович Я.Б. Гравитационная неустойчивость в многокомпонентной среде // Астрон. журн. 1981. Т. 58, № 3. С. 472–481.

11. *Addington A.S.* The distribution of stars in globular clusters // Month. Notic. Roy. Astron. Soc. 1916. Vol. 76, N 7. P. 572–585.
12. *J Jeans J.H.* On the law of distribution in star-clusters // Month. Notic. Roy. Astron. Soc. 1916. Vol. 76, N 7. P. 567–572.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.
14. *Велтманн Ю.-И.К.* Динамика сферических звездных систем. М.: ВИНТИ, 1966. С. 7–40. (Итоги науки и техники. Астрономия).
15. *Wooley R. van der R.* On the equilibrium of clusters. 3: The pleiades // Month. Notic. Roy. Astron. Soc. 1956. Vol. 116, N 3. P. 296–303.
16. *Зельдович Я.Б., Подурец М.А.* Эволюция системы гравитационно-взаимодействующих точечных масс // Астрон. журн. 1965. Т. 42, № 5. С. 963–973.
17. *Einstein A.* On stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses // Ann. Math. 1939. Vol. 40. P. 922–936.
18. *Camm G.L.* Self-gravitating star systems. 2 // Month. Notic. Roy. Astron. Soc. 1952. Vol. 112, N 2. P. 155–176.
19. *Fridman A.M., Polyachenko V.L.* Physics of gravitating systems. N.Y. etc.: Springer, 1984. Vol. 1, 2.
20. *Lynden-Bell D.* Can spherical clusters rotate? // Month. Notic. Roy. Astron. Soc. 1960. Vol. 120, N 3. P. 204–213.
21. *Сынах В.С., Фридман А.М., Шухман И.Г.* Устойчивость модели шарового скопления звезд с отличным от нуля моментом вращения // ДАН СССР. 1971. Т. 201, № 4. С. 827–830.
22. *Бисноватый-Коган Г.С., Зельдович Я.Б., Фридман А.М.* Об устойчивости тел вращения относительно радиальных возмущений // ДАН СССР. 1968. Т. 182, № 4. С. 794–796.
23. *Бисноватый-Коган Г.С., Зельдович Я.Б., Сагдеев Р.З., Фридман А.М.* Теория гравитационной устойчивости вращающегося цилиндра // ЖПМТФ. 1969. № 3. С. 3–11.
24. *Михайловский А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1970. Т. 1.
25. *Михайловский А.Б., Фридман А.М., Эпельбаум Я.Г.* Физика плазмы и проблема гравитационной устойчивости // ЖЭТФ. 1970. Т. 59, № 5. С. 1608–1618.
26. *Поляченко В.Л., Фридман А.М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976.
27. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория групп. М.: Наука, 1965.
28. *Фридман А.М., Шухман И.Г.* Коллективные колебания сферически-симметричной системы вращающихся масс // ДАН СССР. 1972. Т. 202, № 1. С. 67–70.
29. *Фридман А.М.* Устойчивость неоднородной сферически-симметричной системы вращающихся масс // Астрон. журн. 1971. Т. 48, № 5. С. 910–921.
30. *Пальчик М.Я., Паташинский А.З., Пинус В.К., Эпельбаум Я.Г.* Колебания эйнштейновской модели шарового звездного скопления: Препр. ИЯФ СО АН СССР № 99–100. Новосибирск, 1970.
31. *Пальчик М.Я., Паташинский А.З., Пинус В.К.* Неустойчивые сферические галактики. Устойчивые сферические галактики: Препр. ИЯФ СО АН СССР № 100. Новосибирск, 1970.
32. *Зельдович Я.Б., Поляченко В.Л., Фридман А.М., Шухман И.Г.* Равновесие и устойчивость моделей бесстолкновительных звездных систем: Препр. СИБИЗМИР СО АН СССР № 7–72. Иркутск, 1972.
33. *Поляченко В.Л.* Нелинейная эволюция сферических звездных систем // Письма в "Астрон. журн." 1981. Т. 7, № 3. С. 142–148.
34. *Поляченко В.Л.* Джинсовская неустойчивость в гравитирующих системах с вытянутыми по радиусу орбитами // Астрон. циркуляр. 1989. № 1537. С. 7–9.
35. *Lynden-Bell D.* Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems // Month. Notic. Roy. Astron. Soc. 1967. Vol. 136, N 1. P. 101–121.
36. *Гуревич А.В., Зыбин К.П.* Бездиссипативная гравитационная турбулентность // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 1. С. 3–25.
37. *Гуревич А.В., Зыбин К.П.* Бездиссипативная гравитационная турбулентность в расширяющейся Вселенной // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 10. С. 5–15.
38. *Гуревич А.В., Зыбин К.П.* Образование черной дыры в центре бездиссипативной гравитационной сингулярности // ЖЭТФ. 1990. Т. 97, № 1. С. 20–31.

МАГНИТНАЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ

С.А. МОЛЧАНОВ. А.А. РУЗМАЙКИН. Д.Д. СОКОЛОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Турбулентные течения электропроводящей жидкости в недрах планет, звезд и галактик отличает специфическая особенность — большое магнитное число Рейнольдса, т.е. преобладание индуктивного действия движений над джоулевой диссипацией. Это обстоятельство служит ключом к пониманию природы космических магнитных полей как результата самовозбуждения любого слабого начального поля. Одним из пионеров этого направления магнитной гидродинамики был Яков Борисович Зельдович, который предложил элементарный механизм самовозбуждения магнитного поля — восьмерку.

В пределе бесконечно большого магнитного числа Рейнольдса картина эволюции магнитного поля очень наглядна — поле заморожено в жидкость, поэтому экспоненциальное разбегание соседних жидких элементов в турбулентном потоке приводит к экспоненциальному росту магнитного поля. Структура генерируемого таким образом магнитного поля оказывается перемежаемой в пространстве и времени: имеются редкие и сильные концентрации поля, вносящие основной вклад в среднюю энергию, и обширные области сравнительно слабого поля.

В действительности магнитное число Рейнольдса велико, но конечно. С физической точки зрения это означает включение джоулевой диссипации и диффузии магнитного поля. Несмотря на малость коэффициента магнитной диффузии, ее роль существенна, поскольку рост магнитного поля сопровождается экспоненциальным измельчением масштабов и появлением сильных градиентов магнитного поля. С математической точки зрения речь идет о роли малого коэффициента при старшей производной — лапласиане. Задача тем не менее может быть сведена к случаю замороженности, но не на истинных, а на случайных, винеровских траекториях.

С другой стороны, конечность магнитного числа Рейнольдса в турбулентности порождает эффекты усиленной диссипации, вызванные пересоединением близко расположенных и противоположно направленных магнитных линий.

2. ДИНАМО-ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим случайное течение идеально проводящей несжимаемой жидкости. Пусть в начальный момент в нем имеется локализованное в некоторой области или областях магнитное поле, столь слабое, что можно пренебречь его воздействием на движение жидкости. Будем для простоты говорить о замкнутой магнитной трубке напряженностью H и длины L с площадью поперечного сечения S . Элементарный процесс усиления магнитного поля, указанный Я.Б. Зельдовичем, заключается в следующем. Магнитная трубка растягивается вдвое: $L \rightarrow 2L$, $S \rightarrow S/2$, $H \rightarrow 2H$ — в силу несжимаемости и сохранения магнитного потока $\Phi = HS$. Затем она свора-

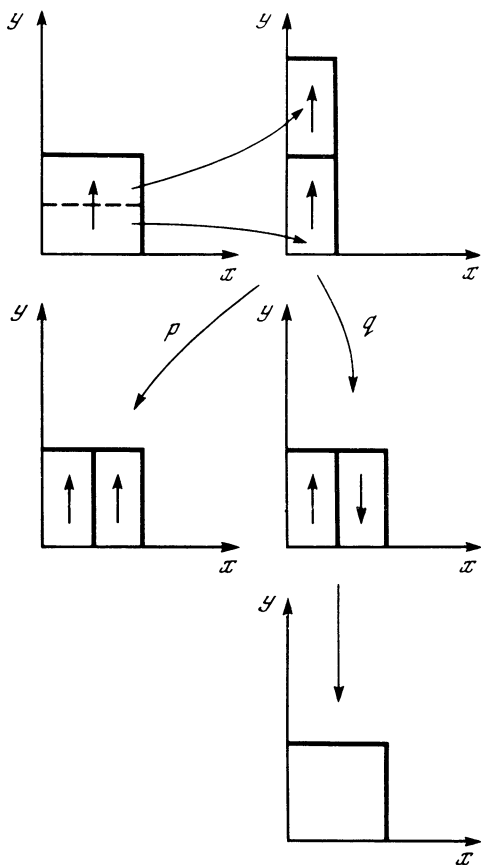


Рис. 1. Дискретное двумерное разрывное преобразование магнитного поля, и гистрирующее усиление с вероятностью p и инверсией с вероятностью $q = 1 - p$ магнитного потока

чивается в восьмерку и кольца восьмерки, имеющие одинаково направленные магнитные линии, накладываются друг на друга: $2L \rightarrow L$, $S/2 \rightarrow S$, $2H \rightarrow 2H$, $\Phi \rightarrow 2\Phi$. В результате магнитное поле и магнитный поток удваиваются и восстанавливается первоначальная форма петли. Разумеется, магнитный поток удвоился не из-за нарушения в замороженности, а просто благодаря соединению двух исходных жидких контуров в один. Повторение процедуры ведет к росту магнитного поля с характерным временем удвоения $T/\ln 2$, где T – время сворачивания одной восьмерки.

Финн и Отт [1] обратили внимание на то, что растяжение на первом шаге может быть неоднородным, скажем,

доля μL , $\mu \leq 1/2$, исходной трубки растянется до L и оставшаяся часть $(1 - \mu)L$ также растянется до L . В результате после складывания магнитное поле окажется неоднородно распределенным по сечению трубки: в доле поперечного сечения μS поле равно $\mu^{-1}H$, а в оставшейся доле магнитное поле равно $(1 - \mu)^{-1}H_0$. Аналитически это преобразование представляется в виде обобщенного "преобразования пекаря":

$$x_{n+1} = \begin{cases} \mu x_n, & y_n < \mu, \\ x_n/(1 - \mu) + \mu, & y_n > \mu; \end{cases} \quad (1)$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n/\mu, & y_n < \mu, \\ (y_n - \mu)/(1 - \mu), & y_n > \mu. \end{cases}$$

Скорость экспоненциального роста поля (показатель Ляпунова) равна

$$\gamma = \left[\mu \ln \frac{1}{\mu} + (1 - \mu) \ln \frac{1}{1 - \mu} \right] T^{-1}, \quad (2)$$

причем при $\mu = \frac{1}{2}$ получается результат Зельдовича. Заметим, что нарастающее поле оказывается чрезвычайно неоднородным, со временем наиболее быстро растущее поле сосредоточивается на фрактальном множестве бесконечно малой меры. Этот факт отражает реальный процесс измельчения и запутывания магнитного поля и требует введения в отображение (1) магнитной диффузии, замывающей чересчур мелкие неоднородности магнитного поля.

Отметим также, что после растяжения складывать трубку можно с поворотом (восьмерка Зельдовича) и без поворота. В первом случае магнитный поток удвоится, а во втором он обращается в нуль. На рис. 1 дана иллюстрация этого двумерного процесса с помощью дискретного преобразования с разрывом магнитных линий. Магнитные линии направлены вдоль оси y плоскости, а их плотность может меняться вдоль оси x . Таким образом, мы фактически имеем дело с одномерной моделью (зависимость от координаты x) трехмерного процесса генерации магнитного поля, вторая координата y необходима для того, чтобы отразить векторный характер генерируемой величины, магнитного поля.

Таким образом, на языке преобразований восьмерка Зельдовича имеет удивительно простое описание, в то время как на пути прямого описания этого процесса с помощью уравнений магнитной гидродинамики (МГД) встают трудно преодолимые математические трудности. Конечно, результаты, полученные с помощью динамо-отображений являются менее строгими, чем результаты, полученные с помощью прямого исследования уравнений МГД, так как всегда остается проблема адекватности динамо-отображения точному уравнению. Однако при практических приложениях, например в астрофизике, мы все равно не знаем в деталях строение случайных потоков проводящей жидкости, которое может сильно отличаться от изучаемых в лаборатории турбулентных потоков за решеткой. В этой ситуации мы вынуждены использовать более или менее разумные модели турбулентности и решать не менее сложный вопрос об адекватности этих моделей, поэтому доказательность прямого исследования уравнений МГД может оказаться иллюзорной.

3. ДИНАМО-ОТРАЖЕНИЕ С ЭФФЕКТОМ БЫСТРОЙ ДИССИПАЦИИ

В этом разделе мы обобщим динамо-отображение Я.Б. Зельдовича (восьмерку) для того, чтобы учесть реальный эффект пересоединения противоположно направленных магнитных силовых линий, сближаемых течением жидкости. Напомним, что мы рассматриваем случай слабого магнитного поля, практически не влияющего на течение жидкости. В этом приближении аннигиляция магнитных линий происходит очень быстро, со скоростью, пропорциональной магнитному числу Рейнольдса [2].

Итак, мы рассматриваем эволюцию магнитного поля, в результате которой магнитный поток удваивается с некоторой вероятностью p за цикл и аннигилирует с вероятностью $q = 1 - p$. Физически это означает, что вероятностью p происходит сложение восьмерки, а с вероятностью $q = 1 - p$ вместо сложения восьмерки происходит сближение противоположно направленных частей магнитной петли. Величина магнитного

поля после n циклов эволюции будет равна

$$H_n = H_0 \cdot 2^n \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n, \quad (3)$$

где независимые случайные величины θ_i принимают значение единица с вероятностью p и нуль с вероятностью q . Ясно, что при $p < 1$ каждая реализация, соответствующая определенному произведению θ_i поля H_n , со временем обратится в нуль. Исключение составляет все менее и менее вероятная реализация, у которой все $\theta_i = 1$. Среднее значение магнитного поля равно $\langle |H_n| \rangle = 2^n p^n$, другие моменты имеют вид $\langle |H_n|^k \rangle = 2^{nk} p^n$. Таким образом, скорость роста k -го момента равна

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} ((\ln \langle |H_n|^k \rangle) / kn) = \ln 2 - \ln p / k. \quad (4)$$

Старшие моменты магнитного поля растут быстрее младших, а типичная реализация магнитного поля вообще затухает. Очевидно, что подобная ситуация невозможна для плавного распределения магнитного поля и оно состоит из отдельных редко расположенных высоких пиков. С ростом n пики занимают все меньший процент объема. Грубо говоря, с каждым циклом происходит удвоение магнитной энергии, заключающейся в пиках магнитного поля. К уже имеющейся в них магнитной энергии добавляется энергия, преобразующаяся из кинетической энергии среды. Далее p -я часть этой удвоенной энергии сохраняется в виде магнитной энергии и участвует в следующем цикле эволюции, а q -я часть магнитной энергии превращается в тепловую в результате процесса быстрой диссипации магнитного поля.

В пределе $n \rightarrow \infty$ в данной фиксированной точке не остается магнитного поля (при $p < 1$), однако в области, растущей со временем как c^n , при подходящем выборе c всегда будет содержаться большое число пиков. Действительно, трансформируем эту область в единственный отрезок. Тогда средний магнитный поток равен $c^n \cdot 2^n p^n$. Поскольку магнитное поле в пиках равно 2^n и оно, занимая малую часть объема, определяет магнитный поток, то для согласования значений магнитного потока, полученных осреднением по ансамблю и по объему, необходимо, чтобы

$$c^n \cdot 2^n p^n = (c^n \cdot 2^n)^d,$$

где d – фрактальная (хаусдорфова) размерность области, занятой пиками. Отсюда

$$d = 1 - \ln(1/p) / \ln(2c).$$

При $c < 1/2p$ размерность обращается в нуль и в рассматриваемом объеме происходит вымирание пиков. При $c \rightarrow \infty$ размерность обращается в единицу, что означает, что рассматриваемый нами объем увеличивается настолько быстро, что для удаленного наблюдателя, рассматривающего картину с разрешением c , пики магнитного поля сливаются в плавное усредненное распределение. При $p = 1$ получается модель Я.Б. Зельдовича, которой соответствует $d = 1$, т.е. рост поля при всех значениях c происходит во всем пространстве (на всей оси) благодаря росту типичной реализации. Более подробно о свойствах перемежаемых случайных полей см. [3].

При обсуждении возможностей применения этих результатов к реальным объектам можно предполагать, что на нелинейной стадии скорость

перезамыканий магнитных линий уменьшается, а начальное затравочное магнитное поле постоянно вносится в систему внешним источником. В этом случае предельное распределение магнитного поля имеет вид отдельных редко расположенных высоких концентраций, причем число n в линейной картине эволюции магнитного поля можно выбрать так, чтобы за n циклов эволюции затравочное поле выросло до того значения, при котором существенны эффекты воздействия магнитного поля на течение жидкости. Сами концентрации магнитного поля оказываются сравнительно долго живущими, поскольку их разрушение происходит уже в нелинейном режиме. Подробнее о рассмотрении таких нелинейных моделей см. [4].

Рассмотренная модель эволюции магнитного поля не учитывает всех физических эффектов, происходящих в реальных МГД-системах. Однако ее можно усложнить, сохранив доступность для исследований. Например, вместо случайных чисел θ_i , равных единице или нулю, можно рассматривать случайные числа $\tilde{\theta}_i$, равные $1 - \delta$ с вероятностью p и δ с вероятностью $q = 1 - p$. Такая модель учитывает то обстоятельство, что аннигилирующие магнитные линии не обязательно направлены строго антипараллельно. В этой ситуации возможен рост типичной реализации магнитного поля. Скорость роста магнитного поля равна

$$\gamma = \ln 2 + p \ln (1 - \delta) + q \ln \delta.$$

Кроме того, магнитные петли не обязаны растягиваться точно вдвое, число сложений тоже не обязательно равно двум. В местах, где будут преобладать растяжения, получатся очень тонкие длинные трубки с усиленным магнитным полем. Там, где больше складываний, получатся трубки со слабо усиленным полем, локализирующиеся в малую область. И в том и в другом случае включение малой диффузии создает скин-слой и ставит предел усилению магнитного поля и магнитного потока. Лишь в случае, когда коэффициент растяжения совпадает или близок к числу складываний, происходит существенное – в идеале бесконечное – усиление благодаря воспроизведению геометрии магнитной трубки. Отмеченные эффекты дополнительно усиливают перемежаемость магнитного поля.

4. СТРУКТУРА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

С помощью динамо-отображений трудно изучать пространственную структуру концентраций магнитного поля. Для этой цели больше подходит прямое исследование уравнений МГД, которое можно провести в приближении короткокоррелированного течения [5]. В этом случае в пространственно-временном распределении магнитного поля также можно выделить две составляющие: редкие области больших значений магнитного поля (концентрации) и относительно слабый и протяженный фон. Обе эти составляющие растут во времени, но с различной скоростью роста. Концентрации имеют вид тонких и редко расположенных трубок с большим магнитным потоком через поперечное сечение. Они вносят основной вклад в среднюю энергию и более высокие статистические моменты [6]. Изучение второго момента (корреляционной функции) позволило выяснить геометрическую структуру концентраций. Легче всего возбуждаются и быстрее растут концентрации типа простых магнитных петель, размером порядка корреляционной длины турбулентности l и

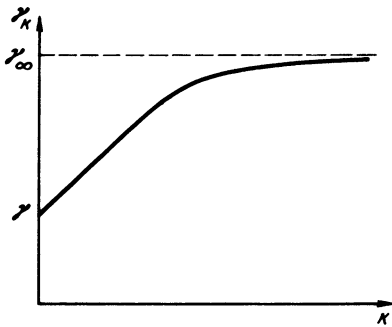


Рис. 2. Качественный вид скоростей роста статистических моментов магнитного поля как функции номера момента в пределе очень больших магнитных полей Рейнольдса

толщиной $lR_m^{-1/2}$, где R_m — магнитное число Рейнольдса. При увеличении магнитного числа Рейнольдса начинают появляться двояко скрученные трубки типа обмотки 2-тора, в которых витки размера l модулируют более мелкие ветки размера $lR_m^{-1/4}$, а также более сложные трубки [7].

Наличие перемежаемости распределения магнитного поля доказывает, что скорости роста последовательных средних

$$\gamma_k = \lim_{t \rightarrow \infty} ((\ln \langle |H|^k \rangle) / kt)$$

прогрессивно увеличиваются с увеличением номера k статистического момента (рис. 2). При этом предельное значение $\gamma_0 \equiv \gamma$ отвечает росту типичной (неусредненной) реализации магнитного поля. Замечательно, что она оказывается ниже скоростей роста моментов, т.е. типичная реализация магнитного поля растет медленнее и возбуждается при более высоком R_m . Тем самым при достаточно умеренных R_m типичная реализация магнитного поля может даже затухать при прогрессивном росте статистических моментов, скажем, энергии.

Начальный участок может быть явно вычислен в короткокоррелированном приближении [5]. При малых R_m кривая сдвигается вниз, ее левая часть попадает в отрицательную область, т.е. могут возбуждаться лишь достаточно высокие моменты. Типичная реализация с подавляющей вероятностью соответствует фоновому полю (концентрации являются редкими маловероятными событиями). Описание фонового поля не допускает усреднения по всему ансамблю. Прежде всего необходимо отфильтровать вклад концентраций. Проще всего это сделать путем рассмотрения направлений магнитного поля

$$l_i(t, \mathbf{x}) = H_i(t, \mathbf{x}) / |\mathbf{H}(t, \mathbf{x})|.$$

поскольку нормировка уравнивает вклады концентраций и фона. Изучение корреляционной функции поля направлений показывает, что фоновое магнитное поле тоже состоит из магнитных петель, которые, однако, близко расположены друг к другу и имеют значительно большее число ярусов закрутки типа обмотки тора размерности $l_n R_m$ [8]. Практически это означает, что в случайно выбранном месте наиболее вероятно встретить самую запутанную трубку магнитного поля. Именно в силу запутанности фоновое магнитное поле растет медленнее сильных концентраций (подобно тому, как чем больше число узлов собственной функции, тем труднее ее возбудить!).

ЛИТЕРАТУРА

1. Finn J., Ott E. Chaotic flows and fast magnetic dynamo // *Phys. Rev. Lett.* 1988, Vol. 60, P. 760–763.
2. Zel'dovich Ya.B., Molchanov S.A., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. Kinematic dynamo in the linear velocity field // *J. Fluid Mech.* 1984, Vol. 144, P. 1–11.
3. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Перемежаемость в случайной среде // УФН. 1987. Т. 152, № 1, С. 3–32.
4. Zel'dovich Ya.B., Molchanov S.A., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. Self-excitation of a nonlinear scalar field in a random medium // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1987, Vol. 84, P. 6323–6325.
5. Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Короткокоррелированный случайный порок как быстрое динамо // ДАН СССР 1987 Т. 295, № 3 С. 576–579.
6. Molchanov S.A., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. A dynamo theorem // *GAJ D.* 1984, Vol. 30, P. 241–259.
7. Kleorin Y.I., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. Correlation properties of self-exciting fluctuative magnetic fields // *Plasma astrophysics. P.* 1986 P. 557–561. (ISA: SP-251).
8. Галеева Р.Ф., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Типичная реализация магнитного поля в случайном потоке // *Магнит. гидродинамика.* 1989, № 4 С. 17–21.

УДК 524

КРУПНОМАСШТАБНАЯ СТРУКТУРА ВСЕЛЕННОЙ. УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА И ЯЧЕЙСТЫЕ СТРУКТУРЫ

С.Н. ГУРБАТОВ, А.И. САИЧ, В.С.Ф. ШАНДАРИН

ВВЕДЕНИЕ

Проблема формирования и эволюции крупномасштабной структуры Вселенной является одной из важнейших в современной космологии. Она тесно связана с характером первичных возмущений на инфляционной стадии и природой так называемого скрытого вещества. Наиболее последовательные теории, объясняющие формирование крупномасштабной структуры, основаны на теории гравитационной неустойчивости расширяющейся Вселенной. В данной работе нелинейная стадия гравитационной неустойчивости описывается в рамках модели "слипающихся" частиц, которая основана на трехмерном уравнении Бюргерса. В данной модели поле скорости и плотности образует с течением времени ячейстую структуру.

Возникновение подобных упорядоченных структур возможно в нелинейных средах без дисперсии. Эти структуры представляют собой области (домены, ячейки) с квазирегулярным поведением, разделенные хаотически расположенными зонами диссипации. В настоящей работе мы рассматриваем формирование и эволюцию подобных структур, используя одно из простейших уравнений теории нелинейных волн — уравнение Бюргерса и его обобщение на трехмерный случай. В работе исследуются статистические характеристики стохастических решений уравнения Бюргерса — так называемой турбулентности Бюргерса. Она представляет собой один из важных модельных примеров сильной турбулентности. В частности, показано, что для нелинейных случайных волн в средах без дисперсии характерным является возникновение автомодельных режимов.

Трехмерное уравнение Бюргерса совместно с уравнением непрерыв-

ности дает приближенное описание как формирования нелинейных структур (блинов, филаментов и сгущений вещества), так и эволюции этих элементов. В работе показано, что на поздней нелинейной стадии статистические характеристики как поля скорости, так и плотности вещества определяются статистическими свойствами флуктуаций гравитационного потенциала, присущих линейной стадии гравитационной неустойчивости

1. МОДЕЛИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КРУПНОМАСШТАБНОЙ СТРУКТУРЫ ВСЕЛЕННОЙ

Под крупномасштабной структурой Вселенной обычно понимаются неоднородности в распределении галактик в масштабах от $1 \text{ Мпк} = 3 \cdot 10^{24} \text{ см}$ до 10 Мпк . Галактики концентрируются около поверхностей, линий и точек, формируя соответственно "блины", филаменты и сверхскопления. Существуют также гигантские области, где галактики отсутствуют [1]. Обычно предполагается, что распределение галактик в области крупных масштабов подобно распределению масс. Проблема возникновения и эволюции крупномасштабной структуры является одной из фундаментальных проблем современной космологии. Она тесно связана с природой скрытого вещества, которое определяет среднюю плотность вещества во Вселенной, а также с проблемой возникновения первичных флуктуаций плотности в ранней Вселенной.

В современной космологии существует много моделей, пытающихся объяснить возникновение крупномасштабной структуры. Наиболее развитые из них опираются на гипотезу гравитационной неустойчивости [2, 3]. Согласно модели гравитационной неустойчивости как галактики, так и собственно крупномасштабная структура сформировались из малых флуктуаций плотности, возникших из квантовых флуктуаций на очень ранней стадии, когда Вселенная расширялась экспоненциально. В настоящее время Вселенная расширяется по степенному закону $a(t) \sim t^{-2/3}$, где $a(t)$ — так называемый масштабный фактор, характеризующий расширение Вселенной. На достаточно длительной ранней стадии флуктуации плотности растут в линейном режиме. Позднее относительные флуктуации плотности $\delta\rho/\bar{\rho}$ становятся порядка и больше единицы и начинают преобладать нелинейные эффекты. Я.Б. Зельдович показал, что, если спектр начальных флуктуаций плотности удовлетворяет определенным условиям, нелинейность эволюции плотности приводит к возникновению характерных сильно анизотропных областей повышенной плотности — блинов [4].

Прямое численное моделирование в двух- и трехмерных системах эволюции бесстолкновительных частиц, взаимодействующих только гравитационно, подтвердило выводы Зельдовича [5, 6]. Модель бесстолкновительных частиц была выбрана потому, что большая часть вещества во Вселенной предположительно существует в форме гипотетических слабо взаимодействующих частиц, имеющих ненулевую массу, таких как массивные нейтрино или аксионы. Дальнейшие исследования нелинейной стадии гравитационной неустойчивости с помощью численного моделирования показали, что в дальнейшем из блинов формируется ячеистая структура. На рис. 1 и 2 изображены результаты прямого численного моделирования движения N гравитационно взаимодействующих частиц в двумерном случае [7].

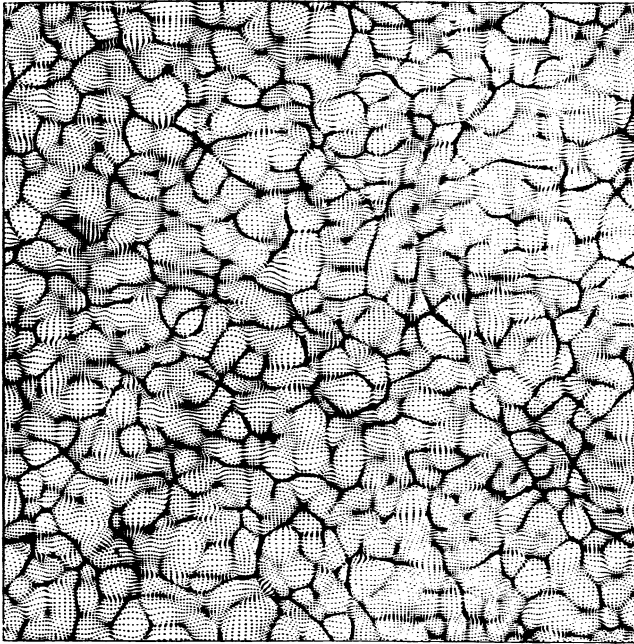
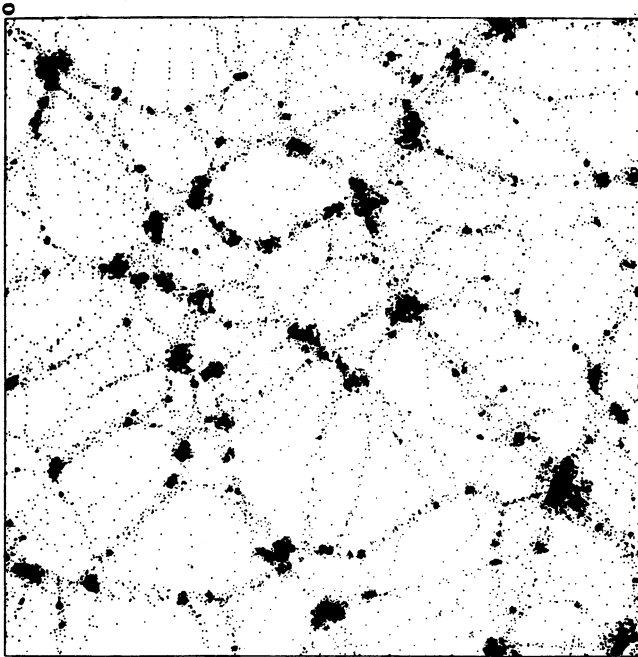


Рис. 1

На рис. 1 показано распределение частиц на ранней нелинейной стадии, когда относительные флуктуации плотности, рассчитанные по линейной теории, еще невелики: $\langle(\delta\rho/\rho)^2\rangle \approx 1$. Рис. 2 соответствует временам, когда флуктуации плотности, рассчитанные по линейной теории, уже существенно превышают единицу: $\langle(\delta\rho/\rho)^2\rangle_{\text{л.т.}} \approx 16$. На этих рисунках легко видеть ячеистую структуру, более того, из сравнения рис. 1 и 2 видно, что характерный масштаб этих ячеек растет с течением времени.

Следующей характерной чертой этих структур является то, что относительная толщина "стенок", разделяющих ячейки, мала по сравнению с характерными размерами ячеек. Это дает основание использовать модель "слипающихся" частиц для описания формирования крупномасштабной структуры [8–10]. Согласно этой модели движение гравитирующей бесстолкновительной материи в расширяющейся Вселенной может быть приближенно описано как движение холодного ($T = 0$) вязкого газа в обычном (нерасширяющемся) пространстве. Предполагая, что коэффициент вязкости ν бесконечно мал, можно описать эволюцию такого газа как движение инерционной "клейкой" среды без давления. Каждая частица среды движется с постоянной скоростью, пока не столкнется с другой частицей. В момент столкновения частицы слипаются (склеиваются) и движутся после этого вместе со скоростью, определяемой из закона сохранения импульса. Сравнение результатов этой простой модели с результатами прямого численного моделирования двумерного газа гравитационно взаимодействующих частиц будет проведено в конце статьи.

Модель слипающихся частиц формально основана на решении уравне-



Р и с. 2

ния Бюргера, которое будет обсуждаться в деталях в следующем разделе. Применительно к космологии следует подчеркнуть, что основной задачей этого модельного уравнения является конструирование "скелета" крупномасштабной структуры. Модель слипающихся частиц, конечно, не предназначена для описания внутренней структуры областей повышенной плотности.

Прежде чем обсуждать решение трехмерного уравнения Бюргера и его применение к задачам описания крупномасштабной структуры, приведем основные результаты, относящиеся к одномерному уравнению Бюргера.

2. СЛУЧАЙНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И ОДНОМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В НЕДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Чрезвычайные трудности исследования нелинейных случайных волн дали толчок к следующей тенденции в теории таких волн: к переходу от полных и сложных уравнений к некоторым более простым модельным уравнениям. Одним из таких уравнений теории сильной турбулентности (турбулентности с сильным взаимодействием большого числа когерентных гармоник) является уравнение Бюргера [11]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, t=0) = u_0(x), \quad (1)$$

где ν – коэффициент диссипации; $u_0(x)$ – случайная функция, если начальное поле имеет шумовой характер. Это уравнение описывает два основных

эффекта, характеризующих любую турбулентность, — нелинейную трансформацию энергии по спектру и затухание энергии в области малых масштабов. Уравнение (1) было предложено Бюргерсом как модельное уравнение гидродинамической турбулентности. Позже было показано, что оно описывает плоские нелинейные акустические волны. Уравнение Бюргерса нашло широкое применение в нелинейной акустике и, в частности, для описания интенсивных акустических шумов.

Эволюция поля $u(x, t)$ полностью определяется начальным возмущением $u_0(x)$. Пусть u_0 и l_0 — характерная амплитуда и пространственный масштаб начального поля. Тогда безразмерный параметр $R = u_0 l_0 / \nu$ — число Рейнольдса будет характеризовать относительное влияние нелинейных и диссипативных эффектов на эволюцию поля.

Мы предположим, что начальный спектр шума может быть представлен в виде:

$$g_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int \langle u_0(x) u_0(x + \rho) \rangle e^{ik\rho} d\rho = \alpha_n^2 k^n b_0(k), \quad (2)$$

где $b_0(k)$ — достаточно быстро спадающая при $k \rightarrow \infty$ функция с характерным масштабом $k_* \approx 1/l_0$ и $b_0(0) \neq 0$. Ниже мы исследуем, как зависит асимптотическое поведение поля от величины показателя n в начальном спектре.

Мы рассмотрим предельный случай $R_0 \gg 1$ и покажем, что возникающая нелинейная структура является устойчивой при $n < 1$, т.е. она, несмотря на диссипацию, никогда не выходит на линейный режим. Если $\nu \rightarrow 0$, то решение уравнения Бюргерса может быть представлено в виде [11–14]

$$u(x, t) = [x - y(x, t)]/t, \quad (3)$$

где $y(x, t)$ — координаты абсолютного минимума функции

$$S(x, y, t) = S_0(y) + (x - y)^2/2t, \quad S_0(y) = \int^y u_0(x) dx. \quad (3')$$

Здесь $S_0(x)$ удобно назвать действием начального поля скорости [13, 14]. На временах $t \gg t_n = l_0/u_0$, когда парабола — плавная функция в масштабе начального действия, координата абсолютного минимума $y(x, t)$ представляет кусочно постоянную функцию x . Соответственно первоначально непрерывное поле трансформируется в последовательность пилообразных импульсов с одинаковым наклоном $u'_x = 1/t$ [11–14]. Из-за слияния разрывов характерное расстояние $l(t)$ между ними возрастает. Это расстояние естественно назвать внешним масштабом турбулентности Бюргерса. Заметим, что существует очень красивая аналогия между решением уравнения Бюргерса и газами частиц с контактными взаимодействиями. При $\nu \rightarrow 0$ уравнение (1) описывает поле скорости гидродинамического потока невзаимодействующих частиц. При этом образование разрывов в решении уравнения Бюргерса соответствует слипанию частиц, образованию особенностей в поле плотности. Их удобно интерпретировать как "тяжелые" частицы, масс которых пропорциональна амплитуде разрыва, а скорость равна скорости разрыва. При этом слияние разрывов соответствует неупругому слипанию тяжелых частиц с выполнением законов сохранения массы и импульса [12–14]. Естественно, что слияние частиц ведет к увели-

чению их характерной массы, что как раз и эквивалентно росту внешнего масштаба турбулентности Бюргера.

Можно было бы попытаться найти законы роста внешнего масштаба из кинетического уравнения для тяжелых частиц, однако для уравнения Бюргера это проще сделать непосредственно из решения (3). Для оценки внешнего масштаба $l \approx |x - y|$ мы используем то, что в (3) приращения параболы на этом масштабе и начальные условия должны быть одного порядка:

$$l^2(t)/t \approx [d_s(l(t))]^{1/2},$$

$$d_s(\rho) = \langle (S_0(x + \rho) - S_0(x))^2 \rangle,$$

где $d_s(\rho)$ — структурная функция начального действия. Если $n > 1$, то дисперсия $S_0(y)$ ограничена и $d_s(\rho \rightarrow \infty) = 2\sigma_0^2$. Если $n < 1$, то структурная функция возрастает по степенному закону $d_s(\rho) \approx \alpha_n^2 \rho^{1-n}$. Соответственно, для внешнего масштаба турбулентности $l(t)$ в этих случаях имеем

$$l(t) = (\alpha_n t)^{1/2}, \quad n > 1, \tag{4}$$

$$l(t) = (\alpha_n t)^{2/3+n}, \quad n < 1.$$

При конечной вязкости ($\nu \neq 0$) ширина ударного фронта конечна $\delta \approx \nu t/l$ и растет с течением времени. Однако для эффективного числа Рейнольдса, которое фактически равно здесь отношению внешнего масштаба $l(t)$ к внутреннему $\delta(t)$, имеем

$$R(t) = \frac{l(t)}{\delta(t)} = \frac{l^2}{\nu t} \cong \begin{cases} R_0 = \text{const}, & n < 1, \\ t^{(1-n)/(n+3)}, & n > 1. \end{cases}$$

Заметим, что для периодического сигнала, для которого разрывы не сливаются, число Рейнольдса уменьшается как $R(t) = l_0^2/\nu t$.

Таким образом, если $n < 1$, то эффективное число Рейнольдса, несмотря на диссипацию, возрастает. Это и означает, что сильно нелинейные пилообразные волны являются структурно устойчивыми и никогда не выходят на линейный режим затухания.

Можно строго показать, используя точное решение Хопфа–Коула уравнения (1), что в случае $n < 1$ возникновение сильно нелинейных пилообразных режимов происходит вне зависимости от величины начального числа Рейнольдса [14]. В этом случае корреляционная функция и энергетический спектр становятся асимптотически автомодельными и могут быть записаны как

$$B(\rho, t) = \frac{l^2(t)}{t^2} \tilde{R}(\rho/l(t)), \quad g(k, t) = \frac{l^3(t)}{t^2} \tilde{g}(kl(t)), \tag{5}$$

где $l(t)$ определяется соотношением (4).

В области крупных масштабов ($kl \ll 1$) нелинейность и диссипация не могут менять форму спектра при $n < 1$ и $g(k, t) = \alpha_n^2 k^n b_0(0)$. В области же мелких масштабов ($kl \gg 1$) возникновение разрывов ведет к возникновению универсальной асимптотики

$$g(k, t) \approx l/k^2 t^2 \quad (kl \gg 1).$$

Для акустических шумов более типичным является случай $n \geq 2$. При $R_0 \gg 1$ на основе решения (3) удастся в этом случае найти одно- и двухточечные вероятностные распределения поля, корреляционную функцию и энергетический спектр случайного поля [13, 14]. Они также оказываются автомодельными и зависят только от внешнего масштаба $l(t)$, для которого можно получить

$$l(t) = l_0(t/t_n)^{1/2}/(\ln t/t_n)^{1/4}, \quad (6)$$

здесь $t_n \approx l_0/u_0$ — характерное время формирования пилообразной структуры. Для эффективного числа Рейнольдса в этом случае получаем медленное логарифмическое уменьшение

$$R(t) = l^2/vt = R_0/(\ln t/t_n)^{1/2}.$$

Пилообразный режим существует, пока $R(t) \geq 1$. На этой стадии энергетический спектр имеет универсальное поведение в области низких и высоких пространственных частот:

$$g(k, t) \sim k^2 t^{1/2}, \quad kl \ll 1,$$

$$g(k, t) \sim k^{-2} t^{-3/2}, \quad kl \gg 1.$$

Согласно (6) максимум спектра смещается в сторону малых волновых чисел пропорционально $1/l(t)$. Физически такая эволюция спектра обусловлена следующими причинами: возникновение разрывов (ударных фронтов) ведет к диссипации энергии и возникновению медленно спадающих компонент спектра в области высоких пространственных частот. Рост низкочастотных компонент спектра связан со слиянием ударных фронтов.

Оценку времени выхода волны на линейный режим затухания t_n можно провести из условия $R(t_n) \approx 1$. Из-за слияния разрывов это время чрезвычайно велико $t_n \approx t_n \exp\{R_0^2\}$. Заметим, что для периодического сигнала $t_n \approx t_n R_0$.

Начальная стадия возникновения автомодельных режимов наблюдалась в экспериментах, связанных с распространением интенсивных акустических шумов в трубах [18, 19]. При этом было получено, что формирование универсальных асимптотик начинается в области высоких частот.

3. ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУР В ГРАВИТАЦИОННО НЕУСТОЙЧИВОЙ СРЕДЕ

В этом разделе трехмерное уравнение Бюргерса используется для описания нелинейной стадии гравитационной неустойчивости. Мы будем обсуждать только эволюцию распределения вещества, полностью оставляя в стороне процесс формирования галактик. Более того, мы не будем интересоваться и внутренней структурой крупномасштабных неоднородностей. Нашей задачей является анализ глобальных свойств крупномасштабной структуры и ее статистических характеристик. Предложенная модель является обобщением хорошо известного приближенного решения Зельдовича [4], описывающего начала нелинейной стадии гравитационной неустойчивости в расширяющейся Вселенной.

Исходные уравнения. В расширяющейся Вселенной для описания эволю-

ции пылевидной (без давления) материи удобно перейти к пекулярной скорости

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} - \mathbf{r} \dot{a}/a = a \, d\mathbf{x}/dt \quad (7)$$

и возмущениям гравитационного потенциала Φ в системе координат, связанной с хаббловским расширением:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}/a.$$

Здесь \mathbf{u} — физическая скорость; \mathbf{r} — координата; $a(t)$ — масштабный фактор, описывающий общее расширение Вселенной. Точка означает здесь временную производную. В этих переменных эволюция плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ и скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{V} / \partial t + (\mathbf{V} \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{V} / a + \mathbf{V} \dot{a} / a &= - \nabla_{\mathbf{x}} \varphi / a, \\ \Delta \varphi &= 4\pi G a^2 (\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}), \\ \partial \rho / \partial t + 3 \rho \dot{a} / a + \nabla_{\mathbf{x}} (\rho \mathbf{V}) / a &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\bar{\rho}$ — средняя плотность вещества во Вселенной, связанная с масштабным фактором уравнением

$$\dot{a} = -4\pi G \bar{\rho} a / 3.$$

В линейном приближении решение системы (8), описывающее эволюцию слабых флуктуаций, имеет растущую и затухающую моды. Обе эти моды не имеют дисперсии, и, следовательно, возмущения всех пространственных масштабов растут с одинаковой скоростью.

В линейном приближении относительные флуктуации плотности в растущей моде изменяются как

$$\delta = (\rho - \bar{\rho}) / \bar{\rho} \approx b(t),$$

где $b(t)$ — растущее решение уравнения $a\ddot{b} + 2\dot{a}\dot{b} + 3\dot{a}b = 0$. В частности, в космологической модели Эйнштейна—де Ситера с $\Lambda = 0$ и $\Omega = 1$ $a(t) \sim t^{2/3}$ и в возрастающей моде $b(t) \sim t^{2/3}$ (здесь Λ — космологический член и Ω — безразмерная плотность вещества во Вселенной: при $\Omega < 1$ Вселенная открыта и расширяется, а при $\Omega > 1$ она закрыта и расширение Вселенной заменяется ее коллапсом).

Ниже мы будем рассматривать только растущую моду, так как формирование крупномасштабной структуры происходит из-за роста флуктуаций плотности. Координаты частиц в растущей моде изменяются как

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{q}_i + b(t) S_i(\mathbf{q}), \quad (9)$$

где $S = \nabla \Phi_0$ — потенциальное векторное поле, определяющее флуктуации плотности на линейной стадии. При этом эйлеровы координаты \mathbf{x} каждой частицы связываются с ее начальными (лагранжевыми) координатами. На начальной стадии легко найти связь между $\Phi_0(\mathbf{q})$, возмущениями плотности δ и возмущениями гравитационного потенциала

$$\delta = -b \Delta \Phi_0, \quad \varphi = 3\dot{a} b \Phi_0. \quad (10)$$

Приближенное решение Зельдовича [4] предполагает, что решение (9) верно и в начале нелинейной стадии, когда $\delta > 1$. Детальное обсуждение приближения Зельдовича можно найти в обзоре [1]. Отметим лишь, что

решение Зельдовича (9) является точным для одномерных возмущений, пока траектории частиц не пересекаются.

В рамках приближения Зельдовича плотность вычисляется как якобиан преобразования от лагранжевых координат q к эйлеровым x :

$$\eta = \rho a^3 = \eta_0 / |\partial x_i / \partial q_j|. \quad (11)$$

Используя (9), легко найти связь относительных флуктуаций плотности и потенциала Φ_0 :

$$\eta = \eta_0 / |\delta_{ij} + b d_{ij}|, \quad d_{ij} = \partial^2 \Phi_0 / \partial q_i \partial q_j. \quad (12)$$

Приближение (9) позволяет найти ускорение каждой частицы

$$\partial \mathbf{v} / \partial t = (\dot{a}/a - \dot{b}/b) \mathbf{v}. \quad (13)$$

Так как это решение является самосогласованным, то (13) заменяет два первых уравнения системы (8). Вводя новые переменные

$$\eta = \rho a^3, \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}/ab \quad (14)$$

вместо системы (8) из (8), (13) получаем

$$\partial \mathbf{v} / \partial b + (\mathbf{v} \nabla_x) \mathbf{v} = 0, \quad \partial \eta / \partial b + \nabla_x (\eta \mathbf{v}) = 0. \quad (15)$$

Таким образом, в этих переменных первое уравнение описывает "инерционное" движение материи, а (9) и (12) есть решение системы (15) в лагранжевом представлении.

Решение (9), (12) приводит к возникновению резко анизотропных областей повышенной плотности, так называемых блинов [3–6]. Однако сравнение этой аппроксимации с результатами численного моделирования показало, что она предсказывает слишком быстрый рост толщины блинов [5, 6]. Из-за действия гравитации толщина блина растет существенно медленнее, чем это следует из модели Зельдовича. Частицы, попавшие в блин, осциллируют около среднего значения, теряя поступательную скорость. В то же время они двигаются вдоль блинов, формируя в результате филаменты и компактные образования. Так как мы не претендуем на описание внутренней структуры плотности, то эффект "усредненного" торможения частиц может быть описан феноменологически добавлением в правую часть первого уравнения системы (15) эффективной вязкости. Таким образом, вместо (15) мы предлагаем использовать трехмерное уравнение Бюргерса

$$\partial \mathbf{v} / \partial b + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (16)$$

Решение основных уравнений и возникновение структуры. Известно, что одномерное уравнение Бюргерса имеет точное аналитическое решение, что позволяет в предельном случае $\nu \rightarrow 0$ провести достаточно полное описание статистических характеристик случайных полей, удовлетворяющих этому уравнению [11–14]. Аналогичный анализ возможен и в трехмерном случае. Для потенциальных полей скорости решение уравнения (16) имеет точное решение, которое при $\nu \rightarrow 0$ имеет вид

$$\mathbf{V} = (\mathbf{x} - \mathbf{q}(x, t))/b, \quad (17)$$

где \mathbf{q} — координата абсолютного минимума функции

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{q}, b) = \Phi_0(\mathbf{q}) + (\mathbf{x} - \mathbf{q})^2 / 2b. \quad (18)$$

Здесь Φ_0 – потенциал начального поля скорости $V \equiv S = \nabla\Phi_0$. Очевидно, что q – есть один из корней уравнения (16) и, следовательно, $q(x, b)$ – лагранжева координата тех частиц, которые попали в точку x в "момент времени" b , и имеет при этом минимальное действие $G(x, q(x, b), b)$. На начальной стадии, когда решение (9) единственно, решение (17) совпадает с решением (15) и поле скорости непрерывно. Однако позднее, когда уравнение (16) имеет несколько корней, решение (17), (18) "отбирает" только те частицы, которые не попали в особенности. Поле скорости на этой стадии становится разрывным.

Существует удобная графическая процедура, описывающая построение решения (17). Легко видеть, что координаты абсолютного минимума $G(x, q, b)$ совпадают с координатой точки, где параболоид

$$P(x, q, b) = -(x - q)^2/2b + h$$

первый раз касается гиперповерхности $\Phi_0(q)$ при возрастании h . Естественно, что характер касания P и Φ_0 зависит от соотношения между кривизной параболоида (которая равна b^{-1}) и характерной кривизной Φ_0 (которая порядка $b_0 \approx l_0 / \sigma_0$, где l_0 и σ_0 – характерный масштаб и амплитуда начального поля скорости).

Приведем сразу конечный результат формирования поля скорости. При $b \gg b_0$ координата абсолютного минимума $q(x, b)$ становится ступенчатой функцией x : $q(x, b)$ практически постоянна в отдельных областях Σ_i и терпит разрыв на границах этих областей. Согласно (17) поле скорости внутри каждой такой области (ячейки) имеет универсальную структуру

$$V = (x - q_i)/b, \quad x \in \Sigma_i.$$

Здесь q_i – координаты достаточно глубоких минимумов Φ_0 . Если $\Phi_0(q)$ – случайная функция, то ячейки представляют собой случайно ориентированные многогранники. И если b растет, то выживают лишь ячейки с достаточно глубоким минимумом Φ_0 .

Главной задачей, однако, является исследование распределения плотности. Внутри ячейки она легко может быть рассчитана с помощью соотношения (12), так как частицы внутри ячеек не испытывали столкновений. Для того чтобы найти плотность вещества в гранях, ребрах и узлах ячеек, мы предположим, что и при конечных v функция

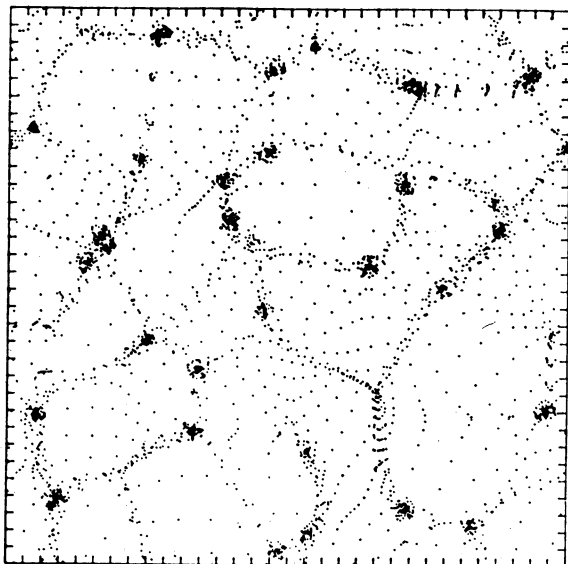
$$q_i(x, b) = x_i - v_i(x, b) b \quad (19)$$

по-прежнему остается лагранжевой координатой и плотность определяется из уравнения (12). При таком определении плотности в уравнении непрерывности появляются дополнительные слагаемые. К примеру, в одномерном случае система исходных уравнений принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial b} + v \frac{\partial v}{\partial x} = v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial x} \eta b = v \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (20)$$

Появление диффузионного слагаемого в уравнении непрерывности оправдано тем, что при постоянной начальной плотности в системе (20) сохраняется полный импульс [17].

Из (9) и (19) можно качественно определить, как распределяется вещество по элементам ячеистой структуры: вещество сосредоточено



Р и с. 3

на гранях ячеек, причем его концентрация больше вдоль ребер ячеек и наиболее велика в узлах ячеек. С течением времени все вещество стремится перейти в узлы, а внутри ячеек плотность вещества уменьшается как $l \approx b^{-3} (\ln b)^{-3/2}$ [15].

Характерная масса вещества в узлах растет из-за их слияния, что соответствует в исходной модели гравитационному сгущиванию галактик [2, 3]. Соответственно растет и характерный масштаб ячеистой структуры. В космологических моделях предполагается известной крупномасштабная асимптотика спектра линейных возмущений плотности $\delta_k^2 \approx k^n$. Из уравнения (10) следует, что спектр флуктуаций начального потенциала Δ_k^2 связан с δ_k^2 соотношением

$$\Delta_k^2 \sim k^{-4} \delta_k^2 \sim k^{n-4}.$$

Предположим также, что спектр обрывается при $k > l_0^{-1}$. Тогда типичный размер ячейки $l(b)$ можно оценить из условия, что абсолютный минимум в (17), (18) может находиться в области, где приращения P и Φ_0 одного порядка. Это приводит к следующему уравнению для $l(b)$:

$$l^2(b) \approx 2b \{ D(l(b)) \}^{1/2}, \quad (21)$$

$$D(x) = \langle (\Phi_0(x) - \Phi_0(0))^2 \rangle.$$

Из (21) следует, что закон роста $l(b)$ зависит от того, ограничена ли дисперсия Φ_0 , и определяется в конечном итоге спектрами начальных флуктуаций плотности. Существует критический индекс n_* , когда закон роста l качественно меняется:

$$l(b) \sim \begin{cases} l_0(b/b_0)^{1/2}, & n > 1, \\ b^{2/(n+3)}, & -1 < n < 1. \end{cases} \quad (22)$$

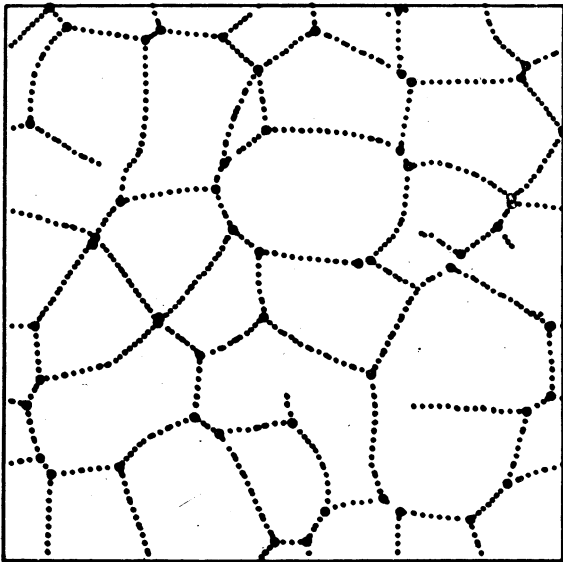


Рис. 4

Используя простую связь $M_l \sim \eta_0 l^3$, можно оценить массу характерного элемента структуры.

Сравнение модели слипающихся частиц с результатами численного моделирования. Сейчас мы кратко приведем сопоставление предложенной аналитической модели с результатами прямого численного моделирования одномерной гравитационной неустойчивости [16].

Если $\delta_k^2(k, b)$ и $v_k^2(k, b)$ — спектры флуктуаций полей плотности и скорости, описываемых системой (20), то для них можно получить простую связь [17]:

$$\delta_k^2(k, b) = k^2 b^2 v_k^2(k, b). \quad (23)$$

Ограничимся здесь случаем, когда $\langle \Phi_0^2 \rangle < \infty$ и $n > 4$. Используя известные результаты о спектре поля скорости [12–14], из (23) можно получить, что нелинейные эффекты приводят к возникновению универсальной асимптотики спектра в области низких частот $\delta_k^2 \sim k^4$. Амплитуда этих гармоник на начальной стадии ($b \ll b_0$) растет как $\delta_k^2 \sim b^4$ и на нелинейной ($b \gg b_0$) — как $\delta_k^2 \sim b^{5/2}$. Кроме того, при $b \gg b_0$ спектр флуктуаций плотности становится автомодельным и определяется единственным масштабом $l(b) \sim b^{1/2}$. Все эти выводы находятся в хорошем согласии с результатами численных экспериментов по моделированию газа бесстолкновительных гравитационно взаимодействующих частиц [16]. Отличия связаны лишь с мелкомасштабной частью спектра: из теории следует, что $\delta_k^2 \sim \text{const}$ при $k > l^{-1}$, а численный эксперимент дает $\delta_k^2 \sim k^{-1}$. Это объясняется тем, что модельная система уравнений плохо описывает внутреннюю структуру областей повышенной плотности. В то же время экспериментально полученное вероятностное распределение масс в этих особенностях [20] достаточно хорошо согласуется с аналитической моделью [17].

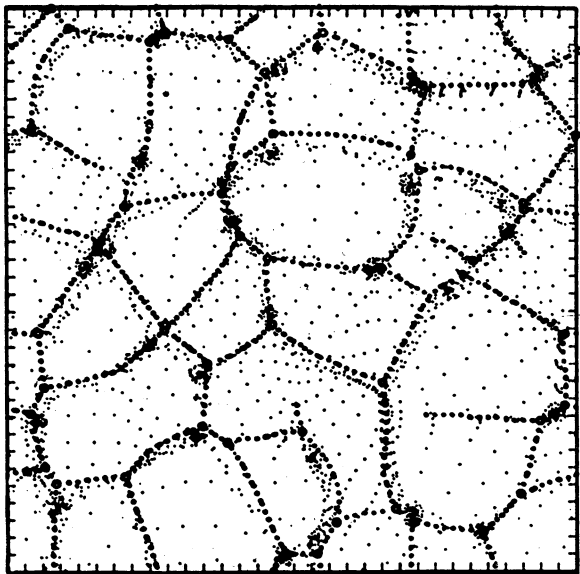


Рис. 5

В заключение мы кратко обсудим результаты сравнения модели слипающихся частиц (при $\nu \rightarrow 0$) с прямым численным моделированием газа гравитационно взаимодействующих частиц в двумерном случае [21].

Численное моделирование проводилось с 64×64 частицами и с периодическими граничными условиями. Начальное возмущение предполагалось гауссовым случайным полем со спектром флуктуации плотности, пропорциональным k^2 , обрезанным в области как низких, так и высоких частот, причем для соответствующих длин волн справедливо соотношение $\lambda_{\min} = \lambda_{\max}/8$. Результаты численного моделирования приведены на рис. 3–5. В момент времени, когда безразмерные флуктуации плотности в линейном приближении равнялись бы $\langle (\delta\rho/\rho)^2 \rangle^{1/2} \approx 6$, эти три рисунка показывают: рис. 3 – распределение частиц, полученное в результате прямого численного моделирования; рис. 4 – границы ячеек, полученные на основе асимптотического решения уравнения Бюргера (17), (18) с теми же самыми начальными условиями, что и прямое моделирование (большие точки показывают положение стенок ячеек, а кружки – их узлы); рис. 5 – комбинация этих рисунков и простое их наложение. Небольшое отличие в положении особенностей, полученное в этих двух подходах, связано скорее всего с ошибками численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шандарин С.Ф., Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б. Крупномасштабная структура Вселенной // УФН, 1983, Т. 139, № 1. С. 83–134.
2. Пиблс Ф.Дж.Э. Структура Вселенной в больших масштабах, М.: Мир, 1983, 408 с.
3. Shandarin S.F., Zeldovich Ya.B. Turbulence, intermittency in self-gravitating medium: The large scale structure of the Universe // Rev. Mod. Phys. 1989. Vol. 61.

4. *Зельдович Я.Б.* Распад однородного вещества на части под действием тяготения // *Астрофизика*. 1970. Т. 6, № 2. С. 319–335.
5. *Doroshkevich A.G., Kotok E.V., Shandarin S.F., Sigov Yu.S.* Analysis of the large-scale structure of the Universe // *Month. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1983. Vol. 202. P. 537–552.
6. *Klypin A.A., Shandarin S.F.* // *Month. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1983. Vol. 204. P. 891.
7. *Melott A., Shandarin S.F.* Gravitational instability with high resolution // *Astrophys. J.* 1989. Vol. 343. P. 26.
8. *Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Шандарин С.Ф.* Модельное описание развития крупномасштабной структуры Вселенной // *ДАН СССР*. 1985. Т. 285, № 2. С. 323–327.
9. *Kofman L.A., Shandarin S.F.* Theory of sticking for large-scale structure of the Universe // *Nature*. 1989. Vol. 334. P. 129–134.
10. *Gurbatov S.N., Saichev A.I., Shandarin S.F.* The large-scale structure of the Universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion // *Month. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1989. Vol. 236. P. 385–405.
11. *Burgers J.M.* The nonlinear diffusion equation. Dordrecht: Reidel, 1974.
12. *Kida Sh.* Asymptotic properties of Burgers turbulence // *J. Fluid Mech.* 1979. Vol. 93, N 2. P. 337–377.
13. *Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Якушкин И.Г.* Нелинейные волны и турбулентность в средах без дисперсии // *УФН*. 1983. Т. 141, № 2. С. 221–255.
14. *Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.* Нелинейные случайные волны в недиспергирующих средах. М.: Наука, 1990. 216 с.
15. *Гурбатов С.Н., Саичев А.И.* Вероятностное распределение и спектры потенциальной гидродинамической турбулентности // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1984. Т. 27, № 4. С. 456–468.
16. *Коток Э.В., Шандарин С.Ф.* Нелинейная гравитационная неустойчивость. Рост возмущений разных масштабов в одномерном случае // *Астрон. журн.* 1988. Т. 65, № 4. С. 673–681.
17. *Гурбатов С.Н., Саичев А.И.* Одномерная турбулентность в вязком политропном газе // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1988. Т. 31, № 12. С. 1451–1463.
18. *Pestorius F.M., Blackstock D.T.* Propagation of finite amplitude noise // *Finite wave effect in fluids: Proc. 1973 Symp. Copenhagen*, 1974. P. 22–24.
19. *Бьерно Л., Гурбатов С.Н.* Об установлении высокочастотных асимптотик при распространении интенсивного акустического шума // *Акуст. журн.* 1985. Т. 31, № 3. С. 303–308.
20. *Дорошкевич А.Ф., Коток Э.В.* Образование галактик в модели последовательного сгущивания: Препр. ИПМ АН СССР № 137. М., 1988. 30 с.
21. *Pogosyan D.Yu.* The 2D numerical code for the large-scale structure of the Universe in the adhesion model: Prepr. AN ESSR A–7. Tartu, 1989.

ГЕНЕРАЦИЯ НАБЛЮДАЕМОГО СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ И УЕДИНЕННЫХ ДИПОЛЬНЫХ ВИХРЕЙ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ

В.В. ДОЛОТИН, А.М. ФРИДМАН

1. ВВЕДЕНИЕ

Аналогия между основными уравнениями для кулоновски взаимодействующих частиц в магнитном поле — уравнениями Больцмана—Власова — и основными уравнениями для ньютоновски взаимодействующих частиц — кинетическим уравнением (во вращающейся системе координат) и уравнением Пуассона — послужила основой создания теории устойчивости гравитирующих систем [1–3]. В последней широко используются методы развитой теории коллективных процессов в физике плазмы. Если основы линейной теории устойчивости гравитирующих систем можно считать построенными¹, то фундамент теории нелинейных волн [8–10] и турбулентности [11] начал закладываться сравнительно недавно. При этом до сих пор нелинейная теория развивалась лишь для модели бесконечно тонкого гравитирующего диска, т. е. для случая крупномасштабных возмущений, с размерами, намного превосходящими толщину диска. В этих первых работах были исследованы джинсовские возмущения конечной амплитуды и впервые показано, что они могут распространяться в виде солитонов огибающей [8, 10]. Была построена теория слабой джинсовской турбулентности [11] аналогично [12] и получен спектр $E_k \sim k^{-7/4}$, практически совпадающий с "собственно" колмогоровским [13, 14]².

В многочисленных наблюдательных исследованиях спектра турбулентности газовой компоненты Галактики последних лет (см., например, [15]) отмечается отличие его от собственно колмогоровского. Так, зависимость скорости центра газового сгущения v от его размера l оказывается [15]

$$v \propto l^{0,5},$$

а соответственно для плотности газа ρ наблюдения дают [15]

$$\rho \propto l^{-1}, \tag{2}$$

Отклонения от собственно колмогоровского спектра ($v \sim e^{1/3}$) превосходят ошибки наблюдений настолько, что наблюдатели уверенно говорят о спектре, отличном от полученного в [13, 14]. Более того, в ряде теоретических работ взамен гипотезы о постоянстве потока энергии по спектру [13, 14] предлагаются другие. Так, в [16] предложены две "фундаментальные гипотезы": 1) постоянство по спектру потока момента вращения

¹ Кроме создания теории устойчивости, одиночных фигур вращения [1–6] большие успехи имеются и в построении линейной теории вложенных фигур вращения [7].

² Следуя [12], под колмогоровским спектром будем понимать любой степенной спектр турбулентности. "Собственно" колмогоровским будем называть спектр $E_k \sim k^{-5/3}$, полученный в [13, 14] из размерности оценок с использованием предположения о постоянстве потока энергии по спектру.

газовых сгущений; 2) совпадение характерного времени перемещения сгущения газа с джинсовским временем, что совместно приводит к постоянству давления $p(l) \equiv \rho(l)v_l^2 = \text{const}$. При этом авторы [16] отождествляют наблюдаемую зависимость (1) со спектром $E_k \sim k^{-1}$, замечая, что он "более пологий, чем колмогоровский $E_k \sim k^{-5/3}$ ". Не касаясь "двух фундаментальных гипотез" авторов [16], отметим ошибочность их последних выводов, состоящую в том, что вместо используемого авторами [16] соотношения $E_k \sim v_k^2$ следует писать [17] $\int_k^\infty E_k dk \propto v_k^2$, откуда имеем спектр [18]

$$E_k \propto k^{-2}, \quad (3)$$

более крутой, чем собственно колмогоровский [13, 14]. Ниже мы покажем, как получается спектр (3) из исходных уравнений гидродинамики для вращающейся гравитирующей сжимаемой среды в рамках теории слабой турбулентности. При этом мы ограничимся выводом нелинейного уравнения (пренебрегая членами третьего порядка малости по амплитуде возмущений), откуда в двух предельных случаях ($\lambda \gg \lambda_J$, $\lambda \ll \lambda_J$, λ_J — джинсовский масштаб возмущений) получим нелинейные уравнения соответственно для гравитационного потенциала ψ и плотности ρ .

Прежде всего остановимся на нелинейном уравнении для гравитационного потенциала ψ . Оно содержит так называемую [19] векторную нелинейность и известно в гидродинамике как уравнение Чарни—Обухова [20–22], а в физике плазмы как уравнение Хасегавы—Мима [23]. В линейном приближении это уравнение описывает *гравитирующие волны Россби* [24]. "Гравитирующими" мы предлагаем их называть потому, что в отличие от их аналогов в гидродинамике — волн Россби [25–27]³ — и в физике плазмы — дрейфовых волн [29, 30] — существование гравитирующих волн Россби обязано возмущенному гравитационному потенциалу. Полученное нами уравнение для нелинейных гравитирующих волн Россби описывает как турбулентные пульсации, так и стационарные уединенные дипольные вихри. Известными методами теории слабой турбулентности (т. е. с помощью кинетического уравнения для волн, см., например, [31]) аналогичное нашему нелинейное уравнение Чарни—Обухова (или Хасегавы—Мима) было исследовано в [32] и получен спектр турбулентности. Здесь мы воспользовались этим спектром и показали, что он соответствует спектру (3) и определяет не только наблюдаемые соотношения (1), (2), но и солитеровский спектр звезд по массам [33]:

$$n \propto m^{-1,5}, \quad (4)$$

где n — число звезд в единице объема с массами от m до ∞ . Стационарное решение полученного здесь нелинейного уравнения для гравитирующих волн Россби описывает уединенные дипольные вихри. Это решение аналогично полученному в [34] для дипольных вихрей в несжимаемой жидкост-

³ Эти волны были исследованы Маргулисом в 1893 г., а позднее рядом авторов до опубликования работы Россби (ссылки см. в [28]). Впервые об одинаковом законе дисперсии у волн Россби и дрейфовых волн один из авторов этой работы (А. М. Ф.) услышал от М. А. Леонтовича в августе 1965 г., задолго до публикации работ японских авторов на эту тему (см. также [28]).

ти на β -плоскости. Ниже доказана единственность полученного в [34] решения при обычно выполняющихся условиях в реальных системах и предположении о круговой форме сепаратрисы дипольного вихря (см. также [42]).

Второе полученное в работе нелинейное уравнение для плотности ρ аналогично первому (для потенциала ψ) – оно также содержит векторную нелинейность.

Образование уединенных дипольных вихрей в среде, описываемой уравнением с одной векторной нелинейностью, естественно. Исключение составляет рассмотренный в [35] случай одного вихря, когда центр последнего расположен на линии тангенциального разрыва скорости при наличии двух встречных потоков. Как справедливо отмечают авторы [35], если направление одного из потоков изменить на противоположное так, чтобы в соответствии с [34] общий поток стал однородным, направление вращения в половине вихря также обратится. В результате получим дипольный вихрь [34]. Описание возможных наблюдательных проявлений дипольно-вихревых структур в астрономии можно найти в заключении.

Здесь следует обратить внимание прежде всего на парные астрономические объекты: двойные звезды, двойные ядра в галактиках, двойные галактики. Казалось бы, сценарии происхождения этих систем должны отличаться лишь пространственными масштабами и первоначальными газовыми массами, каждая из которых при вращении эволюционирует в два объекта. Действительно, согласно современной точке зрения именно так образовалось подавляющее большинство двойных звезд. Однако демонстрации на компьютерах актов слияния одиночных галактик в пары послужили причиной к формулировке противоположного сценария образования двойных галактик (и, следовательно, двойных ядер галактик). Видимо, во Вселенной реализуются два вида сценариев образования двойных систем: путем деления и путем захвата. Вероятность последнего процесса нетрудно оценить, зная плотность одиночных объектов, их средние массы и peculiarные скорости. Видимо, будущая оценка подтвердит точку зрения авторов этой статьи, что большинство из названных выше видов двойных объектов образовалось путем деления. Один из вариантов зарождения во вращающемся газовом облаке двойной системы (двойного ядра) в виде векторного диполя (модона) описан в данной работе.

План статьи предлагается следующим. В разд. 2 сформулирована постановка задачи. В разд. 3 дан вывод основных нелинейных уравнений. В разд. 4 ищутся стационарные решения двух нелинейных уравнений, полученных из основного в предельных случаях: $\lambda \gg \lambda_J$ и $\lambda \ll \lambda_J$. При этом, как уже отмечалось, оба уравнения (для ψ и ρ) оказываются совпадающими, что облегчает анализ. Здесь же доказана единственность полученного решения, описывающего уединенные дипольные вихри. В разд. 5 представлен спектр слабой турбулентности. В разд. 6 обсуждаются возможные астрофизические приложения.

2. МОДЕЛЬ. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим твердотельно вращающуюся ($\Omega_0 = \text{const}$), неоднородную по плотности ($\rho'_0 \neq 0$), гравитирующую систему. (Стационарные величины будем отмечать индексом 0, штрих означает дифференцирование по радиальной координате r .) Именно так устроены центральные части галактик и многие политропные вращающиеся газовые конфигурации [36].

Основными уравнениями являются уравнения гидродинамики во вращающейся с угловой скоростью Ω_0 системе координат [17] и уравнение Пуассона:

$$d\tilde{v}_\perp/dt = 2[\tilde{v}_\perp, \mathbf{\Omega}_0] - \nabla_\perp \tilde{\chi}, \quad (5)$$

$$d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \tilde{v}_\perp = 0, \quad (6)$$

$$\Delta_\perp \psi = 4\pi G\rho, \quad (7)$$

где

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\tilde{v}_\perp, \nabla_\perp), \quad \Delta_\perp \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (8)$$

любая функция

$$\psi(r, \varphi, t) = \psi_0(r) + \tilde{\psi}(r, \varphi, t). \quad (9)$$

При написании уравнения (5) было использовано условие равновесия системы по r (в предположении, что $\mathbf{\Omega}_0 \parallel OZ$):

$$\Omega_0^2 r = \partial \chi_0 / \partial r. \quad (10)$$

Функция χ введена следующим образом (остальные обозначения общеприняты [17]):

$$\partial \chi / \partial x_i = \partial \psi / \partial x_i + \rho^{-1} \partial p / \partial x_i. \quad (11)$$

Предполагая газ баротропным ($\rho = \rho(p)$), последнее слагаемое в (11) можно представить в виде

$$\rho^{-1}(p) \partial p / \partial x_i = \partial f(p) / \partial x_i, \quad (12)$$

где функция $f(p)$ определяется из уравнения

$$df(p)/dp = 1/\rho(p)$$

Окончательно из (11), (12) имеем

$$\chi = \psi + f(p). \quad (13)$$

Как следует из формы записи основных уравнений, мы ограничились рассмотрением двумерных возмущений, лежащих в плоскости (r, φ) , поперечной к оси вращения OZ .

3. ВЫВОД ОСНОВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Умножив уравнение (5) векторно на $\mathbf{e}_z \equiv \Omega_0/\Omega_0$, найдем

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\perp} = \tilde{\mathbf{v}}_{\chi} + \tilde{\mathbf{v}}_I', \quad (14)$$

где

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\chi} \equiv (2\Omega_0)^{-1} [\mathbf{e}_z, \nabla_{\perp} \tilde{\chi}], \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_I' \equiv (2\Omega_0)^{-1} [\mathbf{e}_z, d\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}/dt]. \quad (16)$$

Подставляем в (16) выражение (14) для $\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}$:

$$\tilde{\mathbf{v}}_I' \equiv \frac{1}{4\Omega_0^2} \left[\mathbf{e}_z, \frac{d}{dt} [\mathbf{e}_z, \nabla_{\perp} \tilde{\chi}] \right] + \frac{1}{4\Omega_0^2} \left[\mathbf{e}_z, \frac{d}{dt} \left[\mathbf{e}_z, \frac{d\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}}{dt} \right] \right].$$

Подставляя в последнее слагаемое выражение (14), видим, что оно оказывается $\sim \Omega_0^{-3}$. Опускаем это слагаемое, поскольку интересуемся лишь "медленными" движениями ($\Omega_0^{-1} d/dt \ll 1$). Заметим, что

$$|\tilde{\mathbf{v}}_I'/\tilde{\mathbf{v}}_{\chi}| \sim d/\Omega_0 dt \ll 1, \quad (17)$$

следовательно,

$$d/dt \approx \partial/\partial t + (\tilde{\mathbf{v}}_{\chi}, \nabla_{\perp}) \equiv d_0/dt, \quad (18)$$

откуда

$$\tilde{\mathbf{v}}_I = \frac{1}{4\Omega_0^2} [\mathbf{e}_z, \frac{d_0}{dt} [\mathbf{e}_z, \nabla_{\perp} \tilde{\chi}]]. \quad (19)$$

Воспользовавшись (15), (19), вычислим $\text{div} \tilde{\mathbf{v}}_{\chi}$ и $\text{div} \tilde{\mathbf{v}}_I$:

$$\text{div} \tilde{\mathbf{v}}_{\chi} = 0, \quad (20)$$

$$\text{div} \tilde{\mathbf{v}}_I = -\frac{1}{4\Omega_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\Omega_0} [\nabla_{\perp} \tilde{\chi}, \nabla_{\perp}]_z \right) \nabla_{\perp} \tilde{\chi}. \quad (21)$$

Подставляя (20), (21) в уравнение непрерывности (6) и воспользовавшись уравнением Пуассона (7), окончательно получаем *основное нелинейное уравнение*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\Omega_0} [\nabla_{\perp} \tilde{\chi}, \nabla_{\perp}]_z \right) \Delta_{\perp} \tilde{\psi} - \frac{(\omega_0^2)'}{2\Omega_0} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \varphi} - \frac{\omega_0^2}{4\Omega_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\Omega_0} [\nabla_{\perp} \tilde{\chi}, \nabla_{\perp}]_z \right) \Delta_{\perp} \tilde{\chi} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\omega_0^2 \equiv 4\pi G \rho_0$ – квадрат джинсовской частоты, $(\omega_0^2)' \equiv d\omega_0^2/dr$.

Рассмотрим последовательно два противоположных предельных случая:

1) $\tilde{\psi} \gg f$, 2) $\tilde{\psi} \ll f$.

1) $\tilde{\psi} \gg f$: Этот случай соответствует наличию в системе длинноволновых возмущений ($\lambda \gg \lambda_J$, λ , – джинсовская длина волны), что возможно лишь для достаточно сплюснутых вдоль оси вращения конфигураций ($h \ll R$, где h , R – толщина и радиус системы соответственно), так как $\lambda_J \sim h$ [2].

Уравнение (22) при условии 1) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\Omega_0} [\nabla_{\perp} \tilde{\psi}, \nabla_{\perp}]_z \right) \Delta_{\perp} \tilde{\psi} + \frac{1}{\alpha - 2} \frac{\omega_0'^2}{\Omega_0} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varphi} = 0, \quad (23)$$

где

$$\alpha \equiv \omega_0'^2 / 2\Omega_0^2. \quad (24)$$

Заметим, кстати, что в частном случае однородного по плотности холодного цилиндра, вращающегося с угловой скоростью Ω_0 , $\alpha = 1$ [1].

Исследуем линейное приближение уравнения (23). Полагая

$$\tilde{\psi}(r, \varphi, t) \sim \exp[i(k_r r + m\varphi - \omega t)], \quad (25)$$

получим

$$\omega = -\frac{1}{\alpha - 2} \frac{\omega_0'^2}{\Omega_0} \frac{k_{\varphi}}{k_{\perp}^2}, \quad k_{\varphi} \equiv m/r, \quad k_{\perp}^2 \equiv k_r^2 + k_{\varphi}^2, \quad (26)$$

выражение для частоты гравитирующих волн Россби. Поскольку в реальных системах $\omega_0'^2 \sim \rho_0' < 0$, то направление азимутальной компоненты фазовой скорости гравитирующих волн Россби зависит от знака величины $(\alpha - 2)$: при $\alpha - 2 > 0$ – в сторону вращения (на "восток"), при $\alpha - 2 < 0$ – на "запад". Необходимое условие (17) выполняется либо в случае анизотропного спектра $k_{\varphi} \ll k_r$, либо в случае, когда гравитирующий диск находится на границе гравитационной неустойчивости (для галактических, протопланетных дисков [1, 37], а также некоторых колец планет [6] это обычно выполняется).

2) $\psi \ll f$. Это условие более универсально, чем предыдущее, поскольку справедливо для коротковолновых пульсаций $\lambda \ll \lambda_J$, существующих в системах любой геометрии. Очевидно, что турбулентность в газовых облаках могут создавать только такие возмущения с $\lambda \ll \lambda_J$. В α -модели аккреционного диска [38, 39] таким возмущениям $\lambda \ll h \sim \lambda_J$ приписывается основная роль в создании турбулентной вязкости.

Уравнение (22) при условии 2) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\Omega_0} [\nabla_{\perp} \tilde{f}, \nabla_{\perp}]_z \right) \Delta_{\perp} \tilde{f} + 2\Omega_0 \frac{\rho_0'}{\rho_0} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} = 0. \quad (27)$$

В линейном приближении, полагая \tilde{f} в виде (25), из (27) получим

$$\omega = -2\Omega_0 (k_{\varphi}/k_{\perp}^2) \ln' \rho_0 \quad (28)$$

вновь выражение для частоты волн Россби. Заметим, что поскольку в реальных объектах $\ln' \rho_0 < 0$, то азимутальная компонента фазовой скорости (коротковолновых) волн Россби во вращающихся гравитирующих системах направлена в сторону вращения (на "восток").

Для определения знака разности $\alpha - 2$ вдоль экваториального радиуса вращающегося газового облака в [76] был рассчитан ряд моделей вращающихся осесимметричных политроп для значений индекса политропы $n = 0.5; 1.0; 1.5$. Распределение $\alpha - 2$ оказалось зависящим только от n

и от отношения угловой скорости вращения Ω_0 к критической Ω_{cr} (т. е. к предельно большой скорости вращения, при которой эффективная сила тяжести на экваторе падает до нуля: при превышении критической скорости вращения начинается истечение вещества с экватора [37]). В [76] показано, что всегда существует радиус r_0 , на котором происходит смена знака величины $\alpha - 2$, причем $\alpha - 2 > 0$ во внутренней области облака при $r < r_0$, во внешней области $\alpha - 2 < 0$. Величина r_0/R (где R – радиус облака) есть, монотонно убывающая функция отношения Ω_0/Ω_{cr} . При $(\Omega_0/\Omega_{cr})_{max} = 1$ имеем $r_0/R = 0,83; 0,73; 0,63$ (для $n = 0,5; 1,0; 1,5$ соответственно). При $\Omega_0/\Omega_{cr} < 1$ значения r_0/R больше соответствующих значений, приведенных выше. Таким образом, можно заключить, что только сравнительно узкий периферийный сферический слой характеризуется отрицательным параметром $\alpha - 2$, большая часть облака имеет $\alpha - 2 > 0$. Следовательно, направление азимутальной компоненты фазовой скорости гравитирующих (длинноволновых, $\lambda \gg \lambda_j$) волн Россби (26) внутри облака не остается постоянным, а вблизи периферии изменяется на противоположное. В узкой (периферической) части облака азимутальная компонента фазовой скорости гравитирующих (длинноволновых, $\lambda \gg \lambda_j$) волн Россби (26) направлена на "запад", а в основной (центральной) части облака – на "восток". Аналогичное направление (на "восток") имеют коротковолновые ($\lambda \ll \lambda_j$) волны Россби (28). Выражение для планетарных волн Россби на β -плоскости [28] совпадает с выражениями (26) и (28), если в последних вместо градиента плотности подставить более общее выражение β (см. [28]).

Как мы видим, уравнения (23) и (27), полученные из основного уравнения (22) в двух противоположных предельных случаях ($\lambda \gg \lambda_j$ и $\lambda \ll \lambda_j$), совпадают с точностью до коэффициентов.

4. УЕДИНЕННЫЕ ДИПОЛЬНЫЕ ВИХРИ

В уравнениях (23), (27) проделаем ряд преобразований независимых переменных. Прежде всего перейдем в локальную декартову систему координат

$$\partial/\partial r \equiv \partial/\partial x, \quad r^{-1} \partial/\partial \varphi \equiv \partial/\partial y. \quad (29)$$

Пусть теперь в системе трех переменных x, y, t две последние оказываются связанными следующим соотношением: $y = \eta + ut$. В такой системе двух независимых переменных (пусть это будут x и $\eta = y - ut$) уравнения (23), (27) примут вид

$$\hat{D}(\xi_i) \Delta_{\perp} \xi_i = \Lambda_i \partial \xi_i / \partial \eta, \quad i = 1, 2, 3. \quad (30)$$

Здесь введены обозначения:

$$\hat{D}(\xi_i) \equiv -\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{U_i} [\nabla_{\perp} \xi_i, \nabla_{\perp}]_z; \quad (31)$$

$$\xi_1 \equiv \tilde{\psi}, \quad U_1 \equiv 2u\Omega_0, \quad \Lambda_1 \equiv -2\omega_0^2 / [(\alpha - 2)U_1], \quad (32)$$

$$\xi_2 \equiv \tilde{\xi}, U_2 \equiv 2u\Omega_0, \Lambda_2 \equiv -\frac{4\Omega_0^2}{U_2} \frac{\rho'_0}{\rho_0}. \quad (33)$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (30) может быть записано в виде

$$J(\xi_i - U_i x, \Delta_{\perp} \xi_i + U_i \Lambda_i x) = 0, \quad (34)$$

где J – якобиан. Последнее уравнение может быть представлено так:

$$\Delta_{\perp} \xi_i + \Lambda_i U_i x = F(\xi_i - U_i x), \quad (35)$$

где F – произвольная функция.

Нас интересуют лишь локализованные решения, т. е. $\xi_i \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$ при любом x . В окрестности бесконечно удаленной точки по η , $\eta \rightarrow \infty$, из (35) имеем

$$F(-U_i x) = \Lambda_i U_i x$$

при любом x . Следовательно, функция F в (35) должна быть линейной функцией в достаточно удаленной от точки $x = \eta = 0$ области. Выберем эту функцию линейной во всей плоскости (x, η) :

$$\Delta_{\perp} \xi_i + U_i \Lambda_i x = -k^2 (\xi_i - U_i x), r < a, \quad (36)$$

$$\Delta_{\perp} \xi_i + U_i \Lambda_i x = p^2 (\xi_i - U_i x), r > a, \quad (37)$$

где $k > 0$, $p > 0$. Смысл разбиения области x, η на внутреннюю и внешнюю части круга радиуса a с центром в точке $x = \eta = 0$ поясним позже.

Введя полярные координаты r, φ ($x = r \cos \varphi$, $\eta = r \sin \varphi$) вместо (36), (37), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right) \xi_i = U_i (k^2 - \Lambda_i) r \cos \varphi, r < a, \quad (38)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - p^2 \right) \xi_i = 0, r > a. \quad (39)$$

Последнее уравнение оказывается однородным, поскольку мы обязаны потребовать $\xi_i \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Из этого условия находим

$$p^2 = -\Lambda_i. \quad (40)$$

Общее решение уравнения (38) ищем в виде (здесь и ниже индекс i будем опускать) $\xi = \tilde{\xi} + \xi^*$, где ξ^* – частный интеграл, $\tilde{\xi}$ – общее решение однородного уравнения, которое хорошо известно:

$$\tilde{\xi}(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos m \varphi + B_m \sin m \varphi) J_m(kr), r < a.$$

Частный интеграл неоднородного уравнения (38) ищем в виде

$$\xi^* = r(a \sin \varphi + b \cos \varphi). \quad (41)$$

Подставив (41) в (38), получим

$$a = 0, b = U(1 - \Lambda/k^2). \quad (42)$$

Окончательно находим общее решение уравнения (38):

$$\xi_I = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) J_m(kr) + U(1 - \Lambda/k^2)r \cos\varphi, \quad r < a, \quad (43)$$

где $J_m(z)$ – функция Бесселя действительного аргумента.

Общее решение уравнения (39) имеет вид

$$\xi_{II} = \sum_{m=0}^{\infty} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi) K_m(pr), \quad r > a, \quad (44)$$

где $K(z)$ – функция Макдональда.

В уравнения непрерывности и движения входят первые производные от ρ и v по r , которые при $r = a$ должны быть непрерывны. Из (5)–(7) и (15) следует, что непрерывными должны быть ξ и ее первые две производные по r^4 . Именно поэтому уравнения (36), (37) можно записать так:

$$F(\xi, \xi'_r, \xi''_{rr}, \xi''_{\varphi\varphi}, r, \varphi) = \begin{cases} -k^2 f(r, \varphi), & r < a; \\ p^2 f(r, \varphi), & r > a, \end{cases} \quad (45)$$

что слева и справа стоят одинаковые функции F и f , непрерывные в точке $r = a$. Поэтому, вычитая первое уравнение из второго, получим в точке $r = a$

$$(p^2 + k^2)f(a, \varphi) = 0. \quad (46)$$

Так как ранее мы потребовали $p > 0, k > 0$, то из (46), (36), (37) имеем

$$(\xi - Ux)|_{r=a} = 0,$$

или

$$\xi_I(a, \varphi) = \xi_{II}(a, \varphi) = Ua \cos\varphi.$$

Подставляя сюда найденные решения (43), (44), находим, что $B_m = D_m = 0$ при всех m ; $A_m = C_m = 0$ для всех m , кроме $m = 1$:

$$A_1 = U\Lambda a/k^2 J_1(ka), \quad C_1 = Ua/K_1(pa).$$

Итак, окончательно имеем

$$\xi = \begin{cases} \Omega_0 au \left[\frac{r}{a} + \frac{\Lambda}{k^2} \left(\frac{J_1(kr)}{J_1(ka)} - \frac{r}{a} \right) \right] \cos\varphi, & r < a; \\ \Omega_0 au \frac{K_1(pr)}{K_1(pa)} \cos\varphi, & r > a. \end{cases} \quad (47)$$

Здесь мы воспользовались тем, что согласно (33) $U_2 = \Omega u$. Тем самым (47) описывает $\tilde{\xi}_2$; $\tilde{\xi}_1$ отличается множителем $(\alpha - 2)/(\alpha - 1)$.

⁴ В этом состоит отличие гравитирующей сжимаемой среды с $\Delta_1 \varphi = 4\pi G\rho$ от случая несжимаемой негравитирующей жидкости [34], где вторая производная (завихренность) может иметь конечный разрыв.

Из (14) имеем $v_{\perp} = v_{\chi} + v_1$ (здесь и ниже знак "тильда" у v для простоты опускаем). Из (17): $|v_{\chi}| \gg |v_1|$, следовательно, $v_{\perp} \approx v_{\chi}$. Из (15): $v_{\chi} = [\mathbf{e}_z, \nabla_{\perp} \chi] / 2\Omega_0$, т. е.

$$v_r = -\frac{1}{2\Omega_0 r} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \varphi}, \quad v_{\varphi} = \frac{1}{2\Omega_0} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial r}. \quad (48)$$

Пусть R — характерный масштаб изменения стационарных параметров (размер системы) в направлении, поперечном оси вращения и $a/R \ll 1$. Тогда в решении (47) величину Λ можно считать постоянной с точностью до $a/R \ll 1$ и из (48), (47) имеем

$$2v_z = \begin{cases} \left[1 - \frac{\Lambda}{k^2} \left(1 - \frac{a}{r} \frac{J_1(kr)}{J_1(ka)} \right) \right] u \sin \varphi, & r < a, \\ \frac{a}{r} \frac{K_1(pr)}{K_1(pa)} u \sin \varphi, & r > a; \end{cases} \quad (49)$$

$$2v_{\varphi} = \begin{cases} \left[1 - \frac{\Lambda}{k^2} \left(1 - ka \frac{J_1'(kr)}{J_1(ka)} \right) \right] u \cos \varphi, & r < a, \\ pa \frac{K_1'(pr)}{K_1(pa)} u \cos \varphi, & r > a. \end{cases} \quad (50)$$

Как следует из (49), непрерывность v_r при $r = a$ выполняется автоматически. Непрерывность v_{φ} при $r = a$ выполняется в тех точках $z_0 \equiv ka$, которые являются корнями следующего уравнения (вспомним, что p фиксировано: $p^2 = -\Lambda$):

$$\frac{s_0}{z_0} \left(1 - z_0 \frac{J_1'(z_0)}{J_1(z_0)} \right) = s_0 \frac{K_1'(s_0)}{K_1(s_0)} - 1.$$

Здесь введено обозначение $s_0 \equiv pa$. После элементарных преобразований получим [19]

$$(s_0/z_0)K_1(s_0)J_2(z_0) = -J_1(z_0)K_2(s_0), \quad (51)$$

или $K_1(s_0)J_3(z_0) + J_1(z_0)K_3(s_0) = 0$.

Это уравнение имеет счетное множество положительных корней $z_{0n} = z_{0n}(s_0)$, $n = 1, 2, \dots$. Первые три корня ($n = 1, 2, 3$) зависимости $z_{0n} = z_{0n}(s_0)$ показаны на рис. 1 [40].

Исследуем структуру векторного поля v_{\perp} . С этой целью вычислим $\text{rot}_z v_{\perp}$ при $r < a$. Подставим в формулу $\text{rot}_z v_{\perp} = r^{-1} \partial(rv_{\varphi})/\partial r - r^{-1} \partial v_r/\partial \varphi$ выражения для v_r и v_{φ} из (49), (50) при $r < a$. В результате получим

$$\text{rot}_z v_{\perp} = \frac{\Lambda a}{2J_1(ka)} \left[J_1''(kr) + \frac{1}{kr} J_1'(kr) - \frac{1}{k^2 r^2} J_1(kr) \right] u \cos \varphi,$$

или после упрощения

$$\text{rot}_z v_{\perp} = -\frac{1}{2} \Lambda a [J_1(kr)/J_1(ka)] u \cos \varphi, \quad r < a. \quad (52)$$

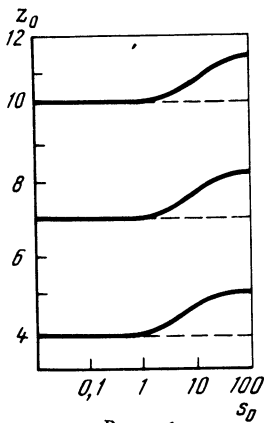


Рис. 1

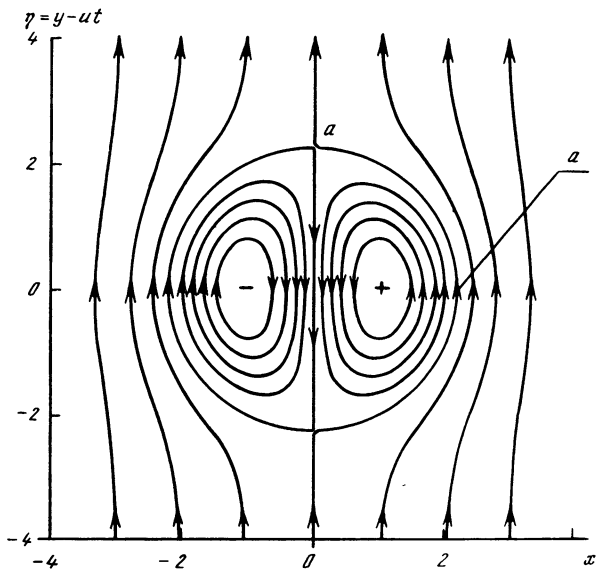


Рис. 2

Из формулы (52) следует, что $\text{rot}_z v_1$ меняет знак при изменении r внутри круга радиуса a , $r < a$, в точках, где $J_1(kr) \equiv J_1(z) = 0$. Корни последнего уравнения [41] $z_n \approx 4, 7, 10, \dots$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Так как $r < a$, то $z < z_0$. Из рис. 1 видно, что $z_{01} < 7$, следовательно, для $J_1(kr)$ при $r < a$ может реализоваться только одна смена знака $z = z_1$. Это соответствует структуре, изображенной на рис. 2. Заметим, что совместность уравнения (40) и условия $p > 0$ возможна для $\Lambda_i = \Lambda_1$ при $u > 0$, если $\alpha < 2$, и $u < 0$, если $\alpha > 2$; для $\Lambda_i = \Lambda_2$ при $u < 0$. При этих условиях структура, изображенная на рис. 2, представляет собой уединенный дипольный вихрь (модон). Его еще называют изолированным, поскольку амплитуда этого вихря падает при $r > a$ экспоненциально (так как описывается функцией Макдональда K_1). Для рассмотрения обратных случаев: $\Lambda_i = \Lambda_1$ при $u < 0$, если $\alpha < 2$, и $u > 0$, если $\alpha > 2$, и $\Lambda_i = \Lambda_2$ при $u > 0$ в уравнении (37) следует изменить знак перед правой частью:

$$\Delta_1 \xi + U \Lambda x = -p^2 (\xi - Ux), r > a \quad (37a)$$

Решение этого уравнения зависит уже не от функции Макдональда K_1 , а от цилиндрической функции 2-го рода (ее называют функцией Неймана N_1 или функцией Вебера Y_1), затухающей $\sim r^{-1/2}$ при $r \rightarrow \infty$. Такое решение было известно давно [26, 27]; в этом случае дипольный вихрь ведет себя не как изолированный вихрь [28], а как дальнедействующий "силовой центр" (ср. с дипольным вибратором Герца).

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний. Во-первых, обратим внимание, что полученное нами решение (47) является единственным решением уравнений (36), (37), которое получено из общих решений (43), (44) путем их сшивания на окружности радиуса a при

условии непрерывности функций и ее первых производных⁵. Во-вторых, теперь понятна причина разбиения всей плоскости (x, η) на две области: I ($r < a$) и II ($r > a$). Доказанная [40] из условия финитности решения линейная зависимость функций $\xi_i - v_x$ и $\Delta_{\perp} \xi_i + U \Lambda_i x$ определяет некоторое уравнение для цилиндрических функций. Поскольку общее решение этого уравнения обращается в бесконечность либо в точке $r = 0$, либо при $r \rightarrow \infty$, то, требуя ограниченности решения на всей плоскости, мы вынуждены разбивать ее на две части, в каждой из которых решением является та из цилиндрических функций, которая в ней ограничена. Отсюда форма записи такой линейной зависимости в виде двух уравнений: (36) и (37). Наконец, в-третьих, сравнивая наше уравнение (34) с уравнением (4) из работы [34], описывающим дипольные вихри в несжимаемой жидкости на β -плоскости с твердой крышкой, видим их полную аналогию.

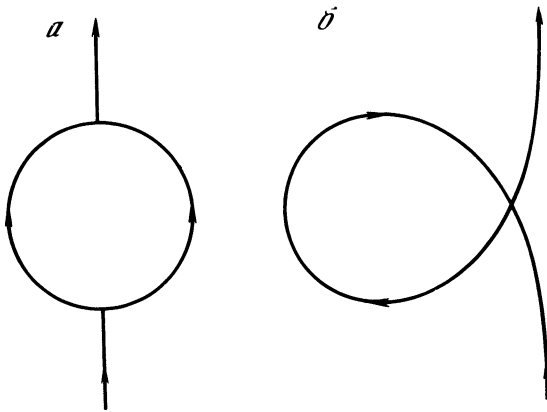
5. СПЕКТР СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В [32] показано, что уравнения типа (23) и (27) описывают колмогоровский степенной спектр слабой турбулентности, полученный впервые в работах Захарова в 1965 г. для несжимаемой однородной жидкости (ссылки см. в [12]). При этом в предположении практически одномерных возмущений $k_x \gg k_y$ были найдены [32] следующие спектральные зависимости плотности энергии (см. также [45–48] и приложение):

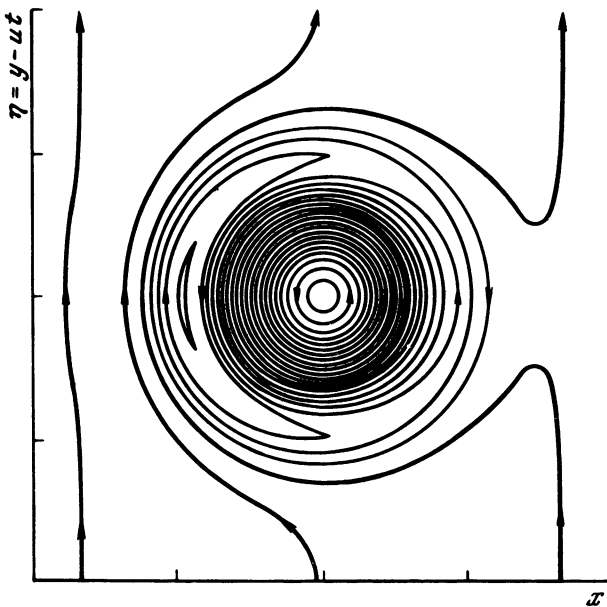
$$W_k^{(1)} \sim k_y^{-3/2} k_x^{-2}, \quad W_k^{(2)} \sim k_y^{-3/2} k_x^{-3}. \quad (53)$$

Возникает вопрос о зависимости спектра турбулентности волн Россби W_k от k_z . Когда волны Россби возникают на мелкой воде, то кажется естественным отсутствие такой зависимости в силу приближения "мелкой воды". Заметим, что дрейфовые волны в плазме с размером вдоль z много больше поперечного размера a ($L \gg a$) имеют аналогичный закон дисперсии. Из теории генерации дрейфовых волн [49] и из экспериментов [50–52] следует, что: 1) $k_z \ll k_y$ (вспомним, что мы предполагали $k_y \ll k_x$); 2) зависимость коэффициента турбулентной диффузии от координаты z практически отсутствует. Поясним последнее, поскольку в данном случае это весьма важно. Для выявления механизма диффузии поперек магнитного поля в [52] снижались осциллограммы колебаний плотности в столбе плазмы и тока измерителя. В отсутствие неустойчивости (малые амплитуды колебаний) ток на измеритель был мал по величине и постоянен во времени. При развитой неустойчивости ток на измеритель имел вид пиков, скоррелированных с колебаниями плотности, причем максимумы тока наблюдались в фазе с максимумами плотности. Таким образом, поток плазмы поперек поля имел характер выбросов. Выброс происходил *практически одновременно по всей длине плазменного шнура (т. е. отсутствовал сдвиг фаз в разных точках на оси) и бежал вместе с волной по азимуту*. Поскольку коэффициент диффузии был близок к бомовскому, то наблюдалась турбулентная диффузия.

⁵ Впервые единственность решения несколько иным способом для двухслойного течения рассматривалась в [42]. Случай, когда сепаратриса является не окружностью $r = a$ (рис. 3,а), а петель (рис. 3,б), показан на рис. 4 [43]. Случай разрывных условий на сепаратрисе рассмотрены в [44].



Р и с. 3



Р и с. 4

Итак, согласно [49–52] (на пределе применимости теории, $k_x \sim k_y \sim \sim k_1$) имеем

$$W_k \propto k_{\perp}^{-(\alpha_1 + \alpha_2)} k_z^{-\alpha_3},$$

где $\alpha_3 \ll \alpha_2, \alpha_1$. Переходя к сферическим координатам в k -пространстве,

$k_1 = k \sin \theta$, $k_z = k \cos \theta$, получим

$$W_k \sim k^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} f(\theta) \sim k^{-(\alpha_1 + \alpha_2)} f(\theta),$$

где

$$f(\theta) = (\sin \theta)^{-(\alpha_1 + \alpha_2)} (\cos \theta)^{-\alpha_3}.$$

Интегрируя W_k по углу θ от θ_0 до $\pi/2$, где θ_0 определяется из условия применимости дрейфовой теории [49] $\text{ctg} \theta_{0 \min} \approx k_1/k_{z \max}$, $(k_z)_{\max} \sim \omega_* / V_{Ti}$, V_{Ti} — тепловая скорость ионов, ω_* — дрейфовая частота, получим

$$W_k \propto k^{-(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Согласно (53)

$$W_k^{(1)} \propto k^{-3,5}, \quad W_k^{(2)} \propto k^{-4,5}. \quad (54)$$

Заметим, что спектры (53) совпадают с двумя из трех, найденных в [46–48] для случая коротковолновых волн Россби. (В [32] поясняется, почему третий спектр, полученный в [46–48], не может быть реализован.) Еще ранее второй спектр (54) был получен из размерностных оценок для волн Россби на β -плоскости в [45]. Видимо, формулу (54) следует понимать как $W_k \propto k^{-\gamma}$, где $\gamma \in (3,5; 4,5)$, т. е. $\gamma \approx 4$. Действительно, численные решения уравнения того же типа, что и полученные в данной работе (23), (27), показали [53], что форма спектров близка к $\gamma \approx 4$.

6. АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. Наблюдаемые соотношения между параметрами газовых структур и солпитеровский спектр масс [18]

Определим функцию $E(k)$ из условия

$$E(k) dk = W_k k^2 dk \quad (55)$$

Согласно [17]

$$\int_k^\infty E_k dk \propto v_\lambda^2, \quad (56)$$

где $\lambda \sim 1/k$. Так как $W_k \propto k^{-4}$, то $E(k) \propto k^{-2}$, и из (56) имеем [18]

$$v_\lambda \propto \lambda^{0,5}. \quad (57)$$

Сравнивая полученную зависимость с наблюдаемой (1), видим их полную тождественность — именно такой спектр наблюдается во вращающихся газовых гравитирующих системах [15]. Воспользуемся теперь уравнением Навье—Стокса, полагая все члены одного порядка: $v \Delta v \sim \Delta \psi$ или $v_\lambda^2 / \lambda \sim \sim \lambda \psi / \lambda^2 \sim \lambda \cdot 4\pi G \rho_\lambda$. Используя спектр (57), получаем

$$\rho_\lambda \propto \lambda^{-1}. \quad (58)$$

Сравнивая (58) с (2), видим, что получена наблюдаемая зависимость (2) плотности элемента газа масштаба λ [15]. Из уравнения Навье—Стокса по порядку величины $v \nabla v \sim \nabla p / \rho$ или $v_\lambda^2 / \lambda \sim p_\lambda / \rho_\lambda \lambda$. Используя (57), (58),

получим $p_\lambda \equiv n_\lambda m_\lambda v_\lambda^2 = \text{const}$ (m_λ — масса элемента газа масштаба λ , n_λ — число таких масс в единице объема). Из последнего равенства с учетом, что $m \sim \rho \lambda^3 \sim \lambda^2$, т. е. $\lambda \sim m^{1/2}$, получаем (4) [33]:

$$n_\lambda \sim (m_\lambda v_\lambda^2)^{-1} \sim m_\lambda^{-1.5}, \quad (59)$$

что совпадает с наблюдаемым солпитеровским спектром масс (4) [33]. С помощью теоретических спектров (54) объясняются также отклонения от среднего по массам (т. е. $m \sim m_\odot$) распределения числа звезд (4) для областей малых ($m \ll m_\odot$) и больших ($m \gg m_\odot$) масс (подробнее см. [18]).

6.2. О возможных наблюдательных проявлениях генерации модонов

Используя результаты разд. 4, сравним направление скорости движения модонов u_m (уединенных дипольных вихрей) с y -й компонентой фазовой скорости волн Россби $u_{\phi y}$ в двух предельных случаях: 1) $\lambda \gg \lambda_J$; 2) $\lambda \ll \lambda_J$. При вычислениях будем учитывать, что во всех наблюдаемых системах плотность падает с радиусом. Рассмотрим два предельных случая:

$$1) \lambda \gg \lambda_J, \\ u_{\phi y} \equiv \frac{\omega}{k_\varphi} = -\frac{1}{\alpha - 2} \frac{(\omega_0^2)'}{k_\perp^2} = \begin{cases} > 0 \text{ при } \alpha > 2, \\ < 0 \text{ при } \alpha < 2; \end{cases} \quad (60)$$

$$u_m = \begin{cases} < 0 \text{ при } \alpha > 2, \\ > 0 \text{ при } \alpha < 2; \end{cases} \quad (61)$$

$$2) \lambda \ll \lambda_J, \\ u_{\phi y} \equiv \omega/k_\varphi = -2\Omega_0 (\ln^+ \rho_0)/k_\perp^2 > 0, \quad (62)$$

$$u_m < 0. \quad (63)$$

Из формул (60)–(63) видно, что в обоих предельных случаях

$$u_m/u_{\phi y} < 0. \quad (64)$$

Физический смысл последнего условия состоит в следующем. Модоны, будучи стационарными структурами, не могут тратить энергию на излучение волн Россби (вследствие черенковского резонанса). Условие (64) это гарантирует [28].

До сих пор в астрофизической литературе обсуждались монополярные вихри [54–58], наблюдательное обнаружение которых либо стимулировало развитие теории (как, например, статья [54]), либо само явилось результатом проверки теоретических исследований (такова недавняя работа [58]).

Между тем в той же астрофизической литературе в течение по крайней мере трех последних десятилетий приводятся многочисленные примеры наблюдений пар близких объектов. Иерархия этих объектов по масштабам чрезвычайно широка: пары галактик [59–62], двойные ядра галактик [63–68], двойные звезды [33]. Определение направления вращения спектрально-двойных звезд — задача, видимо, в ближайшее время неразрешимая. Аналогичная задача для затменных двойных звезд сейчас планируется совместно с САО АН и ГАИШ (МГУ). Заметим, что наиболее активными

среди звезд являются тесные пары. Замечательный пример такой пары объект SS 433 [69]. В литературе уже отмечалось [70–72], что свойства системы SS 433 напоминают в миниатюре активные ядра галактик. Что же касается определения направления вращения пар галактик и двойных ядер, то в тех случаях, когда эти направления определяются, существенно чаще они оказываются противоположными (ср. [73]). В работе [66] представлена картина изоденс галактики Маркарян 266 с двумя ядрами, вращающимися в противоположные стороны. Двумерными аналогами указанных выше объектов могут служить дискольные усединенные вихри в лабораторных экспериментах на мелкой воде [28, 74, 75] и океане.

В заключение выражаем искреннюю благодарность А.М. Балку, В.Е. Захарову, В.Д. Ларичеву, А.Б. Михайловскому, С.С. Моисееву, М.В. Незлину и Г.М. Резнику за обсуждение некоторых вопросов теории, А.И. Гинзбург, Б.В. Комбергу, А.Р. Петросяну, А.В. Тутукову, Э.Р. Хачикяну, А.М. Черепашуку и Б.М. Шустову за обсуждение астрофизических приложений

ПРИЛОЖЕНИЕ

Предположим, что закон дисперсии имеет следующий вид:

$$\omega_k \sim k_y + \mu \Omega_k, \quad (\text{П.1})$$

где μ – малый параметр и

$$\Omega_k \sim |k_y|^a |k_x|^b |k_z|^c \operatorname{sgn} k_y. \quad (\text{П.2})$$

Здесь мы используем хорошо известную форму кинетического уравнения [31]:

$$\begin{aligned} \partial N_k / \partial t \sim \int U(k, k_1, k_2) [N_{k_1} N_{k_2} - N_k N_{k_1} \operatorname{sgn}(\omega_k \omega_{k_2}) - \\ - N_k N_{k_2} \operatorname{sgn}(\omega_k \omega_{k_1})] \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где N_k – “число квантов”,

$$U(k, k_1, k_2) \equiv |V(k, k_1, k_2)|^2. \quad (\text{П.4})$$

Предполагается масштабная инвариантность:

$$\begin{aligned} V(\epsilon_y k_y, \epsilon_x k_x, \epsilon_z k_z; \epsilon_y k_{1y}, \epsilon_x k_{1x}, \epsilon_z k_{1z}; \epsilon_y k_{2y}, \epsilon_x k_{2x}, \epsilon_z k_{2z}) = \\ = \epsilon_y^u \epsilon_x^v \epsilon_z^w V(k_y, k_x, k_z; k_{1y}, k_{1x}, k_{1z}; k_{2y}, k_{2x}, k_{2z}). \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Предположим также

$$N_k \sim |k_y|^\alpha |k_x|^\beta |k_z|^\gamma. \quad (\text{П.6})$$

Нашей целью является нахождение значений коэффициентов α , β и γ для стационарного спектра, когда $\partial N_k / \partial t = 0$.

Легко видеть, что

$$\partial N_k / \partial t \sim I_1 + I_2 + I_3, \quad (\text{П.7})$$

где $I_j = \int_0^\infty dk_{1y} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{2y} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{1x} dk_{2x} dk_{1z} dk_{2z} G_j$, $j = 1, 2, 3$;

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} (N_1 N_2 \mp NN_1 \pm NN_2) \delta(k \pm k_1 \mp k_2) \delta(\Omega \mp \Omega_1 \mp \Omega_2),$$

где для краткости $U_1 = U(k, k_1, k_2)$, $U_2 = U(k_2, k_1, k)$, $U_3 = U(k_1, k, k_2)$ и $N, N_1, N_2, \Omega, \Omega_1, \Omega_2$ означают соответственно $N_k, N_{k_1}, N_{k_2}, \Omega_k, \Omega_{k_1}, \Omega_{k_2}$. Знак $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ считается положительным без ограничения общности

Введем безразмерные аргументы

$$p_i = k_{iy}/k_y, h_i = k_{ix}/k_x, q_i = k_{iz}/k_z, i = 1, 2,$$

Тогда

$$k_i = (k_y p_i, k_x \sigma_{h_i} h_i, k_z \sigma_{q_i} q_i), i = 1, 2, \sigma = \pm 1. \quad (\text{II } 8)$$

Аналогично $\nu_i = \Omega_i/\Omega$, $n_i = N_i/N$, $i = 1, 2$.

Таким образом,

$$I_1 = \frac{N_k}{|\Omega_k|} |k_y|^{2n+1} |k_x|^{2v+1} |k_z|^{2w+1} \sum_{\sigma} J_1(\sigma_{n_1}, \sigma_{q_1}; \sigma_{n_2}, \sigma_{q_2}), \quad (\text{II } 9)$$

где

$$\begin{aligned} J_1(\sigma) &= \int dp_1 dp_2 dh_1 dh_2 dq_1 dq_2 \hat{U}_{1,\sigma}(n_1 n_2 - n_1 - n_2) \times \\ &\times \delta(1 - p_1 - p_2) \delta(1 - \nu_1 - \nu_2) \delta(1 - \sigma_{h_1} h_1 - \sigma_{h_2} h_2) \delta(1 - \sigma_{q_1} q_1 - \\ &- \sigma_{q_2} q_2), \\ \hat{U}_{1,\sigma} &\equiv U(1, p_1, \sigma_{h_1} h_1, \sigma_{q_1} q_1; p_2 \sigma_{h_2}, \sigma_{q_2} q_2), \quad \mathbf{1} \equiv (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Так же мы можем переписать I_2 и I_3 и, кроме того, $J_2(\sigma), J_3(\sigma)$ могут быть приведены к форме $J_1(\sigma)$ путем некоторых алгебраических преобразований. В результате

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} \sim \frac{\partial N_k}{|\Omega_k|} |k_y|^{2n+1} |k_x|^{2v+1} |k_z|^{2w+1} I, \quad (\text{II } 10)$$

$$I = \int dp_1 dp_2 n_1 n_2 K R Q_1 \delta(1 - \nu_1 - \nu_2) \delta(1 - p_1 - p_2), \quad (\text{II } 11)$$

$$K = 1 - \lambda_1 - \lambda_2, R = 1 - n_1^{-1} - n_2^{-1},$$

$$\lambda_i = p_i^{a-2(1+u+\alpha)} h_i^{b-2(1+v+\beta)} q_i^{c-2(1+w+\gamma)}, i = 1, 2.$$

$$Q_1 = \sum_{\sigma} \hat{U}_{1,\sigma} \delta(1 - \sigma_{h_1} h_1 - \sigma_{h_2} h_2) \delta(1 - \sigma_{q_1} q_1 - \sigma_{q_2} q_2), \quad (\text{II } 12)$$

$$dp_1 \equiv dp dh_1 dq_1, dp_2 \equiv dp_2 dh_2 dq_2.$$

Условие стационарности $\partial N_k / \partial t = 0$ теперь сводится к $K = 0$.

Предположим, что, например, $b \neq 0$ в (II.2). Делая подстановку

$$h_i = (\nu_i p_i^{-a} q_i^{-c})^{1/b}, i = 1, 2,$$

$$\text{переписываем } K = 0 \text{ как } 1 - p_1^{\xi} \nu_1^{\eta} q_1^{\xi} - p_1^{\xi} \nu_2^{\eta} q_2^{\xi} = 0, \quad (\text{II } 13)$$

где $\xi = 2[a(1+v+\beta)/b - (1+u+\alpha)]$,

$$\eta = 1 - 2(1+v+\beta)/b, \xi = 2[c(1+v+\beta)/b - (1+w+\gamma)],$$

(П.13) выполняется, когда

$$\xi = 0, \eta = 1, \zeta = 0, \quad (\text{П.14})$$

или

$$\xi = 1, \eta = 0, \zeta = 0. \quad (\text{П.15})$$

Что касается α, β, γ , то получаются следующие два набора:

$$\alpha_0^{(1)} = -(1+u), \beta_0^{(1)} = -(1+v), \gamma_0^{(1)} = -(1+w), \quad (\text{П.16})$$

$$\alpha_0^{(2)} = a/2 - (3/2+u), \beta_0^{(2)} = b/2 - (1+v), \gamma_0^{(2)} = c/2 - (1+w). \quad (\text{П.17})$$

Дополнительные спектры, найденные в [46–48], соответствуют случаю, когда единственными неисчезающими членами в (П.12) являются члены с $\sigma_{h_1} = \sigma_{h_2} = 1$ или $\sigma_{q_1} = \sigma_{q_2} = 1$.

Представим искомое решение уравнений (23) или (27) в форме

$$\tilde{\psi} \text{ или } \tilde{f} = \int \varphi_k(t) e^{-i\omega_k t} e^{ikr} d^2 r, \quad (\text{П.18})$$

где двумерные векторы k и r имеют x - и y -компоненты и $\omega_k = (\alpha - 2)^{-1} \times \times (\omega_0'^2/\Omega_0) k_y/k_\perp^2$ или $\omega_k = 2\Omega_0(\rho_0'/\rho_0) k_y/k_\perp^2$ для уравнений (23) и (27) соответственно, ω_k – собственная частота волн Россби. Тогда в терминах φ_k фурье-представление (23) и (27) дает

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \sim \sum_{k_1+k_2=k} [k_1, k_2]_t \frac{k_{2\perp}^2 - k_{1\perp}^2}{k_\perp^2} \varphi_{k_1} \varphi_{k_2} \exp(-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_k)t). \quad (\text{П.19})$$

Так как (см. [46])

$$W_k \sim k_\perp^2 |\varphi_k|^2, \quad (\text{П.20})$$

то

$$N_k \sim k_\perp^2 |\varphi_k|^2 / |k_y|. \quad (\text{П.21})$$

Используя нормированный потенциал

$$c_k \sim (1 + k_\perp^2 \rho_0^2) \varphi_k / |k_y|^{1/2} \quad (\text{П.22})$$

и принимая во внимание распадное условие $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_k \approx 0$, мы можем представить (П.19) как

$$i \partial c_k / \partial t = \sum_{k_1+k_2=k} V(k, k_1, k_2) c_{k_1} c_{k_2} \exp(-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_k)t), \quad (\text{П.23})$$

$$V(k, k_1, k_2) \sim |k_y k_{1y} k_{2y}|^{1/2} (k_{1x}^{-1} + k_{2x}^{-1} - k_x^{-1}). \quad (\text{П.24})$$

Согласно (П.2) и (П.5) это соответствует

$$a = 1, b = -2, u = 3/2, v = -1. \quad (\text{П.25})$$

Тогда наборы (П.16), (П.17) дают нам искомые спектры

$$W_k^{(1)} \sim k_y^{3/2} k_x^{-2}, W_k^{(2)} \sim k_y^{3/2} k_x^{-3}. \quad (\text{П.26})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Фридман А.М. Равновесие и устойчивость бесстолкновительных гравитирующих систем // Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: ВИНТИ, 1975. С. 61–159. (Итоги науки и техники. Астрономия; Т. 10).
2. Поляченко В.Л., Фридман А.М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976. 447 с.
3. Fridman A.M., Polyachenko V.L. Physics of gravitating systems. N.Y. etc.: Springer, 1984. Vol. 1, 2.
4. Поляченко В.Л., Фридман А.М. Анизотропная гравитационная неустойчивость // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 5. С. 1–14.
5. Fridman A.M. Theory of gradient instabilities of gaseous disk and rotating shallow water // Dynamics of astrophysical discs / Ed. J. Sellwood. Cambridge: Cambridge Univ. press, 1989. P. 185.
6. Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец // УФН. 1990. Т. 160, № 2.
7. Абрамян М.Г. Динамика вложенных гравитирующих систем: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Бюро. астрон. обс. АН АрмССР, 1986.
8. Михайловский А.Б., Петвиашвили В.И., Фридман А.М. Спиральные волны плотности в плоских галактиках – движущиеся солитоны // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26, № 3. С. 129–133.
9. Михайловский А.Б., Петвиашвили В.И., Фридман А.М. Взрывная неустойчивость вращающегося гравитирующего диска // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26, № 3. С. 341–343.
10. Михайловский А.Б., Петвиашвили В.М., Фридман А.М. Нелинейная теория устойчивости вращающегося гравитирующего диска // Астрон. журн. 1979. Т. 56, № 2. С. 279–287.
11. Чурилов С.М., Шухман И.Г. Слабая турбулентность в самогравитирующем газовом диске // Астрон. журн. 1981. Т. 58, № 2. С. 260–272.
12. Захаров В.Е. Колмогоровские спектры в задачах слабой турбулентности // Основы физики плазмы / Под ред. А.А. Галеева, Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1984. Т. 2. С. 48–79.
13. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности // ДАН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–309.
14. Обухов А.М. Распределение энергии в спектре турбулентного потока // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1941. № 4/5. С. 453–463.
15. Myers P.C. Dense cores in dark clouds. 3: Subsonic turbulence // Astrophys. J. 1983. Vol. 270, N 1, pt 1. P. 105–118.
16. Henriksen R.N., Turner B.R. Star cloud turbulence // Astrophys. J. 1984. Vol. 287, N 1, pt 1. P. 200–207.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
18. Фридман А.М. Наблюдаемые соотношения между параметрами газовых структур и солпитеровский спектр масс – результат развития колмогоровской турбулентности // Астрон. циркуляр. 1988. № 1532. С. 25–26.
19. Mikhailovskii A.B. Nonlinear phenomena in plasma and hydrodynamics / Ed. R.Z. Sagdeev. M.: Mir, 1986.
20. Charney J.G. On the scale of atmospheric motions // Geophys. Publ. Kosjones Vo-s Vidersharp. Acad. Oslo. 1948. Vol. 17, N 2. P. 3–19.
21. Обухов А.М. К вопросу о геострофическом ветре // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1949. Т. 13, № 4. С. 281–306.
22. Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1988. 409 с.
23. Hasegawa A., Mima K. Pseudo-three-dimensional turbulence in magnetized nonuniform plasma // Phys. Fluids. 1978. Vol. 2, N 1. P. 87–92.
24. Морозов А.Г. Локальный критерий устойчивости газовых подсистем плоских галактик // Астрон. журн. 1985. Т. 62, № 2. С. 209–217.
25. Rossby C.G. // J. Mar. Res. 1939. Vol. 2. P. 38.
26. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
27. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984.
28. Незлин М.В. Солитоны Россби // УФН. 1986. Т. 150, № 1. С. 3–60.

29. Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З. О неустойчивости неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле // ДАН СССР. 1961. Т. 138, № 3. С. 581–583.
30. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат. 1977. Т. 2.
31. Галеев А.А., Сагдеев Р.З. Нелинейная теория плазмы // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1973. Т. 7. С. 3–142.
32. Михайловский А.Б., Новиковский С.В., Ляхин В.П., Макурин С.В., Новаковская Е.А., Онищенко О.Г. К теории слабой колмогоровской турбулентности дрейфовых волн и волн Россби. Препр. ИКИ № 1356 М., 1988.
33. Масевич А.Г., Тугуков А.В. Эволюция звезд Теория и наблюдения. М Наука, 1988.
34. Ларичев В.Д., Резник Г.М. О двумерных уединенных волнах Россби // ДАН СССР. 1976. Т. 231, № 5. С. 1077–1079.
35. Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Большое Красное Пяно как синоптический вихрь в юпитерианской атмосфере // Письма в "Астрон. журн." 1981. Т. 7, № 8. С. 505–509.
36. Тассуль Ж.-Л. Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982
37. Засов А.В. Вращение и распределение вещества в дисковых галактиках: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1988.
38. Шакура Н.И. Дисковая модель аккреции газа релятивистской звездой в тесной двойной системе // Астрон. журн. 1972. Т. 49, № 5. С. 921–929.
39. Shakura N.J., Sunyaev R.A. Black holes in binary systems: Observational appearance // Astron. and Astrophys. 1973. Vol. 24, N 2. P. 337–355.
40. Meiss J.D., Horton W. Solitary drift waves in the presence of magnetic shear // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26, N 4. P. 990–997.
41. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.М. Специальные функции. М.: Наука, 1964.
42. Flirt G.R., Larichev V.D., McWilliams J.C., Reznik G.M. The dynamics of baroclinic and barotropic solitary eddies // Dyn. Atmos. Oceans. Vol. 5. P. 1–91.
43. Ларичев В.Д., Резник Г.М. Сильно нелинейные двумерные уединенные волны Россби // Океанология. 1976. Т. 16, № 6. С. 961–967.
44. Nycander J. New stationary vortex solutions of the Hasegawa–Mima equation: Prepr. Inst. Technol. Uppsala Univ. UPTeC 8768 R. Uppsala, 1987.
45. Пелиновский Е.Н. Волновая турбулентность на β -плоскости // Океанология. 1978. Т. 17, № 2. С. 192–194.
46. Сазонтов А.Г. Анизотропные спектры волновой турбулентности на β -плоскости // Тонкая структура и синоптическая изменчивость морей. Таллинн, 1980. С. 147–152.
47. Сазонтов А.Г. К теории двумерной турбулентности: Препр. ИПФ АН СССР № 30. Горький, 1981.
48. Захаров В.Е., Питербарг Л.И. Канонические переменные для волн Россби и дрейфовых волн в плазме // ДАН СССР. 1987. Т. 295, № 1. С. 86–89.
49. Галеев А.А., Моисеев С.С., Сагдеев Р.З. Теория устойчивости неоднородной плазмы и аномальная диффузия // Атом. энергия. 1963. Т. 15, № 6. С. 451–468.
50. Бучельникова Н.С. Универсальная устойчивость в калиевой плазме: Препр. ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1963.
51. D'Angelo N., Morley R.W. Low frequency oscillations in a potassium plasma // Phys. Fluids. 1963. Vol. 6, N 3. P. 422–425.
52. Бучельникова Н.С., Салимов Р.А. Диффузия при неустойчивости сильно неоднородной плазмы: Препр. ИЯФ СО АН СССР № 54. Новосибирск, 1966.
53. Hasegawa A., MacLennan C.G., Kodama J. Nonlinear behaviour and turbulence spectra of drift waves and Rossby waves // Phys. Fluids. 1979. Vol. 22, N 1. P. 2122–2129.
54. Засов А.В., Кязумов Г.А. Движение газа и распределение массы в спиральной галактике NGC157 // Письма в "Астрон. журн." 1981. Т. 7, № 3. С. 131–135.
55. Незлин М.В., Снежкин Е.Н., Поляченко В.Л., Трубников А.С., Фридман А.М. Предсказание вихревого движения газа между спиральными рукавами галактики на основе лабораторного моделирования // Письма в "Астрон. журн." 1986. Т. 12, № 7. С. 504–521.
56. Баев П.В., Маков Ю.Н., Фридман А.М. Образование спирально-вихревой структуры VK-галактик на линейной стадии сдвиговой гидродинамической неустойчивости // Письма в "Астрон. журн." 1987. Т. 13, № 11. С. 964–972.

57. Корчагин В.И., Петваишвили В.И., Рябцев А.Д. Уединенный вихрь в галактическом диске, поддерживаемый неоднородностью вращения // Письма в "Астрон. журн." 1988. Т. 14, № 4. С. 317–322.
58. Afanasiev V., Boulesteix J., Bonnarel F., Dodonov S., Vlasjuk V. Discovery of the large-scale vortices in the gaseous disc component of the spiral galaxy Markarian 1040 // Interaction of galaxies: Proc. Conf. Heidelberg, 1989.
59. Амбарцумян В.А. Об эволюции галактик // Науч. тр. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960. Т. 2. С. 298–328.
60. Вернер Д.А. Орбитальные моменты вращения двойных галактик // Письма в "Астрон. журн." 1985. Т. 11, № 9. С. 664–669.
61. Вернер Д.А. Орбитальные моменты вращения двойных галактик: Зависимость от морфологического типа // Письма в "Астрон. журн." 1987. Т. 13, № 2. С. 95–100.
62. Вернер Д.А. Возможность эффекта компенсации угловых моментов в двойных галактиках // Астрон. циркуляр. 1986. № 1466. С. 1–2.
63. Амбарцумян В.А. Кратные галактики и радиогалактики. 3: О двухъядерных галактиках // Науч. тр. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960. Т. 2. С. 291–294.
64. Петросян А.Р., Саакян К.А., Хачикян Э.Е. Спектральное исследование галактик с UV-избытком с двойными и кратными ядрами // Астрофизика. 1979. Т. 15, № 2. С. 209–216.
65. Петросян А.Р., Саакян К.А., Хачикян Э.Е. Спектральное исследование галактик с УФ-избытком с двойными и кратными ядрами. 2: Галактики с сейфертовскими особенностями компонентов ядер // Астрофизика. 1979. Т. 15, № 3. С. 373–382.
66. Петросян А.Р., Саакян К.А., Хачикян Э.Е. Спектральное исследование двухъядерной галактики Маркарян 266 // Астрофизика. 1980. Т. 16, № 4. С. 621–630.
67. Коровяковский Ю.П., Петросян А.Р., Саакян К.А., Хачикян Э.Е. Морфология девяти галактик с УФ-континуумом с двойными и кратными ядрами // Астрофизика. 1981. Т. 15, № 2. С. 231–238.
68. Franx M., Illingworth G.D. Acounterrotating core in IC 1459 // Astrophys. J. Lett. 1988. Vol. 327, N 2, pt 2. P. 55–60.
69. Margon B., Grandy S.A., Dawnes R. The 164 and 13 day periods of SS 433: Confirmation of the kinematic model // Astrophys. J. 1980. Vol. 241, N 1, pt 1. P. 306–315.
70. Fabian A., Rees M.J. SS 433: A double jet in action? // Month. Notic. Roy. Astron. Soc. 1979. Vol. 187, N 1. P. 13b–16b.
71. Комберг Б.В. Модель типа "SS433" для объяснения особенностей формы линий излучения в спектрах ядер сейфертовских галактик: Препр. ИКИ АН СССР № 834. М., 1983.
72. Лютый В.М., Черепащук А.М. Активность ядер галактик и явление SS 433 // Астрон. журн. 1986. Т. 63, № 5. С. 897–913.
73. Фридман А.М. Уединенные дипольные вихри (модоны) и двойные астрофизические объекты // Астрон. циркуляр. 1988. № 1533. С. 5–6.
74. Гинзбург А.И., Костяной А.Г., Павлов А.М., Федоров К.Н. Лабораторное воспроизведение грибовидных течений (вихревых диполей) в условиях вращения и стратификации // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1987. Т. 23, № 2. С. 170–178.
75. Фридман А.М. Модоны Ларичева–Резника на f -плоскости // ДАН СССР. 1989. Т. 301, № 1. С. 200–203.
76. Федорова А.В., Фридман А.М. О направлении распространения гравитирующих волн и дипольных вихрей Россби во вращающихся полнотропных системах // Астрон. цирк. 1989. № 1537. С. 1–2.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛЕЙ

И.С. АРАНСОН, К.А. ГОРШКОВ, А.С. ЛОМОВ,
М.И. РАБИНОВИЧ

1. ВВЕДЕНИЕ

Примеры двумерных и трехмерных локализованных состояний частицеподобных структур нелинейных полей или сред хорошо известны. Это вихри в атмосфере и океане, различного рода дефекты в кристаллах и регулярных волновых решетках, локализованные волны зарядной плотности, локализованные спирали в жидких кристаллах и др. Возможно, что и элементарным частицам соответствуют локализованные "свободные от сингулярности" решения нелинейных многомерных уравнений поля.

Пространственные характеристики локализованных состояний весьма универсальны. Они не зависят не только от физической природы исследуемого поля (среды), но и от того, идет ли речь о диссипативных неравновесных средах (гидродинамические течения), гамильтоновых полях ("частицы") или статических системах (кристаллические решетки). Подобная универсальность объясняется тем, что во всех этих ситуациях локализованные состояния есть результат спонтанного нарушения симметрии системы и потому подчиняется общим топологическим законам.

Для физики основной интерес представляет нелинейная динамика локализованных состояний (перенос заряда, взаимодействие "частиц" в теории поля, взаимодействие вихрей в турбулентности и т.д.). При этом первоочередной ставится проблема построения таких базовых моделей теории, в рамках которых существовали бы устойчивые локализованные состояния многомерных полей, например устойчивые трехмерные солитоны. Как правило, однако, традиционные модели представляют нам примеры лишь неустойчивых статических "частиц" (одномерный случай — случайное исключение) [1, 2]. Подобные модели, демонстрирующие существование устойчивых локализованных состояний многомерных полей, обсуждаются ниже. Рассматриваются также теории взаимодействия локализованных состояний, включающие в себя образование решеток, "планетарных систем", рождение динамического пространственно-временного хаоса и др. [3–7].

2. МОДЕЛИ

При анализе стационарных локализованных состояний естественно рассматривать одновременно уравнения диссипативных неравновесных сред и гамильтоновых полей. Это удобно сделать на примере потенциальных полей, стационарные состояния которых удовлетворяют уравнению $\delta F/\delta u = 0$, где u — физическая переменная, а F имеет смысл лагранжиана (потенциальная энергия и т.д.) для гамильтонова поля и свободной энергии — для диссипативной неравновесной среды. Устойчивая локализованная структура находится из условий равенства нулю первой вариации $\delta F/\delta u$

и положительной второй $\delta^2 F/\delta u^2$ (это отвечает минимуму потенциала) Динамические уравнения имеют соответственно вид

$$\partial u/\partial t = -\delta F/\delta u \quad (1)$$

для диссипативной среды и

$$\partial^2 u/\partial t^2 = -\delta F/\delta u \quad (2)$$

для гамильтонова поля. Стационарные структуры полей (1) и (2), очевидно, тождественны. Число их может быть сколь угодно велико – мультистабильность. В рамках градиентной модели (1) стационарные состояния самопроизвольно устанавливаются при $t \rightarrow \infty$ в результате эволюции системы, в случае же гамильтоновой модели (2) их нужно угадать (что не вероятно) либо воспользоваться подсказкой системы (1).

Чтобы раскрыть правые части (1) или (2), представим плотность энергии \mathcal{F} ($F = \int \mathcal{F} d\mathbf{r}$) вблизи точки потери устойчивости тривиальное однородным состоянием в виде разложения по степеням поля и степеням градиента поля

$$\mathcal{F}_1 = \alpha u^2 + \beta u^3 + \delta u^4 + \zeta (\nabla u)^2 + \xi (\Delta u)^2. \quad (3)$$

В результате получим уравнение, которое естественно назвать обобщенным уравнением Свифта–Хоенберга:

$$\partial u/\partial t = -u + \beta u^2 - u^3 - (k_0^2 + \Delta)^2 u. \quad (4)$$

Рассмотрение, подобное проведенному для действительных скалярных полей, возможно и для комплексных полей. При этом аналогично (3) имеем

$$\mathcal{F}_2 = \alpha |u|^2 + \beta |u|^4 + \delta |u|^6 + \zeta |\nabla u|^2 + \xi |\Delta u|^2 \quad (5)$$

(здесь учтена независимость энергии от фазы поля – калибровочная инвариантность). Соответственно уравнение имеет вид

$$\partial u/\partial t = -u + \beta |u|^2 - u |u|^4 - (k_0^2 + \Delta) u. \quad (6)$$

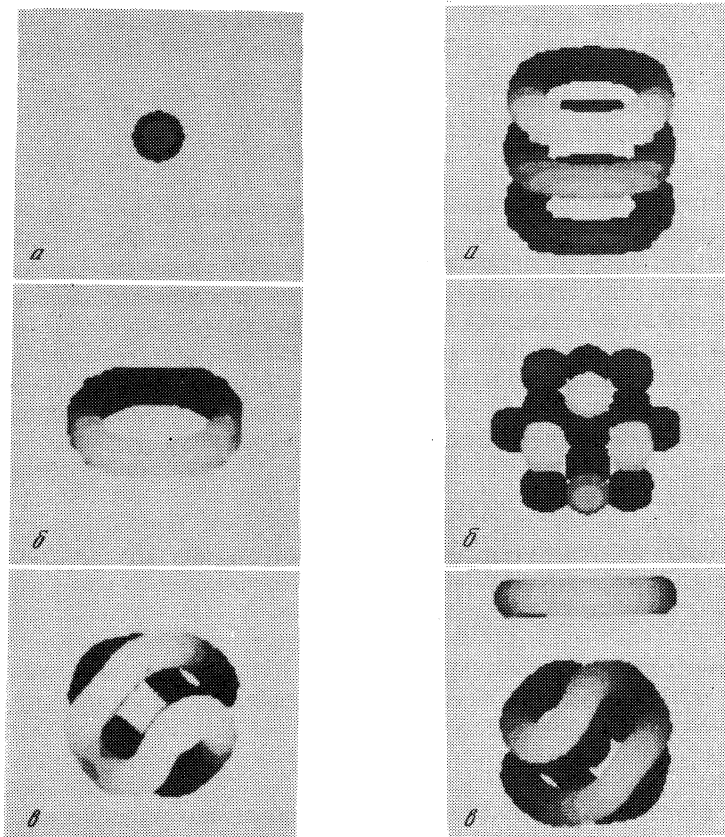
Случай (6) отвечает градиентной диссипативной системе, при замене $\partial_t \rightarrow i\partial_t$ гамильтоновой.

3. ТРЕХМЕРНЫЕ ЧАСТИЦЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Как показывают прямые компьютерные эксперименты в этой модели, действительно существуют устойчивые локализованные состояния с различной топологией (они соответствуют различным локальным минимумам F). Это "шар", "тор", "бейсбол" – структура, подобная рисунку на теннисном мяче (рис. 1). Принципиальным отличием этих "частиц" от традиционных солитонов является характер спадания поля на периферии структуры – в нашем случае поле экспоненциально спадает и осциллирует. Благодаря этому подобные структуры могут образовывать чрезвычайно разнообразные устойчивые связанные состояния – цепочки, решетки, планетарные системы с дискретным (бесконечным) набором орбит и т.д. (рис. 2).

Все эти стационарные состояния существуют и устойчивы и в гамильтоновом аналоге модели (4)

$$\partial^2 u/\partial t^2 = -u + \beta u^2 - u^3 - (k_0^2 + \Delta) u. \quad (7)$$



Р и с. 1. Устойчивые локализованные состояния – “элементарные частицы”, описываемые уравнениями (4), (7) при $\beta = 2,5$; $k_0^2 = 1$
a – шар; *б* – тор; *в* – бейсбол

Р и с. 2. Связанные состояния локализованных образований
a – три тора; *б* – кластер шаров; *в* – тор и бейсбол с шаром внутри

В градиентной модели (4) все предельные (при $t \rightarrow \infty$) состояния поля (среды) статические. В системе же (7) возможны взаимные вращения “частиц”, образование осциллирующих (периодически, квазипериодически и хаотически) кластеров, распространение волн по решеткам и т.п. В предположении, что взаимодействие частиц слабое, для описания их динамически может быть построена асимптотическая теория (малым параметром здесь служит отношение поля на “хвосте” одной частицы к полю в максимуме других (см. разд. 5)).

4. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ. СПИРАЛИ

Обсудим модели действительных и комплексных полей параллельно. Будем исследовать решения, локализованные в смысле ограниченности интегралов (предполагаем поле двумерным)

$$\int |u(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

Простейшие стационарные решения такого типа центрально-симметричные, т.е.

$$u(x, y) = u(\rho), \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (8)$$

Для модели (6) можно также заметить и решение, содержащее зависимость от угла $\theta = \arctg(y/x)$:

$$u(x, y) = \Phi(\rho) e^{\pm im\theta}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Эти решения для $m \neq 0$ мы будем называть спиральными с топологическим зарядом m (по аналогии с [1]). При $\rho \rightarrow \infty$ локализованные решения экспоненциально спадают. При этом спадание носит колебательный характер, т.е.

$$u \sim \rho^{-1/2} e^{-\alpha\rho} \cos \eta\rho, \quad (10)$$

где

$$\alpha = |\operatorname{Re}(i - k_0^2)^{1/2}|, \quad \eta = |\operatorname{Im}(i - k_0^2)^{1/2}|. \quad (11)$$

Локализованные решения устойчивы лишь в некотором диапазоне по β : $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$. Границы этого диапазона можно приближенно оценить из следующих соображений.

Перепишем выражение для F_1 в виде

$$F_1 = \int [u^2 (1/2 - 1/3 \beta u + 1/4 u^2) + 1/2 |(k_0^2 + \Delta) u|^2] dx dy, \quad (12)$$

очевидно, что при $0 \leq \beta \leq \beta^{(1)} = 3/\sqrt{2} \approx 2, 12 \dots$ для всех u выражение $1/2 - 1/3 \beta u + 1/4 u^2 \geq 0$. Следовательно, при $\beta \leq 3/\sqrt{2}$ функционал положительно определен и достигает абсолютного минимума при $u \equiv 0$. В силу градиентности на траекториях уравнения (4) F_1 может только убывать. Следовательно, при $\beta \leq \beta^{(1)}$ любые локализованные структуры неустойчивы.

Проводя те же рассуждения для модели (6), мы получаем, что F_2 положительно определен при $\beta \leq \beta^{(1)} = 4/\sqrt{3} = 2,3054$.

Для оценки правой границы интервала величины β_1 мы используем условие отсутствия в системах (4) и (6) расплывания структур, т.е. потребуем, чтобы распространение фронтов переброса, переводящее локализованное состояние в нелокализованное, было "энергетически невыгодно". При достаточно больших β в (4) и (6) существует устойчивое равновесие $|u|^2 = \text{const}$, которое отвечает нелокализованному состоянию. Соответствующее критическое значение β равно

$$\tilde{\beta} = 2(1 + k_0^4)^{1/2}. \quad (13)$$

Амплитуда устойчивого равновесия для (4) задается выражением

$$u_m = \beta/2 + [\beta^2/4 - (1 + k_0^4)]^{1/2} \quad (14)$$

и для (6)

$$|u_m|^2 = \beta/2 + [\beta^2/4 - (1 + k_0^4)]^{1/2}. \quad (15)$$

Рассмотрим решение в виде цилиндрического фронта (для модели (4)):

$$u(x, y) = \begin{cases} u_m, & \rho \leq \rho_0, \quad \rho_0 \gg 1, \\ u_m e^{-\alpha \rho} \cos \eta \rho, & \rho > \rho_0. \end{cases} \quad (16)$$

Такое решение имеет место при расплывании (т.е. переходе в нелокализованное состояние исходного решения (4)). Решение (16) является двумерным аналогом фронта переброса в одномерных активных средах). Подставим (16) в функционал F_1 и проследим за его изменением при увеличении ρ_0 . При $\rho_0 \gg 1$ мы можем пренебречь вкладом от экспоненциально малого "хвоста". Тогда для F_1 мы получаем приближенно

$$F_1 \approx \pi \rho_0^2 u_m^2 \left(\frac{1 + k_0^4}{2} - \frac{\beta u_m}{3} + \frac{u_m^2}{4} \right) = \frac{\pi \rho_0^2}{4} \left(1 + k_0^4 - \frac{\beta u_m}{3} \right). \quad (17)$$

При $\beta u_m/3 > 1 + k_0^4$ увеличение ρ_0 вызывает уменьшение F_1 , т.е. расплывание "энергетически выгодно" и локализованные структуры, вероятней всего, неустойчивы. Используя (14), мы легко получаем условие нерасплывания для модели (4)

$$\beta_1^{(1)} \leq (3/\sqrt{2})(1 + k_0^4)^{1/2} \quad (18)$$

и аналогично для модели (6)

$$\beta_1^{(1)} \leq (4/\sqrt{3})(1 + k_0^4)^{1/2}.$$

Таким образом, для обеих моделей существует интервал по β , где локализованные решения могут быть устойчивы. Эти качественные результаты полностью подтвердились в численном эксперименте с моделями (4) и (6) (см. рис. 1 и 2).

В наших экспериментах $\beta = 2,5$, $k_0^2 = 1$. Интегрирование производилось неявным методом расщепления с использованием FFT. Размер области интегрирования был $L^2 = 20 \times 20$, число гармоник FFT — 64×64 .

Для модели (4) были обнаружены локализованные структуры вида (8) (см. рис. 1). Для модели (6) исследовались на устойчивость решения с $|m| = 0, 1, 2$. Устойчивыми оказались лишь простейшие спирали $m = \pm 1$ (рис. 3). Не исключена возможность, что при других значениях параметра β могут быть устойчивы и решения с $|m| \neq 1$.

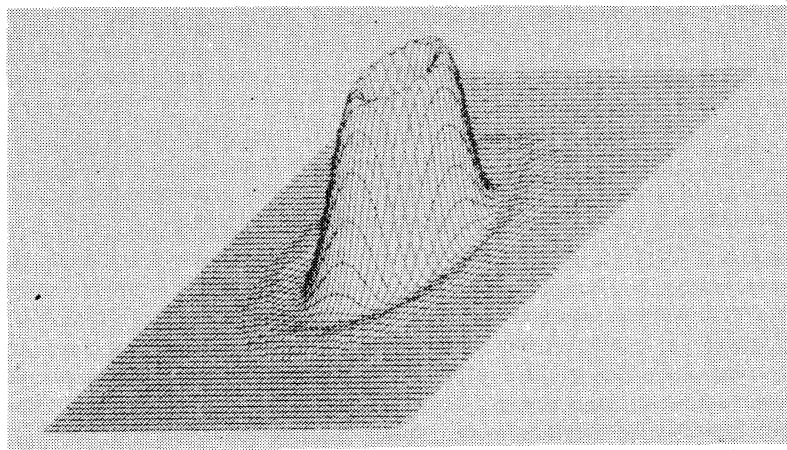
Итак, оценка сверху и снизу для области устойчивости локализованных структур по параметру β такова: для модели (4)

$$3/\sqrt{2} \leq \beta \leq (3/\sqrt{2})(1 + k_0^4)^{1/2} \quad (19)$$

и для модели (6)

$$4/\sqrt{3} \leq \beta \leq (4/\sqrt{3})(1 + k_0^4)^{1/2}.$$

Заметим, что оценки для β сверху почти совпадают с условиями появления устойчивого равновесия в (4) и (6) в виде (14), (15), так как $3/\sqrt{2}$ и $4/\sqrt{3}$ мало отличаются от 2. Реально, потеря устойчивости локализованного решения происходит несколько ранее по β . В результате оценка сверху



Р и с. 3. Распределение $|u^{(0)}|^2$ для устойчивых спиралей с $m = \pm 1$ в модели (6)

совпадает со значением $2(1 + k_0^2)$ для обеих моделей. Это означает, что локализованное решение теряет устойчивость при β , соответствующем рождению нелокализованного решения (либо очень близком значению β_1).

Отметим одно интересное следствие построенной теории: модель (4) может быть связана с уравнением Свифта–Хоенберга с мягким возбуждением простой заменой $u \rightarrow u + u_{\min}$, где $u_{\min} = \beta/2 - [\beta^2/4 - (1 + k_0^4)]^{1/2}$,

$$\frac{du}{dt} = u - \beta'u^2 - u^3 - (k_0^2 + \Delta)^2 u \quad (20)$$

(u_{\min} — это неустойчивое равновесие в (4)). Параметры β' и k_1 выражаются через β , k_0 .

Локализованным решениям уравнения (4) соответствуют в уравнении (20) решения, выходящие на постоянную асимптотику u_{\min} при $\rho \rightarrow \infty$. Однако в силу приведенных ранее рассуждений эти решения должны быть неустойчивы (или устойчивы в очень узкой по β области):

$$2(1 + k_0^4)^{1/2} \leq \beta \leq (3/\sqrt{2})(1 + k_0^4)^{1/2}.$$

Если же мы сделаем замену $u \rightarrow u + u_{\max}$, где u_{\max} задается выражением (14), то после соответствующих перенормировок получим вновь уравнение (4). В модели (4) это будет решение, выходящее на устойчивое равновесие u_{\max} при $\rho \rightarrow \infty$. Оно также будет неустойчиво. Таким образом, в рамках модели Свифта–Хоенберга с мягким возбуждением (20) локализованные структуры должны быть неустойчивы.

5. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Обрануженные устойчивые локализованные структуры могут образовывать связанные состояния. Существование связанных состояний обусловлено немонотонным (в данном случае осциллирующим) характером спадания поля в асимптотике отдельной локализованной структуры. Описание связанных состояний, как, впрочем, и вообще динамики взаимо-

действия локализованных структур. может быть проведено в рамках асимптотической теории возмущений в предположении, что поля отдельных локализованных структур слабо перекрыты (так называемые слабые взаимодействия). Алгоритм применения асимптотической процедуры сводится к следующему. При учете возмущений (неоднородности или нестационарности среды, внешних воздействий, действия слабых полей других частицеподобных структур и т.п.) интересующее нас решение вблизи данной локализованной структуры естественно искать в виде ряда

$$u(\mathbf{r}, t) = u^{(0)}(\mathbf{r}) + \sum_n \epsilon^n u^{(n)}(\mathbf{r}, t), \quad (21)$$

где главный член разложения $u^{(0)}$ — известное элементарное локализованное решение, ϵ — малый параметр задачи (в частности, для задачи о взаимодействии локализованных структур), равный отношению полей чужих локализованных структур в месте расположения данной структуры к максимальному значению поля данной локализованной структуры. Из (4), (6) и представления (21) стандартным путем следуют уравнения последовательных приближений для $u^{(n)}$:

$$\hat{L}u^{(n)} = H^{(n)}, \quad (22)$$

где \hat{L} — оператор, полученный линеаризацией вблизи $u^{(0)}$ исходных уравнений поля, а $H^{(n)}$ содержат лишь функции предыдущих приближений и как заданные слабые поля чужих локализованных образований. Решение линейной эволюционной задачи (22) может быть построено путем разложения $u^{(n)}$ по полной системе собственных функций оператора \hat{L} . Типичной особенностью получаемых таким образом решений является секулярная расходимость (во времени) части этого разложения, связанной с локализованными собственными функциями, принадлежащими нулевому собственному значению дискретного спектра оператора \hat{L} [8]. Среди этих локализованных собственных функций всегда есть такие, которые получаются вариацией порождающего решения $u^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{c})$ по параметрам $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, характеризующим семейство таких решений. Отсюда ясно, что, вводя в $u^{(0)}$ и, следовательно, в $H^{(n)}$ произвол в виде неизвестной зависимости параметров \mathbf{c} от медленного времени ($\tau = \epsilon t$), можно подавить секулярные расходимости, обусловленные именно этими собственными функциями, требуя ортогональности модифицированных правых частей $H^{(n)}$ в (22) (например, $H^{(1)} \rightarrow H_1^{(1)} - c_\tau \partial_c u^{(0)}$) к соответствующим собственным функциям u^+ оператора, сопряженного \hat{L} :

$$\int u^+ H^{(n)} d\mathbf{r} = 0. \quad (23)$$

Если подсистема локализованных функций, отвечающих нулевому собственному числу, состоит только из $\partial_{c_l} u^{(0)}$ ($l = 1, 2, \dots, m$), то по крайней мере для решений первого приближения можно утверждать, что с помощью условий ортогональности (23) устранены основные расходимости и описание исходной распределенной системы приближенно редуцировано к конечномерной:

$$(dc_l/dt) \int u_{c_k}^+ u_{c_l}^{(0)} d\mathbf{r} = \int u_{c_k}^+ H^{(1)} d\mathbf{r}. \quad (24)$$

Наиболее принципиальный вопрос, остающийся невыясненным при использовании (24), состоит в определении числа параметров, характеризующих семейств исследуемых локализованных образований. Этот вопрос в свою очередь тесно связан с симметриями исходных уравнений поля и структурой локализованных решений. Так, максимальное число "внешних" параметров, характеризующих положение и ориентацию статических локализованных структур в пространстве (в случае изотропной и однородной модели (4)) шесть: три угловых параметра ($\varphi_0, \theta_0, \eta_0$) и координаты центров ($\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$). В консервативной модели (7) к этим шести "внешним" параметрам могут добавиться еще четыре: три компоненты скорости ($\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$) и энергия, которые, очевидно, связаны с инвариантностью по отношению к инерциальным преобразованиям системы координат и сдвигам во времени. Наличие других – "внутренних" параметров связано со структурными симметриями полевых уравнений. В частности, очевидна инвариантность невозмущенных уравнений к фазовым сдвигам комплекснозначной полевой функции ($u \rightarrow ue^{i\psi}$). Полное решение вопроса о числе "внутренних" параметров остается открытым, и в дальнейшем мы будем предполагать, что один такой параметр содержится в семействе локализованных решений уравнений (6) и таких параметров нет для решений (4), (7). Ограничиваясь таким набором "внешних" и "внутренних" параметров, кратко опишем вывод уравнений (24) для задачи о взаимодействии элементарных структур, описываемых приведенными в предыдущем разделе моделями.

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СТРУКТУР ТИПА ШАРОВ

Обсудим сначала задачу в рамках неконсервативной модели (4). Линейный оператор L в этом случае имеет вид

$$\partial_t + 1 - 2\beta u^{(0)} + 3(u^{(0)})^2 + (k_0^2 + \Delta)^2 \quad (25)$$

и является самосопряженным. Поскольку переменные коэффициенты оператора \hat{L} зависят лишь от $r = |\mathbf{r}|$, все их собственные функции можно искать методом разделения переменных: $u^+(\mathbf{r}) = Y_p^{(q)}(\theta, \varphi) \cdot u^+(r)$, где $Y_p^{(q)}$ – сферические функции. Необходимые нам в (24) собственные функции, отвечающие трансляционной моде, пропорциональны $Y_1(\theta, \varphi)$, т.е. $ru^+(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} u^{(0)}$.

Градиентная структура собственных функций и сферическая симметрия $u^{(0)}$ позволяют придать уравнениям (24) особенно изящную форму. Так, благодаря симметрии $u^{(0)}$ и u^+ и следующих из этого факта очевидных тождеств типа $\int u_{x,y}^{(0)} u_{y,x}^{(0)} d\mathbf{r} = 0$, система (24) приобретает нормальную форму относительно скоростей движения центров шаров $\dot{\mathbf{r}}_{1,2}$:

$$M d\mathbf{r}_{1,2}/dt = \int \nabla_{\mathbf{r}} u^{(0)} H_{1,2}^{(1)} d\mathbf{r}, \quad (26)$$

$$M = 1/3 \int |\nabla u^{(0)}|^2 d\mathbf{r}.$$

Градиентная структура собственных функций u^+ обуславливает градиентную же форму правых частей (26). Действительно, правая часть уравнений

(26), записанных, например, для первой частицы, в первом приближении равна

$$H_1^{(1)} = (3(u_1^{(0)})^2 - 2\beta u_1^{(0)}) u_2^{(0)}, \quad (27)$$

где $u_1^{(0)}$ зависит только от r , а $u_2^{(0)}$ — от $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ в системе координат, связанной с первой частицей, $R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ — расстояние между частицами. Подставляя (27) в (26) и интегрируя по частям, можно привести (26) к следующей форме:

$$M d\mathbf{r}_1/dt = \int \nabla_{\mathbf{r}_1} u^{(0)} H_1^{(1)} d\mathbf{r} = -\int [(u_1^{(0)})^3 - \beta (u_1^{(0)})^2] \nabla_{\mathbf{r}} u_2^{(0)} d\mathbf{r}. \quad (28)$$

Поскольку в (28) $\nabla_{\mathbf{r}} = \nabla_{r_1}$, операции $\nabla_{\mathbf{r}}$ и $\int d\mathbf{r}$ можно поменять местами и мы приходим к градиентной форме уравнений (28). Заменяя $u_2^{(0)}$ симптотическим выражением (10), приходим к уравнениям (28) в явном виде:

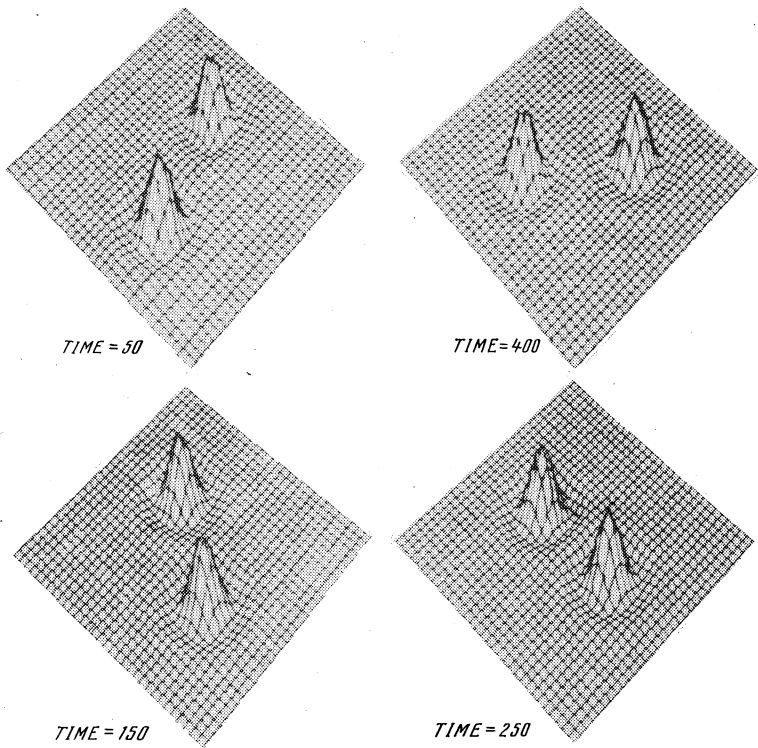
$$M d\mathbf{r}_1/dt = -\nabla_{\mathbf{r}_1} P(R), \quad (29)$$

где $P(R) = \int [(u_1^{(0)})^3 - \beta (u_1^{(0)})^2] u_2^{(0)} d\mathbf{r} \approx CR^{-1} e^{-\alpha R} \cos \eta R$ — потенциал взаимодействия. Аналогичным образом получается уравнение для \mathbf{r}_2 . Объединяя их (правые части зависят только от R), приходим окончательно к уравнению для \mathbf{R} :

$$d\mathbf{R}/dt = -\nabla_{\mathbf{R}} R^{-1} e^{-\alpha R} \cos \eta R. \quad (30)$$

Здесь числовые коэффициенты M и C убраны очевидным изменением масштаба t . Система (30) имеет два интеграла $(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)^{-1} = \text{const}$ и $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^{-1} = \text{const}$, свидетельствующих о том, что движение двух частиц происходит по прямой, соединяющей их центры. Изменение расстояния между частицами во времени определяется уравнением $\dot{R} = \partial_{\mathbf{R}} R^{-1} e^{-\alpha R} \cos \eta R$. Существенным моментом, отличающим этот пример от предыдущего, является счетное (бесконечное) число точек равновесия, отвечающих связанным состояниям элементарных структур типа шаров; при этом движение, начавшееся с произвольного начального расстояния между частицами, заканчивается в ближайшем устойчивом состоянии равновесия. Уравнения (30) без труда обобщаются на взаимодействие произвольного числа локализованных образований аддитивным добавлением слагаемых $P(R_{ij})$ в правую часть (30). Перечислить конфигурации связанных состояний из произвольного числа частиц уже довольно трудно (правильные и неправильные многоугольники и многогранники, конечные и бесконечные решетки и т.п.). Все эти связанные состояния могут быть размножены путем подобного растяжения фигур до попадания в следующие устойчивые состояния равновесия (конечно, при этом изменяется запас устойчивости связанного состояния).

В заключение этого раздела кратко обсудим задачу о взаимодействии локализованных образований этого же типа, но в рамках консервативной модели (7). В этом случае семейство статических решений является частью более общего семейства, характеризующегося дополнительно тремя параметрами (скоростью \mathbf{v}), и вывод уравнений взаимодействия требует, вообще говоря, знания структурной зависимости порождающего решения от \mathbf{v} . Однако в пределе $\mathbf{v} \rightarrow 0$ вывод искомого уравнений оказывается пол-



Р и с. 4. Взаимное вращение локализованных структур (шаров) вокруг общего центра тяжести в рамках модели (7)

ностью аналогичен приведенному выше с тем, однако, отличаем, что все преобразования проводятся уже во втором приближении (первое приближение дает очевидное соотношение $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{v}$):

$$d\mathbf{v}/dt = -\nabla_{\mathbf{R}} R^{-1} e^{-\alpha R} \cos \eta R. \quad (31)$$

Уравнения (31) представляют собой пример классической задачи двух тел. Хорошо известно, что эта задача может быть сведена к квадратурам. Отметим, что все статические связанные состояния систем (30) и (31) полностью совпадают. Существенное же отличие заключается в том, что теперь могут существовать и нестатические связанные состояния, которым отвечает взаимное вращение частиц вокруг общего центра тяжести (рис. 4).

7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН

Как и в предыдущем примере, оператор \hat{L} линеаризованной задачи в этом случае самосопряженный. Поэтому в качестве собственных функций u^+ , необходимых в (24), могут быть взяты собственные функции оператора \hat{L} , полученные вариацией порождающего решения по параметру.

рам x_0, y_0, z_0 . Наличие дополнительной собственной функции $(\partial_{\varphi_0} \hat{u}^{(0)})$ приводит, очевидно, и к дополнительным уравнениям взаимодействия, что является существенным отличием от предыдущего случая.

Уравнения (24) в обсуждаемой ситуации могут быть приведены к компактной векторной форме:

$$\hat{M} \mathbf{v}_1 = -\text{Re} \int (\nabla_1 u^{(0)})^* H_1^{(1)} d\mathbf{r}, \quad (32)$$

где $\mathbf{v}_1 = \{ dx_1/dt, dy_1/dt, d\varphi_1/dt \}$ — вектор обобщенной скорости, $\nabla_1 = \{ \partial_{x_1}, \partial_{y_1}, \partial_{\varphi_1} \}$ — диагональный массовый тензор, с компонентами $M_{xx} = M_{yy} = \frac{1}{2} \int |\nabla u^{(0)}|^2 d\mathbf{r}$, $M_{\varphi\varphi} = \int |u^{(0)}|^2 d\mathbf{r}$. Градиентный характер u^+ позволяет записать уравнение (32) в градиентной же форме:

$$\hat{M} \mathbf{v}_{1,2} = -\nabla_{1,2} P(R, \varphi), \quad R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (33)$$

Для вычисления потенциала взаимодействия $P(R, \varphi)$ заметим, что $H_{1,2}^{(1)}$ в (32) линейно по полю $u_2^{(0)}$ ($u_1^{(0)}$), так что

$$P(R, \varphi) = \text{Re} \int \{ \beta |u_1^{(0)}|^2 - |u_1^{(0)}|^4 \} u_1^{*(0)} u_2^{(0)} d\mathbf{r}. \quad (34)$$

Чтобы получить явную зависимость в (34), воспользуемся исходным предположением о слабости взаимодействия (спирали разнесены достаточно далеко друг от друга по сравнению с их характерными размерами) и заменим величину $u_2^{(0)}$ в (34) на ее асимптотическое выражение (10). В результате получаем

$$P(R, \varphi) = C e^{-\alpha R} \cos \varphi \cdot \cos(\eta R + \zeta_0), \quad C, \zeta_0 = \text{const}, \quad (35)$$

для одноименных спиралей,

$$P(R, \varphi) = C e^{-\alpha R} \cos(\varphi + \psi_{12}) \cdot \cos(\eta R + \zeta_0) \quad (36)$$

для разноименных спиралей, здесь $\psi_{12} = \text{arctg} [(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)]$.

В обоих случаях структура потенциалов допускает существование счетного множества устойчивых состояний равновесия, соответствующих связанным состояниям: спиральных диполей (35) и двойных спиралей (36). Эти состояния наблюдались в прямых численных экспериментах с уравнением (6).

8. ХАОТИЧЕСКИЕ БЛУЖДЕНИЯ "ЧАСТИЦ"

Здесь мы обсудим пример, демонстрирующий нетривиальную динамику локализованных структур в рамках слабо возмущенного уравнения (6):

$$\partial u / \partial t = -u + \beta u |u|^2 - u |u|^4 - (k_0^2 + \Delta) u + i\beta' u |u|^2 + \epsilon |u|^2 f(x, y), \quad (37)$$

где член $\epsilon |u|^2 f(x, y)$ описывает нелинейный отклик среды на влияние воздействия, пространственное распределение которого характеризуется плавной по сравнению с размерами спирали функцией $f(x, y)$. Уравнения (24), описывающие эволюцию параметров спирали (x_0, y_0, φ_0) , получаются с помощью тех же собственных функций, что и в задаче о взаимодействии (разд. 5). Подставляя $H^{(1)} = i\beta' u^{(0)} |u^{(0)}|^2 +$

+ $\epsilon |u^{(0)}|^2 f(x, y)$ в (24), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= B \operatorname{Re} \{ f e^{i\varphi_0} \}, \\ \frac{dy_0}{dt} &= B \operatorname{Im} \{ f e^{i\varphi_0} \}, \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = \Omega, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$B = \frac{\epsilon}{3M_{xx}} \int_0^\infty \rho \Phi^{(0)}(\rho) d\rho, \quad \Omega = \frac{\beta'}{M_{\varphi\varphi}} \int_0^\infty \rho \Phi^4{}^{(0)} d\rho.$$

Представим функцию $f(x, y)$ в виде $f = \cos ky + i \sin kx$ и проанализируем вначале ситуацию, когда вращение спирали отсутствует ($\beta' = \Omega = 0$). Тогда (38) можно представить в виде гамильтоновой системы с гамильтонианом $H = (B/k) (\sin ky_0 + \cos kx_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= B \cos ky_0 = \frac{\partial H}{\partial y_0} \\ \frac{dy_0}{dt} &= B \sin kx_0 = -\frac{\partial H}{\partial x_0}. \end{aligned} \quad (39)$$

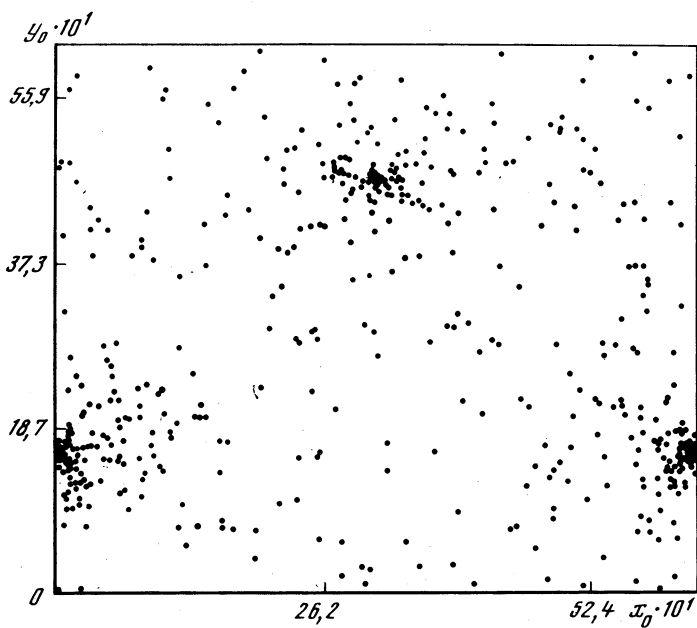
Система (39) обладает сепаратрисной сеткой, покрывающей всю x_0, y_0 -плоскость. Очевидно, что при слабых нестационарных возмущениях сепаратрисная сетка разрушится и возникнет стохастическая паутина, аналогичная рассмотренной в [9]. Существование стохастической паутины свидетельствует о возможности стохастического дрейфа спиральной волны по x_0, y_0 -плоскости в принципе на сколь угодно большие расстояния. Учет вращения спирали ($\Omega \neq 0$) приводит именно к нестационарным (периодическим во времени) возмущениям. В этом случае мы получим уравнения для координат центра спирали, зависящие от времени, что гарантирует разрушение сепаратрисной сетки невозмущенной системы (39) (рис. 5) [5].

Мы пока не имеем численного подтверждения случайного блуждания локализованной структуры в рамках уравнения (6), однако такое подтверждение уже получено в случае двумерного уравнения (7) с периодическим неоднородными коэффициентами (ранее одномерное случайное блуждание было обнаружено для солитонов нелинейного уравнения Шредингера [10]).

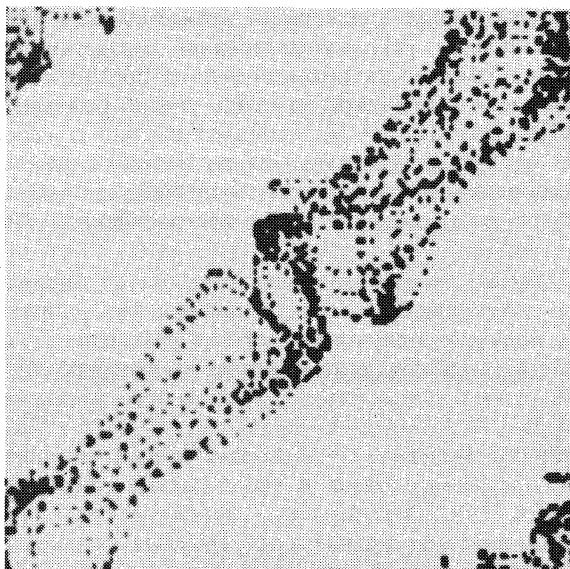
Замечательно, что модель (7) позволяет понять механизм рождения пространственно-временного хаоса в чисто динамических моделях поля. Один из основных таких механизмов — возникновение локализованных структур и их случайное блуждание в пространстве как результат взаимодействия с другими "частицами" или регулярными полями. Так, при определенных начальных условиях динамика системы

$$\begin{aligned} \partial^2 u / \partial t^2 &= -u + \beta u^2 - u^2 - u^3 - (k_0^2 + \Delta)^2 u + \kappa u f(x) f(y), \\ f(z) &= a_0 + a_1 \cos(kz) + \dots, \quad z = x, y, \end{aligned} \quad (40)$$

может рассматриваться как взаимодействие одной "частицы" с периоди-



Р и с. 5. Сечение Пуанкаре для уравнения (38) для случая $\Omega \neq 0$



Р и с. 6. Траектория движения центра шара на плоскости (x, y)
 Результаты прямого численного интегрирования уравнения (40)

чески неоднородным полем. В двумерном случае уравнения (24) имеют вид

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = D \sin kx_0 (a_0 + a_1 \cos ky_0), \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = D (a_0 + a_1 \cos kx_0) \sin ky_0,$$

$$D = \text{const.} \quad (41)$$

Известно, что система (41) описывает случайное блуждание, которое также наблюдалось в прямых численных экспериментах в рамках уравнения (40) (рис. 6).

Аналогичные результаты могут быть получены и для локализованных спиралей, описываемых гамильтоновым аналогом уравнения

$$i \partial u / \partial t = u - \beta u |u|^2 - u |u|^4 - (k_0^2 + \Delta)^2 u + \epsilon |u|^2 f(x, y). \quad (42)$$

Обратим внимание на принципиальное обстоятельство — случайное блуждание локализованных состояний поля в этих задачах диктуется детерминированными законами и потому характер диффузии "частиц" будет качественно отличаться от привычной диффузии на случайных множествах (типа броуновской, т.е. удовлетворяющей закону $\langle r^2 \rangle \sim t$. Законы такой самосогласованной "динамической диффузии" сейчас интенсивно исследуются (см., в частности, [11]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент // Физика элементар. частиц и атом. ядра. 1983. Т. 14, № 1. С. 123–180.
2. Barashenkov I.V., Gocheva A.D., Makhankov V.G., Puzynin I.V. Stability of the soliton-like "bubbles" // Physica D. 1981. Vol. 34, N 1/2. P. 240–254.
3. Gorshkov K.A., Lomov A.S., Rabinovich M.I. Three-dimensional particle-like solutions of coupled nonlinear fields // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 137, N 6. P. 250–254.
4. Ломов А.С., Рабинович М.И. Частицеподобные решения в трехмерных неравновесных средах // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 48, № 3. С. 11–15.
5. Aranson I.S., Rabinovich M.I. Dynamics of spiral waves in nonequilibrium media // J. Phys. A. 1989. Vol. 22, N 12. P. 220–235.
6. Арансов И.С., Горшков К.А., Ломов А.С., Рабинович М.И. Динамика локализованных состояний нелинейных многомерных полей // УФН. 1990. Т. 171, № 4. С. 373–380.
7. Aranson I.S., Gorshkov K.A., Lomov A.S., Rabinovich M.I. Localized structures in models of convection: Stability and bound states // Phys. Rev. Lett. A. 1990. Vol. 139. P. 250–254.
8. Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A. Interaction of solitons in nonintegrable systems // Physica D. 1981. Vol. 3, N 1/2. P. 428–438.
9. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усильов Д.А., Черников А.А. Минимальный хаос, стохастическая паутина и структуры с симметрией типа "квазикристалла": Препр. № 1289 ИКИ АН СССР. М., 1987.
10. Aranson I.S., Gorshkov K.A., Rabinovich M.I. Stochastization and spreading of wave trains in an oscillating potential // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 139, N 1/2. P. 65–72.
11. Aranson I.S., Rabinovich M.I., Tsimring L.Sh. Multifractal anomalous diffusion of particles in regular fields // Phys. Lett. A. 1990. Vol. 23. P. 286–313.

ТУРБУЛЕНТНЫЙ АЛЬВЕНОВСКИЙ ПОГРАНСЛОЙ

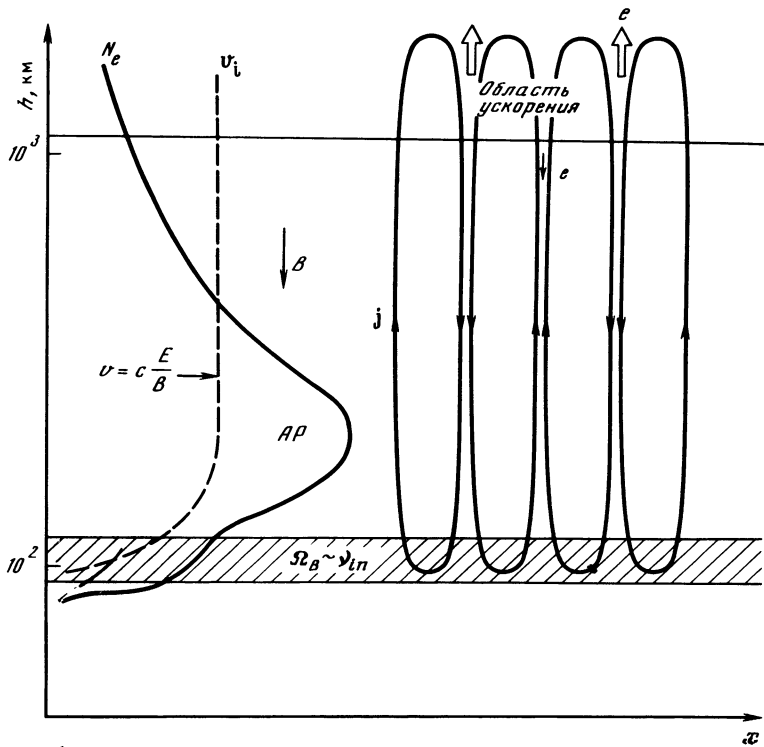
В.Ю. ТРАХТЕНГЕРЦ

1. В атмосферах поверхностно активных звезд и планет с магнитным полем формируется своеобразный переходный слой, разделяющий замороженную в магнитное поле плазму и нейтральный газ. Граница раздела определяется условием нарушения замороженности и приходится на область высот в атмосфере, где выполняется равенство (рис. 1)

$$\Omega_B \sim \nu_{in}, \quad (1)$$

где Ω_B — гирочастота ионов, ν_{in} — частота соударений ионов с нейтралами. Этот слой из-за быстрого падения плотности атмосферы с высотой оказывается тонким по сравнению с характерным масштабом изменения параметров плазмы. При наличии относительных движений плазмы и нейтрального газа (поверхностной активности) такой погранслоем может играть чрезвычайно важную роль в процессе преобразования механической энергии движений нейтральной среды в электромагнитную энергию и внутреннюю энергию плазмы. Такая задача возникает при анализе явлений, происходящих во внешней фотосфере и хромосфере Солнца, в земной ионосфере в области протекания авроральных явлений. Ниже на примере атмосферы Земли анализируется такое пограничное течение, обусловленное взаимодействием магнитосферной конвекции с атмосферной подложкой: переход течения в турбулентный режим, энергетика и динамика турбулентного погранслоя (ТПС), роль ТПС в протекании магнитосферных явлений. Вместе с тем теория ТПС ставит ряд задач нелинейной волновой динамики, которые могут представлять самостоятельный интерес.

2. В общем случае структура описанного выше погранслоя довольно сложна и включает взаимосвязанную динамику как нейтральной среды, так и плазмы в магнитном поле. Если еще учесть неоднородность параметров среды, то получить сколько-нибудь обозримое решение затруднительно. Однако если степень ионизации среды в области переходного слоя ($\Omega_B \sim \nu_{in}$) мала, движение нейтралов в первом приближении можно считать заданным. Второе существенное упрощение задачи можно получить, если учесть малую толщину пограничного слоя. В этом приближении взаимодействие потока плазмы с нейтральным газом можно описать с помощью так называемого импедансного граничного условия (см. ниже). Существенную роль в реальных условиях играет структура плазмы выше переходного слоя. Как правило, концентрация плазмы с высотой меняется монотонно, достигая максимума на некотором уровне над погранслоем (см. рис. 1). По существу, плазменный слой представляет собой резонатор для альвеновских волн, что выделяет последние среди других типов волновых возмущений и резко понижает порог скорости, при которой происходит переход к турбулентному течению. Альвеновские волны обладают еще одним замечательным качеством. В относительно холодной плазме их масштаб поперек магнитного поля практически произволен, поэтому альвеновские возмущения хорошо "адаптируются" к любым



Р и с. 1. Структура пограничного слоя между потоком плазмы и нейтральным газом

типам движений нейтрального газа, будь то однородное течение, конвективные ячейки либо циклонические вихри.

3. Проведем количественное рассмотрение на примере простейшего плоскопараллельного однородного течения поперек магнитного поля (см. рис. 1) с учетом указанных выше упрощений (заданное движение нейтрального газа, импедансное граничное условие). Остановимся сначала на некоторых результатах линейной теории. Исходными здесь служат волновое уравнение для альвеновских волн и два граничных условия: условие излучения на бесконечности и импедансное граничное условие на атмосферной подложке. В фурье-представлении ($J \sim j(z) \exp\{-i\omega t + ik\rho\}$) имеем (в покоящейся относительно плазмы системе координат)

$$\frac{d^2 j}{dz^2} + \frac{\omega^2}{v_A^2(z)} j = 0, \quad (2)$$

$$z = 0: \Sigma_p j + (c^2/4\pi i\omega) \partial j / \partial z = 0, \quad (3)$$

$$z \rightarrow \infty: j \rightarrow \exp\{i \int^z [\omega/v_A(z')] dz'\}, \quad (4)$$

где j – продольный ток в альвеновской волне, интегральная педерсеновская проводимость переходного слоя Σ_p имеет вид

$$\Sigma_p = \int \frac{\omega_{pi}^2 \omega v_{in}}{4\pi(\nu_{in}^2 + \Omega_B^2)\omega_D} dz, \quad \omega_D = \omega - \left(\frac{\kappa_y v_{in} + \kappa_x \Omega_B}{\Omega_B^2 + \nu_{in}^2} \right) v_{in} v_0, \quad (5)$$

где κ – поперечное волновое число, v_0 – скорость течения нейтрального газа, ω_{pi} – плазменная частота ионов в переходном слое. В (4) входит сдвиговое течение, которое и приводит к появлению неустойчивости. Неустойчивыми оказываются собственные моды альвеновского резонатора (АР), через который обеспечивается обратная связь. Спектр собственных частот АР определяется конкретной зависимостью $v_A(z)$ и величиной Σ_p . Через верхнюю стенку резонатора существует утечка энергии, однако для „низких мод при большом перепаде концентрации плазмы в центре АР и на периферии ($z \rightarrow \infty$) эта утечка невелика. Отсылая за подробностями вывода к оригинальным работам [1–3], приведем выражение для инкремента неустойчивости основной моды альвеновских волн, которое следует из анализа (1)–(4):

$$\gamma = \frac{v_{A0}}{l} \frac{\delta}{1 + \delta^2} \left(1 - \frac{v_{\Pi}}{v_0} \right), \quad (6)$$

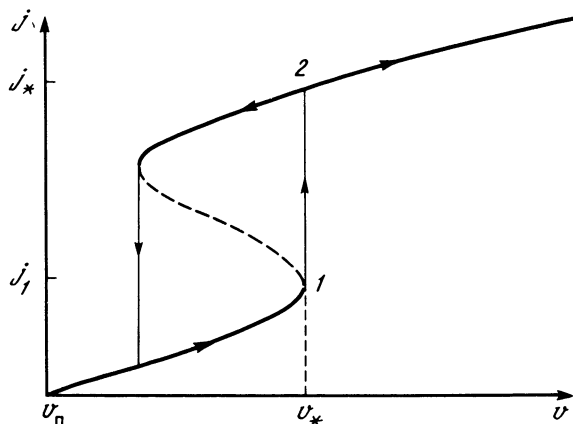
где v_{A0} – альвеновская скорость в максимуме концентрации N плазмы в АР, l – характерный масштаб спада N выше максимума, $\delta = \Sigma_{p0}/3\Sigma_w$, $\Sigma_{p0} = \Sigma_p(v_0 = 0)$, $\Sigma_w = c^2/4\pi v_{A0}$ – волновая проводимость, v_{Π} – пороговая скорость, определяемая линейными потерями альвеновских волн в АР и атмосферной подложке. Оптимальный поперечный масштаб по порядку величины определяется из условия двойного резонанса

$$\omega_0 \approx 4v_{A0}/l \approx \kappa_{opt} v_0, \quad \kappa_{opt} \approx 4v_{A0}/v_0 l, \quad (7)$$

где ω_0 – частота основной моды АР.

Таким образом, при $v_0 \ll v_{A0}$ возбуждаются сильно анизотропные альвеновские вихри с поперечным масштабом $\kappa_{opt}^{-1} \ll l$. В выражении (6) для инкремента обращает на себя внимание зависимость от коэффициента δ , пропорционального концентрации ионов в переходном слое и характеризующего электродинамическое согласование АР с подложкой. В реальных условиях (например, в ночной ионосфере) $\delta \ll 1$. Если по мере роста интенсивности альвеновских вихрей возникает ускорение электронов, способных создавать дополнительную ионизацию в переходном слое, то развитие неустойчивости из-за роста δ может приобрести взрывной характер. Существуют и реальные механизмы ускорения частиц по мере роста амплитуды альвеновских волн. Одним из таких механизмов может служить включение на развитой стадии неустойчивости аномального сопротивления, обусловленное превышением амплитуды продольного тока в альвеновской волне критического значения, соответствующего развитию токовой неустойчивости. Более детальный анализ этого механизма проведен в [4]. Включение аномального сопротивления приводит, с одной стороны, к турбулентному нагреву плазмы, а с другой – к появлению „убегающих” ускоренных электронов.

4. Исходя из описанной выше физической картины можно построить по-



Р и с. 2. Кривая стационарных состояний турбулентного погранслоя
Стрелками на кривой показано движение системы при изменении скорости течения

луфеноменологическую нелинейную теорию ТПС. Соответствующие уравнения в случае однородного ТПС имеют вид

$$dW/dt = \gamma W - Q_1 - Q_2, \quad Q_1 = a_1 j^3, \quad Q_2 = a_2 j^{3+p}, \quad p > 0; \quad (8)$$

$$dN_i/dt = I_0 + Q_2/w_i - \alpha N_i^2. \quad (9)$$

Уравнение (8) представляет собой закон сохранения энергии, плотность энергии турбулентности $W = 2\pi j^2 / \kappa_{opt}^2 c^2$, $\kappa_{opt} \sim v_0^{-1}$, Q_1 характеризует турбулентный нагрев, а Q_2 — появление ускоренных электронов, $\gamma \sim N_i (1 + v^2 N_i^2)^{-1} (1 - v_{п}/v_0)$, N_i — концентрация ионов в переходном слое, I_0 — сторонний источник ионизации, w_i — потенциал ионизации, α — коэффициент рекомбинации. На рис. 2 изображена кривая стационарных значений амплитуды тока j в альвеновских вихрях. Как и ожидалось, кривая носит гистерезисный характер. При достижении некоторой критической скорости течения v_* происходит взрывное усиление ТПС (переход из состояния 1 в 2 на рис. 2), причем в верхнем состоянии $Q_2 \sim v_0^2$.

Остановимся на особенностях пространственно-временной динамики ТПС. При плавной эволюции параметров течения критическая скорость v_* в реальных условиях сначала достигается в одной точке. Как будет происходить пространственно-временное включение ТПС? Попробуем ответить на этот вопрос в случае, когда движение плазмы относительно нейтрального газа обусловлено электрическим дрейфом поперек магнитного поля, как это имеет место в магнитосфере Земли. При включении ТПС происходит перестройка самого течения из-за изменения параметров переходного слоя (увеличения N_i), влияющих на величину $v_0 = cE/B$. Запишем соответствующую систему уравнений:

$$\partial N_i / \partial t + (v \nabla) N_i = I_0 + Q_2/w_i - \alpha N_i^2, \quad (10)$$

$$\text{Div}(\hat{\Sigma} + \Sigma_w) \mathbf{E} |_{z=0} = 0, \quad \hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}_0 (N_i/N_0), \quad (11)$$

где источник Q_2 , отвечающий включению ТПС, можно в соответствии

с изложенным выше записать в виде

$$\frac{Q_2}{Q_0} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 1(v - v_*) = \left(\frac{E}{E_0}\right)^2 1(E - E_*), \quad 1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (12)$$

скорость $v = cE/B$, тензор проводимости подложки $\hat{\Sigma} = \begin{vmatrix} \Sigma_P & \Sigma_H \\ -\Sigma_H & \Sigma_P \end{vmatrix}$, где Σ_H — холловская проводимость. Уравнение (11) описывает перестройку электрического поля (а следовательно, скорости течения) из-за изменения N_i в переходном слое (Div — двумерная дивергенция в горизонтальной плоскости). Легко видеть, что (10), (11) очень напоминает систему уравнений, описывающих двумерный электрический разряд в газе с источником ионизации Q_2 . В соответствии с этой аналогией пространственно-временное развитие ТПС из точки будет происходить в виде так называемого стримера — вытянутой вдоль внешнего электрического поля E_0 области повышенной ионизации N_i , скорость движения которой вдоль E_0 определяется величиной источника Q_2 и фоновой проводимостью Σ_{P0} . Непосредственно перед головной частью стримера электрическое поле резко растет и превышает критическое поле E_* , что и ведет к дальнейшему продвижению стримера. Количественные оценки характеристик стримера можно найти в [5].

5. Развитая выше теория ТПС оказалась продуктивной для объяснения явлений, возникающих в полярной ионосфере в периоды магнитосферных суббурь. В эти периоды, которые, как правило, сопровождаются усилением электрического поля, определяющего движение плазмы на ионосферных высотах, резко усиливаются потоки энергичных электронов, возникают быстро движущиеся области повышенной ионизации, во многом напоминающие стример с соответствующей системой электрических токов и усилением электрического поля вблизи головы стримера. На основе описанной выше теории ТПС удастся количественно объяснить характеристики указанных явлений. Таким образом, развитые выше представления о турбулентном альвеновском погранслое по существу определяют новый энергетический источник в магнитосфере Земли, который непосредственно черпает энергию из магнитосферной конвекции и может давать существенный вклад в энергетику магнитосферной суббури.

Представления об альвеновском ТПС могут оказаться плодотворными и в объяснении физических процессов, происходящих в атмосфере Солнца. В частности, такие образования в солнечной хромосфере, как спикулы, могут быть результатом возбуждения альвеновских вихрей фотосферными конвективными ячейками. Заслуживает внимание оценка вклада ТПС в энергетику солнечной вспышки. Вместе с тем указанные выше задачи являются, на наш взгляд, новым интересным объектом исследований в области нелинейной волновой динамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трахтенгерц В.Ю., Фельдштейн А.Я. О расслоении магнитосферной конвекции // Физика плазмы. 1982. Т. 8, № 1. С. 140–147.
2. Trakhtengerts V. Yu., Feldstein A. Ya. Quiet auroral arcs: Ionospheric effect of magnetospheric convection stratification // Planet. and Space Sci. 1984. Vol. 32, N 2. P. 127–134.

3. Трахтенгерц В.Ю., Фельдштейн А.Я. О возбуждении мелкомасштабных электромагнитных возмущений в ионосферном альвеновском резонаторе // Геомагнетизм и аэрономия. 1987. Т. 27, № 2. С. 315–317.
4. Трахтенгерц В.Ю., Фельдштейн А.Я. Турбулентный режим магнитосферной конвекции // Геомагнетизм и аэрономия. 1987. Т. 27, № 2. С. 258–264.
5. Трахтенгерц В.Ю., Фельдштейн А.Я. Взрывная фаза суббури как следствие турбулентного режима магнитосферной конвекции // Геомагнетизм и аэрономия. 1988. Т. 28, № 5. С. 734–748.

УДК 533.951

АВТОПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ И БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ МОЩНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА В ИОНИЗУЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В.Б. ГИЛЬДЕНБУРГ, А.В. КИМ, В.А. КРУПНОВ,
В.Е. СЕМЕНОВ

Принято считать, что высокочастотный электромагнитный импульс (волновой пакет) может распространяться без отражения в однородной или плавно неоднородной газовой среде лишь в том случае, если мощность его (при заданной длительности) не превышает некоторой пороговой величины, определяемой условиями возникновения пробоя. При этом в качестве заведомо достаточного условия запираания (так называемой отсечки) пробивающего импульса, введенного в газ на частоте ω_0 , при малых частотах соударений электронов $\nu \ll \omega_0$, обычно принимается достижение электронной концентрацией N в процессе пробоя (за время, меньшее длительности импульса) известного критического значения $N_{c0} = m\omega_0^2/4\pi e^2$, которое и рассматривается как верхняя возможная граница N в распространяющемся импульсе.

В этом кажущемся, на первый взгляд, очевидным критерии отсечки сигнала ($N = N_{c0}$) не учтена, однако, возможность параметрического преобразования (повышения) начальной частоты сигнала ω_0 , обусловленного нестационарностью пробойной плазмы. Хотя само по себе явление преобразования частоты изучалось ранее как для случая заданного временно́но изменения параметра среды [1, 2], так и в некоторых задачах самовоздействия волновых пакетов в нелинейных средах [3, 4], во всех исследованиях по динамике высокочастотного пробоя газов оно фактически полностью игнорировалось (указывалось лишь на возможную роль пробоя среды как одной из причин наблюдаемого уширения спектра мощных лазерных импульсов [5]). В настоящем кратком сообщении мы, не ставя цели всестороннего анализа явления ионизационного преобразования частоты, проиллюстрируем его роль в динамике пробоя на нескольких примерах¹, позволяющих выявить связанные с ним новые важные возможности: а) сильного повышения частоты сигнала (в конечном состоянии $\omega \gg \omega_0$); б) достижения значений $N \gg N_{c0}$ в безотражательном режиме; в) полного предотвращения отсечки в условиях пробоя.

Интересующие нас эффекты наиболее ярко выражены при пробое в так

¹См. также [6].

называемых сверхсильных полях [7], где энергия осциллирующих электронов достаточно велика по сравнению с потенциалом ионизации молекул и изменение импульса электрона вследствие соударений происходит в среднем за время ν^{-1} , много большее характерного времени роста электронной концентрации ν_i^{-1} . В противоположном случае $\nu_i \ll \nu$ волна сильно затухает прежде, чем может заметно измениться ее частота. Полагая далее выполненными условия

$$\omega \gg \nu_i \gg \nu \quad (1)$$

и принимая обычное предположение о нулевом значении (или изотропном распределении) скоростей электронов в момент рождения, запишем уравнение для электрического поля волны $E(x, t)$ в виде

$$c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \omega_p^2 E. \quad (2)$$

Рассмотрим два различных механизма ионизации газа в поле электромагнитной волны: 1) ионизация молекул электронным ударом; 2) непосредственная ионизация полем волны (многофотонная ионизация, туннельный отрыв электрона).

1. ИОНИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОННЫМ УДАРОМ

Уравнение баланса для электронной концентрации или пропорциональной ей величины ω_p^2 в этом случае имеет вид

$$\partial \omega_p^2 / \partial t = \nu_i \omega_p^2 \quad (3)$$

(частота потерь электронов ν_a предполагается малой по сравнению с частотой ионизации ν_i).

В локально квазигармоническом поле $E(x, t) = A(x, t) \exp[i\varphi(x, t)]$ ($\omega = \partial\varphi/\partial t \gg \nu_i$, $k = -\partial\varphi/\partial x \gg L^{-1}$, $\omega\tau \gg 1$; L и τ — пространственная и временная протяженности импульса) частота ионизации ν_i не зависит от фазы колебаний и может рассматриваться как заданная функция отношения $A/\omega = U$: $\nu_i = \nu_i(U)$ [6], что позволяет перейти в (2) к приближению геометрической оптики, записывая уравнения переноса локальной частоты ω и локальной амплитуды A в виде

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial t} + v \frac{\partial \omega^2}{\partial x} = \frac{\partial \omega_p^2}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\omega A^2)}{\partial t} + \frac{\partial(v\omega A^2)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

где $v = c(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2} = c(1 - N/N_c)^{1/2}$ — локальная групповая скорость волны, $N_c = m\omega^2/4\pi e^2$. При этом локальное волновое число $k = (\omega/c) \times (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$. Уравнение (5) можно также записать в виде

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{\partial(vA^2)}{\partial x} = -\frac{1}{2}\nu_i A^2 \omega_p^2 / \omega^2. \quad (6)$$

Заметим, что хотя уравнения (2), (4)–(6) не содержат частоты соударений ν и не описывают поглощения волны, обусловленного соударениями

электронов, в них учтен другой, гораздо более сильный при $v_i \gg v$ источник диссипации: передача энергии волны вновь рождающимся электронам, приобретающим в поле упорядоченную осцилляторную (адиабатически меняющуюся вместе с амплитудой волны) и постоянную (зависящую от фазы поля в момент рождения и сохраняющуюся после прохождения импульса) компоненты скорости.

Изменение разности $\omega^2 - \omega_p^2$ вдоль групповой траектории (характеристики) $x = x(t)$, $dx/dt = v$, как следует из (4), описывается уравнением

$$d(\omega^2 - \omega_p^2)/dt = -v \partial \omega_p^2 / \partial x. \quad (7)$$

Это означает, что плазма при пробое всегда будет оставаться прозрачной ($\omega > \omega_p$) при выполнении условия $\partial \omega_p^2 / \partial x \leq 0$. Ниже приведены некоторые отвечающие этому условию результаты решения системы (3)–(5), полученные для случаев, допускающих различные упрощения.

1. Однородный разряд, создаваемый однородной бесконечной плоской волной. Полагая величины A , ω , ω_p не зависящими от x , на основании (4), (5) находим

$$\omega^2 - \omega_p^2 = \omega_0^2 - \omega_{p0}^2 = k^2 c^2 = \text{const}, \quad (8)$$

$$A^2 \omega = A_0^2 \omega_0 = \text{const}, \quad v \omega = v_0 \omega_0,$$

где A_0 , ω_0 , ω_{p0} , v_0 – заданные начальные (в момент $t = 0$) значения A , ω , ω_p , v . В результате задача сводится к интегрированию уравнения первого порядка (3) с заданной зависимостью $v_i(U(\omega_p))$, $U = A/\omega = A_0 \times \times \omega_0^{1/2} (\omega_p^2 + k^2 c^2)^{-3/4}$. Очевидно, что с ростом t частоты ω и ω_p растут, а амплитуда A убывает. Процесс продолжается, пока величина U , определяющая осцилляторную энергию электронов, не снизится до некоторого порога $U_c = A_c/\omega_0$, за которым поле перестает быть "сверхсильным", неравенство $v_i \gg v$ нарушается и возникает сильное добавочное затухание волны из-за обычных соударений. Соответствующие предельные значения ω , ω_p и v при $A_0 \gg A_c$:

$$\omega_{p \max} \approx \omega_{\max} = \omega_0 (A_0/A_c)^{2/3} \gg \omega_0, \quad (9)$$

$$v_{\min} \approx v_0 (A_c/A_0)^{2/3} \ll v_0.$$

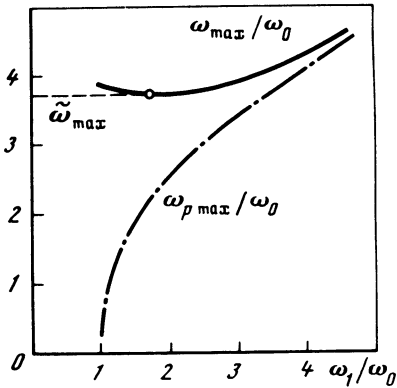
2. Начальная задача для полуограниченного импульса при $v_i(U > U_c) = \text{const}$. Пусть при $t = 0$ заданы $\omega = \omega_0$, $\omega_p = \omega_{p0} \ll \omega_0$, $A(x < 0) = A_0$, $A(x > 0) = 0$ (соответствующее обобщение для импульса конечной длительности очевидно). В области $x < 0$ справедливы соотношения (8), (9) и $\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 \exp(v_i t)$. В области $x > 0$ передний фронт волны перемещается со скоростью, близкой к c , так что при $0 < x < ct$, $A/\omega > U_c$ имеем $\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 \exp[v_i(t - x/c)]$, $\partial \omega_p^2 / \partial x < 0$ и, следовательно, по мере перемещения групповых фронтов вдоль характеристик $x(t)$ разность $\omega^2 - \omega_p^2$ возрастает. Можно показать, что при этом в области $x > 0$ на характеристиках

$$dv/dt = \frac{1}{2} c v_i (1 - v/c)^2 (1 - v/c), \quad (10)$$

$$\omega(1 - v/c) = \text{const}, \quad \omega_p^2 (c - v)/(c + v) = \text{const}, \quad (11)$$

$$\omega A^2 (vc - v_1^2) = \omega_1 A_1^2 v_1 (c - v_1) = \text{const}, \quad (12)$$

где A_1 , ω_1 , v_1 – начальные значения соответствующих величин, задаваемые



для каждого группового фронта в момент t_1 его прохождения через точку $x = 0$ на основании решения для области $x < 0$. Максимальные значения ω и ω_p , достигающиеся в области $x > 0$ на различных характеристиках, представлены как функции ω_1 при $A_0/A_c = 10$ на рисунке. Как видим, максимум ω не опускается ниже величины $\tilde{\omega}_{\max} \approx \omega_0(A_0/A_c)^{1/2}$, отвечающей тому элементу импульса, который испытывает вследствие неоднородности v наибольшее растяжение.

3. Вход импульса в ионизируемую

среду. Приближение $v = \text{const}$. Если волна с заданными параметрами A_0, ω_0 падает на среду с достаточно резкой границей, то частота ω в пограничной области все время остается равной начальному значению ω_0 и время запирания сигнала на границе, т.е. пороговая длительность τ_c , определяется обычным образом $\tau_c = v_{i0}^{-1} \times \times \ln(\omega_0^2/\omega_{p0}^2)$, где $v_{i0} = v_i(A_0/\omega_0)$. С удалением от границы частота прошедшего импульса (с длительностью $\tau < \tau_c$) непрерывно возрастает до уровня, определяемого отношением $A_0/A_c \gg 1$. В частности, при $\tau \ll \tau_c$, когда оправдано приближение $v = \text{const} = c$ ($\omega_p \ll \omega$), на расстоянии $l \approx \approx (c\omega_0^2/v_{i0}\omega_{p0}^2) \exp(-v_{i0}\tau) \gg c/v_{i0}$, где $U = U_c$, частота ω достигает максимума (9). При этом в типичном для области "сверхсильных" полей случае падающей зависимости $v_i(A/\omega) \sim (A/\omega)^{-\gamma}$, $\gamma \approx 1$, концентрация также растет, достигая значений $N \gg N_{c0}$: $\omega_{p\max}^2 \approx \omega_{\max}^2(c/v_{i0}l)$ ($\omega_{\max} \gg \gg \omega_{p\max} \gg \omega_0$).

Ионизирующий импульс надпороговой длительности ($\tau \gg \tau_c$) может быть введен в среду без наступления отсечки, если граница среды достаточно сильно размыта. В частности, если масштаб переходной области $L = v_i(\partial v_i(U, x)/\partial x)^{-1} \gg c\tau$, как следует из оценки величины $\partial\omega_p^2/\partial x$, по прежнему $\omega_p \ll \omega$, $v \approx c$ и максимумы ω и ω_p много больше ω_0 .

Отметим также, что возможность выполнения условия $\partial\omega_p^2/\partial x < 0$, обеспечивающего положительность $\omega^2 - \omega_p^2$, в коротком импульсе вполне очевидна вследствие конечной скорости переднего ионизирующего фронта не только для случая неоднородного газа ($v_i = v_i(U, x)$), но и для случая неоднородного начального распределения концентрации $\omega_{p0}^2 = \omega_{p0}^2(x)$. Отсюда следует, что производимая импульсом ионизация среды благодаря процессу автопреобразования частоты не только не является обязательной причиной запирания сигнала (при $\omega_p > \omega$), но может, как это ни парадоксально на первый взгляд, приводить к просветлению создаваемой сторонним источником непрозрачной плазмы: при условии $v_iL > c$ импульс с длительностью $\tau < L/c$ и амплитудой поля $A_0 \gg A_c$ преодолевает без отражения (но, разумеется, с потерей запасенной энергии) область, в которой $\omega_{p0}(x)$ нарастает до значений, в несколько раз превышающих ω_0 .

2. НЕПОСРЕДСТВЕННАЯ ИОНИЗАЦИЯ ПОЛЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Такой механизм ионизации может быть преобладающим при пробое разреженного газа мощным лазерным импульсом. Если энергия осциллирующей свободной электрона в поле $w \sim = e^2 A^2 / 2m\omega^2$ невелика по сравнению с потенциалом ионизации молекул I , то вероятность многофотонной ионизации является функцией амплитуды и частоты и уравнение для ω_p^2 имеет вид

$$\partial \omega_p^2 / \partial t = W(A, \omega). \quad (13)$$

В отличие от (3) оно не содержит в правой части величины ω_p^2 , т.е. процесс роста N и ω_p^2 не является теперь лавинообразным. Хотя конкретный вид функций $\omega_p^2(x, t)$, $A(x, t)$, $\omega(x, t)$ при этом меняется по сравнению с рассмотренными выше случаями, качественного изменения решений не происходит и каких-либо принципиально новых эффектов не появляется.

В обратном предельном случае $w \sim \gg I$ скорость ионизации W (правая часть уравнения баланса (13)) определяется вероятностью туннельного вырывания электрона [8] и зависит от мгновенного (действительного) значения электрического поля $|\operatorname{Re} E(t)|$:

$$W = K \beta \exp(-E_0 / |\operatorname{Re} E|), \quad (14)$$

где $K = (4\pi e^2 / m) N_m$, $\beta \sim I / \hbar$, $E_0 = (2mI^3)^{1/2} (3/4 \hbar e)^{-1}$, N_m — концентрация молекул. При этом в поле с линейной поляризацией ($\operatorname{Re} E = A \cos \varphi$) величина W является функцией не только амплитуды, но и фазы поля, и, следовательно, величина ω_p^2 содержит как медленно (в масштабе ω^{-1}) растущую часть, определяемую средним значением W , так и быстро осциллирующие гармоники:

$$\frac{\partial \omega_p^2}{\partial t} = W = W_0 + W_2 \cos 2\varphi + \dots, \quad (15)$$

$$W_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} W(|A \cos \varphi|) d\varphi, \quad (16)$$

$$W_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} W(|A \cos \varphi|) \cos 2\varphi d\varphi. \quad (17)$$

Учет в правой части уравнения (2) нулевой и второй гармоник $\omega_p^2(x, t)$, играющих главную роль в рассматриваемом квазигармоническом приближении ($W_{0,2} \ll \omega^3$), приводит к новому, отличному от (5) или (6) уравнению переноса для амплитуды основной (первой) гармоники поля:

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \frac{\partial (vA^2)}{\partial x} = F(A, \omega), \quad (18)$$

$$F(A, \omega) = -A^2 \omega^{-2} \langle \sin^2 \varphi W(A, \varphi) \rangle = -\frac{1}{2} A^2 \omega^{-2} (W_0 - \frac{1}{2} W_2) \quad (19)$$

(угловые скобки означают усреднение по φ). Отсюда видно, что закон изменения амплитуды A вдоль характеристики в этом случае существенно зависит от характера распределения скорости ионизации по фазам поля φ . В частности, если ионизация происходит в основном при значениях поля.

близких к максимальному, т.е. при $\cos \varphi = \pm 1$, то скорость убывания амплитуды F сильно снижается. Причиной этого является уменьшение постоянной составляющей скорости электрона, приобретаемой в момент его рождения. В предельном случае $W \sim \delta(|\operatorname{Re} E| - A) \sim \delta(\sin \varphi)$, как следует из (19), $F = 0$, т.е. амплитуда в процессе преобразования частоты остается постоянной. Близкая к этому ситуация, как видно из (14), реализуется в случае $A \ll E_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Н.С. О диэлектрической проницаемости нестационарной плазмы // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 7. С. 960–968.
2. Крацов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
3. Островский Л.А. Ударные волны огибающих // ЖЭТФ. 1968. Т. 54, № 4. С. 1235–1243.
4. Mestdagh D., Haelterman M. Spectral super-broadening of ultra-short pulses in a nonlinear Kerr medium: Effect of relaxation // Opt. Commun. 1987. Vol. 61, N 4. P. 291–295.
5. Blombergen N. The influence of electron plasma formation on superbroadening in light filaments // Opt. Commun. 1973. Vol. 8, N 4. P. 285–288.
6. Гильденбурге В.Б., Крупнов В.А., Семенов В.Е. Автопреобразование частоты и безотражательное распространение высокочастотного электромагнитного импульса в условиях пробоя // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, № 18. С. 1695–1698.
7. Арутюнян С.Г., Рухадзе А.А. К теории пробоя газов электромагнитными полями большой амплитуды // Физика плазмы. 1979. Т. 5, № 3. С. 702–704.
8. Райзер Ю.П. Лазерная искра и распространение разрядов. М.: Наука, 1974. 308 с.

УДК 533.951

НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

В.А. ГОРДИН, В.И. ПЕТВИАШВИЛИ

1. В проблеме удержания плазмы постоянным магнитным полем важное место занимает устойчивость в приближении идеальной магнитной гидродинамики (МГД). Определение устойчивости стационарной точки системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющее ясный физический смысл, было предложено А.М. Ляпуновым [1]. Он же предложил достаточное условие такой устойчивости, основанное на проверке свойств экстремальных точек некоторой функции, называемой функцией Ляпунова, определенной на фазовом пространстве системы.

Идеи теории Ляпунова для эволюционных уравнений в частности производных, т.е. в случае бесконечномерного фазового пространства, начали развиваться в 50-х годах, но получили распространение применительно к уравнениям гидродинамики лишь в 70-х годах (см. [2–4] и там дальнейшие ссылки). К этому времени уже была хорошо развита линейная МГД теория (см., например, [5, 6]), исследующая необходимые условия устойчивости. В случае идеальной МГД линейная теория указывает множество состояний равновесия, для которых все частоты линейных колебаний действительны. Это, как известно [1], является лишь необходимым,

но не достаточным условием устойчивости исходной нелинейной системы. Оно не учитывает, например, возможной беспороговой неустойчивости, вызванной взаимодействием трех или более линейных волн в неоднородной среде. Узловым моментом теории Ляпунова является нахождение подходящей функции (функционала) Ляпунова. Для этой цели здесь оказалась полезной функциональная серия первых интегралов, связанная со спиральностью [7, 8]. Стационарные решения МГД-уравнений, которые проверяются на устойчивость по Ляпунову, получаются как экстремали, т.е. как решения уравнений Эйлера, для подходящих функционалов Ляпунова. Тем самым ограничивается класс равновесных решений — не для всякого решения уравнения Грэда—Шафранова [6] мы можем подобрать нужный функционал.

Следующий шаг состоит в проверке строгой положительной определенности второй вариации функционала Ляпунова в окрестности экстремали. Здесь возникают трудности, связанные с бесконечномерностью фазового пространства: возможность непрерывного спектра для уравнений Якоби, коэффициенты которого имеют полюсы на резонансных поверхностях, а также различие в понятиях положительной определенности и строгой положительной определенности.

2. Уравнения идеальной МГД:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} &= \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \\ d_t p + \gamma p \text{ div} \mathbf{v} &= 0, \quad \partial_t \rho + \text{div} \rho \mathbf{v} = 0, \\ \rho d_t \mathbf{v} &= -\nabla p + [\text{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}]/4\pi \end{aligned} \quad (1)$$

(γ — показатель адиабаты, другие обозначения общепринятые) обладают следующими первыми интегралами:

$$\begin{aligned} \int \rho v d^3 x & \quad \text{— компоненты импульса;} \\ W = \int (\mathbf{B}^2/8\pi + p/(\gamma - 1) + \rho v^2/2) d^3 x & \quad \text{— энергия;} \\ \int \rho(\mathbf{v}, \mathbf{B}) d^3 x & \quad \text{— смешанная спиральность;} \\ \int_D \rho f(p/\rho^\gamma) d^3 x & \quad \text{— "энтропийная серия",} \end{aligned} \quad (2)$$

где f — произвольная функция, D — произвольный жидкий объем; предполагается, что если область интегрирования не указана, то интегрирование проводится по всему объему V внутри проводящего кожуха.

При этом на границе ∂V предполагается выполненными условия непротекания и бесконечной проводимости:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{v})|_{\partial V} = 0, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{B})|_{\partial V} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{n} — нормаль к границе.

Из первого уравнения системы (1) следует уравнение для вектор-потенциала

$$\partial_t \mathbf{A} = [\mathbf{v}, \mathbf{B}] - \nabla \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

где φ — произвольная функция. Положим $\varphi = (\mathbf{A}, \mathbf{v})$. Тогда плотность спиральности $h = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_t h + \text{div} h \mathbf{v} = 0. \quad (5)$$

Отсюда следует, что величина $\mu = p^{1/\gamma}/h$ сохраняется в частицах: $\partial_t \mu + \mathbf{v} \nabla \mu = 0$. У расширенной системы (1), (4) существует функциональная серия первых интегралов:

$$K_{F,D} = \int_D hF(\rho/h, \mu) d^3x, \quad (6)$$

где F – произвольная функция двух переменных.

3. Используем в качестве функционала Ляпунова первый интеграл в виде суммы энергии и спиральности:

$$L = W + K_F. \quad (7)$$

Здесь можно минимизировать как по потенциальной, так и по вихревой части A . Функцию F выберем в виде $F = g(\mu) + C_1 \rho^2/h^2 - C_2 \rho/h$, где $C_1, C_2 = \text{const}$, g будет определена позднее. Предположим для простоты, что область вакуума отсутствует, $D = V$. Граничные условия (3) предполагаются выполненными и для вариаций. Минимизируя (7) по \mathbf{v} , получим, что равновесие реализуется при отсутствии движения: $\mathbf{v} = 0$. Для того чтобы получить минимум с ненулевой скоростью, можно добавить в (7) первые интегралы (2), в которые скорость входит линейно.

Минимизируя далее функционал по переменной ρ при $\mathbf{v} = 0$, получим $\rho = (C_2/2C_1)h$. Условие положительной определенности (7) при $C_1 h > 0$ по переменным ρ и \mathbf{v} выполняется; плотность спиральности h для экстремали (7) знакпостоянна.

Минимизируя функционал по давлению p , получим уравнение Эйлера

$$\gamma p^{1-1/\gamma} + (\gamma - 1)g'(\mu) = 0, \quad (8)$$

где штрих обозначает производную по аргументу. Отсюда видно, что в равновесии и давление есть функция только от спиральности: $p = p(\mu)$.

Наконец, варьируя по A , получим уравнение Эйлера

$$\mathbf{j} + 2G\mathbf{B} + [\nabla G, \mathbf{A}] = 0, \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}/4\pi, \quad G = g - \mu g' - C_2^2/4C_1. \quad (9)$$

Применяя к уравнению (8) оператор grad , а к (9) – оператор div , получим

$$\nabla p = h \nabla G, \quad (\mathbf{B}, \nabla p) = 0. \quad (10)$$

Умножая (9) векторно на \mathbf{A} , с помощью (10) получим условие равновесия

$$[\mathbf{j}, \mathbf{B}] = \nabla p, \quad (11)$$

которое можно было бы получить непосредственно из (1). Однако система уравнений Эйлера (8), (9) наряду с условием (11) привносит дополнительное ограничение на ток

$$(\mathbf{A}, \mathbf{j}) + 2Gh = 0, \quad (12)$$

которое получается умножением (9) на \mathbf{A} скалярно. Следовательно, не любая равновесная конфигурация плазмы есть экстремаль какой-нибудь L .

Переходя к исследованию второй вариации L , мы видим, что из

$$\delta^2 L = \int \left\{ \frac{\delta \mathbf{B}^2}{8\pi} + \frac{\delta p^2}{2\gamma p} + \rho \frac{\delta \mathbf{v}^2}{2} + Gh_2 - \frac{1}{2} G' p^{1/\gamma} \left(\frac{\delta p}{\gamma p} - \frac{h_1}{h} \right)^2 + \right.$$

$$+ C_1 \left[\frac{(\delta\rho)^2}{h} - \rho \frac{\delta\rho}{h^2} h_1 - \frac{\rho^2}{h^2} h_2 + \frac{\rho^2}{h^3} h_1^2 \right] d^3x,$$

где $h_1 = (\mathbf{A}, \delta\mathbf{B}) + (\mathbf{B}, \delta\mathbf{A})$, $h_2 = (\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{B})$, минимизацией легко исключаются алгебраически вариации плотности $\delta\rho$ и скорости $\delta\mathbf{v}$. Вариация $\delta\rho$ после этого исключается лишь при некоторых ограничениях. Кроме того, заметим, что возможны такие $\delta\mathbf{A}$, что $\delta\mathbf{B} = 0$, $h_2 = 0$, $h_1 \neq 0$. Из условия положительности $\delta^2 L$ в этом случае также следуют ограничения. Объединяя эти ограничения [7, 8], получим

$$G' \geq 0 \iff \mu g'' \geq 0, \quad 0 \leq h d_h p \leq \gamma p. \quad (13)$$

При этом поверхности, на которых достигается равенство в (13), нуждаются в дополнительном исследовании. С ними связаны возможность непрерывного спектра задачи и необходимость аккуратного введения нормы, для которой доказывается строгая положительная определенность:

$$\delta^2 L[\delta X] \geq C_0 \|\delta X\|^2.$$

Если равенство в (13) достигается в открытой области, то вторая вариация является лишь неотрицательно определенной и теория Ляпунова неприменима. В рассмотренных нами примерах все неравенства в (13) строгие, за исключением границы области ∂V . Ввиду (8) $\mu = \mu(h)$ и можно ввести новую функцию $U = U(h)$ такую, что $U'(h) = 4\pi G(\mu(h))$. Тогда из (8), (10) следует

$$4\pi p(h) = \int h U'' dh. \quad (14)$$

После того как исключена путем минимизации $\delta\rho$, получается квадратичный функционал, зависящий только от $\delta\mathbf{A}$. Введем укороченный функционал

$$Y = \int [\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + U(h)] d^3x \quad (15)$$

такой, что при условиях (13) строгая положительная определенность $\delta^2 L$ и $\delta^2 Y$ эквивалентны.

Далее мы будем подбирать функцию U таким образом, чтобы укороченный функционал был строго положительно определен, а на экстремали выполнялись неравенства (13).

Варьируя функционал Y с граничным условием $(\mathbf{n}, \mathbf{B})|_{\partial V} = 0$ по \mathbf{A} , получим эквивалентное (9) уравнение Эйлера:

$$\text{rot } \mathbf{B} + 2U'\mathbf{B} + [\nabla U', \mathbf{A}] = 0. \quad (16)$$

При варьировании в окрестности границы могли бы получиться дополнительные условия трансверсальности на \mathbf{A} . Однако ввиду (3) этого не происходит, поскольку $(\mathbf{n}, \delta\mathbf{B})|_{\partial V} = 0$ и интеграл по границе ∂V , входящий в δY , обращается в нуль тождественно.

Как уже указывалось, компонента экстремали ρ пропорциональна спиральности h , отвечающей экстремали, компонента давления определяется формулой (14). Таким образом, экстремаль, т.е. соответствующая ей конфигурация плазмы, задается выбором функции U и формы кожуха. Равновесное состояние должно удовлетворять условию теплоизоляции —

равенства нулю температуры плазмы на границе с кожухом, откуда

$$p|_{\partial V} = 0. \quad (17)$$

Ввиду (13), (14) отсюда следует, что и

$$h|_{\partial V} = 0, \quad (\nabla p, \mathbf{n})|_{\partial V} = 0, \quad (\nabla h, \mathbf{n})|_{\partial V} = 0, \quad 4\pi p = \int_0^h h U'' dh. \quad (18)$$

Для проверки строгой положительной определенности

$$\delta^2 Y = \int (\frac{1}{2} \delta \mathbf{B}^2 + U' h_2 + \frac{1}{2} U'' h_1^2) d^3 x$$

необходимо уточнить выбор нормы в пространстве возмущений $\delta \mathbf{A}$. Норму эту выберем явно зависящей от экстремали, в окрестности которой исследуется строгая положительная определенность, $\delta^2 Y \geq C \|\delta \mathbf{A}\|^2$, где $C > 0$:

$$\|\delta \mathbf{A}\|^2 = \|\delta \mathbf{B}\|_{L^2}^2 + \|\alpha h_1\|_{L^2}^2, \quad (19)$$

$\alpha = \alpha(h)$ выбирается из соображений удобства, и профакторизуем пространство $W_2^1(\delta \mathbf{A})$ по ядру этого функционала.

Уравнение Якоби имеет вид

$$\text{rot } \delta \mathbf{B} + 2U'\delta \mathbf{B} + [\nabla U', \delta \mathbf{A}] + U'' h_1 \mathbf{B} + \text{rot}(U'' h_1 \mathbf{A}) = 0. \quad (20)$$

Исследование строгой положительной определенности $\delta^2 Y$ легче довести до конца, если кожух и экстремаль \mathbf{A} имеют симметрии. Ниже будут рассмотрены случаи цилиндрической и осевой симметрии.

4. Здесь коротко приведем результаты [7, 8]. Поскольку в случае цилиндра экстремаль зависит только от r , удобно задавать не U' , а функцию $\Theta(r) = U'(h)$, где $\{r, \varphi, z\}$ — цилиндрические координаты; предполагается, что спиральность h экстремали есть монотонная функция радиуса.

Можно рассматривать более сложный случай немонотонных функций $\Theta(r)$ и $h(r)$, т.е. неоднозначных функций $\Theta(h)$. В этом случае, а также в случае, когда, кроме области плазмы, имеется область вакуума, где $g(\mu) = 0$, варьирование L должно проводиться также по границе областей, в которых используются различные ветви $g(\mu)$. При этом необходимо проверять положительную определенность некоторого линейного интегрального оператора от возмущений границы вдоль нормального расслоения.

Радиальная компонента экстремали $A_r = 0$. При $r = 0$ полагаем $A_\varphi = 0$, $d_r A_z = 0$. Уравнения Эйлера (16) имеют вид

$$\begin{aligned} d_r B_z &= 2\theta B_\varphi - A_z d_r \Theta, \quad d_r A_z = -B_\varphi, \\ r^{-1} d_r (r B_\varphi) &= -2\theta B_z - A_\theta d_r \Theta, \quad r^{-1} d_r r A_\varphi = B_z. \end{aligned} \quad (21)$$

Ввиду цилиндрической симметрии экстремали вариацию (все компоненты) можно разложить в двойной ряд Фурье с коэффициентами, зависящими от радиуса:

$$\delta A_\alpha = \sum_{k,m} a_{\alpha,k,m}(r) \exp[i(m\varphi + kz)], \quad \alpha = r, \varphi, z.$$

Тогда из (20), при $k^2 + m^2 > 0$ можно получить одно дифференциаль-

ное уравнение второго порядка, зависящее от параметров k и m , относительно $b = b(r, k, m) = (\delta B)_r$:

$$d_r^2 b + r^{-1} \Gamma_1 d_r b = (\Gamma_2 + \Gamma_3/\sigma + \Gamma_4/\sigma^2) b, \quad (22)$$

где $\Gamma_i = \Gamma_i(r, k, m)$, $\sigma = r^{-1}(mB_\varphi - krB_z)$.

При $k = m = 0$ уравнение имеет другой вид. Из условия факторизации (см. п. 3) следует, что здесь можно ограничиться случаем $\delta A_r = 0$.

После того как уравнение (22) решено, компоненты $a_{\alpha, k, m}$ выражаются через $b(k, m)$ однозначно.

Условие локальной устойчивости (отсутствие непрерывного спектра для уравнения Якоби (22)) в резонансной точке \hat{r} (т.е. при $\sigma(\hat{r}) = 0$) при больших $k^2 + m^2$ получается аналогично критерию устойчивости Сайдема [6].

В случае торической геометрии аналог (21) – система уравнений в частных производных решалась численно. Численно же проводится и проверка условий положительной определенности, в частности условий отсутствия сопряженных точек для уравнения Якоби. Подробности расчетов см. [7, 8]. В [9] также имеется сравнение с физическим экспериментом на установке Repute-1 (Япония).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехтеориздат, 1950. 471 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
3. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1976. 123 с.
4. Гордин В.А. Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Л.: Гидрометеоздат, 1987. Т. 1. 256 с.; Т. 2. 264 с.
5. Кадомцев Б.Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1962. Т. 2. С. 132–176.
6. Бейтман Г. МГД-неустойчивость. М.: Энергоиздат, 1982. 198 с.
7. Гордин В.А., Петвиашвили В.И. Достаточные условия удержания плазменного цилиндра // Физика плазмы. 1989. Т. 15, № 2. С. 240–243.
8. Гордин В.А., Петвиашвили В.И. Устойчивость по Ляпунову МГД-равновесия плазмы с ненулевым давлением // ЖЭТФ. 1989. Т. 95, № 5. С. 1711–1722.
9. Murakami Y., Yoshida Z., Ynoue N. Ideal MHD-stability analysis for equilibria with a pitch minimum // Nucl. Fusion. 1988. Vol. 28, N 3. P. 449–455.

ДИНАМИКА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО СТРИМЕРА

В.Б. ГИЛЬДЕНБУРГ, И.С. ГУШИН, С.А. ДВИНИН, А.В. КИМ

1. Одним из важных вопросов теории высокочастотного разряда в газах является изучение пространственно-временной эволюции изолированных плазменных образований малых размеров (плазмоидов), формируемых в результате развития независимых (неперекрывающихся) электронных лавин вокруг дискретных затравочных центров ионизации [1]. Роль таких центров могут играть одиночные (достаточно редко расположенные) электроны, жидкие и твердые аэрозоли, мелкомасштабные неоднородности, образующиеся благодаря некоторым неустойчивостям разряда, очаги искусственной ионизации и т.д.

Целью данной работы является приближенный теоретический анализ и численное моделирование динамики газоразрядного плазмоида с размерами, меньшими длины волны и толщины скин-слоя, в надпробойном поле с линейной поляризацией. Основными физическими факторами, определяющими в интересующих нас условиях характер распространения разряда от области первичного пробоя, являются диффузия (свободная или амбиполярная), ионизация молекул электронным ударом и действие образующейся плазмы на пробивающее высокочастотное поле. Соответствующая исходная система уравнений включает в себя уравнение квазистатического (безвихревого) приближения для комплексной амплитуды квазигармонического электрического поля $E(\mathbf{r}, t)e^{i\omega t} = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t)e^{i\omega t}$ и уравнение ионизационного баланса для электронной концентрации $N(\mathbf{r}, t)$:

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla \varphi) = 0, \quad \epsilon = 1 - (N/N_c)(1 + iv/\omega), \quad (1)$$

$$\partial N/\partial t = D\Delta N + (\nu_i - \nu_a)N - \alpha N^2. \quad (2)$$

Здесь ϵ — комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы, $N_c = m(\omega^2 + \nu^2)/4\pi e^2$, ω — угловая частота поля, ν — эффективная частота соударений электронов, D и α — коэффициенты диффузии и рекомбинации, ν_i — частота ионизирующих соударений, ν_a — частота прилипания электронов к молекулам.

Разность частот ионизации и прилипания будем рассматривать как заданную, быстро растущую функцию амплитуды поля: $\nu_i - \nu_a = f(|E|)$; в достаточно широком диапазоне условий для нее можно использовать степенную аппроксимацию:

$$\nu_i - \nu_a = \nu_a [(|E|/E_c)^\beta - 1] \quad (3)$$

(E_c — так называемое пробойное поле). Предполагаемая функциональная связь $\nu_i(|E|)$, формально исключающая из рассмотрения температуру электронов, имеет место при выполнении условий локальности и безынерционности их нагрева: $\delta_T \nu \tau \gg 1$, $\Lambda \gg l \delta_T^{-1/2}$, (где δ_T — доля энергии, теряемая электроном при соударении с молекулой, τ и Λ — характерные временной и пространственный масштабы изменения амплитуды, l — длина свободного пробега электронов).

2. Проанализируем решение системы (1), (2), описывающее распростра-

нение ионизации из некоторого затравочного центра во внешнем однородном (в отсутствие плазмы) поле E_0 с линейной поляризацией. Пусть функции $N(\mathbf{r}, t)$, $\varphi(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют условиям

$$N(r, 0) = N_{\Sigma} \delta(r), \quad (4)$$

$$\nabla \varphi(\infty, t) = -x_0 E_0. \quad (5)$$

Здесь $r = |\mathbf{r}|$ – расстояние до начала координат, x_0 – единичный вектор, параллельный внешнему невозмущенному полю, $\delta(r)$ – "трехмерная" дельта-функция. При выполнении условий $N_0 \equiv N_{\Sigma} [(v_i - v_a)/D]^{3/2} \ll N_c$, $\alpha N_0 \ll v_i - v_a$, обычно наблюдающихся при образовании дискретных лавин на одиночных затравочных электронах, начальный этап исследуемой эволюции разряда (пока $\alpha N \ll v_i - v_a$, $|\epsilon - 1| \ll 1$) определяется известным сферически-симметричным решением линейного уравнения (2) с $\alpha = 0$, $v_i - v_a = \text{const}$, $|\nabla \varphi| \equiv E_0$:

$$N(r, t) = \frac{N_{\Sigma}}{8(\pi D t)^{3/2}} \exp \left[-\frac{r^2}{4Dt} + (v_i - v_a)t \right]. \quad (6)$$

Исключая малый начальный отрезок времени $t < (v_i - v_a)^{-1}$, на котором функция $N(0, t)$ падает вследствие диффузии до значений $N \approx N_0$, это решение описывает быстрый (при $r < 2 [D(v_i - v_a)]^{1/2} t$ близкий к лавинообразному) процесс роста электронной концентрации.

Характер дальнейшей эволюции разряда существенно зависит от механизма преобладающей нелинейности. Если концентрация N может достигнуть своего рекомбинационного предела $N_{\alpha} = (v_i - v_a)/\alpha$, не возмущая поля (т.е. $|\epsilon(N_{\alpha}) - 1| \ll 1$), то динамика образующегося плазмоида определяется сферически-симметричным решением уравнения (2) с постоянными коэффициентами ($|\nabla \varphi| = E_0 = \text{const}$). При больших t разряд в этом случае представляет собой квазиоднородный шар с концентрацией $N \approx N_{\alpha}$, расширяющийся с известной диффузионной скоростью [2]

$$v_D = 2 [D(v_i - v_a)]^{1/2}. \quad (7)$$

В более интересном и практически важном случае $|\epsilon(N_{\alpha}) - 1| \gg 1$, когда основным механизмом нелинейности в исследуемой системе является рекомбинация, а изменение поля и определяемой им частоты ионизации ν_i в образующейся плазме, пламоид не может оставаться сферически-симметричным, причем его конфигурация и структура сильно зависят от параметра ν/ω . Основное внимание ниже мы уделим случаю $\nu/\omega \gg 1$, реализующемуся в разрядах высокого давления.

При $\nu/\omega \gg 1$ возмущения поля становятся заметными, когда концентрация N в центральной области плазмоида достигает значений $N \geq \omega N_c / \nu \cong \nu N_{c0} / \omega$ ($N_{c0} = m\omega^2 / 4\pi e^2$). Такая плазма фактически представляет собой проводник ($\epsilon - 1 = -i\omega N / \nu N_{c0}$), в котором амплитуда поля с ростом N уменьшается, благодаря чему в центральной области (с $N > \nu N_{c0} / \omega$) снижается скорость лавины $\nu_i - \nu_a$ и распределение концентрации $N(r)$ (как и в рекомбинационном случае) постепенно уплощается. Скорость лавины на периферии, фактически определяющая скорость распространения разряда в неионизованную область, зависит от локальных значений амплитуды, которые в рассматриваемом случае больших ν/ω

(проводящей плазмы) увеличены в "полярных" областях плазмоида и уменьшены в "экваториальной" области (полярная ось OX направлена параллельно внешнему полю $x_0 E_0$). В результате скорость распространения разряда оказывается зависящей от направления и плазмойд вытягивается вдоль внешнего поля¹. По аналогии с подобным явлением при разряде в статическом поле будем называть такой удлиняющийся плазмойд высокочастотным (ВЧ) стримером.

3. Проанализируем динамику ВЧ-стримера на качественной модели, основывающейся на следующих упрощающих предположениях.

1. Плазмойд представляет собой однородный эллипсоид вращения с резкой границей (ширина переходной пограничной области много меньше радиусов кривизны границы).

2. Скорости удлинения большой (параллельной x_0) и малой полуосей эллипсоида совпадают с соответствующими локальными значениями скорости распространения одномерного разряда с плоской границей.

На основании результатов [2] эти скорости могут приближенно рассчитываться по формуле (7), в которой значение v_D на полюсах определяется амплитудой нормальной компоненты поля вне плазмы, а на экваторе — непрерывной на границе амплитудой тангенциальной компоненты.

Система уравнений, описывающих эволюцию плазмоида при сделанных предположениях (и при $\alpha = 0$), записывается в виде

$$E_i = x_0 \frac{E_0}{1 + (\epsilon - 1)n_x}, \quad \epsilon = 1 - \frac{N}{N_c} \left(1 + i \frac{\nu}{\omega} \right), \quad (8)$$

$$\partial N / \partial t = [v_i(E_i) - v_a] N, \quad (9)$$

$$da/dt = 2 [D(v_i(E_n) - v_a)]^{1/2}, \quad (10)$$

$$db/dt = 2 [D(v_i(E_i) - v_a)]^{1/2}, \quad (11)$$

$$E_n = |\epsilon| E_i, \quad E_i = |E_i|. \quad (12)$$

Здесь E_i — вектор электрического поля внутри эллипсоида, E_n — амплитуда внешнего поля на вершинах (полюсах) эллипсоида, в $|\epsilon|$ раз превосходящая амплитуду E_i в экваториальной области, a и b — соответственно большая и малая полуоси эллипсоида, n_x — зависящий от a/b коэффициент деполаризации в направлении x_0 (см., например, [5]); в частности, при $a \gg b$

$$n_x = (b/a)^2 \ln(2a/b). \quad (13)$$

Поведение функций $E_i(t)$, $E_n(t)$, а следовательно, и весь характер исследуемой эволюции, как ясно из (8), (12) определяется конкуренцией двух факторов: ростом величины $|\epsilon|$ и снижением коэффициента деполаризации n_x вследствие увеличения отношения a/b . При достаточно быстром росте функции $v_i(|E|)$ (обычно всегда имеющем место в об-

¹ На возможную роль данного эффекта в высокочастотном разряде указывалось также в работах [1, 3] в связи с обсуждением результатов экспериментов, в которых наблюдались вытянутые вдоль поля плазмойды, порождаемые пробоем на одиночных электронах [1], и "ветвящийся" несамостоятельный разряд в допробойных полях [4].

ласти $[E] \gg E_c$), как легко показать, асимптотика решения системы (8)–(12) на больших временах (когда $|\epsilon| \gg 1$, $a \gg b$) такова, что

$$|\epsilon| n_x \rightarrow 0, \quad E_i \rightarrow E_0. \quad (14)$$

В частности, для степенной аппроксимации (3) с показателем $\beta > 1$ (для воздуха $\beta \approx 3 \div 5$ при $5E_c > |E| > E_c$) асимптотическое решение ($t \rightarrow \infty$) имеет вид

$$E_i = E_0, \quad N = N_0 e^{\gamma t}, \quad (15)$$

$$v_{\parallel} = da/dt = v_a e^{1/2 \beta \gamma t}, \quad (16)$$

$$v_{\perp} = db/dt = v_b, \quad (17)$$

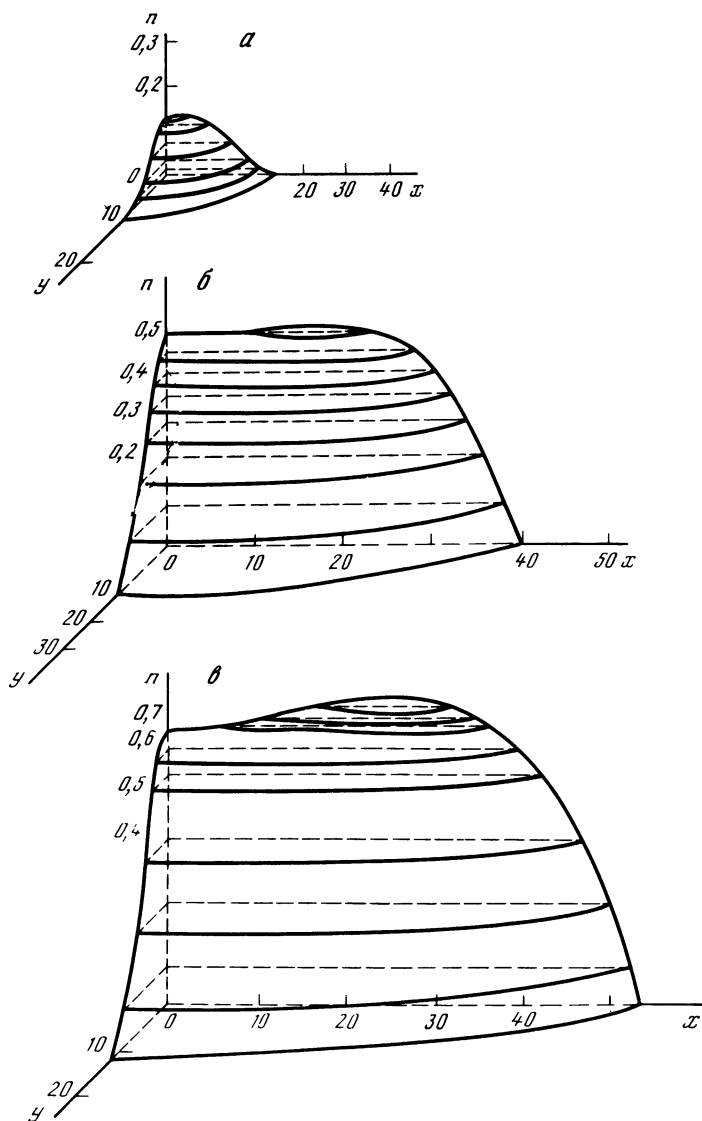
$$a/b \sim (\gamma t)^{-1} e^{1/2 \beta \gamma t}, \quad |\epsilon| n_x \sim e^{-\gamma(\beta-1)t}, \quad (18)$$

где $v_a = 2(Dv_i(E_0))^{1/2}$, $v_b = 2(D\gamma)^{1/2}$, $\gamma = v_i(E_0) - v_a$.

Как видим, распространение ВЧ-стримера в направлении поля E_0 происходит с экспоненциально возрастающей скоростью v_{\parallel} (определяемой полем E_n на его головке). Происходящее при этом быстрое снижение коэффициента деполяризации n_x обеспечивает поддержание поля в плазме E_i на уровне невозмущенного поля E_0 , благодаря чему лавинообразный процесс ионизации внутри плазмоида продолжается с неубывающей скоростью. Остановить этот процесс (а с ним и рост скорости v_{\parallel}) может какой-либо из неучтенных здесь эффектов: например, рекомбинация, уменьшение показателя β при больших E_n до значений, меньших единицы, или скинирование поля в плазме. Заметим, что главным для существования приведенного решения (15)–(18) является не слишком слабая зависимость скорости v_{\parallel} от амплитуды поля ($v_{\parallel}^2 \sim E_n^{\beta}$, $\beta > 1$). Поэтому оно сохраняет свой вид и для других (не диффузионных) механизмов распространения разряда, например для реализующегося в сильных полях и обеспечивающего значительно большие значения скорости режима, в котором головка стримера является источником ионизирующего ультрафиолетового излучения [1, 6].

В случае малых частот соударений $\nu \ll \omega$ эволюция разряда приобретает более сложный характер и ее аналитическое описание (хотя бы и на уровне качественных моделей) представляет собой отдельную самостоятельную задачу. Отметим здесь лишь присущие этому случаю три наиболее важных новых аспекта: 1) усиление поля (точнее, его компоненты, параллельной ∇N) вблизи поверхности плазменного резонанса ($N = N_c$); 2) возможность возникновения общего дипольного (или мультипольного) резонанса плазмоида²; 3) перемещение максимума внешнего поля на границе плазмоида (в некотором интервале средних значений $N \sim N_c$) из полярных областей в экваториальные. С последним обстоятельством может быть связано появление (на некоторой промежуточной стадии эволюции) тенденции к преимущественному расширению плазмоида в перпендикулярном к полю E_0 направлении (с образованием сплюснутого эллипсоида). На последующих стадиях, однако, при $N \gg N_c$, максимумы поля все же

² Для однородного шара условие резонанса m -го мультиполя: $\epsilon m + m + 1 = 0$ ($m = 1, 2, 3, \dots$); в неоднородных объектах резонансы сильно подавляются из-за потерь вблизи поверхности плазменного резонанса [7].



Р и с. 1. Распределение плотности плазмы в различные моменты времени
 а - $t = 3,2$; б - $t = 4,3$; в - $t = 6,0$

должны переместиться на полюсы и эволюция разряда, по-видимому, должна проходить по типу описанной выше (при $\nu/\omega \gg 1$).

4. Численное моделирование динамики ВЧ-стримера проводилось для двумерного случая $\varphi = \varphi(x, y, t)$, $N = N(x, y, t)$ при следующих начальных и граничных условиях:

$$N(x, y, 0) = \begin{cases} N_1, & |x|, |y| < l \\ 0, & |x|, |y| > l, \end{cases} \quad (19)$$

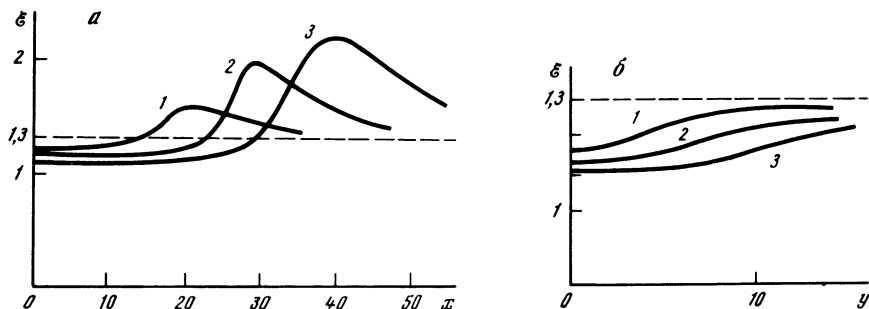


Рис. 2. Зависимость ϵ от продольной (а) и поперечной (б) координаты
 $1 - t = 3,2$; $2 - t = 4,3$; $3 - t = 6,0$

$$N(\pm L_1, \pm L_2, t) = 0,$$

$$\nabla \varphi(\pm L_1, \pm L_2, t) = -x_0 E_0. \quad (20)$$

Границы $x = \pm L_1$, $y = \pm L_2$ располагались достаточно далеко от области ионизации, так что получаемое решение на всем расчетном временном интервале должно было хорошо соответствовать асимптотическому условию (5). Система уравнений (1), (2) решалась (с использованием связи (3)) в конечно-разностном виде на прямоугольной сетке с неравномерным шагом итерационным методом Ньютона. Для решения системы линеаризованных разностных уравнений применялась матричная прогонка. Результаты численных расчетов для значений параметром $\beta = 4$, $\alpha = 0$, $N_1/N_c = 10^{-2}$, $l(\nu_a/D)^{1/2} = 1$, $\nu/\omega = 10$, $\epsilon_0 = E_0/E_c = 1,3$ представлены на рис. 1, 2 в виде графиков зависимости концентрации $n = N/N_c$ и амплитуды поля $\epsilon = |E|/E_c$ от продольной (x) и поперечной (y) координат для различных моментов времени t . Единицами масштаба времени и длины на графиках служат соответственно обратная частота прилипания ν_a^{-1} и диффузионная длина прилипания $L_a = (D/\nu_a)^{1/2}$ (введены безразмерные переменные $t \rightarrow \nu_a t$, $x \rightarrow x/L_a$, $y \rightarrow y/L_a$).

Как видим, определяемая численным решением картина эволюции разряда близка к предсказываемой на основании рассмотренной выше качественной модели. На начальной стадии процесса, пока $|\epsilon - 1| \ll 1$, численное решение близко к известному (аналогичному (6)) симметричному решению начальной задачи для линейного двумерного уравнения диффузии. При $t > 1$, когда $|\epsilon - 1| \gtrsim 1$, симметрия нарушается: поле в полярных областях заметно усиливается и разряд вытягивается вдоль внешнего поля E_0 . В частности, в момент $t \approx 6$ отношение продольного (а) и поперечного (б) размеров области, на границе которой концентрация вдвое меньше максимальной, $a/b \approx 10$. Найденные на основании численного расчета временные зависимости продольной и поперечной скоростей ($da/dt = v_{\parallel}(t)$, $db/dt = v_{\perp}(t)$) удовлетворительно согласуются с выражением (7), в котором под величиной частоты ионизации ν_i следует понимать ее максимальное значение на соответствующем участке пограничной области плазмы. На расчетном временном интервале ($t \leq 6$) асимптотический режим (15)–(18), требующий для своей реализации весьма больших

затрат машинного времени, по-видимому, еще не был достигнут и наблюдались некоторые отклонения от модели однородного эллипсоида: 1) граница плазмоида оставалась сравнительно сильно размытой, а вблизи его концов ($y = 0, x = 25$) при $t \approx 6$ возникали небольшие максимумы концентрации, в которых величина N была примерно на 10% выше, чем в центре; 2) максимумы амплитуды поля на концах не достигали определяемых (12) значений $E_n = |\epsilon|E_i$, а в центральной области амплитуда поля с течением времени несколько уменьшалась (хотя при $t \geq 4$ это уменьшение, составив не более 10%, фактически останавливалось).

В заключение отметим, что рассмотренный механизм образования ВЧ-стримера, по-видимому, реализовался в экспериментах [1, 4, 8] и может рассматриваться в качестве альтернативного (или дополняющего) по отношению к механизму ионизационно-перегревной неустойчивости однородного ВЧ-разряда [9, 10] при объяснении ряда других экспериментов, в которых также наблюдался разряд, состоящий из нитевидных плазмоидов (см., например, [11, 12]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вихарев А.Л., Гильденбург В.Б., Иванов О.А. и др. Пробой газов высокочастотным импульсом наносекундной длительности // Физика плазмы. 1986. Т. 122, № 12. С. 1503–1507.
2. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение в одной биологической проблеме // Вопросы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 12. С. 3–27.
3. Девинн С.А. О механизме формирования нитевидной структуры СВЧ-разряда высокого давления // Вестн. МГУ. Физика, астрономия. 1985. Т. 26, № 6. С. 30–33.
4. Батанов Г.М., Грицинин С.И., Косый И.А. и др. СВЧ-разряды высокого давления // Тр. ФИАН. 1985. Т. 160. С. 174–203.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
6. Фишер В.И. О быстрой волне ионизации газа в луче мощного лазера // ЖЭТФ. 1980. Т. 79, № 6. С. 2142–2151.
7. Гильденбург В.Б. О резонансных свойствах неоднородных плазменных объектов // ЖЭТФ. 1963. Т. 45, № 6. С. 1978–1987.
8. Богомолов Г.Д., Дубровский Ю.В., Летунов А.А., Песков В.Д. Экспериментальное исследование нестационарных стримерных образований в сверхвысокочастотном плазменном шнуре при высоких давлениях // ЖЭТФ. 1987. Т. 93, № 2. С. 519–532.
9. Гильденбург В.Б., Ким А.В. Ионизационно-перегревная неустойчивость высокочастотного разряда в поле электромагнитной волны // Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 4. С. 904–909.
10. Ким А.В., Фрайман Г.М. О нелинейной стадии ионизационно-перегревной неустойчивости в высокочастотном разряде высокого давления // Физика плазмы. 1983. Т. 9, № 3. С. 601–605.
11. Ховатсон А.М. Введение в теорию газового разряда. М.: Атомиздат, 1980.
12. Вихарев А.Л., Гильденбург В.Б., Голубев С.В. и др. Нелинейная динамика свободно локализованного СВЧ-разряда в пучке электромагнитных волн // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 4. С. 136–145.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ФРОНТА ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ РЯБИ

П.А. МАТУСОВ, Л.Ш. ЦИМРИНГ

1. Изучение автоволновых процессов в активных нелинейных средах представляет значительный интерес в связи с различными задачами физики, химии, биологии и др.

В настоящее время основное внимание уделяется автоволновым процессам в диффузионных системах с распределенным источником энергии (вещества) [1]. Между тем динамика значительной части физически интересных активных систем не описывается простыми диффузионными уравнениями: важную роль могут играть дисперсионные свойства среды. Такая ситуация возникает, например, при параметрической генерации волн однородным осциллирующим полем [2].

В настоящей работе представлены результаты теоретического и экспериментального исследования простейшего нестационарного пространственно неоднородного режима параметрической неустойчивости (ПН) — распространения фронта фарадеевской ряби, который возникает в результате эволюции локализованного начального возмущения поверхности жидкости, находящейся в осциллирующем поле тяжести.

2. Начальная стадия эволюции малого возмущения на поверхности жидкости в сосуде, совершающем вертикальные колебания, может быть описана линейным уравнением

$$\eta''_{tt} + g\eta'_z - (\sigma/\rho) \Delta_{xy} \eta'_z = 0, \quad (1)$$

где η — вертикальное смещение частиц жидкости; t — время, x, y — горизонтальные координаты, z — вертикальная координата; $\Delta_{xy} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости; $\vec{g} = g(1 + \alpha \cos \Omega t)$ — ускорение силы тяжести в системе отсчета, связанной с сосудом; Ω — частота колебаний сосуда. Из (1) следует, что частота ω и волновой вектор \mathbf{k} свободной ($\alpha = 0$) поверхностной волны вида $\exp(kz + i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ удовлетворяют дисперсионному соотношению гравитационно-капиллярных волн

$$\omega^2 = g|\mathbf{k}| + (\sigma/\rho)|\mathbf{k}|^3. \quad (2)$$

Далее мы будем предполагать, что частота накачки Ω столь велика, что для возбуждаемой ряби можно пренебречь первым слагаемым в правой части (2) и считать волны чисто капиллярными. Рассмотрим эволюцию пространственного фурье-спектра одномерного начального возмущения

$$\eta_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (3)$$

Для $\eta_k(t)$ из (1) получается уравнение Матье

$$\eta''_{ktt} + (\sigma/\rho) k^3 \eta_k = -\alpha g k \eta_k \cos \Omega t. \quad (4)$$

При $\mu = \alpha g \rho / \sigma k^2 \ll 1$ зависимость $\eta_k(t)$ следует искать в виде

$$\eta_k(t) = A_k e^{-i\Omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \mu^n B_k^{(n)} e^{-i(n\Omega - \omega)t} + \mu^n C_k^{(n)} e^{-i(n\Omega + \omega)t} \} + \text{к.с.} \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), нетрудно получить дисперсионное уравнение $\omega(k)$ для ряби в осциллирующем поле тяжести с точностью до членов $\sim \mu^2$:

$$\left[\omega^2 - \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] \left[(\omega - \Omega)^2 - \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] \left[(\omega + \Omega)^2 - \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] = \left(\frac{\alpha g k}{2} \right)^2 \left[(\Omega + \omega)^2 + (\Omega - \omega)^2 - \frac{2\sigma}{\rho} k^3 \right] + O(\mu^4). \quad (6)$$

В этом уравнении учитывается лишь основной параметрический резонанс на частотах $\omega = \pm \Omega/2$. При $|\omega - \Omega/2| \ll \Omega$ интересующая нас ветвь дисперсионной кривой может быть описана формулой

$$\omega = \pm \frac{\Omega}{2} \pm \left\{ \left[\frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{\Omega}{2} \right]^2 - \frac{\alpha^2 g^2 \rho}{16\sigma k} \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

Как следует из (7), при $\{(\sigma k^3/\rho)^{1/2} - \Omega/2\} \gg \alpha^2 g^2 \rho / 16\sigma k$ рябь близка к свободным капиллярным волнам, в окрестности резонанса

$$|k - k_0| \lesssim \Delta k_0, \quad k_0 = (\Omega^2 \rho / 2\sigma)^{2/3}, \quad \Delta k_0 = \alpha g / 3\sigma k_0. \quad (8)$$

возникает параметрическая неустойчивость. В реальной жидкости всегда имеется вязкая диссипация (к частоте в правую часть (7) следует добавить декремент $-2ivk^2$), в этом случае имеется порог параметрической неустойчивости

$$\alpha_{\text{пор}} \approx 8\Omega\nu k_0/g. \quad (9)$$

Перейдем теперь к вопросу о развитии локализованных возмущений в системе, описываемой дисперсионным уравнением (7).

В общей постановке для произвольных активных систем этот вопрос недавно обсуждался в [5]. Здесь мы сделаем лишь несколько замечаний. На больших по сравнению с характерным обратным инкрементом временах возмущения оказываются экспоненциально большими в ограниченной области пространства, границы которой расширяются с некоторой фиксированной скоростью. Таким образом, разумно ввести понятие фронта неустойчивости в линейной неравновесной системе. Фактически скорость фронта неустойчивости совпадает со скоростью движения системы отсчета, в которой происходит смена типа неустойчивости от абсолютной к конвективной либо наоборот (см. [6]). Нетрудно доказать, что скорость фронта неустойчивости может быть найдена из следующей системы уравнений для комплексного волнового числа k и V [5]:

$$d\omega/dk = V, \quad \text{Im}(\omega - kV) = 0, \quad (10)$$

которая является прямым обобщением критерия Бриггса (см. [6]) определения типа неустойчивости в фиксированной системе отсчета. Примени-

тельно к данной задаче, описываемой дисперсионным уравнением (6) с учетом вязкого затухания, систему (10) можно привести к виду

$$\hat{k}(\tilde{k}^2 - 1)^{-1/2} = \tilde{V}, \quad \text{Im}(\tilde{k}^2 - 1)^{-1/2} = -D, \quad (11)$$

где введены безразмерные переменные $\tilde{k} = 6\sigma k_0(k - k_0)/\rho\alpha g$, $D = 4\Omega\nu k_0/\alpha g$, $\tilde{V} = V/V_g$, $V_g = 3/2 (\sigma k_0/\rho)^{1/2}$ – групповая скорость свободных капиллярных волн при $k = k_0$, $\omega = \Omega/2$. Решения системы (11) имеют вид

$$\tilde{k}_s = \pm \tilde{V}(\tilde{V}^2 - 1)^{-1/2}, \quad \tilde{V} = \pm(1 - D^2)^{1/2}. \quad (12)$$

Как видно из (12), на пороге неустойчивости ($D \rightarrow 1$) скорость фронта обращается в нуль, а при $D \rightarrow 0$ (большая надкритичность) стремится к групповой скорости свободных капиллярных волн. Знаки "+" и "-" в выражении для скорости в (12) соответствуют переднему и заднему фронтам: середина области параметрической неустойчивости покоится, а края разбегаются в противоположные стороны с равными и по модулю скоростями. Отметим, что формулы (12) получены из (7), т.е. в предположении узости диапазона ПН ($\Delta k_0 \ll k_0$), поэтому большую надкритичность следует понимать только в смысле $\alpha_{\text{пор}} \ll \alpha \ll \Omega^2/gk_0$.

3. Внутри области неустойчивости волновое поле представляет собой суперпозицию встречных волн с частотой $\omega = \Omega/2$ и волновыми числами $k \approx \pm k_0$, экспоненциально нарастающих с инкрементом, который достигает максимума в центре области неустойчивости и монотонно стремится к нулю по мере приближения к фронтам. Ясно, что вдали от фронта нелинейность должна ограничить экспоненциальный рост амплитуды волн. При малой надкритичности основными механизмами ограничения будут нелинейное затухание [7] и нелинейный сдвиг частоты поверхностных волн, выводящий пару волн из резонанса с накачкой [2]. В дальнейшем будем всюду предполагать $\alpha \ll \Omega^2/gk_0$, т.е. узость диапазона параметрической неустойчивости. В этом случае смещение поверхности можно представить в виде

$$\eta(x, t) = 1/2 [a_+(x, t) e^{ik_0 x} - a_-(x, t) e^{-ik_0 x}] e^{-i\Omega t/2} + \text{к.с.}, \quad (13)$$

где $a_{\pm}(x, t)$ – медленно меняющиеся по сравнению с $\exp(-i\Omega t/2 \pm ik_0 x)$ функции координаты и времени. Укороченные уравнения для комплексных амплитуд a_{\pm} нетрудно получить из исходного уравнения (1) и добавить к ним слагаемые, описывающие затухание и сдвиг частоты (ср. [4]):

$$\frac{\partial a_{\pm}}{\partial t} \pm V_g \frac{\partial a_{\pm}}{\partial x} + \gamma a_{\pm} = iH a_{\mp}^* - R |a_{\pm}|^2 a_{\pm} - iT |a_{\pm}|^2 a_{\pm} - iS |a_{\mp}|^2 a_{\pm}. \quad (14)$$

Здесь $\gamma = 2\nu k_0^2$ – линейный декремент затухания ряби; $H = \alpha g k_0/2\Omega$ – инкремент параметрической неустойчивости; $R \approx 8,8 \nu k_0^4$ – коэффициент нелинейного затухания капиллярных волн [7], $T \approx 0,03 \Omega k_0^2$ и $S \approx 0,3 \Omega k_0^2$ – коэффициенты нелинейного сдвига частоты, обусловленного самовоздействием и взаимодействием с встречной волной [4]. В уравнении (14) не учтена дисперсия капиллярных волн, поскольку при $\alpha \ll \Omega^2/gk_0$ в окрестности $\omega = \Omega/2$ она мала по сравнению с дисперсией, обусловленной параметрической неустойчивостью.

Рассмотрим сначала простой случай $T = S = 0$. В этом случае систему (14) можно свести к одному уравнению для a_{\pm} :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma + R |a_{+}|^2\right)^2 a_{+} - V_g^2 \frac{\partial^2 a_{+}}{\partial x^2} = H^2 a_{+}, \quad (15)$$

которое эквивалентно паре действительных уравнений первого порядка, из которых неустойчивости отвечает следующее:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma + R |a_{+}|^2\right) a_{+} = H a_{+} + \frac{1}{2} \frac{V_g^2}{H} \frac{\partial^2 a_{+}}{\partial x^2} - \frac{V_g^4}{8H^3} \frac{\partial^4 a_{+}}{\partial x^4} + \dots \quad (16)$$

В этом уравнении бесконечная сумма производных в правой части соответствует разложению в ряд квадратного корня в дисперсионном уравнении (7). При $\epsilon = (H - \gamma)/\gamma \ll 1$ (малая надкритичность) диапазон неустойчивости узок по сравнению с Δk_0 , поэтому можно ограничиться первым и вторым слагаемыми в правой части (16). В этом случае оно будет иметь вид уравнения диффузии с нелинейным источником, которое хорошо известно в теории автоволновых процессов [1]:

$$\frac{\partial a_{+}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{V_g^2}{H} \frac{\partial^2 a_{+}}{\partial x^2} - \epsilon H a_{+} + R |a_{+}|^2 a_{+} = 0. \quad (17)$$

В работе [8] в рамках (17) было строго доказано, что из локализованного начального возмущения при $t \rightarrow \infty$ формируются стационарные фронты¹ (так называемые фазовые автоволны), скорость которых не зависит от R и равна

$$V_{\text{фр}} = (2\epsilon)^{1/2} V_g. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что найденная ранее в линейной постановке формула для скорости в (12) переходит в (18) при $\epsilon = (D^{-1} - 1) \ll 1$. Итак, при малой надкритичности стационарная нелинейная автоволна распространяется с линейной скоростью фронта неустойчивости². Для случая не слишком малой надкритичности (16) подобное [8] строгое доказательство построить не удастся, однако можно привести некоторые соображения физического порядка в пользу сформулированного выше утверждения о равенстве скорости нелинейной автоволны соответствующей линейной скорости в рамках (16).

Действительно, нелинейное затухание приводит к тому, что стационарное нелинейное решение (16) всюду должно быть меньше решения (16) при $R = 0$, соответствующего тем же начальным условиям. Отсюда сразу следует, что скорость стационарного фронта не может быть больше скорости фронта неустойчивости. С другой стороны, ясно, что стационарный

¹ В контексте рассматриваемой здесь задачи о параметрической неустойчивости имеется в виду стационарный фронт огибающей, в то время как само смещение поверхности может быть нестационарным (фазовая скорость заполнения $\Omega/2k_0$, вообще говоря, отличается от $V_{\text{фр}}$).

² Незасисимость скорости фазового фронта от вида и величины нелинейного затухания была обнаружена еще в 1937 г. [8]. Однако тот факт, что эта скорость равна скорости распространения фронта неустойчивости в соответствующей (17) линейной системе, был замечен лишь в недавней работе [9] (см. также [5]).

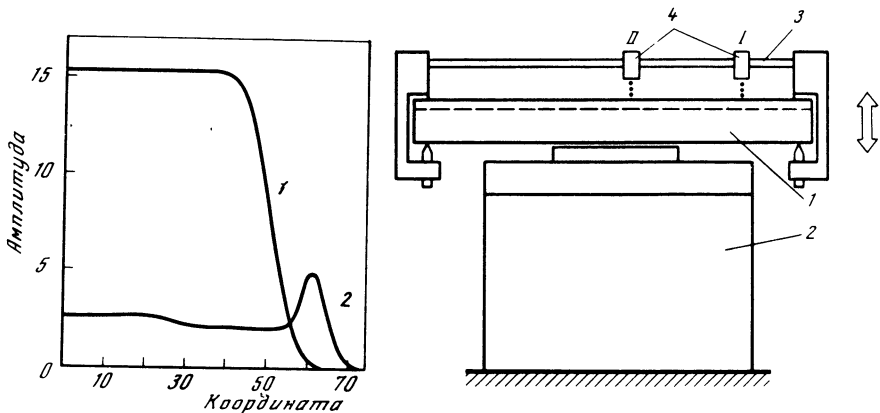


Рис. 1. Структура поля за фронтом капиллярной ряби (в численном эксперименте)
 $N = 3$; $\gamma = 0,3$, $R = 2,3$; 1 - $T = 0$, $S = 0$; 2 - $T = 6,25$, $S = 0,625$

Рис. 2. Экспериментальная установка

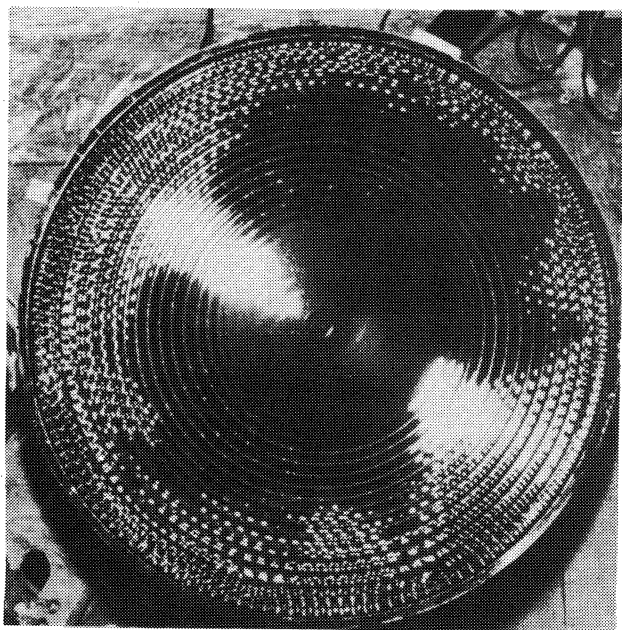
1 - слой силиконового масла; 2 - вибростенд; 3 - штанга крепления датчиков; 4 - инфракрасные датчики

фронт, распространяющийся со скоростью, меньшей линейной, неустойчив - малые возмущения "на носике" фронта (где $a_{\pm} \ll (R/\epsilon H)^{1/2}$) будут экспоненциально нарастать и проникать в область впереди фронта. Таким образом, единственным возможным с точки зрения существования и устойчивости оказывается стационарный фронт, распространяющийся со скоростью фронта линейной неустойчивости. Отметим, что это рассуждение применимо к произвольной системе с линейной неустойчивостью, в которой нелинейностью заведомо является стабилизирующим фактором. Относительно полной системы (14), учитывающей наряду с нелинейным затуханием нелинейный сдвиг частоты, этого утверждать нельзя. Для анализа этой ситуации проводилось численное интегрирование (14) методом Лакса [10]. При $t = 0$ задавалось малое начальное возмущение вида

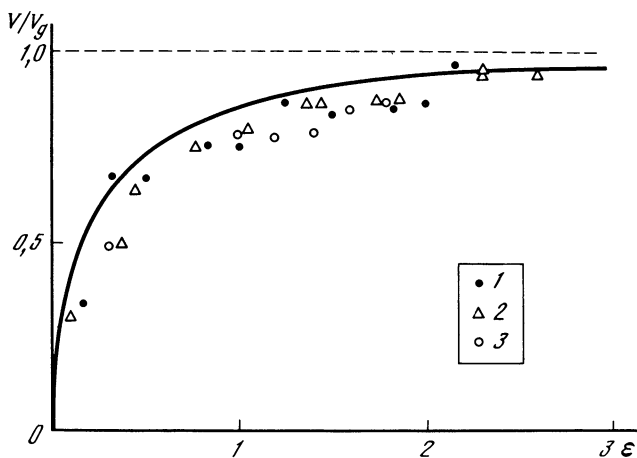
$$a_{\pm} = a_0 \exp(-x^2/\Delta x^2).$$

Численные эксперименты показали, что скорость фронта не зависит от величины параметров T и S и определяется отношением H/γ в соответствии с формулой (12). Профили $\text{Re}[a_+(x) + a_-(x)]$ показаны на рис. 1. Как видно из рис. 1, при $T = S = 0$ фронт является монотонным, а при $T \neq 0$, $S \neq 0$ возможно появление осциллирующей на фронте. По-видимому, эти осцилляции имеют ту же природу, что и наблюдавшиеся в численном эксперименте [3] по изучению пространственно-однородного режима нарастания параметрических спиновых волн в ферромагнетике.

4. В эксперименте исследовалось движение фронта капиллярной ряби на поверхности слоя силиконового масла ($\rho = 0,95$ г/см³, $\sigma = 23,3$ эрг/см², $\nu = 0,04$ см²/с) толщиной 7 мм, залитого в круглую кювету диаметром 300 мм, размещенную на вибростеле (рис. 2). Волны на поверхности масла регистрировались двумя бесконтактными ИК-датчиками, укрепленными на легкой штанге, жестко связанной с кюветой, на различных расстояниях от центра кюветы. Одновременно с включением синусоидального напряже-



Р и с. 3. Моментальный снимок фронта капиллярной ряби, полученный при помощи вспышки



Р и с. 4. Зависимость скорости распространения фронта от надкритичности

Сплошная линия – теоретическая зависимость (12); символы соответствуют экспериментальным точкам при различных частотах волн: 1–3: 40 Гц (1); 30 (2); 20 (3)

ния на вход вибростола подавалось фиксированное постоянное напряжение, задающее начальное смещение кюветы. Таким образом в момент включения колебаний на боковых стенках кюветы образуется тонкий пограничный слой, который и служит локализованным начальным возмущением. В дальнейшем формируется область, охваченная капиллярной рябью, граница которой с некоторой скоростью движется к центру кюветы (рис. 3). Скорость движения фронта ряби определялась по времени задержки между началами колебаний на выходах ИК-датчиков.

Было проведено три серии экспериментов при различных частотах накачки: $\Omega = 80, 60$ и 40 Гц. В каждой серии выполнялись измерения скорости фронта ряби при различных надкритичностях ($0,1 < \epsilon < 2,6$). При $\epsilon \gtrsim 2,5$ начинался интенсивный отрыв капель от поверхности масла внутри области неустойчивости. Полученные данные представлены в нормированном виде на рис. 4 тремя семействами точек. Как видно из рисунка, все три семейства ложатся на теоретическую кривую, построенную по формуле для скорости в (12).

Заметим, что при сравнительно больших надкритичностях динамика ряби за фронтом в нелинейном режиме существенно отличается от описанной в п. 3. В частности, довольно быстро развивается вторая пара капиллярных волн с волновыми векторами, ориентированными по азимуту кюветы (см. рис. 3). Интересно, что область, в которой имеется две пары капиллярных волн, также ограничена довольно резко выраженным фронтом, который движется к центру кюветы, однако закономерности, связанные с распространением "второго фронта", нами не исследовались.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240 с.
2. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М. Наука, 1984. 387 с.
3. *Захаров В.Е., Львов В.С., Мушер С.Л.* О нестационарном поведении системы параметрически возбужденных спиновых волн // ФТТ. 1972. Т. 14. С. 832–840.
4. *Езерский А.Б., Рабинович М.И., Реутов В.П., Старобинец И.М.* Пространственно-временной хаос при параметрическом возбуждении капиллярной ряби // ЖЭТФ 1986. Т. 91 № 6. С. 2070–2083.
5. *Van Saarloos W.* Front propagation into unstable states. Marginal stability as a dynamical mechanism for velocity selection // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37, N 1. P 211–218.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М. Наука, 1982. 620 с.
7. *Красильников В.А., Павлов В.И.* О нелинейном загужании плоских монохроматических волн на поверхности жидкости // Вестн. МГУ Физика, астрономия. 1972. № 1. С. 94–99.
8. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Об одном уравнении диффузии с распределенным источником вещества // Бюл. МГУ. Секц. А. 1938. Т. 1, № 6. С. 1–26.
9. *Dee G., Langer J.S.* Propagating pattern selection // Phys. Rev. Lett. 1983 Vol 50, N 6. P. 383–386.
10. *Вазов В., Форсайт Дж.* Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1963 487 с.

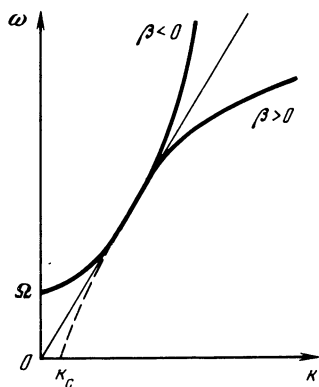
НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Л.А. ОСТРОВСКИЙ, Ю.А. СТИ ПАНЯНЦ

1. ВВЕДЕНИЕ

70-е годы были периодом бурного прогресса в "нелинейной математической физике", связанного с развитием точных методов решения определенного класса интегрируемых эволюционных уравнений. Гораздо меньше разработан аппарат исследования уравнений, не принадлежащих к числу интегрируемых, хотя именно они чаще всего адекватны реальным физическим моделям. Для них почти не существует универсальных методов решения; исключение составляет, пожалуй, лишь метод возмущений, дающий в ряде случаев весьма общие результаты. Перефразируя Л.Н. Толстого, можно сказать, что все интегрируемые модели "счастливы" (решаются) одинаково, каждая неинтегрируемая модель "несчастлива" по-своему. Вместе с тем "несчастливые" неинтегрируемые уравнения часто характеризуются удивительным богатством и разнообразием решений. Заметим, что свойство точной интегрируемости весьма "негрубо", т.е. оно может нарушаться даже внешне незначительными изменениями в структуре уравнений (иногда всего лишь при изменении численных коэффициентов).

Здесь мы рассмотрим один класс неинтегрируемых уравнений, имеющих отношение к довольно широкому кругу физических задач и активно изучаемый в последнее десятилетие. Поэтому название данной статьи до некоторой степени условно, в нем отражен лишь один тип физических систем, принадлежащих к интересующему нас классу. В действительности приводимые ниже результаты относятся к любым нелинейным системам, которые характеризуются наличием широкой "бездисперсионной" полосы в спектре частот, разделяющей области с низкочастотной (НЧ) и высокочастотной (ВЧ) дисперсиями. Различные варианты дисперсионных зависимостей такого рода изображены на рис. 1. Примерами волн, обладающих указанной дисперсией, помимо упомянутых в заголовке, могут служить необыкновенные электромагнитные и косые магнитозвуковые волны в



замагниченной плазме, возбуждения в цепочке атомов, описываемые моделью Френкеля-Конторовой с дальним взаимодействием [1], волны в линиях передачи типа полосового фильтра (мы их еще коснемся в подразд. 3.2) и т.д. Ниже мы опишем свойства этого класса систем в основном на примере поверхностных волн во вращающейся жидкости. Вначале кратко обсудим основные модельные уравне-

Рис. 1. Различные варианты дисперсионных зависимостей, обладающих широкой "бездисперсионной" полосой в спектре частот (прямолинейный участок), к которой примыкают области с НЧ- и ВЧ-дисперсиями

ния, затем проанализируем одномерные стационарные решения этих уравнений, приведем результаты численных расчетов нестационарных возмущений и, наконец, рассмотрим некоторые свойства неодномерных возмущений.

2. МОДЕЛИ

Рассмотрим однородный слой вращающейся жидкости глубины h , ограниченный снизу ровным дном, а сверху свободной поверхностью, подверженной действию капиллярных сил. Распространение длинных (по сравнению с h) пологих возмущений на поверхности такого слоя будем описывать двумерной системой уравнений Буссинеска [2]:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \Omega \times \mathbf{u} + \nabla(g\eta + \beta\eta_{tt}/3h) = 0. \quad (1)$$

$$\eta_t + \operatorname{div}[(h + \eta)\mathbf{u}] = 0.$$

Здесь $\eta(x, y, t)$ – возмущение свободной поверхности, $\mathbf{u}(x, y, t) = (u, v)$ – средняя по глубине скорость частиц жидкости, Ω – удвоенная частота вращения жидкости вокруг оси z , перпендикулярной плоскости x, y (Ω – параметр Кориолиса); $\beta = h^2 - 3\sigma/\rho g$ – параметр, характеризующий высокочастотную дисперсию; σ – коэффициент поверхностного натяжения; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения. Индекс t указывает на дифференцирование по этой переменной (то же в дальнейшем будет относиться к переменным x, y), $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$. При $\Omega = \beta = 0$ система (1) переходит в хорошо известную систему уравнений "мелкой воды" [3], которая аналогична системе уравнений газовой динамики с показателем адиабаты, равным двум.

В одномерном случае, когда возмущения зависят лишь от одной пространственной координаты x , система (1) сводится к одному уравнению для поперечной компоненты скорости v [4]:

$$v_{tt} - c_0^2 v_{xx} + \Omega^2 v - \beta v_{ttxx}/3 = \left(\frac{v_t v_x}{\Omega + v_x} \right)_t + \frac{\Omega}{2} \left[\frac{(v_t)^2}{(\Omega + v_x)^2} \right]_x, \quad (2)$$

где $c_0^2 = gh$. При этом возмущение свободной поверхности и продольная компонента скорости выражаются через v : $\eta = hv_x/\Omega$, $u = -v_t/(\Omega + v_x)$. Для волн умеренной амплитуды, когда в правой части можно ограничиться квадратичной нелинейностью, уравнение (2) переходит в обобщенное уравнение Буссинеска (называемое также уравнением "нелинейной струны"), в котором содержится дополнительное слагаемое, обусловленное вращением жидкости:

$$v_{tt} - c_0^2 v_{xx} + \Omega^2 v - \beta v_{ttxx}/3 = (v_{tt}v_x + 2v_tv_{xt})/\Omega. \quad (3)$$

Из уравнений (2), (3) для возмущений бесконечно малой амплитуды, пропорциональных $\exp[i(\omega t - kx)]$, следует дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = (\Omega^2 + c_0^2 k^2)/(1 + \beta k^2/3). \quad (4)$$

Качественный вид кривой $\omega(k)$ показан на рис. 1 сплошной жирной линией при $\beta > 0$ (гравитационные волны) и $\beta < 0$ (капиллярные волны). Для очень длинных волн, когда ВЧ-дисперсией можно пренебречь, соотношение (4) приближенно переходит в следующее: $\omega^2 \cong \Omega^2 + c_0^2 k^2$. Такая

дисперсия характерная для известного уравнения Клейна–Гордона, а также для электромагнитных волн различных типов в волноводах. Если $\Omega^2/c_0^2 \ll 3/|\beta|$, то для волн средних масштабов ($\Omega^2/c_0^2 \ll k^2 \ll 3/|\beta|$) на дисперсионной кривой (4) можно выделить прямолинейный участок $\omega \approx c_0 k$, на котором дисперсия практически отсутствует. Для относительно коротких волн, когда слагаемое с Ω^2 несущественно, из (4) следует, что $\omega \approx c_0 k(1 - \beta k^2/6)$. Дисперсия такого типа характерная для волн, описываемых уравнением Кортевега–де Вриза (КдВ) [2]. Таким образом, уравнения (2), (3) обладают "двумя дисперсиями" – в области длинных (НЧ) и в области коротких (ВЧ) волн – и почти бездисперсионным участком в области средних масштабов. Как видно из (4), НЧ-дисперсия в данном случае обусловлена вращением, при $\Omega \rightarrow 0$ она исчезает. Подчеркнем, однако, что в других физических системах НЧ-дисперсия может быть вовсе не связана с вращением среды (например, дисперсия в линиях передачи, о которых речь пойдет ниже).

Для волновых процессов, спектр которых в основном принадлежит бездисперсионному участку и лишь слегка затрагивает области с НЧ- и ВЧ-дисперсиями, уравнение (4) можно записать в виде

$$\omega \approx c_0 k - \beta c_0 k^3/6 + \Omega^2/2c_0 k. \quad (5)$$

Отсюда видно, что соответствующее эволюционное уравнение должно быть похоже на уравнение КдВ с добавлением линейного слагаемого, обусловленного вращением. Вывод этого уравнения мы здесь опустим (он подробно приведен в работе [5]). Запишем его сразу для возмущений малой амплитуды в системе отсчета, бегущей вдоль x со скоростью c_0 :

$$[v_t + 3c_0(v_\xi)^2/4h + c_0\beta v_\xi \xi \xi/6]_\xi = \Omega^2 v/2c_0,$$

где $\xi = x - c_0 t$. Представим это же уравнение в несколько иной форме для возмущения свободной поверхности $\eta = hv_\xi/\Omega$:

$$(\eta_t + 3c_0\eta\eta_\xi/2h + c_0\beta\eta_\xi \xi \xi/6)_\xi = \Omega^2 \eta/2c_0. \quad (6)$$

Впервые уравнение (6) было выведено в работе [6] для внутренних волн в океане (при этом величина η имеет смысл возмущения изопикнической поверхности, т.е. поверхности постоянной плотности). Впоследствии оно выводилось различными способами для поверхностных и внутренних волн в работах [5, 7–9]. Родственное уравнение, но без высокочастотной дисперсии ($\beta = 0$) было получено для инерционно-гравитационных экваториальных волн в океане [10], акустических волн в изогнутом стержне [26] и для волн произвольной природы, распространяющихся в случайно-неоднородной среде [27].

Отметим сразу же два простых интегральных следствия уравнения (6). Рассматривая локализованные возмущения, для которых $\eta \rightarrow 0$, при $|\xi| \rightarrow \infty$ и интегрируя (6) по ξ , легко показать, что $\langle \eta \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi, t) d\xi = 0$.

Аналогичный вывод справедлив и для периодических в пространстве возмущений (интеграл при этом надо брать по периоду волны). Еще один интеграл движения, вытекающий из (6), имеет смысл энергии волны: $\langle \eta^2 \rangle = \text{const}$.

Рассмотрим далее задачу Коши для уравнения (6). Пусть в начальный

момент $t = 0$ задано возмущение в форме $\eta(\xi) = \eta_0 f(\xi/\Lambda)$, где η_0 – характерная амплитуда возмущения, а Λ – характерный размер. f – безразмерная функция. Вводя новые переменные $x_n = \xi/\Lambda$, $t_n = 3c_0\eta_0 t/2h\Lambda$, $\tilde{\eta} = \eta/\eta_0$, представим уравнение (6) и начальные условия в безразмерном виде

$$\begin{aligned} (\tilde{\eta}_t + \tilde{\eta}\tilde{\eta}_x + \tilde{\eta}_{x,x,x}/U\tau)_x &= \tilde{\eta}/S_0, \quad \tilde{\eta}(x, 0) = f(x), \\ U\tau &= 9\eta_0\Lambda^2/\beta h, \quad S_0 = 3\eta_0 C_0^2/h\Omega^2\Lambda^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Индекс "н" у переменных для краткости опущен. Из (7) следует, что эволюция начальных возмущений определяется, помимо формы начальной функции f , двумя безразмерными параметрами: $U\tau$ (параметр Урселла) и S_0 , которые выражают отношение нелинейности к ВЧ- и НЧ-дисперсиям соответственно. Возмущения с одинаковой начальной формой и одинаковыми параметрами $U\tau$ и S_0 эволюционируют подобным образом.

Для двумерных возмущений исходную систему (1) уже не удастся свести к одному эквивалентному уравнению. Однако для возмущений малой амплитуды, пространственный масштаб которых вдоль y много больше, чем вдоль x , можно получить приближенное уравнение, обобщающее (2):

$$\begin{aligned} v_{tt} - c_0^2(v_{xx} + v_{yy}) + \Omega^2 v - \beta v_{txx}/3 &= \left(\frac{v_t v_x}{\Omega + v_x} \right)_t + \frac{\Omega}{2} \left[\left(\frac{v_t}{\Omega + v_x} \right)^2 \right]_x - \\ - \frac{c_0}{\Omega^2} \left[v_{xx} v_{ty} - v_{xy} v_{tx} + \frac{\Omega}{c_0^2} (2v v_{ty} + v_t v_y) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Подробный вывод этого уравнения содержится в работе [11]. Ограничиваясь квадратичной нелинейностью для волн, бегущих преимущественно вдоль x и слабо дифрагирующих в поперечном направлении, можно получить из уравнения (8) "двумеризованный" вариант уравнения (6) для возмущения свободной поверхности:

$$(\eta_t + 3c_0\eta\eta_\xi/2h + \beta c_0\eta\xi\xi\xi/6)_\xi = \Omega^2\eta/2c_0 - c_0\eta_{y,y}/2. \quad (9)$$

Уравнения (6), (9) в отличие от родственных им уравнений КдВ и Кадомова–Петвиашвили (КП) [12], по-видимому, не являются вполне интегрируемыми, не говоря уже о более сложных уравнениях (2), (3), (8). Для этих уравнений удастся построить аналитически лишь простейшие приближенные решения. В такой ситуации большое значение приобретает использование ЭВМ, с помощью которой и удалось получить многие из приводимых ниже результатов.

3. ОДНОМЕРНЫЕ ВОЛНЫ

3.1. Стационарные решения

Исследуем сначала стационарные периодические решения уравнения (2), зависящие лишь от одной "бегущей" координаты $x - Vt$. Введем новые безразмерные переменные, в которых период волны равен 2π (размерный период равен Λ): $\zeta = 2\pi(x - Vt)/\Lambda$, $Z = (2\pi/\Lambda)(v/\Omega) \equiv \eta/h$. Переменная Z имеет смысл безразмерной величины смещения свободной поверхности.

Уравнение (7) в этих обозначениях принимает следующий вид

$$\left[QZ'' - (1 - U^{-2})Z + \frac{(3/2 + Z)Z^2}{(1 + Z)^2} \right]'' = RZ \quad (10)$$

где $U = 1/c_0$, $R = (\Lambda/2\pi)^2(\Omega/V)^2$, $Q = (2\pi/\Lambda)^2\beta/3$, штрихом обозначено дифференцирование по ζ . Для возмущения бесконечно малой амплитуды, когда правой частью можно пренебречь, из (10), конечно, вытекает дисперсионное соотношение (3), которое в используемых безразмерных переменных записывается в виде $U^2 = (1 + Q/R)^{-1/2}$. При описании возмущений малой, но конечной амплитуды, в правой части (10) можно ограничиться квадратичной нелинейностью, так что уравнение (10) сводится к следующему:

$$[QZ'' - (1 - U^{-2})Z + 3Z^2/2]'' = RZ \quad (11)$$

К этому же виду приводится и уравнение (6) для стационарных периодических решений.

Интегрируя уравнения (10), (11) по периоду волны, легко установить, что их решения тоже обладают нулевыми средними значениями: $\langle Z \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z d\zeta = 0$, хотя нестационарные возмущения в рамках (2) этим свойством могут не обладать. Заметим далее, что уравнение (10) и его приближенный вариант (11) можно представить в гамильтоновой форме. Для этого введем каноническую переменную p_1 по формуле $Z = p_1'$ и перепишем уравнение (10) для этой переменной (которая пропорциональна поперечной компоненте скорости v):

$$\left[Qp_1''' - (1 - U^{-2})p_1' + \frac{(3/2 + p_1')(p_1')^2}{(1 + p_1')^2} \right]' = Rp_1' \quad (12)$$

Легко проверить, что уравнение (12) обладает первым интегралом

$$\mathcal{H} = [Rp_1^2 + Q(p_1')^2 - 2Qp_1'p_1''' + (p_1')^2 \{(1 + p_1')^{-2} - U^{-2}\}] / 2Q \quad (13)$$

При подходящем выборе канонических переменных q_1 , q_2 , p_2 вместе с уже введенной переменной p_1 этому интегралу можно придать смысл гамильтониана:

$$\mathcal{H} = [Rp_1^2 + Qp_2^2 - 2Qq_1q_2 + q_2^2/U^2 - q_2 - (1 + q_2)^{-1} + 1] / 2Q \quad (14)$$

После этого уравнение (12) можно представить в виде канонической гамильтоновой системы с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned} q_1' &= \partial\mathcal{H}/\partial p_1 = Rp_1/Q, & p_1' &= -\partial\mathcal{H}/\partial q_1 = q_2, \\ q_2' &= \partial\mathcal{H}/\partial p_2 = p_2, & p_2' &= -\partial\mathcal{H}/\partial q_2 = q_1 + [1 - 2q_2/U^2 - (1 + q_2)^{-2}] / 2Q \end{aligned} \quad (15)$$

В системе (15) первые три уравнения линейны и лишь четвертое нелинейно. Для возмущений малой амплитуды оно приближенно записывается в виде

$$p_2' \cong q_1 + q_2(1 - U^{-2} - 3q_2/2)/Q \quad (16)$$

Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} \cong [Rp_1^2 + Qp_2^2 - 2Qq_1q_2 + q_2^2(U^{-2} - 1 + q_2)] / 2Q \quad (17)$$

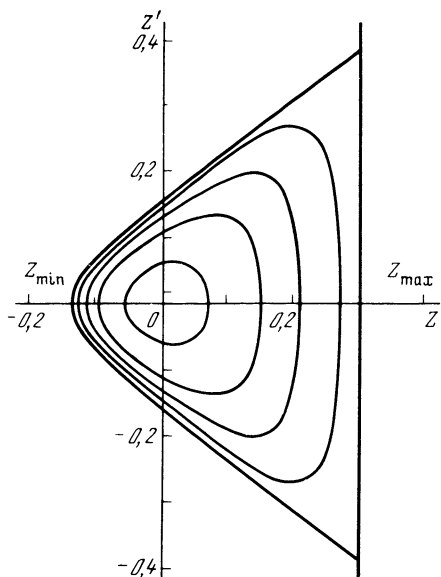


Рис. 2

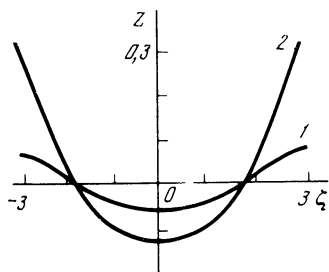


Рис. 3

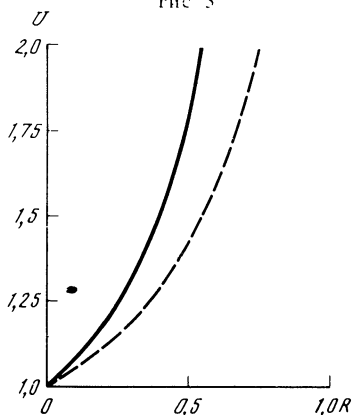


Рис. 4

Рис. 2. Фазовая плоскость уравнения (18)

Рис. 3. Структура решения уравнения (18) в виде периодической нелинейной волны (1), соответствующей движению по одной из внутренних фазовых траекторий, изображенных на рис. 2, и периодическая волна предельной формы (2), соответствующая движению по выделенной на рис. 2 траектории

Рис. 4. Дисперсионные зависимости в безразмерных переменных для линейных возмущений (штриховая кривая) и для волн предельной формы (сплошная), описываемых уравнением (18)

Наличие первого интеграла (13) позволяет понизить порядок уравнения (12), однако оно и после этого остается достаточно сложным и не поддается аналитическому решению.

Ситуация упрощается для достаточно пологих волн, когда ВЧ- дисперсия незначительна. В этом случае в уравнении (10) можно опустить слагаемое с четвертой производной, т.е. положить $Q = 0$. Тогда остается уравнение второго порядка, решения которого нетрудно проанализировать на фазовой плоскости [4]. Первый интеграл этого уравнения имеет вид

$$Z' = \pm U^2 (1 + Z)^2 \left\{ R \left[\frac{Z^2 (1 + Z)^2}{U^2} + 2Z^2 + 6Z + 3 \right] + 2C(1 + Z)^2 \right\}^{1/2} [U^2 - (1 + Z)^3]^{-1}, \quad (18)$$

где C — постоянная интегрирования.

На фазовой плоскости (рис. 2) имеется одно положение равновесия $z = 0$, для которого $C = -3R/2$. Траектории вблизи этого положения рав-

новесия, близкие к эллипсам, соответствуют линейным гармоническим колебаниям. На фазовой плоскости имеется также особая прямая $Z = U^{2/3} - 1$. Область финитных периодических движений ограничена на плоскости особой траекторией (изображена на рис. 2 жирной линией), для которой на особой прямой производная Z' остается конечной. Отсюда следует, что на этой траектории $C = -1.5R[1 - (U^{2/3} - 1)^3/3U^2]$. Движениям по особой кривой соответствуют волны предельной формы с изломом при вершине (рис. 3). При этом максимальное и минимальное значения Z равны

$$Z_{\max} = U^{2/3} - 1, \quad Z_{\min} = [(U^{2/3} - 1)^2 + U^{2/3}]^{1/2} - U^{2/3},$$

а модуль максимальной производной при $Z = Z_{\max}$, $|Z'|_{\max} = U^{4/3} [(U^{2/3} - 1)R/3]^{1/2}$. Заметим, что $Z_{\min}(U \rightarrow \infty) = -1/2$, т.е. понижение свободной поверхности у волн предельной конфигурации не превосходит половины глубины жидкости.

Решения уравнения (18) можно записать в квадратурах, причем для волн предельной конфигурации профиль Z выражается в элементарных функциях [4]. В принятой здесь нормировке (2π -периодичность по ξ) параметр U — безразмерная скорость волны — не является независимым, а выражается через R . Зависимость U от R для волн предельной конфигурации показан на рис. 4 сплошной кривой. Здесь же для сравнения штриховой показана зависимость $U = (1 - R)^{-1/2}$ для синусоидальных возмущений малой амплитуды.

Для слабонелинейных возмущений, описываемых уравнением (11) с $Q = 0$, для которых $U - 1 \ll 1$, предельная волна имеет форму параболы [6]: $Z = R(\xi^2 - \pi^2/3)/18$, $|\xi| \leq \pi$. Для такой волны имеем $U \approx 1 + \pi^2 R/18$, $Z_{\max} = \pi^2 R/27$, $Z_{\min} = -Z_{\max}/2$, $|Z'|_{\max} = \pi R/9$, $C = -3R/2 + \pi^6 R^4/39906$.

Если же $U < 1$, но $1 - U \ll 1$ (для медленных волн), то, как легко показать из анализа фазовой плоскости при $Q = 0$ [6], периодические решения в этом случае отсутствуют. Ограниченные решения имеют вид либо импульсов конечной длины на постоянном "пьедестале" и с особенностями производной на краях [6], либо импульсов, похожих по форме на солитоны с экспоненциально убывающими асимптотиками, но опять же с особенностями производной на переднем и заднем склонах импульса [26]. Однако в полном уравнении с ВЧ-дисперсией такие решения, очевидно, невозможны.

Выясним теперь влияние ВЧ-дисперсии на структуру стационарных волн. Будем рассматривать возмущения относительно небольшой амплитуды, описываемые уравнением (11). В этом уравнении можно выполнить нормировку так, что оно будет содержать лишь два независимых параметра, полностью определяющих структуру его решений (тогда как в более общем уравнении (10) такой нормировки сделать не удастся). Введем переменную $W = 3ZU^2/(U^2 - 1)$ и перепишем (11) в виде

$$(W''/U_T - W + W^2/2)'' = W/S_0, \quad (19)$$

где $U_T = (U^2 - 1)/QU^2$, $S_0 = (U^2 - 1)/RU^2$.

Решения этого уравнения при конечных U_T и S_0 в аналитической форме найти не удастся, поэтому для их построения использовалась ЭВМ. Будем искать $W(\xi)$ в виде ряда Фурье $W(\xi) = \sum_{k=1}^N a_k \cos k\xi$. Получающаяся после

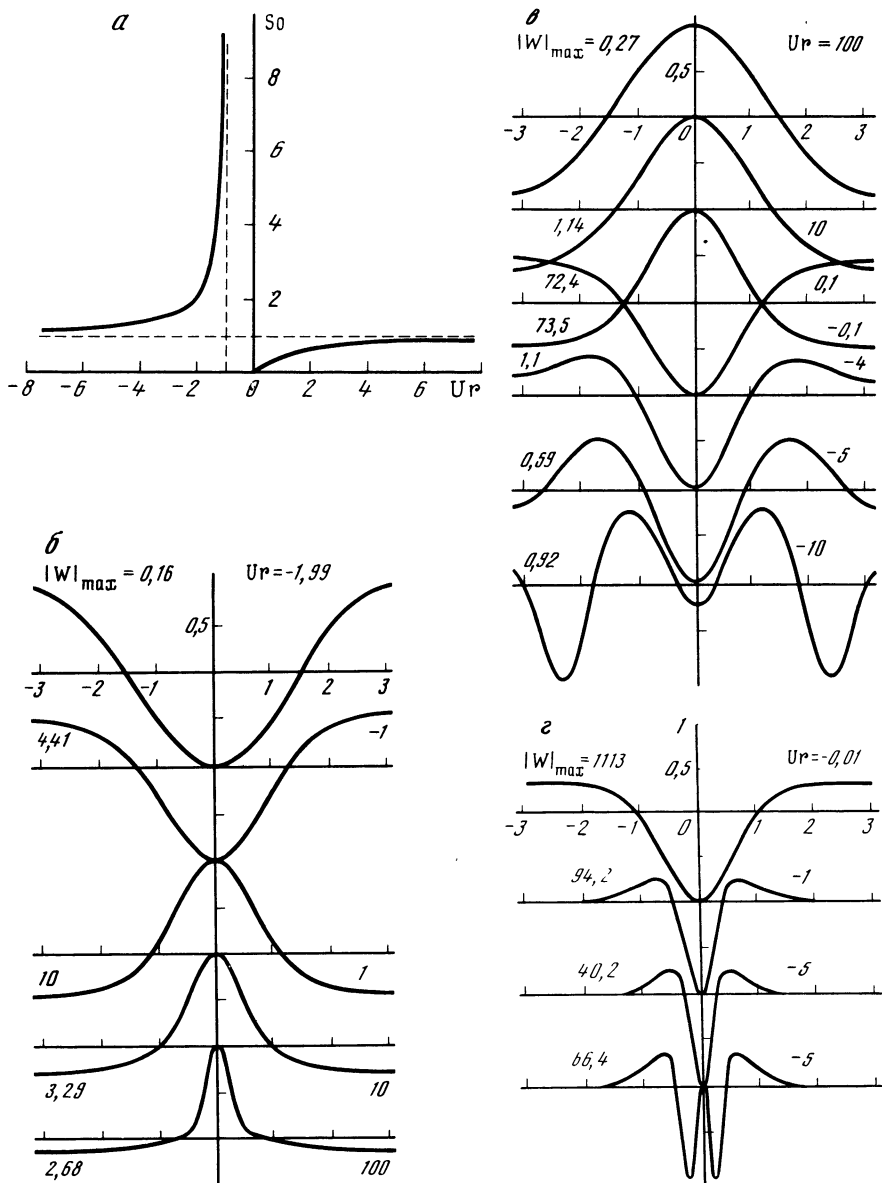
подстановки этого ряда в (19) система нелинейных уравнений решалась итерационным методом Ньютона; при этом число гармоник задавалось равным 32, так что относительный вклад коэффициента a_{32} не превышал 0,1% в общем решении (в работе [13] был предложен иной метод численного решения уравнения (19), но каких-либо результатов расчетов приведено не было).

Результаты наших расчетов можно суммировать в виде "карты решений" на плоскости параметров Ur , So (рис. 5, а). Прежде всего отметим, что для достаточно малых возмущений, когда нелинейным членом можно пренебречь, из (19) следует дисперсионная зависимость, которая в используемых переменных имеет вид $So = Ur / (Ur + 1)$. Эта зависимость изображена на рис. 5, а сплошной кривой. Стационарные решения, соответствующие точкам на этой кривой, представляют собой синусоиды (с периодом 2π в нашей нормировке). С помощью теории возмущений нетрудно получить поправки к линейному решению и соответственно к дисперсионной зависимости:

$$So = \frac{Ur}{Ur + 1} \left[1 + \frac{\alpha^2 Ur^2}{6(Ur + 1)(Ur + 5)} \right], \quad (20)$$

где $\alpha \ll 1$ – малый параметр, пропорциональный амплитуде возмущения.

При $So \rightarrow \infty$ правой частью (19) можно пренебречь, тогда оставшееся уравнение представляет собой стационарную форму уравнения КдВ, решения которого хорошо известны. При $Ur = -1$ это синусоида, которая с ростом Ur переходит в кноидальную волну, а затем при $Ur \rightarrow \infty$ в периодическую последовательность солитонов. Физический смысл имеют решения лишь в области $Ur > -1$, что видно также из формулы (20). При больших и умеренных значениях $So > 1$ поведение стационарных решений при изменении Ur остается качественно подобным описанному: от синусоидальных волн на кривой $So(Ur)$ к квазикноидальным волнам при увеличении Ur . Причем стационарные волны имеют пологие вершины и острые впадины, если $Ur < 0$, и, наоборот, острые вершины и пологие впадины, если $Ur > 0$ (рис. 5, б). При достаточно больших Ur и фиксированном значении So вершина волны становится похожей по форме на солитон КдВ, что легко объясняется из качественных соображений. Действительно, с ростом Ur уменьшается характерная ширина гребня. Это значит, что в области гребня волны доминирует ВЧ-дисперсия (слагаемое W^{IV}/Ur в уравнении (19)), а НЧ-дисперсией можно пренебречь. В промежутках между гребнями профиль волны, напротив, становится очень плавным, здесь ВЧ-дисперсия пренебрежима, а доминирует НЧ-дисперсия, поэтому данный участок волны близок по форме к ранее отмеченной параболе. Сама же парабола как предельное решение уравнения (19) при $Ur = \infty$ соответствует значению $So = \pi^2/9$. Другие допредельные периодические решения уравнения (19) с $Ur = \infty$ (которым соответствуют замкнутые кривые на фазовой плоскости рис. 2, лежащие внутри выделенной кривой) заключены в узком интервале значений So от 1 до $\pi^2/9$. Важно, однако, отметить, что если при $So = \infty$ увеличение параметра Ur приводит к решению, представляющему собой периодическую последовательность не связанных друг с другом солитонов КдВ, между которыми поле прак-



Р и с. 5. Плоскость параметров U_r, S_0 для уравнения (19) и структура стационарных решений этого уравнения

a — зависимость S_0 от U_r (сплошные кривые), соответствующая линейным решениям с синусоидальным профилем; b — изменение формы стационарной волны при увеличении параметра U_r и фиксированном $S_0 = 2$; b, c — изменение формы стационарной волны при уменьшении параметра U_r и фиксированных $S_0 = 1$ (b); $0,01$ (c). Последняя кривая на рис. 5, c изображает стационарный бисолитон, существующий при тех же значениях параметров U_r и S_0 , что и одиночный солитон (предыдущая кривая на том же рисунке). Амплитуды всех стационарных волн нормированы на максимум модуля W . Слева указаны их истинные значения

тически постоянно, то при любых конечных значениях S_0 поле между импульсами уже непостоянно. Поэтому здесь нет решений в виде одиночных солитонов. Этот факт для положительных значений U_T доказан строго в работах [5, 28].

При $S_0 \leq 1$ качественное поведение решений при изменении U_T становится иным. Теперь физически разумные решения располагаются слева от кривой $S_0(U_T)$. При $S_0 = 1$ и больших значениях U_T форма волны близка к синусоиде. При уменьшении U_T гребни волны обостряются, а впадины становятся более плоскими (до тех пор пока $U_T > 0$). При $U_T < 0$, наоборот, более плоскими являются гребни и более острыми впадины (рис. 5, в). При уменьшении U_T в отрицательной области профиль волны становится все более несинусоидальным, однако постепенно на периоде волны между двумя глобальными минимумами возникает еще один локальный минимум, затем еще и еще. Волна приобретает сложную форму (см. рис. 5, в).

Аналогичная картина имеет место и при меньших значениях S_0 (см. рис. 5, г). Отметим, что при $U_T < 0$ "антисолитонная" теорема [5, 28] уже не выполняется, хотя и существование солитонов в этом случае не доказано. Однако наши расчеты показывают, что при малых S_0 и достаточно больших отрицательных U_T профиль волны приближается к периодической последовательности импульсов отрицательной полярности (впадины на поверхности жидкости), практически не связанных друг с другом. О каждом из таких импульсов можно говорить как о солитоне. Благодаря немонотонности профиля этих солитонов (наличие локальных максимумов) здесь возможно образование стационарных связанных состояний из двух и более импульсов. В качестве примера на последней кривой рис. 5, г изображен рассчитанный на ЭВМ стационарный бисолитон.

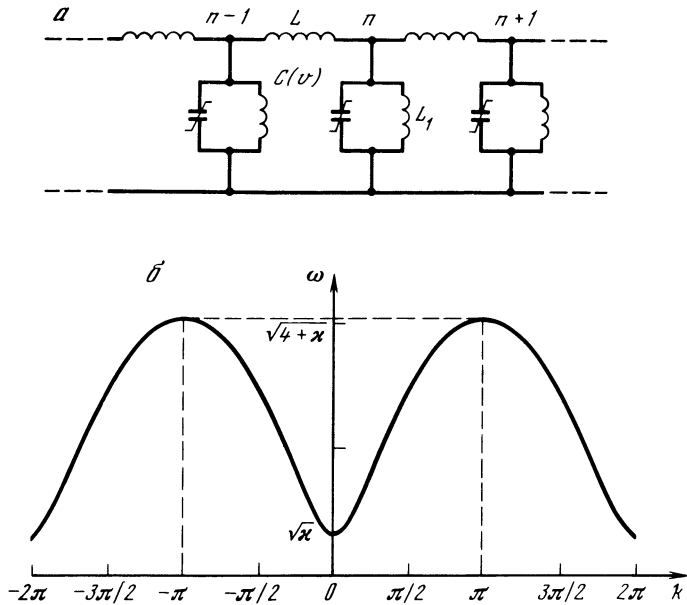
Еще более сложная и многообразная картина стационарных решений возникает при $S_0 < 0$ (сюда же входят и упоминавшиеся выше "медленные" волны, для которых $U < 1$). Полная картина решений в этом случае до сих пор до конца не проанализирована, поэтому мы здесь ее касаться не будем.

3.2. Динамика нестационарных возмущений

Исследование нестационарных возмущений в рассматриваемом классе систем удобно провести на модели линии передачи, построенной по типу полосового фильтра и содержащей нелинейные элементы (рис. 6, а). Предполагая зависимость между зарядом Q_n и напряжением v_n на конденсаторе в n -м звене линии в виде нелинейной функции вида $\dot{Q}_n = Q_0 \ln(1 + v_n/V_0)$, нетрудно получить из уравнений Кирхгофа основное уравнение, описывающее распространение возмущений в такой цепочке:

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln(1 + u_n) = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} - \kappa u_n, \quad (21)$$

где $u_n = v_n/V_0$, $\kappa = L/L_1$ (L, L_1 – индуктивности, изображенные на рис. 6, а), время здесь нормировано на $(V_0/LQ_0)^{1/2}$. Отметим, что при $\kappa = 0$ уравнение (21) сводится к хорошо известной полностью интегрируемой гамильтоновой системе – "электрическому" варианту цепочки Тоды [14], которая



Р и с. 6. Схема линии передачи типа полосового фильтра (а) и соответствующая дисперсионная зависимость (б)

в свою очередь для возмущений малой амплитуды и большой длины приводится к уравнению КДВ.

Из уравнения (21) следует дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \kappa + 4 \sin^2(k/2),$$

график которого изображен на рис. 6, б. Ввиду пространственной периодичности системы кривая $\omega(k)$ оказывается периодической по k , однако физический смысл имеют лишь те ее участки, которые соответствуют первой зоне Бриллюэна [15] (на рис. 6, б в диапазоне $-\pi < k < \pi$).

Как видно из рисунка, в пределах первой зоны дисперсионная кривая для длинной линии качественно подобна дисперсионной кривой для волн во вращающейся жидкости (ср. рис. 1) с $\beta > 0$. Если κ достаточно мало, то в длинноволновом диапазоне приближенно имеем

$$\omega \approx (\kappa + k^2 - k^4/12)^{1/2} \approx k - k^3/24 + \kappa/2k,$$

что совпадает по виду с (5). В этом случае удобно перейти к непрерывному приближению, рассматривая n как непрерывную переменную. Тогда для слабонелинейных возмущений нетрудно получить из (21) уравнение, аналогичное (6):

$$(u_t + uu_x/2 + u_{xxx}/24)_x = \kappa u/2, \quad (6a)$$

где теперь $x = n - t$. Переход от этого уравнения к (6) и наоборот можно осуществить при помощи замен $u = 3c_0\eta/\hbar(4c_0\beta)^{1/3}$, $x = \xi/(4c_0\beta)^{1/3}$,

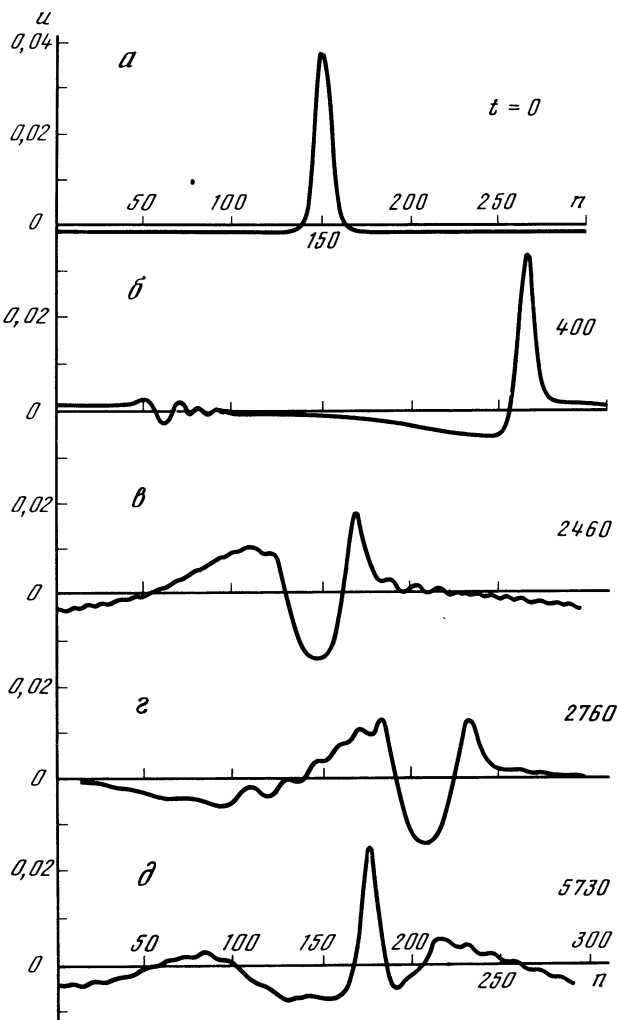
$\kappa = \Omega^2 (4c_0\beta)^{1/3} / c_0$. С точки зрения численных расчетов дифференциально-разностное уравнение (21) удобно использовать для изучения волновых процессов, описываемых уравнениями (6), (6а). Отметим, что подобная линия передачи использовалась В.В. Папко для непосредственного аналогового моделирования динамики нелинейных волн во вращающейся жидкости; кратко об этом сообщалось в [16].

Прежде чем переходить к обсуждению результатов численных расчетов эволюции нестационарных волн, отметим, что для линейных периодических в пространстве возмущений из (21) следует, что среднее значение $\langle u \rangle \equiv \sum_{n=1}^N u_n / N$, где N – число звеньев линии на периоде, может осциллировать

во времени с частотой $\kappa^{1/2}$ (тогда как в рамках (6) и (6а) $\langle u \rangle = 0$). Амплитуда осцилляций определяется начальными условиями. При учете нелинейности генерация средних полей происходит даже в том случае, когда вначале их не было. Это же справедливо и в отношении уравнения (2).

Пусть при $t = 0$ в цепочке (21) задана периодическая последовательность импульсов, совпадающих по структуре с солитонами КдВ (рис. 7). При $\kappa = 0$ эти импульсы представляют собой стационарную волну с нулевым средним значением, бегущую вправо по цепочке. При $\kappa \neq 0$ (в наших расчетах $\kappa = 10^{-4}$) такое начальное условие уже не соответствует волне, бегущей только вправо, возникает также небольшое возмущение, распространяющееся влево по цепочке, однако в данном случае это возмущение не оказывает существенного влияния на динамику основной волны. Оценка параметров Ur и So (см. (7)) для начального импульса с амплитудой, равной 0,02, и характерной полушириной, равной 5, дает $Ur = 6$, $So = 8$. Отсюда видно, что его эволюция приблизительно в одинаковой степени подвержена влиянию как НЧ-, так и ВЧ-дисперсий. Расчеты показывают, что по мере движения задняя часть импульса становится более крутой (рис. 7, б), за ним возникает углубление, постепенно переходящее в длинный апероидический хвост. В дальнейшем амплитуда импульса постепенно падает, а отрицательный выброс за ним нарастает. Потом импульс вовсе теряется в образовавшихся нестационарных возмущениях разной полярности (рис. 7, в), однако через некоторое время он вновь восстанавливается почти с первоначальной амплитудой (рис. 7, г) на фоне квазисинусоидальных возмущений больших и малых масштабов. Форма импульса все время, пока он хорошо различим, остается близкой к форме солитона КдВ соответствующей амплитуды. Затем повторяется процесс разрушения импульса и образования нового. Это явление похоже на рекуррентность в уравнении КдВ [14]. Одновременно с этим благодаря нелинейности в цепочке происходит генерация средних полей. Среднее по пространству значение u колеблется во времени с частотой, близкой к $\kappa^{1/2}$ и амплитудой, примерно равной $4,7 \cdot 10^{-4}$.

В других расчетах в качестве начального условия задавался параболический профиль, соответствующий бегущей вправо стационарной волне, описываемой уравнением (11), с $Q = 0$ (рис. 8). Для такого возмущения при $\kappa = 10^{-4}$, $Ur = 2,7 \cdot 10^{-5}$, $So = 2,8 \cdot 10^{-2}$, т.е. в этом случае преобладало влияние НЧ-дисперсии на всей длине возмущения, за исключением вершин, где нарушается аналитичность функции (напомним, что задача решалась



Р и с. 7. Эволюция периодической последовательности импульсов, имеющих в начальный момент форму солитонов КдВ

с периодическими граничными условиями по n). Влияние ВЧ-дисперсии приводило в этой области к интенсивной генерации импульсов, бегущих в противоположные стороны, причем их форма снова была близка к форме солитонов КдВ (рис. 8, б). На рис. 8, б хорошо видно, что все возмущение можно разбить на области, в каждой из которых преобладает "своя" дисперсия: там, где более существенна ВЧ-дисперсия, наблюдаются солитоны, в области преобладания НЧ-дисперсии профиль волны остается параболическим. Поскольку скорость распространения солитонов, пропорциональная их амплитуде, не совпадает со скоростью движения параболы, они постепенно продвигаются по ней, оставляя за собой высокочастотный

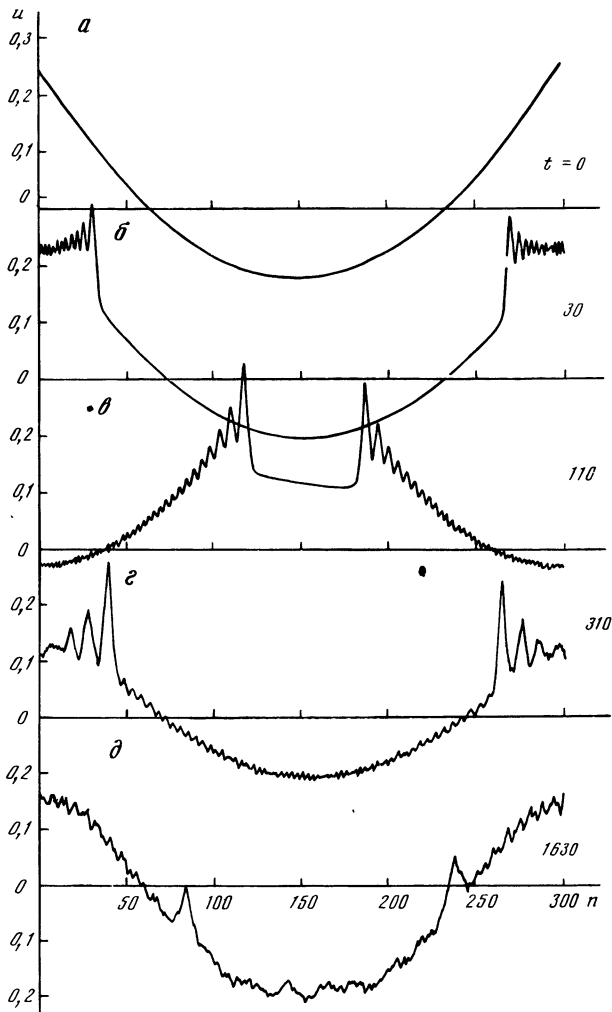


Рис. 8. Эволюция периодической волны с параболическим начальным профилем, описываемым уравнением (11), с $Q = 0$

осциллирующий хвост. Потом они сталкиваются друг с другом, возмущение становится сильно изрезанным, хотя в среднем хорошо заметным остается параболический профиль (рис. 8, в). В дальнейшем картина эволюции представляет собой распространение по цепочке НЧ-волны с близким к параболическому профилем, на фоне которого движутся в противоположных направлениях солитоны и нестационарные ВЧ-цуги малой амплитуды (рис. 8, г). В ходе этого процесса также происходит генерация средних полей, осциллирующих с частотой $\sim \kappa^{1/2}$ и амплитудой $\sim 8,7 \cdot 10^{-2}$.

4. ДВУМЕРНЫЕ ВОЛНЫ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Будем рассматривать слабонелинейные возмущения, масштабы изменения которых вдоль y (поперек основного движения) много больше, чем по x . В этом случае для их описания можно воспользоваться модельным уравнением (9) с соответствующими граничными условиями, зависящими от характера рассматриваемой задачи. Так, при изучении волн во вращающемся канале ширины L , ограниченном по y жесткими стенками, граничные условия имеют вид [8, 9]

$$\eta_y + \Omega\eta/c_0 \quad \text{при } y = 0, L, \quad (22)$$

что соответствует обращению в нуль нормальной компоненты скорости v на стенках. При наличии канала средний уровень возмущения поверхности $\langle \eta \rangle$ уже может быть не равным нулю. Действительно, интегрируя (9) по периоду волны Λ вдоль ξ , с учетом (22) получим [8, 9] (для локализованных возмущений интеграл берется в бесконечных пределах):

$$\frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} \eta(\xi, y, t) d\xi = M(t) e^{-\Omega y/c_0}, \quad (23)$$

где $M(t)$ можно интерпретировать как "массу" волны при $y = 0$. Для стационарных волн $M = \text{const}$. Это соотношение налагает жесткие ограничения на поперечную структуру начальных возмущений, описываемых уравнениями (9), (22). Например, в экспериментах, описанных в [17], в качестве начального условия задавалась плоская уединенная по x волна с однородным фронтом по y . Эволюцию такого возмущения уже нельзя, строго говоря, рассматривать в рамках модельных уравнений (9), (22) (кроме того, возмущения в [17] были сильными, что тоже противоречит условиям применимости (9)).

В работе [9] были представлены результаты численных расчетов, выполненных в рамках модели (9), (22). В качестве начального условия задавался солитон КдВ с плоским фронтом и экспоненциально спадающей по y амплитудой, так что условие (23) выполнялось. Было обнаружено, что в процессе эволюции фронт волны искривлялся в плоскости x, y , участки с большей амплитудой вблизи одной боковой границы канала ($y = 0$) убежали вперед, тогда как участки с малой амплитудой отставали (рис. 9). При этом за фронтом волны наблюдалось излучение слабонелинейных волн. Профиль волны у границы $y = 0$ оставался качественно подобным профилю солитона КдВ, но был заметно шире. Вдоль y амплитуда возмущения убывала экспоненциально в соответствии с линейной теорией ($\eta \sim e^{-\Omega y/c_0}$). Вдоль искривленного фронта волны также наблюдалось экспоненциальное убывание ее амплитуды, но несколько более медленное. По мере распространения волны отмечалось ее общее затухание вдоль x , которое, по-видимому, было обусловлено излучением квазилинейных волн, заметных на рис. 9. Поскольку для внутренних волн, рассматривавшихся в [9], дисперсия такова, что $\beta > 0$, то, как уже отмечалось, формирование стационарных уединенных волн здесь невозможно. Искривление

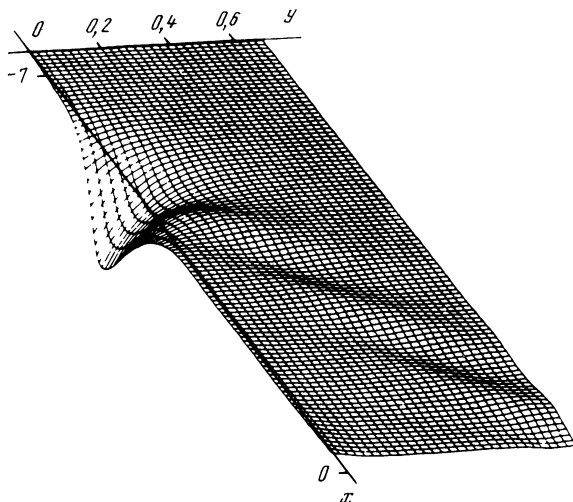


Рис. 9. Численный расчет эволюции двумерной волны, имевшей при $t = 0$, $y = 0$ форму солитона КдВ с амплитудой, экспоненциально убывающей по y [9]

фронта, по-видимому, можно объяснить радиационным затуханием волны, ибо, как показано в работе [18], для волн Кельвина, имеющих близкую природу, наличие диссипации в среде приводит к искривлению фронта уединенных волн. При этом кривизна фронта зависит от характера диссипации. Эти выводы находятся в качественном согласии с экспериментальными результатами [17], хотя, как уже отмечалось, в последнем случае начальные условия не были согласованы с моделью (9), (22). В численных расчетах [9] воспроизводились также условия, соответствующие эксперименту [17], т.е. в начальный момент задавался солитон КдВ с плоским однородным по y фронтом. Расчеты показали, что результаты остаются практически такими же, как и в первом случае. Это указывает на то, что нарушение условия (23) не слишком существенно для качественной картины эволюции начальных возмущений. Этим же объясняется и согласие между результатами экспериментов [17] и численных расчетов [9].

4.1. Автомодуляция и самофокусировка волновых пакетов

В работе [5] был проведен анализ устойчивости плоских стационарных периодических по x волн по отношению к автомодуляции и самофокусировке в рамках уравнения (11). Отыскивая периодические решения этого уравнения в виде ряда по безразмерной амплитуде волны α , запишем

$$\begin{aligned} Z &= \alpha Z_1(\xi) + \alpha^2 Z_2(\xi) + \alpha^3 Z_3(\xi) + \dots, \\ 2(U - 1) &= a_1 + \alpha^2 a_2 + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

(напомним, что в рамках (11) период волны равен 2π). Тогда после подстановки (24) в (11) и приравнивания слагаемых с одинаковыми степе-

ниями α , получим решение, обобщающее решение Стокса [19] на случай вращающейся среды:

$$Z = \alpha \sin \zeta - \frac{\alpha^2 \cos 2\zeta}{R + 4Q} - \frac{27\alpha^3 \sin 3\zeta}{16(R + 4Q)(R + 9Q)} + \dots, \quad (25)$$

$$2(U - 1) = R - Q + \frac{\alpha^2 Q}{2(R + 4Q)} + \dots$$

Вторая из этих формул в (25) представляет собой так называемое нелинейное дисперсионное уравнение. В размерных переменных оно записывается в виде (ср. с (5))

$$\omega = c_0 k + \frac{\Omega^2}{2c_0 k} - \frac{\beta c_0}{6} k^3 - \frac{9\eta^2 \beta c_0^3 k^3}{2h^4 (6\Omega^2 + 8\beta c_0^2 k^4)} + \dots \quad (26)$$

Отсюда легко получить условия устойчивости квазигармонических волн по отношению к продольным и поперечным возмущениям [2]. Согласно критерию Лайтхилла волна устойчива по отношению к автомодуляции, если $(\partial^2 \omega / \partial k^2)_{\eta=0} (\partial \omega / \partial \eta^2)_{\eta=0} > 0$.

Используя (26), получаем

$$\left(\frac{\Omega^2}{c_0 k^3} - \beta c_0 k \right) \frac{9\beta c_0^3 k^3}{6\Omega^2 + 8\beta c_0^2 k^4} > 0. \quad (27)$$

Если $\beta > 0$, то второй множитель положительный. Тогда неравенство (27) справедливо при $k < k_1 \equiv (\Omega^2 / \beta c_0^2)^{1/4}$, т.е. в области достаточно длинных волн. Если же $\beta < 0$, то положителен первый множитель в (27). Тогда неравенство (27) выполняется при $k > k_2 \equiv (-3\Omega^2 / 4\beta c_0^2)^{1/4}$. Отсюда видно, что в узком диапазоне масштабов $k_2 < k < k_1$ периодические волны устойчивы по отношению к автомодуляции при любом знаке β .

Рассмотрим теперь устойчивость волн по отношению к самофокусировке. Критерием такой устойчивости является, как известно [2], условие $(\partial \omega / \partial \eta^2)_{\eta=0} > 0$. Из выражения (27) видно, что это условие сводится к требованию положительности второго множителя в (27). При $\beta > 0$ этот множитель положителен при всех k , а при $\beta < 0$ его положительность обеспечивается лишь в области достаточно коротких волн ($k < k_2$). Таким образом, при наличии положительной дисперсии в области высоких частот ($\beta < 0$) волны больших масштабов с $k < k_2$ неустойчивы по отношению как к автомодуляции, так и к самофокусировке. Уже это обстоятельство дает основание думать, что в средах с $\beta < 0$ могут существовать солитоны как в одномерном (что было фактически подтверждено численными расчетами в подразд. 3.1), так и в двумерном случаях. Ниже мы приводим результаты расчетов структуры двумерных солитонов при $\beta < 0$, которые подтверждают, что предположение об их существовании оправдывается.

4.2. Структура двумерных мультисолитонов

Исследования последних лет показали, что наличие положительной дисперсии в ВЧ-области спектра в системах, описываемых обобщенным уравнением КП, делает возможным существование двумерных локализованных в пространстве солитонов и их стационарно связанных групп – мультисолитонов [20]. Приведенные выше соображения также говорят в пользу возможности существования таких образований при $\beta < 0$. Для их поиска воспользуемся методом стабилизирующего множителя, впервые предложенным в [21].

Приведем вначале уравнение (9) к стандартному безразмерному виду, аналогичному (11), вводя переменные

$$Z = \eta/h, \quad \xi = \xi \cdot 2\pi/\Lambda_x, \quad \theta = y \cdot 2\pi/\Lambda_y,$$

где Λ_x, Λ_y – характерные масштабы возмущения по x и y . Тогда для волн, стационарно распространяющихся по $\xi (= x - c_0 t)$ со скоростью δV , получим из (9)

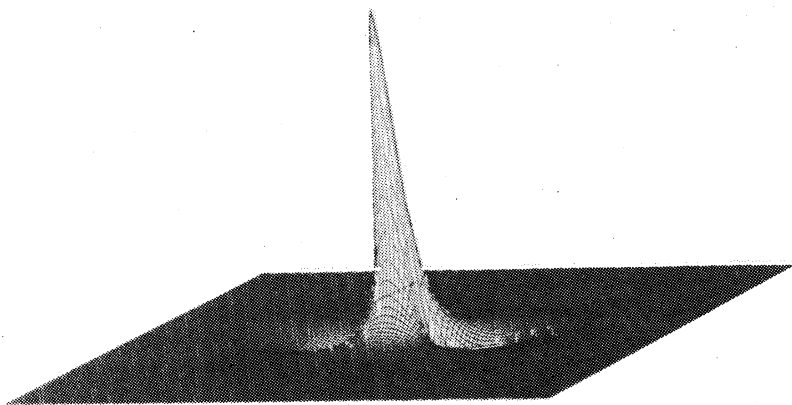
$$(QZ_{\xi\xi} + 3Z^2/2 - 2\delta UZ)_{\xi\xi} = RZ - DZ_{\theta\theta}, \quad (28)$$

где $Q = (2\pi/\Lambda_x)^2 \beta/3$, $\delta U = \delta V/c_0$, $R = (\Lambda_x/2\pi)^2 (\Omega/c_0)^2$, $D = (\Lambda_x/\Lambda_y)^2$.

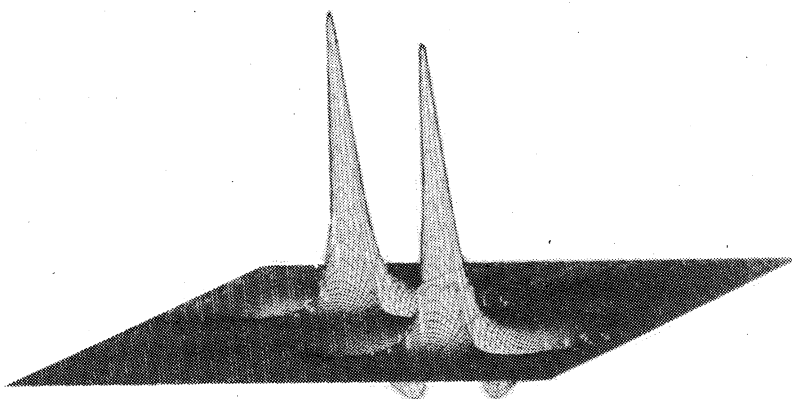
Далее, поиск стационарных решений уравнения (28) осуществлялся в спектральной форме по известной итерационной схеме [20, 21]. Использование в качестве стартовой функции колоколообразного вида привело, как и ожидалось, к двумерному солитону, изображенному на рис. 10 при следующих значениях коэффициентов: $Q = -0,25$; $D = 3$; $\delta U = -1,5$; $R = 30$. Двумерный солитон представляет собой углубление на поверхности жидкости. Применительно к волнам на воде такие солитоны могут существовать лишь в достаточно мелких вращающихся сосудах глубиной менее 5 мм, когда капиллярные силы преобладают над гравитационными. Отметим попутно, что указанные условия, по-видимому, легко могут быть реализованы на установках, описанных в работах [22, 23], в которых изучались волно-вихревые образования на гораздо более низких частотах ($\omega \ll \Omega$), принадлежащих к спектру колебаний волн Россби.) На первый взгляд, эти солитоны похожи на двумерные солитоны КП [21], которые, естественно, получаются и в нашем случае, если вращение отсутствует ($R = 0$), однако между ними есть и существенное отличие. Для солитонов КП известно аналитическое выражение [24]

$$Z(\xi, \theta) = 8Q \frac{3Q/2\delta U - 2\delta U\theta^2/D - \xi^2}{(3Q/2\delta U - 2\delta U\theta^2/D + \xi^2)^2}, \quad (29)$$

из которого видно, что это решение обладает степенными асимптотиками $Z \sim \xi^{-2}$, θ^{-2} при $|\xi|, |\theta| \rightarrow \infty$. В нашем случае при $R = 0$ двумерный солитон является гораздо более компактным, его поле убывает в пространстве экспоненциально. Этот факт непосредственно следует из линеаризованного уравнения (28), справедливого на больших расстояниях от центра солитона, где Z достаточно мало. Действительно, при $R = 0$ и в пренебрежении Z^2 асимптотика решений этого уравнения определяется собственными функциями уравнения Лапласа $\Delta Z = 0$, к которому сводится линеаризованное

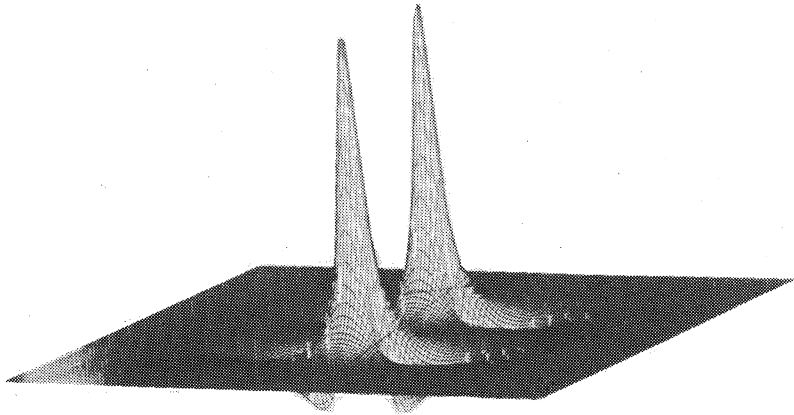


Р и с. 10. Общий вид двумерного солитона в средах с положительной ВЧ-дисперсией



Р и с. 11. Общий вид двумерного бисолитона, движущегося под углом к линии, соединяющей его вершины

уравнение (28) после соответствующего преобразования масштабов. Как известно, убывающими собственными функциями оператора Лапласа являются степенные функции. Поэтому дисперсионное слагаемое с четвертой производной, имеющее более высокий порядок малости на таких функциях, пренебрежимо мало. Если же $R \neq 0$, то в главном порядке вместо оператора Лапласа линеаризованное уравнение (28) будет содержать оператор Гельмгольца $(\Delta - R)$, собственными функциями которого уже являются экспоненты. Но на этих функциях дисперсионное слагаемое не является малым по сравнению с остальными членами, поэтому его также необходимо удерживать при построении асимптотики решения. В результате этого масштаб убывания поля солитонов (показатель экспоненты) на больших расстояниях становится анизотропным: характерный



Р и с. 12. Двумерный бисолитон, движущийся перпендикулярно линии, соединяющей его вершины

масштаб изменения поля вдоль движения солитона (по ζ) не совпадает с масштабом спадаания в поперечном направлении (по θ).

Из анализа структуры одиночных солитонов (см. рис. 10) видно, что они обладают локальными экстремумами поля вне центра. Это дает основание предполагать существование связанных состояний из двух и большего числа солитонов [25]. Проведенный нами расчет с двугорбой стартовой функцией подтвердил существование таких решений в виде стационарных бисолитонов. Их форма изображена на рис. 11. Здесь обращает на себя внимание тот факт, что солитоны в группе движутся вдоль ζ не строго друг за другом, как это имело место в рамках уравнения КП [20], а так, что линия, соединяющая их центры, составляет определенный угол с траекторией движения. Мы обнаружили, что при одних и тех же параметрах уравнения (28) существует несколько различных решений в виде бисолитонов с различными углами разворота. В частности, наряду с решением, изображенным на рис. 11, оказалось возможным построить связанную пару бисолитонов, движущихся бок о бок параллельно друг другу (рис. 12).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный выше анализ позволяет утверждать, что введение даже слабого вращения (или других аналогичных эффектов) в системах КДВ-типа способно радикально изменить поведение решений и существенно расширить их класс. Среди новых моментов, появляющихся при этом:

- 1) отсутствие солитонов при отрицательной ВЧ-дисперсии;
- 2) появление специфических, связанных с вращением солитонов с немонотонной асимптотикой при положительной ВЧ-дисперсии;
- 3) наличие волн предельной конфигурации в отсутствие ВЧ-дисперсии даже при слабой нелинейности;
- 4) появление "двухмасштабных" периодических волн с острыми солитоноподобными гребнями на фоне НЧ-волн;
- 5) трансформация этих типов волн друг в друга в процессе эволюции;

6) формирование нестационарных солитонных пакетов, параметрически взаимодействующих с НЧ-компонентой;

7) формирование неоднородных волн с искривленными фронтами в ограниченных или полугограниченных в поперечном направлении системах (например, в каналах);

8) возможность одновременного выполнения условий самофокусировки и автомодуляции в определенном диапазоне длин волн в системах с положительной ВЧ-дисперсией;

9) существование двумерных солитонов с сильной (экспоненциальной) локализацией в этих же системах;

10) возможность образования двумерных бисолитонов (вероятно, и мультисолитонов) в виде стационарно движущихся пар солитонов, различным образом ориентированных относительно линии их движения.

Все эти многообразные свойства реализуются, в сущности, путем изменения знака и величины единственного параметра, определяемого вращением. По нашему мнению, этот класс систем заслуживает дальнейшего изучения с использованием различных "синергетических" методов – аналитических, численных и экспериментальных.

Авторы благодарны Л.А. Абрамян и И.П. Рязанцевой за проведение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Браун О.М., Зеленская И.И., Кившарь Ю.С. Модель Френкеля–Конторовой с дальним взаимодействием: Препр. № 2 Ин-та физики АН УССР. Киев, 1989. 36 с.
2. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
4. Шприца В.И. О длинных существенно нелинейных волнах во вращающемся океане//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22, № 4. С. 395–405.
5. Leonov A.I. The effect of Earth rotation on the propagation of weak nonlinear surface and internal long oceanic waves//Ann. Acad. Sci. (N.Y.) 1981. Vol. 373. P. 150–159.
6. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане//Океанология. 1978. Т. 18, № 2. С. 181–191.
7. Redekopp L.Y. Nonlinear waves in geophysics: Long internal waves//Lect. Appl. Math. 1983. Vol. 20. P. 29–78.
8. Grimshaw R. Evolution equations for weakly nonlinear long internal waves in a rotating fluid//Stud. Appl. Math. 1985. Vol. 73, pt 1. P. 1–33.
9. Katsis C., Akylas T.R. Solitary internal waves in a rotating channel: A numerical study//Phys. Fluids. 1987. Vol. 30, № 2. P. 297–301.
10. Музылев С.В. Нелинейные экваториальные волны в океане//Тез. докл. II Всесоюз. съезда океанологов. Севастополь, 1982. Т. 2. С. 26–27.
11. Шприца В.И. Распространение длинных нелинейных волн в слое вращающейся жидкости//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17, № 1. С. 76–81.
12. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах//ДАН СССР. 1970. Т. 192, № 4. С. 753–756.
13. Зайцев А.А. О стационарных решениях уравнения Островского//Тез. докл. Всесоюз. совещ. по вычислительным методам в проблеме цунами. Красноярск, 1987. С. 58–60.
14. Toda M. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984. 262 с.
15. Бриллюэн Л., Пароди М. Волны в периодических структурах. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 273 с.
16. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны в океане//Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 292–323.
17. Renouard D.P., D'Hieres G.Ch., Zhang X. An experimental study of strongly nonlinear waves in a rotating system//J. Fluid Mech. 1987. Vol. 177. P. 381–394.

18. *Хасанов Ш.М.* Распространение уединенной волны Кельвина в поглощающей среде//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и оксана. 1989. Т. 25, № 3. С. 307-311.
19. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
20. *Абрамян Л.А., Степанянц Ю.А.* О структуре двумерных солитонов в рамках обобщенного уравнения Кадомтцева–Петвиашвили//Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30, № 10. С. 1175–1180.
21. *Петвиашвили В.И.* Об уравнении необыкновенного солитона//Физика плазмы. 1976. Т. 2, № 3. С. 469–472.
22. *Антонова Р.А., Жвания Б.П., Ломинадзе Дж.Б., Нанобашвили Дж.И., Петвиашвили В.И.* Моделирование на мелкой быстровращающейся жидкости вихрей в однородной замагниченной плазме//Физика плазмы. 1987. Т. 13, № 11. С. 1327–1331.
23. *Антипов С.В., Незлин М.В., Радионов В.К., Рылов А.Ю., Снежкин Е.П., Трубников А.С., Хуторецкий А.В.* Свойства дрейфовых солитонов в плазме, вытекающие из модельных опытов на быстровращающейся мелкой воде//Физика плазмы. 1988. Т. 14, № 9. С. 1104–1121.
24. *Manakov S.V., Zakharov V.E., Bordag L.A., Its A.R., Matveev V.B.* Two-dimensional solitons of the Kadomtsev–Petviashvili equation and their interaction//Phys. Lett. A. 1977. Vol. 63, № 3. P. 205–206.
25. *Горшков К.А., Островский Л.А., Папко В.В.* Взаимодействия и связанные состояния солитонов как классических частиц//ЖЭТФ. 1976. Т. 71, № 2. С. 585–593.
26. *Рыбак С.А., Скрынников Ю.И.* Уединенные волны в тонком стержне постоянной кривизны//Акуст. журн. 1990. Т. 36, № 4. С. 548–553.
27. *Бенилов Е.С., Пелиновский Е.Н.* К теории распространения волн в нелинейных флуктуирующих средах без дисперсии//ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 1. С. 175–185.
28. *Галкин В.М., Степанянц Ю.А.* О существовании стационарных уединенных волн во вращающейся жидкости//ПММ. 1991. Т. 55, № 6. С. 989–993.

УДК 532.526+530.182

О МЕХАНИЗМЕ РЕЗОНАНСНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

В.П. РЕУТОВ

Резонансная нелинейная неустойчивость играет важную роль при разрушении ламинарного течения в пограничном слое. Обычно ее исследование строится на основе формальной теории связанных собственных волн вязкого течения [1]. Возможность подобной неустойчивости в невязком течении до настоящего времени не обсуждалась. Доказательство невязкой природы резонансной неустойчивости представляет интерес с точки зрения общей теории устойчивости течений, а также в связи с использованием приближения идеальной жидкости при численном моделировании развития возмущений в пограничных слоях [2].

В данной работе изучается возможность нелинейной неустойчивости резонансного волнового триплета в невязком пристенном течении с кусочно-линейным профилем скорости: $\bar{u} = u$ при $0 < y < 1$ и $\bar{u} = 1$ при $y > 1$ (здесь и далее используются стандартные безразмерные переменные). Трехмерным возмущениям вида $\exp[i\alpha(x - ct) + i\beta z]$ в таком течении можно приписать действительную фазовую скорость $c = 1 - (1/2\bar{\alpha}) [1 - \exp(-2\bar{\alpha})]$, где $\bar{\alpha} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$. Будем рассматривать резонансное взаимодействие двумерной волны $(\alpha_1, 0)$ с парой симметричных косых волн $(\frac{1}{2}\alpha_1, \pm\beta_1)$. Можно показать, что условия частотного резонанса в этом случае выполняются

при $2\beta_1/\alpha_1 = \sqrt{3}$. Поскольку фазовые скорости всех волн одинаковы и равны $c_1 = c|_{\bar{\alpha} = \alpha_1}$, в потоке возникает единственный критический слой (КС), локализованный вблизи поверхности $y = y_c \equiv c_1$. При малых амплитудах волн решение задачи можно свести к анализу самосогласованного развития слабонелинейного трехмерного КС. Отметим, что динамика двумерных нелинейных КС в невязкой жидкости изучалась в работах [3–6]. Формирование трехмерного нелинейного КС при фиксированных амплитудах волн рассматривалось в [7].

Уравнения задачи включают уравнения Эйлера, граничные условия при $y = 0, y \rightarrow \infty$ и приведенные к уровню $y = 1$ граничные условия на скачке завихренности. Компоненты скорости течения представим в виде $v_1 = \bar{u}(y) + u, v_2 = v, v_3 = w$. Для решения задачи воспользуемся методом многих масштабов [8]. Введем малый параметр $\epsilon \ll 1$ и координату $\xi = x - c_1 t$ вместо x . Для построения двухчленного равномерного разложения достаточно ввести вместо t одну переменную $\tau = \epsilon^{3/4} t$. Разложение для v будем искать в виде

$$v = \epsilon \left[\sum_{\alpha, \beta} a f(y; \alpha, \beta) e^{i\alpha\xi + i\beta z} + \text{к.с.} \right] + \epsilon^{5/4} v^{(5/4)} + \dots, \quad (1)$$

где $\epsilon a(\tau; \alpha, \beta)$ – комплексная амплитуда волны (α, β) ; f – профиль волны в линейной теории; суммирование производится по всем волнам триплета. В используемой нами нормировке $f = -i\bar{\alpha}^2 \text{sh} \bar{\alpha} y / \alpha \text{sh} \bar{\alpha} y_c$ при $0 < y < 1$. Аналогичные (1) разложения для u, w и давления p можно построить с помощью выражений для этих переменных через v и нелинейные члены уравнений (см. [7]). Обозначая символом \wedge комплексные амплитуды гармоник $\sim \exp(i\alpha\xi + i\beta z)$, решение краевой задачи для $\hat{v}^{(5/4)}$ в области $0 < y < 1$ можно представить в виде

$$\hat{v}^{(5/4)} = A_{\pm}^{(5/4)}(\tau; \alpha, \beta) \bar{\alpha}^{-1} \text{sh} \bar{\alpha} \eta + B^{(5/4)}(\tau; \alpha, \beta) \text{ch} \bar{\alpha} \eta, \quad (2)$$

где $\eta = y - y_c$, коэффициенты $A_{\pm}^{(5/4)}$ относятся к областям $\eta > 0$ и $\eta < 0$ соответственно. Из условия равномерной пригодности двухчленного разложения для v получается следующее уравнение для амплитуд волн:

$$da/d\tau = \alpha^2 G(A_{+}^{(5/4)} - A_{-}^{(5/4)}), \quad (3)$$

где $G(\bar{\alpha}) = (1/4\bar{\alpha}^4) [1 - \exp(-2\bar{\alpha} c_1)] \{ 2\bar{\alpha}(1 - c_1) - 1 + \exp[-2\bar{\alpha}(1 - c_1)] \}$.

Для определения скачка $A_{+}^{(5/4)} - A_{-}^{(5/4)}$ воспользуемся методом сшиваемых асимптотических разложений [8]. После перехода в исходных уравнениях к внутренней переменной $Y = \eta/\epsilon^{3/4}$ будем строить внутренние разложения для КС в виде $v = \epsilon V^{(1)} + \epsilon^{5/4} V^{(5/4)} + \epsilon^{3/2} V^{(3/2)} + \dots$, $p = \epsilon P^{(1)} + \epsilon^{5/4} P^{(5/4)} + \epsilon^{3/2} P^{(3/2)} + \dots$, $u = \epsilon^{3/4} U^{(3/4)} + \epsilon U^{(1)} + \epsilon^{5/4} U^{(5/4)} + \dots$; $w = \epsilon^{3/4} W^{(3/4)} + \epsilon W^{(1)} + \epsilon^{5/4} W^{(5/4)} + \dots$. Построение решения сводится к поочередному отысканию членов внутренних разложений для \hat{p} и \hat{v} и устранения имеющегося в них произвола путем сшивания внешних и внутренних разложений с помощью критерия Ван-Дайка: $(\hat{p}_n^0)^i_m = (\hat{p}_m^0)^0_n$, $(\hat{v}_n^0)^i_m = (\hat{v}_m^0)^0_n$, где индексы 0 и i означают внешнее и

внутреннее разложение, m и n – число членов в разложении. В данном случае достаточно произвести сращивание разложений с $n \leq 2$, $m \leq 3$. Определение членов внутренних разложений значительно упрощается, если заранее учесть вид искомой зависимости a от τ , т.е. положить $a(\tau; \alpha, \beta) = \bar{a}(\alpha, \beta) \exp(\gamma\tau)$, где $\gamma(\frac{1}{2}\alpha_1, \pm\beta_1) = \bar{\gamma} > 0$ и $\gamma(\alpha_1, 0) = 0$. Сращивание в частности, дает: $\hat{P}^{(1)} = a$, $\hat{V}^{(1)} = \bar{\alpha}^2 a / i\alpha$, $\hat{U}^{(3/4)} = i\beta^2 a / \alpha(\gamma + i\alpha Y)$, $\hat{W}^{(3/4)} = -i\beta a / (\gamma + i\alpha Y)$, $\hat{P}^{(3/2)} = -(\gamma \bar{\alpha}^2 / i\alpha) Y a - \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 Y^2 a + D_1$, где функция $D_1(\tau)$ не находится явно в данном порядке сращивания. Из законов сохранения x - и z -компонент импульса и уравнения непрерывности можно получить уравнение для $\hat{V}^{(3/2)}$ в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + i\alpha Y \right) \frac{\partial \hat{V}^{(3/2)}}{\partial Y} - i\alpha \hat{V}^{(3/2)} = -\bar{\alpha}^2 \hat{P}^{(3/2)} + \hat{F}^{(3/2)}, \quad (4)$$

где

$$F^{(3/2)} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (U^{(3/4)})^2 + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial Y} (U^{(3/4)} V^{(1)}) + \\ + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} (U^{(3/4)} W^{(3/4)}) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial Y} (W^{(3/4)} V^{(1)}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (W^{(3/4)})^2.$$

Уравнение (4) легко решается с учетом указанной выше зависимости амплитуд волн от τ . Из условия $(\hat{v}_2^0)_3^i = (\hat{v}_3^i)_2^0$ находится скачок $A_+^{(5/4)} - A_-^{(5/4)}$. Для двумерной волны он оказывается равным нулю и в соответствии с (3) ее амплитуда остается постоянной. Если амплитуды косых волн положить одинаковыми, а разность фаз $\arg \bar{a}(\frac{1}{2}\alpha_1, \beta_1) + \arg \bar{a}(\frac{1}{2}\alpha_1, -\beta_1) - \arg \bar{a}(\alpha_1, 0)$ принять равной $\pi/2$, пара уравнений для них вырождается в одно уравнение, из которого находится инкремент неустойчивости:

$$\bar{\gamma} = \left(\frac{\pi}{8} \alpha_1^4 \beta_1^2 G_1 |a(\alpha_1, 0)| \right)^{1/4}, \quad (5)$$

где G_1 – значение G при $\bar{\alpha} = (\frac{1}{4}\alpha_1^2 + \beta_1^2)^{1/2}$.

Таким образом, в невязком течении типа пограничного слоя возможна вырожденная нелинейная неустойчивость волнового триплета, при которой амплитуды косых волн нарастают экспоненциально, а амплитуда двумерной волны постоянна. Эта неустойчивость возникает благодаря отбору энергии волнами у среднего течения в КС и по существу является нелинейными усилением Ландау резонансно связанных волн. В отличие от линейного усиления (затухания) Ландау двумерных волн, возникающего при наличии градиента завихренности среднего течения в КС [4, 5], отбор энергии у течения при резонансной нелинейной неустойчивости обусловлен комбинационной деформацией вихревых линий в трехмерном КС. Индуцированные вследствие такой деформации возмущения завихренности дают скачок напряжений Рейнольдса при переходе через КС. Нелинейное усиление Ландау сохраняется и в вязком течении, так как ограничение особенности из-за вязкости и нестационарности приводит к формированию качественно близких профилей волн в КС.

Можно показать, что заметное отклонение от полученного выше закона изменения амплитуд волн во времени начинается при достижении амплитудами косых волн величины $\sim \epsilon^{3/4}$. Анализ показывает также, что при учете обратного воздействия течения в КС на амплитуды волн невозможно построить решение краевой задачи, содержащее сильно нелинейный и в то же время тонкий КС. Последнее говорит о высокой эффективности резонансной нелинейной неустойчивости как механизм разрушения ламинарного течения в пограничных слоях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Craik A.D.D.* Wave interactions and fluid flows. Cambridge: Cambridge Univ. press, 1985.
2. *Leonard A.* Vortex simulation of three-dimensional spot-like disturbances in a laminar boundary layer//Turbulent shear flows. В.: Springer, 1980. Vol. 2. P. 342.
3. *Robinson J.L.* The inviscid nonlinear instability of parallel shear flows//J. Fluid Mech. 1974. Vol. 63, № 4. P. 723–752.
4. *Реутов В.П.* Плазменно-гидродинамическая аналогия и нелинейная стадия неустойчивости ветровых волн//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16, № 12. С. 1266–1274.
5. *Реутов В.П.* Нестационарный критический слой и нелинейная стадия неустойчивости в плоском течении Пуазейля//ПМТФ. 1982. № 4. С. 43–53.
6. *Реутов В.П.* О нелинейном взаимодействии внутренних волн с приповерхностным сдвиговым течением//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. Т. 18, № 4. С. 383–390.
7. *Реутов В.П.* Нелинейный критический слой и формирование продольных вихрей при взаимодействии волн в сдвиговых течениях//ПМТФ. 1987. № 5. С. 107–115.
8. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 536 с.

УДК 532.517:532.526

УСТОЙЧИВОСТЬ КВАЗИДВУМЕРНЫХ СДВИГОВЫХ И СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Ф.В. ДОЛЖАНСКИЙ, Д.Ю. МАНИН

Двумерные течения жидкости как решения уравнений гидродинамики представляют собой обширный и весьма важный класс. Однако реальные течения не могут быть строго двумерными – либо их разрушает трехмерная неустойчивость, либо требуется некоторый механизм поддержания двумерности. В качестве последнего часто выступает твердая граница (дно и, возможно, крышка). Неизбежно возникающее при этом трение о дно (внешнее трение) существенно модифицирует многие свойства двумерных течений. Так, в [1] показано, что учет внешнего трения позволяет объяснить результаты лабораторного эксперимента по устойчивости течения Колмогорова, а в [2] построена общая теория линейной устойчивости течений с внешним трением. С формальной точки зрения такие течения (назовем их квазидвумерными) описываются уравнением для функции тока Ψ :

$$\partial_t \Delta \Psi + [\Delta \Psi, \Psi] = -\lambda \Delta \Psi + \nu \Delta^2 \Psi + f, \quad (1)$$

$$u = \partial_y \Psi, \quad v = -\partial_x \Psi, \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2,$$

$$[F, G] = \partial_x F \partial_y G - \partial_x G \partial_y F,$$

где λ — декремент внешнего трения, ν — вязкость, f — внешняя сила.

Квазидвумерные течения описываются двумя безразмерными параметрами подобия — традиционным числом Рейнольдса $Re_\nu = UD/\nu$ и числом Рейнольдса по внешнему трению $Re_\lambda = U/D\lambda$, введенным в [2]. В этой работе показано, в частности, что кривые нейтральной устойчивости структурно устойчивы по отношению к выключению вязкости $\nu = 0$, но не внешнего трения, которым нельзя пренебречь. Более того, при достаточно больших значениях Re_ν свойства течений не зависят от Re_ν . Экспериментальная проверка выводов [2] на материале как оригинальных исследований, так и данных, имеющих в литературе, проведена в [3]. Приведем некоторые простые соображения (см. также [3]). Оценка членов в правой части (1) показывает, что для течений с характерным масштабом длины $D \gg (\nu/\lambda)^{1/2}$ член с ν в (1) мал по сравнению с членом с λ . С другой стороны, даже сосредоточенная сила $f = \delta(y)$ генерирует течение с масштабом $D \sim (\nu/\lambda)^{1/2}$. Поэтому внутренней вязкостью в (1) можно пренебречь.

Имеется два важных примера квазидвумерных систем: 1) тонкий слой жидкости на твердой поверхности и 2) вращающаяся жидкость при малых числах Экмана. В первом случае $\lambda = 2\nu/H^2$, где H — глубина жидкости. При этом $(\nu/\lambda)^{1/2} = H$ и из очевидного условия двумерности течения $D \gg H$ вытекает возможность пренебречь внутренней вязкостью в (1). Полные трехмерные уравнения для течения в тонком слое исследовались численно в [4] методом Галеркина. Результаты [4] подтверждают адекватность описания течения в тонком слое уравнением (1). Для вращающейся жидкости $\lambda = (\Omega\nu)^{1/2}/H$ (Ω — угловая скорость общего вращения) — обратное экмановское время, а естественный вязкий масштаб $(\nu/\lambda)^{1/2}$ равен $H^{1/2} \nu^{1/4} \Omega^{-1/4} = \delta_S$ — толщина внешнего ($E^{1/4}$) слоя Стюартсона.

Особым случаем квазидвумерного течения являются крупномасштабные зональные течения в атмосферах планет, в частности Земли, где внешнее трение связано с диссипацией в экмановском слое. Важно, что для зональных течений $Re_\nu \sim 10^6$, в то время как значение Re_λ не превышает ~ 40 . Этот факт свидетельствует о квазидвумерном характере крупномасштабных атмосферных течений и подтверждает адекватность их лабораторных моделей. В [5] выведено общее уравнение трансформации потенциального вихря для атмосферы. В [6] показано, что в приближении квазигеострофичности и слабой двумерной сжимаемости и с учетом экмановского трения оно имеет вид (1) с добавленным членом $\beta \partial_x \Psi$ в левой части (он описывает β -эффект — зависимость параметра Кориолиса от поперечной координаты). В [7] исследована линейная устойчивость зональных течений и показано, в частности, что для условий земной атмосферы β -эффект и внешнее трение одинаково существенны. Отсюда следует, что при их лабораторном моделировании важно воспроизвести β -эффект. Это можно сделать во вращающейся жидкости с переменной по радиусу глубиной.

Такое исследование проведено в [8], где течение возбуждалось мето-

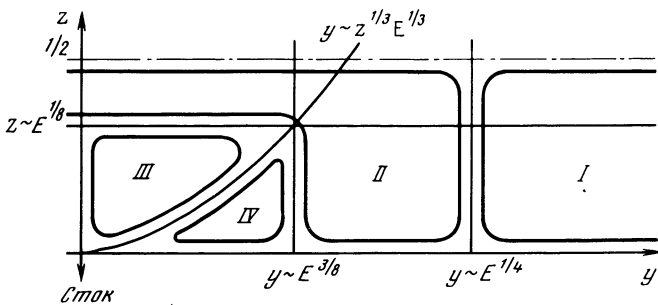
дом источников и стоков. Для правильной интерпретации результатов необходимо сначала подробно исследовать структуру невозмущенного течения, возникающего в такой системе, и показать, что оно действительно в основном двумерно (это сделано в [8]). Традиционный подход к решению подобных задач (см., например, [9]) основан на предположениях о малости чисел Россби $\epsilon = U/D\Omega$ и Экмана $E = \nu/\Omega H^2$. По числу Россби проводится линеаризация уравнений Навье–Стокса, а малость E позволяет разделить задачи для экмановского слоя и внутренней области, причем стандартное решение для первого дает граничные условия для второй. Уравнения для внутренней области имеют вид [9]

$$\begin{aligned} E \partial_y^2 u - 2 \partial_z \chi &= 0, \quad E \partial_y^4 \chi + 2 \partial_z u = 0, \\ 2(\chi(y, 0) - \chi_B(y)) &= -E^{1/2}(u(y, 0) - u_B(y)), \\ 2(\chi(y, 1) - \chi_T(y)) &= -E^{1/2}(u(y, 1) - u_T(y)). \end{aligned} \quad (2)$$

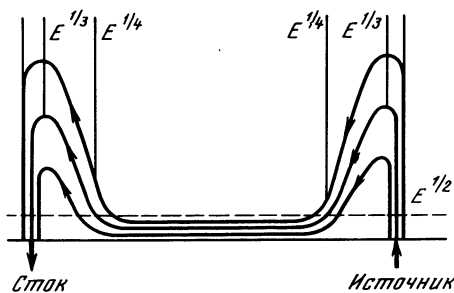
Здесь χ – функция тока поперечной циркуляции, u – продольная (вдоль x) компонента скорости, длины нормированы на H , $\chi_{B,T}$ и $u_{B,T}$ – граничные условия на нижней (B) и верхней (T) поверхностях (задача однородна вдоль x , но можно рассмотреть и цилиндрически-симметричный случай).

Далее система (2) решается преобразованием Фурье по поперечной координате y . Решение получается в виде интегралов Фурье, из которых затем находят приближенное представление в виде рядов. Однако эти ряды крайне плохо сходятся при $E \rightarrow 0$ в области быстрых изменений $y, z \rightarrow 0$. Поэтому асимптотическое поведение решений при $E \rightarrow 0$ надо исследовать непосредственным анализом интегралов Фурье. Результат для простейшего случая одного линейного источника (стока) изображен на рис. 1. Имеется четыре области на плоскости (y, z) с различным асимптотическим поведением зональной компоненты скорости u (они не совпадают с областями различного поведения χ). В асимптотических областях I–IV скорость u имеет следующие асимптотики: I – $u \sim \text{const}$; II – $u \sim y/E^{1/4}$; III – $u \sim y/E^{1/6} z^{2/3}$; IV – $u \sim E^{1/2}/y$. Результаты для χ здесь не приведены, поскольку, как видно из (2), задача с источником эквивалентна традиционно рассматриваемой задаче с дифференциально движущейся границей (граничные условия на χ или u соответственно). Поэтому качественно структуру поперечной циркуляции в экспериментальной установке можно изобразить, пользуясь известными результатами (рис. 2), а точные формулы нам не понадобятся. Основной вывод, существенный для дальнейшего, состоит в том, что влияние внутреннего слоя Стюартсона на скорость основного течения ограничивается асимптотически малой областью $z \lesssim E^{1/8}$, $|y - l| \lesssim E^{3/8}$ (l – положение источника/стока), вне которой течение двумерно, т.е. не зависит от z .

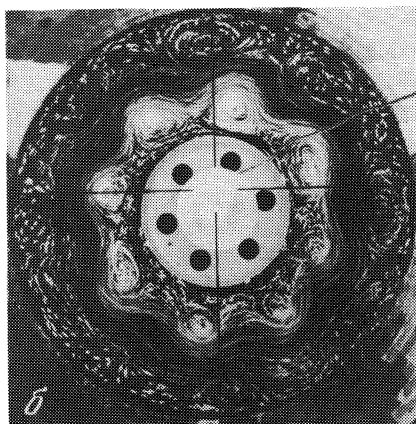
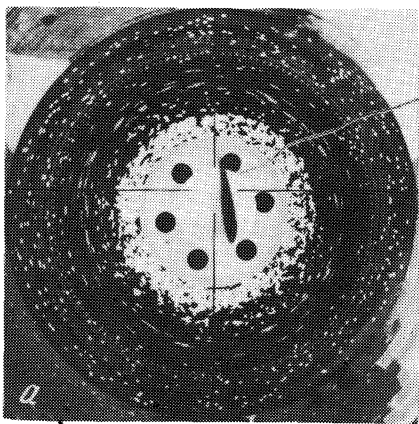
Опишем теперь результаты лабораторного эксперимента. Струя создавалась методом источников и стоков в цилиндрической установке, помещенной на вращающуюся платформу, и визуализировалась частицами, плавающими на поверхности. ”Топографический” β -эффект возникал за счет наклона дна и искривленной свободной поверхности. При малых интенсивностях источника/стока возникало струйное течение П-образным



Р и с. 1. Области различного асимптотического поведения зональной компоненты скорости u в плоскости (y, z)



Р и с. 2. Схема линий тока поперечной циркуляции в экспериментальной установке



Р и с. 3. Трековые фотографии докритического струйного течения (а) и закрытого течения (б)

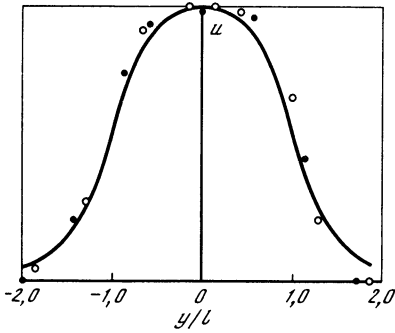


Рис. 4

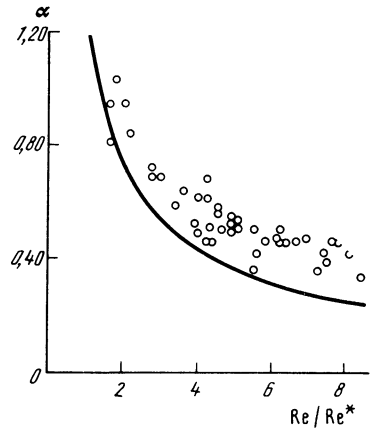


Рис. 6

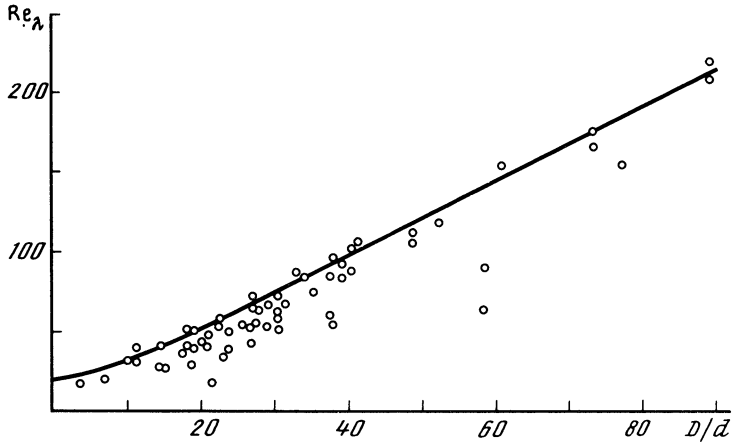


Рис. 5

Рис. 4. Экспериментальный (точки, кружки) и теоретический (сплошная) профили скорости докритического течения (источник и сток находятся в точках $y/l = \pm 1$)

Рис. 5. Диаграмма устойчивости струйного течения

Кружки соответствуют наблюдавшимся устойчивым режимам; кривая — теоретической нейтральной кривой по формуле (3) с $C = 20$, $m = 0,42$

Рис. 6. Безразмерное волновое число закритического течения в зависимости от надкритичности Re/Re^* (кружки)

Кривая соответствует зависимости (4)

профилем скорости (рис. 3,а). Профиль, измеренный по трековой фотографии течения, приведен на рис. 4 вместе с теоретическим.

При увеличении интенсивности течения теряло устойчивость и возникала регулярная вихревая картина (рис. 3,б). Результаты представлялись в виде точек на плоскости $(D/d, Re_\lambda)$, где $D = \max u(y)/\max |u'|$ — ширина струи, $d = \lambda/\beta$ — некоторый характерный масштаб [7], β — градиент

параметра Кориолиса, λ — декремент внешнего трения, Re_λ — число Рейнольдса по внешнему трению. Согласно теории [2, 7] нейтральная кривая в этих координатах должна иметь вид $Re_\lambda^* = \text{const}$ при малых D/d , когда главным стабилизирующим фактором является внешнее трение, и $Re_\lambda^* = D/dm$ при больших D/d , когда преобладает β -эффект (m — безразмерное значение максимума второй производной от $u(y)$: $m = D^2 \max u'' / \max u$). Поэтому нейтральную кривую можно аппроксимировать формулой

$$Re_\lambda^* \approx [C^2 + (D/dm)^2]^{1/2}. \quad (3)$$

Заметим, что для обработки экспериментальных данных необходимо вычислять теоретически только значение D .

Такая обработка результатов показала (рис. 5), что область реализованных значений D/d соответствует преобладанию β -эффекта. Точки, соответствующие устойчивым, но близким к нейтральной кривой режимам, позволяют аппроксимировать нейтральную кривую формулой (3) со значениями $C = 20$, $m = 0,42$. Последнее значение сильно отличается от вычисленного для теоретического профиля скорости, которое составляет $m_{th} = 2$. Возможно, это расхождение объясняется тем, что величина u'' может сильно отличаться от близких функций $u(y)$. Тем не менее из приведенных результатов следует, что теория правильно описывает профиль скорости с точностью до первой производной.

Это подтверждается и обработкой данных эксперимента по вихревым режимам течения. Они характеризуются числом вихрей n , из которого вычисляется безразмерное волновое число $\alpha = nD/R$ ($R \gg D$ — радиус струи). Число вихрей и соответственно α уменьшается с увеличением интенсивности источников/стоков, что весьма характерно для течений такого рода. Было обнаружено, что безразмерное волновое число почти однозначно зависит от надкритичности Re/Re^* (рис. 6). Связанное с этим увеличение размера вихрей объясняется известным эффектом обратного каскада — передачей энергии по спектру к малым волновым числам в двумерных течениях. В [7] проанализировано влияние внешнего трения на трансформацию энергии в развитых (в том числе, турбулентных) квазидвумерных течениях и показано, что оно приводит к диссипации на масштабе $D_\lambda \sim (\epsilon/\lambda^3)^{1/2}$ (ϵ — скорость диссипации) совершенно аналогично тому, как в трехмерном случае передача энергии к большим волновым числам обрывается диссипацией на масштабе Колмогорова–Обухова $D_\nu \sim (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$. В работе [10] показано, что отсюда следует степенная зависимость минимального возможного волнового числа от надкритичности с показателем $-3/4$:

$$\alpha_{min} \sim (Re/Re^*)^{-3/4}. \quad (4)$$

Соответствующая кривая также приведена на рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
2. Должанский Ф.В. О влиянии внешнего трения на устойчивость плоскопараллельных течений однородной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. ФАО 1987. Т. 23, № 4. С. 348–355.

3. Крымов В.А. Устойчивость и закритические режимы квазидвумерных сдвиговых течений при наличии внешнего трения (эксперимент) // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 12–18.
4. Довженко В.А., Обухов А.М., Пономарев В.М. О генерации вихрей в азимутально-симметричном течении // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 27–36.
5. Обухов А.М. К динамике расслоенной жидкости // ЛАН СССР. 1962. Т. 145. № 6. С. 1239–1242.
6. Должанский Ф.В. О влиянии слоя Экмана на устойчивость планетарных волн // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21. № 4. С. 383–390.
7. Манин Д.Ю. Устойчивость квазидвумерных сдвиговых течений под влиянием β -эффекта и внешнего трения // Изв. АН СССР. ФАО. 1989. № 8. С. 802–809.
8. Манин Д.Ю., Черноусько Ю.Л. Экспериментальное исследование устойчивости квазидвумерного струйного течения, создаваемого во вращающейся жидкости методом источников и стоков // Изв. АН СССР. ФАО. 1990. № 5. С. 483–492.
9. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоздат. 1975. 304 с.
10. Манин Д.Ю. О характерном размере вихря в развитых квазидвумерных течениях // Изв. АН СССР. ФАО. 1990. № 6. С. 579–583.

УДК 537.8

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

А.Г. ЕРМЕЕВ, В.Е. СЕМЕНОВ

При распространении мощного высокочастотного излучения в нелинейной диссипативной среде возможно образование структур, характеризующихся существенным отражением падающих электромагнитных волн. В этом случае практически важным является вопрос об интегральных характеристиках возникающих структур (коэффициентах отражения и поглощения, скорости движения и некоторых других) и их зависимости от мощности падающего излучения. Ответить же на этот вопрос в рамках теории удастся обычно только при полном решении соответствующей нелинейной задачи электродинамики. Стандартных методов точного решения данной задачи не существует, так как в общем случае поглощающей среды уравнения нелинейной электродинамики не имеют первых интегралов. Поэтому важное значение имеет развитие различного рода приближенных методов анализа подобных задач. Среди них можно отметить, например, переход к укороченным уравнениям для параметров квазипериодических решений в среде со слабым поглощением. В последнем случае, как показано в работах [1, 2], существует первый интеграл типа адиабатического инварианта, позволяющий свести решение задачи с произвольной нелинейностью к квадратурам. В случае сильной нелинейности, когда возмущение диэлектрической проницаемости среды $\delta\epsilon$ представляет собой быстро растущую функцию амплитуды высокочастотного поля A , весьма привлекательным представляется приближение, основанное на использовании "прямоугольной" характеристики нелинейности: $\delta\epsilon = 0$, если $A < A_c$; $\delta\epsilon \rightarrow \infty$, если $A > A_c$. Использование данного приближения позволяет свести исходную прямую задачу электродинамики к существенно более простой обратной задаче: отысканию такого пространственного распределения

$\delta\epsilon(\mathbf{r})$, которое обеспечивает выполнение равенства $A = A_c$ в области, где $\delta\epsilon \neq 0$. В частности, когда среда представляет собой плазму (диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1 - n - ivn$), концентрация электронов n в которой локально связана с амплитудой электрического поля, решение соответствующей обратной задачи электродинамики, как показано в работе [3], может быть построено и в неоднородном случае¹, так как эта задача сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Использование приближения "прямоугольной" характеристики нелинейности позволяет, как будет показано далее, найти в некоторых случаях решение исходной задачи электродинамики, т.е. определить интегральные характеристики образующихся структур, даже в условиях, когда уравнения обратной задачи аналитически не решаются. Здесь приводится пример решения такой задачи, возникающей при расчете динамики неравновесного высокочастотного разряда высокого давления в поле электромагнитной волны допробойной интенсивности.

Образующаяся в этом случае плазма характеризуется сильным поглощением электромагнитных волн. Поэтому в уравнении для комплексной амплитуды высокочастотного поля $E \exp(i\omega t)$ можно пренебречь возмущениями действительной части диэлектрической проницаемости:

$$\partial^2 E / \partial x^2 + (1 - i\sigma)E = 0. \quad (1)$$

Нелинейность в данной задаче является нелокальной, так как безразмерная проводимость плазмы σ зависит не только от амплитуды поля $A = |E|$, но и от температуры газа T : $\sigma = \sigma(A, T)$, — изобарический нагрев которого обусловлен омическим поглощением энергии поля в плазме. Соответствующие уравнения, учитывающие теплопроводность газа и его движение, обусловленное тепловым расширением, имеют следующий вид в безразмерных переменных:

$$\rho(\partial T / \partial t + v \partial T / \partial x) = \sigma A^2 + \partial^2 T / \partial x^2. \quad (2)$$

Плотность газа ρ и его скорость v удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\partial \rho / \partial t + \partial(\rho v) / \partial x = 0, \quad (3)$$

что позволяет на основании условия изобаричности ($\rho T = 1$) записать уравнение для скорости в виде

$$\partial v / \partial x = \sigma A^2 + \partial^2 T / \partial x^2. \quad (4)$$

Благодаря теплопроводности газа происходит нагрев соседних с разрядом слоев газа, что способствует их ионизации и перемещению фронта

¹ В работе [4] с помощью обсуждаемого здесь метода проведен расчет стационарной структуры СВЧ-разряда, зажигаемого в пересекающихся пучках электромагнитных волн. Корректность этого метода была проверена численными и аналитическими исследованиями задач с отличными от "прямоугольной" характеристиками нелинейности [2], а также экспериментально [5]. Достаточно подробный обзор по использованию метода "прямоугольной" характеристики нелинейности можно найти в работе [6].

разряда навстречу падающей электромагнитной волне, так как за слоем плазмы амплитуда электрического поля ослаблена. Таким образом возникает хорошо известное явление — стационарное распространение волны ионизации навстречу падающему электромагнитному излучению. В системе отсчета, связанной с фронтом стационарной волны ионизации, имеем $\rho v = u = \text{const}$ вследствие (3) и уравнение (2) можно один раз проинтегрировать²:

$$S = S_0 + dT/dx - uT; \quad (5)$$

здесь $S = (E \partial E^*/\partial x - E^* \partial E/\partial x) (2i)^{-1}$ — плотность потока электромагнитной энергии; $S_0 = A_0^2(1 - R^2)$ — ее значение при $x \rightarrow -\infty$, откуда падает волна с амплитудой A_0 ; R — неизвестный пока коэффициент отражения падающей электромагнитной волны от плазмы разряда.

Для исследования основных закономерностей стационарной волны ионизации от комплексного уравнения (1) удобно перейти к двум действительным уравнениям относительно амплитуды поля A и плотности потока энергии S :

$$dS/dx = -\sigma A^2, \quad (6)$$

$$d^2A/dx^2 - S^2/A^3 + A = 0. \quad (7)$$

Соответствующее интересующей нас волне ионизации решение уравнений (5)–(7) должно удовлетворять следующим граничным условиям: при $x \rightarrow -\infty$ температура обращается в нуль, $S \rightarrow S_0$, а амплитуда имеет периодические колебания от минимального значения $A_0(1 - R)$ до максимального $-A_0(1 + R)$; при $x \rightarrow +\infty$ температура газа достигает конечного значения T_m , $A \rightarrow A_m$, $S \rightarrow S_m = A_m^2$. Поставленная задача оказывается в общем случае переопределенной, что позволяет при заданном значении A_0 найти неизвестные значения u , R , A_m и T_m .

Используя прямоугольную аппроксимацию нелинейной характеристики, следует положить $\sigma = 0$, $AT < A_c$ при $x < 0$, $\sigma > 0$, $AT = A_c$ при $x > 0$. На переднем фронте волны ионизации (в точке $x = 0$) в этом случае следует потребовать непрерывность значений A , T , $\partial A/\partial x$ и $\partial T/\partial x$ (или S). В области $x > 0$ предлагаемая аппроксимация позволяет свести систему уравнений (5)–(7) к одному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2}{T} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 - T + \frac{T^5}{A_c^4} \left(S_0 - uT + \frac{dT}{dx} \right)^2 = 0, \quad (8)$$

точное решение которого не представляется возможным. Тем не менее можно получить некоторые определенные соотношения между параметрами u , R , A_m и T_m . Действительно, согласно условию $AT = A_c$ при $x > 0$ имеем $A_m T_m = A_c$. Поэтому из (5) следует, что

$$A_0(1 - R^2) = uT_m + A_c^2/T_m^2. \quad (9)$$

²Считая нагрев газа в разряде достаточно сильным ($T \gg T_0$), будем пренебрегать в дальнейшем температурой невозмущенного газа T_0 , полагая $T \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

С другой стороны, анализируя пространственное распределение величины

$$F \equiv \frac{d^2}{dx^2} (AT) = \frac{S^2}{A^3} T - AT + uA \frac{dT}{dx} - \sigma A^3 + 2 \frac{dA}{dx} \frac{dT}{dx}, \quad (10)$$

можно прийти к следующим выводам. Поскольку в области, где $x > 0$, имеем $F = F_+ \equiv 0$, при $x \rightarrow 0$, $x < 0$ имеем $F = F_- \leq 0$, а $F_- - F_+ = \sigma(0) \times A^3(0) \geq 0$, то $\sigma(0) = 0$ и $F_- = 0$. Используя теперь решения уравнений (5) – (7) в области $x < 0$, где $\sigma = 0$:

$$T = T(0) \exp(ux),$$

$$A^2 = A_0^2(1 + R^2) + 2RA_0^2 \sin(2x + \varphi),$$

где φ – постоянная интегрирования, нетрудно показать, что одновременное выполнение условий $F_- = 0$ и $(d(AT)/dx)|_{x=0} = 0$ возможно только в том случае, когда

$$R = u/[1 + (1 + u^2)^{1/2}]. \quad (11)$$

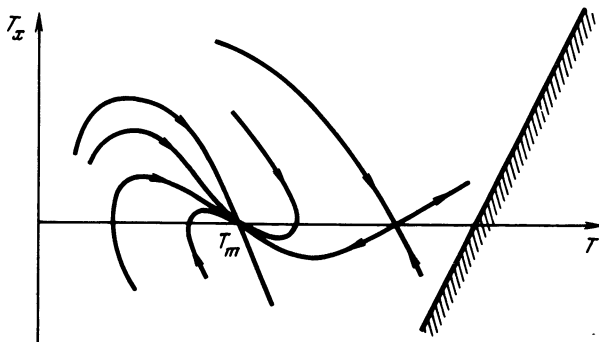
Качественный анализ решений уравнения (8) на фазовой плоскости переменных T , $T_x = dT/dx$ (рис. 1) показывает, что при малых значениях $u < u_c \sim 1$ интересующая нас волна ионизации характеризуется двумя свободными параметрами³: амплитудой A_0 и скоростью u , область допустимых значений которых проиллюстрирована на рис. 2. Поэтому в этом случае найденные выше выражения (9), (11) полностью определяют искомые интегральные характеристики стационарной волны ионизации при заданных A_0, u .

Среди отмеченного двухпараметрического семейства волн ионизации особую роль играют те, которые имеют наибольшую скорость для заданной амплитуды A_0 падающей электромагнитной волны. Их реализация в общем случае наиболее вероятна. Действительно, рассмотрим динамику плавных монотонных возмущений температуры газа за фронтом волны ионизации. Пренебрегая здесь влиянием теплопроводности и отражением электромагнитной волны (т.е. полагая $S = A^2$), а также принимая по-прежнему $AT = A_c$, можно получить на основании (2)–(4), (6) следующее уравнение простой волны для переноса температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(uT_m + S_m - 3 \frac{A_c^2}{T_m^2} \right) \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

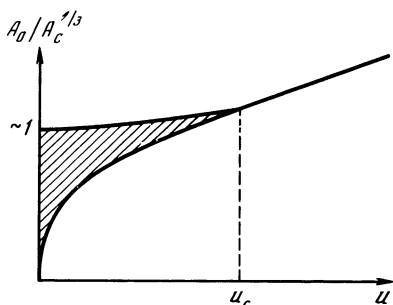
где u, T_m, S_m – параметры соответствующей стационарной волны ионизации. Отсюда нетрудно заметить, что тепловые возмущения за фронтом волны ионизации, движущейся со скоростью, отличной от максимальной,

³Соответствующая фазовая траектория должна попасть из точки $T = T(0) = A_c(1 + u^2)^{1/4} S_0^{-1/2}$, $T_x = uT(0)$ в состояние равновесия типа "устойчивый узел", положение которого определяется меньшим из корней T_m уравнения (9). Определенный произвол в выборе значений u и S_0 , допускающих указанное попадание, обусловлен в данном случае тем обстоятельством, что в узел входит непрерывное множество траекторий.



Р и с. 1. Фазовый портрет уравнения (8) в интервале значений параметров $3(u/2)^{2/3} < S_0 A_c^{-2/3} < (u+w)w^{-1/3}$, где $w = [u + (u^2 + 4)^{1/2}]/4$

Заштрихованная область отвечает отрицательным значениям плотности потока энергии электромагнитного поля S



Р и с. 2. Область существования решений на плоскости u, A_0

догоняют волну ионизации (так как $uT_m < 2A_c^2/T_m^2$) и как бы подталкивают ее. Таким образом можно построить качественную картину эволюции начального состояния в стационарную волну с максимальной скоростью u_m , зависимость которой от амплитуды определяется выражением:

$$A_0^2 = 3/2 A_c^{2/3} (u_m/2)^{2/3} [(1 + u_m^2)^{1/2} + 1]. \quad (13)$$

Коэффициент отражения для этой волны по-прежнему определяется формулой (11), а выражение (9) можно существенно упростить:

$$T_m = (2A_c^2/u_m)^{1/3}. \quad (14)$$

Это означает, что для данной волны ионизации коэффициент поглощения падающего электромагнитного излучения ровно вдвое больше коэффициента прохождения, т.е. $S_m = S_0/3$.

В отличие от рассмотренных выше медленных волн при $u > u_c$ волна ионизации полностью определяется амплитудой A_0 . В этом случае интересующая нас фазовая траектория представляет собой сепаратрису "седла", положение которого определяется большим из корней T_m уравнения (9), что предопределяет однозначную связь u с A_0 (см. рис. 2). Для

расчета зависимости $u(A_0)$, так же как и для точного определения самого значения u_c , необходимо численное решение уравнения (8). Следует, однако, заметить, что для "быстрой" волны ионизации с $u > u_c$ не удается построить качественной картины эволюционного формирования. Поэтому возможность ее реализации представляется достаточно сомнительной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якубович Е.И.* Об общих свойствах усредненных поляризуемостей в нелинейной квазиоптике // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, № 2. С. 676–682.
2. *Гильденбург В.Б., Семенов В.Е.* Стационарная структура неравновесного высокочастотного разряда в полях электромагнитных волн // Нелинейные волны: Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 376–383.
3. *Гильденбург В.Б.* Неравновесный высокочастотный разряд в полях электромагнитных волн // Нелинейные волны: Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981. С. 87–96.
4. *Семенов В.Е.* Многослойная структура разряда в самосогласованном поле двух квазиоптических пучков электромагнитных волн // Физика плазмы. 1984. Т. 10, № 3. С. 562–567.
5. *Вихарев А.Л., Гильденбург В.Б., Иванов О.А., Степанов А.Н.* СВЧ-разряд в пересекающихся пучках электромагнитных волн // Физика плазмы. 1984. Т. 10, № 1. С. 165–172.
6. *Вихарев А.Л., Гильденбург В.Б., Ким А.В.* и др. Электродинамика неравновесного высокочастотного разряда в волновых полях // Высокочастотный разряд в волновых полях. Горький: ИПФ АН СССР, 1988. С. 11–135.

УДК 517.923:524.6

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАЛАКТИК ПО МАССАМ И МОМЕНТАМ ВРАЩЕНИЯ

А.В. КАЦ, В.М. КОНТОРОВИЧ

1. ВВЕДЕНИЕ

С проблемой происхождения галактик [1] тесно связана проблема активности галактических ядер, приводящей к феномену сейфертовых галактик, радиогалактик, квазаров в зависимости от масштаба активности.

В последние годы непосредственное подтверждение получила точка зрения, высказанная Тоомре [2], что активность связана с аккрецией, возникающей из-за компенсации момента при слиянии спиральных систем. Комбергом [3] приведены аргументы в пользу того, что квазары представляют собой второе поколение, образовавшееся в результате слияния менее массивных объектов. Согласно данным, приведенным в обзоре Хатчингса [4], около 30% галактик, принадлежащих квазарам (их ядрам), находятся в состоянии взаимодействия (столкновения) с соседней галактикой. Изображения ярчайших инфракрасных источников из каталога IRAS свидетельствуют о фазе слияния для всех объектов (уже составляющих 3% общего списка) [5].

Дополнительным аргументом может служить зависимость морфологии галактик от плотности их окружения, в частности влияющего на функцию светимости.

Необходимость (или возможность) фазы слияний возникает также в теоретических моделях образования галактик [1], например в теории энтропийных возмущений.

Уже давно в рамках известных решений уравнений коагуляции, описывающих слияния "частиц" [6], было дано объяснение тому факту, установленному в численных экспериментах, что распределение по массам быстро забывает о начальном распределении, выходя на автомодельный режим (см. литературу в [7]). Ниже рассмотрим статистические следствия процессов слияний, приводящие к формированию совместных функций распределения по массам и моментам галактик, используя представление о соударении галактик, как неупругом, но происходящем с сохранением массы и вращательного момента ("спина"). Зависимостью вероятности слияния от спина будем пренебрегать. Пренебрежем также ролью орбитального момента пары сталкивающихся галактик, некоторым основанием для чего может служить относительная малость прицельного параметра (плеча момента) при соударениях, приводящих к слияниям.

Это позволяет сформулировать в замкнутой форме задачу для кинетического уравнения (КУ), описывающего слияния с учетом сохранения момента и массы, которое при определенных ограничениях удастся решить.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ СЛИЯНИЯ ПРИ СОХРАНЕНИИ МАСС И МОМЕНТОВ

Рассмотрим КУ для функции распределения $f(M, \mathbf{S}; t)$, обобщающее уравнение коагуляции Смолуховского [6] на случай, когда сталкивающиеся и сливающиеся при этом "частицы" (в нашем случае – галактики) обладают сохраняющимися суммарными массой M и вращательным моментом \mathbf{S} (классическим "спином"). КУ имеет вид

$$\partial f / \partial t = I_{c,r} \{ f \} \equiv \int dM_1 dM_2 d\mathbf{S}_1 d\mathbf{S}_2 [U \delta_M \delta_S f_1 f_2 - \mathcal{J} - \mathcal{J}'] . \quad (1)$$

Здесь вероятность перехода $U \delta_M \delta_S$ содержит две δ -функции, выражающие законы сохранения при слиянии $\delta_M \equiv \delta(M - M_1 - M_2)$, $\delta_S \equiv \delta(\mathbf{S} - \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2)$, в коэффициенте U опущены его аргументы: $U \equiv U_{M\mathbf{S}|M_1\mathbf{S}_1; M_2\mathbf{S}_2}$ и применены сокращенные обозначения $f_1 \equiv f(M_1, \mathbf{S}_1; t)$ и т.п., а значки \mathcal{J} и \mathcal{J}' в (1) означают циклические перестановки индексов. Рассмотрим вначале постоянный коэффициент слияния $U = \text{const}$. Производя преобразование Лапласа по массе и Фурье по спину (ниже для краткости – просто Фурье) $f(M, \mathbf{S}; t) \rightarrow F(p, \mathbf{q}; t)$ и добавляя источник D , получаем КУ для F в виде уравнения Риккати

$$\partial F(p, \mathbf{q}; t) / \partial t = UF^2(p, \mathbf{q}; t) - 2UF(p, \mathbf{q}; t)n(t) + D(p, \mathbf{q}; t), \quad (2)$$

где $n(t) \equiv F(0, \mathbf{0}; t)$ – "концентрация" галактик, удовлетворяющая уравнению

$$\partial n(t) / \partial t = -Un^2(t) + D(0, \mathbf{0}; t). \quad (3)$$

Для не зависящего от времени источника решениями (2), (3) будут

$$n(t) = n_{\infty} \frac{n_0 + n_{\infty} \operatorname{th} \tau}{n_{\infty} + n_0 \operatorname{th} \tau}, \quad n_{\infty} = [D(0, \mathbf{0})/U]^{1/2}, \quad \tau = Un_{\infty} t, \quad (4)$$

$$n(t) - F(p, \mathbf{q}; t) \equiv X(t) = X_{\infty} \frac{X_0 + X_{\infty} \operatorname{th}(UX_{\infty} t)}{X_{\infty} + X_0 \operatorname{th}(UX_{\infty} t)}, \quad (5)$$

где

$$X_0 \equiv X(p, \mathbf{q}; 0), \quad X_{\infty} \equiv [D(0, \mathbf{0}) - D(p, \mathbf{q})]^{1/2} U^{-1/2}.$$

3. СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ

Получаем стационарное решение устремляя $t \rightarrow \infty$ в (4), (5). Асимптотика решения на больших M и \mathbf{S} является в значительной мере универсальной и определяется вкладом малых p и q :

$$D(0, \mathbf{0}) - D(p, \mathbf{q}) = U[ap + icq + bq^2], \quad p, q \rightarrow 0, \quad (6)$$

где последний член взят в упрощенной (изотропной) форме. Тогда

$$F(p, \mathbf{q}) \approx n_{\infty} - (ap + icq + bq^2)^{1/2}, \quad p, q \rightarrow 0. \quad (7)$$

Обращение (7) по p определяется точкой ветвления, после чего обращение по q сводится к вычислению гауссова интеграла. Окончательно

$$f(M, \mathbf{S}) = \frac{(J/U)^{1/2}}{16\pi^2 S_2^3} \frac{M_0^{3/2}}{M^3} \exp \left[-\frac{M_0}{4M} \left(\frac{\mathbf{S}}{S_2} - \frac{\mathbf{S}_1}{S_2} \frac{M}{M_0} \right)^2 \right], \quad (8)$$

где $J = Ua$ — поток массы, а $\mathbf{S}_1 = Uc/D(0, \mathbf{0})$, $S_2^2 = Ub/D(0, \mathbf{0})$ и $M_0 = = Ua/D(0, \mathbf{0})$ — средние значения момента, его квадрата и массы, отвечающие источнику. Интегрируя (8) по массам, получим асимптотику функции распределения по моментам вращения, что в изотропном случае приводит к $f(S) = b/\pi^2 S^4$. Интегрирование (8) по моментам дает функцию масс $f(M) = \frac{1}{2}(a/\pi M^3)^{1/2}$, соответствующую распределению с постоянным потоком массы по спектру [6], что довольно близко к наблюдаемому значению (см. [7] и ниже).

4. ЭВОЛЮЦИЯ НАЧАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим теперь задачу в другой постановке, когда постоянно действующего источника нет, но имеется начальное распределение, которое здесь будем считать одномодальным по массам (с характерным масштабом \bar{M}) и обладающим некоторой анизотропией $\bar{\mathbf{S}}$ и шириной распределения $(\bar{S}^2)^{1/2}$ по моментам. Решение этой начальной задачи восстанавливается по фурье-образу, получаемому из (4), (5) предельным переходом $D \rightarrow 0$. На больших массах и моментах решение определяется разложением начального распределения при $p, q \rightarrow 0$. При этом интеграл по p равен вычету в полюсе $p = -(\tau^{-1} + iq\bar{\mathbf{S}} + \frac{1}{2}q^2\bar{S}^2)$, после чего возникает гауссов интеграл

по q . В итоге получаем

$$f(M, \mathbf{S}; t) = \frac{n_0}{\bar{M}\tau^2} (2\pi\bar{S}^2)^{-3/2} \left(\frac{\bar{M}}{M}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{M}{\bar{M}\tau} - \frac{(\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}}M/\bar{M})^2}{2\bar{S}^2} \frac{\bar{M}}{M}\right]. \quad (9)$$

Здесь \bar{M} , $\bar{\mathbf{S}}$, \bar{S}^2 — соответствующие средние по начальному распределению.

В изотропном случае ($\bar{\mathbf{S}} = 0$) при фиксированном $\mathbf{S} \neq 0$ распределение по массам имеет максимум, с ростом τ спадающий по величине и смещающийся в сторону больших масс. Из (9) после интегрирования по \mathbf{S} и M следуют распределения $f(M, t) = (n_0/\bar{M}\tau^2) \exp(-M/\bar{M}\tau)$,

$$f(\mathbf{S}^*, t) = \frac{n_0}{2\pi S^2} \frac{1}{\tau^2 S} \exp\left[\frac{\mathbf{S}\bar{\mathbf{S}}}{S^2} - \left(\frac{2}{\tau}\right)^{1/2} \frac{S}{(S^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{(\bar{\mathbf{S}})^2 \tau}{2S^2}\right)^{1/2}\right]. \quad (10)$$

Различные предельные случаи легко выписываются. Видно наличие максимума по τ .

5. УЧЕТ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ

Поскольку число объектов в сопутствующем объеме $R^3(t)$ не меняется, то, полагая, что эволюционная зависимость в U отделяется $U \rightarrow \tilde{U}\chi(t)$, можно, следуя Силку и Уайту [7], убедиться, что для функции $fR^3(t) = \tilde{f}(M, \mathbf{S}; \tilde{t})$, где $d\tilde{t} = [R(t_0)/R(t)]^3 \chi(t) dt$, КУ имеет вид (1) с не зависящим от времени коэффициентом слияния \tilde{U} . Поэтому решение начальной задачи получается из (9) заменой $n_0 \rightarrow n_0 R^3(t_0)/R^3(t)$, $\tau \rightarrow \tilde{\tau} - \tilde{\tau}_0$, где $\tilde{\tau} \equiv \tilde{\tau}(t) = n_0 \tilde{U} \tilde{t}^{\mu+1-\lambda}$, $\tilde{\tau}_0 = \tilde{\tau}(t_0)$. Зависимость $\tilde{\tau}(t)$ определяется как законом расширения $R(t)$, так и зависимостью вероятности $U \sim \langle \sigma v \rangle$ от времени (например, за счет изменения средней скорости при расширении). Наиболее интересна степенная зависимость $R^3(t)/R^3(t_0) \sim (t/t_0)^\lambda$, где $\lambda = 2$ отвечает решению Эйнштейна — де Ситтера, $\lambda = 3$ — пустой Вселенной и т.п. Что касается функции $\chi(t)$, то ее естественно также выбрать степенной $\chi(t) \sim t^\mu$. При этом $\tilde{\tau} = n_0 \tilde{U} t^{\mu+1-\lambda}/(\mu+1-\lambda)$ и число слияний за единицу времени растет с уменьшением t при реалистическом условии $\lambda > \mu + 1$.

6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЕ ПОСЛЕ ВКЛЮЧЕНИЯ ПОСТОЯННОГО ИСТОЧНИКА

При нулевых начальных условиях решение для фурье-образа согласно (5) имеет вид $X(t) = X_\infty \text{th}(UX_\infty t)$, $n(t) = n_\infty \text{th} \tau$ (ср. [8]). Пусть $D(p, q)$ не имеет точек ветвления в p -плоскости при вещественных q . Тогда обращение по p сведется к сумме вычетов в полюсах $\text{th} x$, т.е. при $p = p_l$, где

$$1 - D(p_l, q)/D(0, 0) = -(\pi^2/\tau^2)(l + 1/2)^2, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

При больших временах $\tau \gg 1$ и $M \rightarrow \infty$, $S \rightarrow \infty$ играют роль малые p и q , что позволяет аналогично предыдущему получить решение

$$f(M, \mathbf{S}; t) = \frac{2\pi^2 n_\infty}{(2\pi)^{3/2} M_0 S_2^3 \tau^3} \left(\frac{M_0}{M}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{M_0}{2MS_2^2} (\mathbf{S} - \mathbf{S}_1 M/M_0)^2\right] \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \exp\left[-\frac{\pi^2 M}{M_0 \tau^2} \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right], \quad M, \mathbf{S} \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Сумма по l в (12) является производной от эллиптической функции Вейерштрасса. При $M/M_0\tau^2 > 1$ в сумме достаточно ограничиться слагаемыми с $l = 0$, что дает экспоненциальный хвост распределения. Напротив, при $M/M_0\tau^2 \ll 1$ (на "малых массах") в сумму дает вклад большое число слагаемых $\sim (M_0/M)^{1/2}\tau$ и она оказывается порядка $\sim (M_0\tau^2/M)^{3/2}$. При этом (12) переходит в стационарное распределение (8), которое, таким образом, формируется за фронтом, смещающимся в область больших масс по закону $M \sim M_0\tau^2$.

При $\mathbf{S}_1 \neq 0$ очевидно наличие максимума при $\mathbf{S} = M\mathbf{S}_1/M_0$ (как по M , так и по \mathbf{S}), ширина которого по \mathbf{S} равна $\mathbf{S}_2(M/M_0)^{1/2}$. Он является достаточно острым при $(\mathbf{S}_1/\mathbf{S}_2)^2 \gg M_0/M$. В этом случае распределения по \mathbf{S} и M связаны достаточно жестко. В обратном случае поток момента $\mathbf{J}_S \sim \mathbf{S}_1$ мал и распределения связаны слабо.

Рассмотрим кратко задачу с выключением источника, проработавшего время t_* , достаточно большое (число соударений $\tau_* = n_\infty U t_* \gg 1$) для того, чтобы сформировалось распределение (12). Используем (12) при $t = t_*$ в качестве начального условия. На малых временах t после выключения $\tau \equiv Un_\infty t \ll 1$ распределение при $M \gg M_0$ практически не меняется. При $\tau \gg 1$ по стационарной части распределения (12) пойдет фронт выключения $M \sim M_0\tau^2$. Действительно из (1) и (8) следует оценка времени релаксации

$$1/t^{\text{рел}}(M) \sim M U f(M) \sim Un_\infty (M_0/M)^{1/2}. \quad (13)$$

За время t распределение прорелаксирует в области малых масс $M \lesssim M_0\tau^2$, где $t > t^{\text{рел}}(M)$. Нетрудно показать, что прорелаксировавшая часть распределения при $M_0 \ll M \ll M_0\tau^2$, $1 \ll \tau \ll \tau_*$, отличается от (8) множителем $2\pi^{1/2} M/M_0\tau^2 \sim (t^{\text{рел}}/t)^2$, т.е. спектр становится более пологим за счет ухода малых масс и убывает с ростом τ при фиксированном M . При $M \gg M_0\tau^2$ распределение остается невозмущенным.

Итак, чтобы после выключения источника остался невозмущенный релаксацией участок стационарного спектра (при $M \gg M_0\tau^2$), необходимо $\tau_* \gg \tau$, т.е. число соударений сформировавших стационарное распределение (τ_*) должно существенно превышать число столкновений после выключения ($\tau_* \gg \tau$).

В расширяющейся Вселенной это условие может быть выполнено сравнительно легко ввиду того, что вероятность столкновений быстро падает с расширением.

7. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И ФУНКЦИЯ ШЕХТЕРА

Из полученного выше решения с источником (12) видно, что асимптотика функции масс хорошо описывается интерполяционной формулой, которая совпадает с функцией Шехтера, используемой для описания распределения по светимостям L (и массам $M \sim L$) галактик поля и скоплений

$$f(M) = \varphi^*(M/M^*)^\alpha \exp(-M/M^*) \quad (14)$$

при $\alpha = -3/2$, $M^* = 4M_0\tau^2/\pi^2$. Согласно [9] хаббловские морфологические типы галактик классифицируются по значениям удельного момента вращения $\xi = S/M$. Полученные выше асимптотики определяют функции

масс для заданного $\xi f_\xi(M, t) \equiv \int dS \delta(\xi - S/M) f(M, S; t)$ и также имеют

вид функций Шехтера с параметрами: $\alpha_\xi = 3/2$, $(M_\xi^*)^{-1} = (\bar{M}\tau)^{-1} + \xi^2 \bar{M}/2S^2$, $\alpha = 0$, $\bar{M}^* = M\tau$ и $\alpha_\xi = 0$, $(M_\xi^*)^{-1} \approx \pi^2/4\mu_0\tau^2 + \xi^2 M_0/2S_2^2$ — для изотропных вариантов спектров (9) и (12) соответственно. Если каждому морфологическому типу галактик поставить в соответствие интервал $(\xi, \xi + \Delta\xi)$ и

соответственно функцию масс $\int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} d\xi f_\xi(M)$, то эта функция, строго говоря, уже не имеет вид функции Шехтера, но по-прежнему экспоненциально спадает при $M \gtrsim M_\xi^*$, а ее степенной участок может претерпевать излом с изменением индекса от α_ξ при меньших массах к $\alpha_\xi - 3/2$ при $M \gtrsim M_0 \xi_0^2 / (\xi + \Delta\xi)^2$, $\xi_0 \equiv S_2/M_0$.

При $U \sim VM^u$ ($u \neq 0$) решить уравнение Смолуховского для $f(M, t)$ удастся лишь в исключительных случаях (см. ссылки на работы Сафронова, Трубникова и др. в [6, 7]). Однако важную информацию можно получить, выделяя автомодельные переменные. При включении источника безразмерная комбинация, содержащая время $\eta \equiv M/JUt^2 = M^{1-u}/JVt^2$ ($J = \text{const}$) определяет аргумент функции $g(\eta) \rightarrow 1$ ($\eta \rightarrow 0$), $g(\eta) \rightarrow 0$ ($\eta \rightarrow \infty$), описывающей при $u < 1$ нестационарный фронт:

$$f(M, t) = f_{\text{ст}}(M)g(\eta), \quad f_{\text{ст}}(M) = (J/V)^{1/2} M^{-(u+3)/2}. \quad (15)$$

Это позволяет сопоставить величине $\eta^{1/(1-u)}$ аргумент экспоненты функции Шехтера, откуда

$$M^* = (JVt^2)^{1/(1-u)}, \quad \alpha = -(u+3)/2. \quad (16)$$

Для $f(M, S; t)$ естественно обобщение (в изотропном случае):

$$f(M, S; t) = f_{\text{ст}}(M) M^{-3/2} g\left(\eta, \frac{S^2}{M} \frac{M_0}{S_2^2}\right). \quad (17)$$

Вид второго аргумента соответствует явному решению (12) и тому простому факту, что при большом числе $n \gg 1$ слившихся, хаотически ориентированных спинов величины S_2 , характерный квадрат момента $S^2 \sim nS_2^2$, а характерная масса $M \sim nM_0$. Второй аргумент и представляет собой отношение, в котором выпадает n , в то время как первый аргумент описывает движение фронта. Опираясь на вид (17), получаем $\alpha_\xi = -u/2$, $(M_\xi^*)^{-1} = (JVt^2)^{-1/(1-u)} + \xi^2 M_0/S_2^2$.

Итак, степенной закон в (14) может соответствовать стационарному

спектру (с учетом указанного выше усреднения по ξ), а экспоненциальный спад — нестационарному фронту слияний. Эта попытка интерпретации функции Шехтера предполагает, что в период "действия источника" (т.е. в период отделения джинсовых масс $\delta\rho/\rho \sim 1$ и их фрагментации) число соударений со слиянием было существенно больше, чем после "выключения" источника. Отметим отличие данной интерпретации от [7], где функция Шехтера с индексом $-3/2$ соответствует эволюции начального спектра при $U \sim M_1 + M_2$ (решение Трубникова).

8. АКТИВНОСТЬ, ИНДУЦИРУЕМАЯ СЛИЯНИЕМ

Погашение момента при слиянии может быть важнейшей причиной выпадения части вещества дисковых подсистем сталкивающихся галактик на центр суммарной системы. Сделаем несколько предварительных замечаний по этому поводу.

Для оценки "дефекта" дисковой массы Δm , возникающего при слиянии, будем считать в рамках грубой модели, что масса диска m мала по сравнению с массой сфероидальной подсистемы (с учетом скрытой массы), их радиусы R совпадают, а момент $S = m\Omega R^2$ заключен в дисковой подсистеме, вращающейся со средней угловой скоростью Ω .

Используя условие равновесия диска $m\Omega^2 R^2/2 = GmM/R$, приводящее к $\Omega = (G\rho)^{1/2}$, где $\rho = M/R^3$ (коэффициенты порядка 1 опускаем), получим для момента

$$S = m(G\rho)^{1/2} (M/\rho)^{2/3}. \quad (18)$$

"Дефект массы" Δm естественно определить как $\Delta m \equiv m_1 + m_2 - m$, откуда в рассмотренной модели

$$\Delta m = m_1 + m_2 - (M_1 + M_2)^{-2/3} \left[m_1^2 M_1^{4/3} + m_2^2 M_2^{4/3} + 2m_1 m_2 (M_1 M_2)^{2/3} \times \right. \\ \left. \times \frac{S_1 S_2}{S_1 S_2} \right]^{1/2}. \quad (19)$$

По-видимому, малая доля ϵ этого "дефекта" дисковой массы выпадает на центр за время t_{act} , определяя темп аккреции $\epsilon \dot{m} = \epsilon \Delta m / t_{\text{act}}$.

Рассмотрение, проведенное в предыдущих разделах, позволяет найти вероятность (в единицу времени) получить после соударения активную галактику с "дефектом" Δm :

$$\frac{\partial f(M, S; \Delta m)}{\partial t} = I_{\text{прих}} \equiv \int dM_1 dM_2 dS_1 dS_2 U \delta_M \delta_S \times \\ \times \delta[\Delta m - (m_1 + m_2 - m)] f(M_1, S_1) f(M_2, S_2), \quad (20)$$

где m_i должны быть выражены через M_i и S_i согласно (18).

Что касается величины ϵ , характеризующей долю "дефекта" массы, выпадающей на центр, то она содержит, по всей видимости, отношение объемов центрального компактного объекта и всей галактики. Возможно, что подавляющая часть массы Δm сосредоточивается в виде балджа и наблюдаемая корреляция между наличием балджа (и других особенностей морфологии) и активностью связана с общностью их происхождения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вероятность слияния $U\delta_M\delta_S$ пропорциональна величине $U = \langle \sigma v \rangle$, где скобка означает усреднение по импульсам p , σ — сечение, v — относительная скорость,

$$\sigma v = \pi r^2 v [1 + GM/rv^2] \varphi, \quad \varphi = (1 + rv^2/GM)^{-\xi}, \quad \xi > 0,$$

где $r = R_1 + R_2$, φ — множитель, учитывающий зависимость вероятности слияния от относительной скорости при лобовом столкновении. Формула, вообще говоря, содержит также безразмерные множители от отношения масс, радиусов, скоростей, не влияющие на степень однородности, но существенные для асимптотик. Для этой весьма неуверенно определяемой величины здесь принят ее "упругий" вариант. Отсюда для степени однородности $U \sim VM^u$ следует

$$u = \beta + 2 - \alpha(GM/rv^2 \gg 1);$$

$$u = 2\beta - 1 + \xi(3 - \beta) + \alpha(1 - 2\xi) \quad (GM/rv^2 \ll 1).$$

Здесь индекс α (не путать с индексом Шехтера) связан с используемым при усреднении распределением по скоростям [10]: $\alpha = 1$ для бесстолкновительного распределения, $\alpha = 1/2$ — для максвелловского. Индекс β описывает изменение радиуса в зависимости от массы $R \sim M^\beta$. При $\beta = 1/3$ значение $\xi = 0$ соответствует $u > 1$ для гравитационных и $u < 1$ для контактных столкновений. При $\xi = 1/2$ (т.е. убывании вероятности слияния при лобовом столкновении обратно пропорционально скорости) $u = 1$ для контактных столкновений при любых α . Для $\alpha = 1/2$, $\xi = 0$ уже небольшое сжатие с ростом массы ($\beta = 1/4$) приводит к $u = 0$ при контактных столкновениях. С другой стороны, при $\xi \gg 1$ для $\alpha = 1$ показатель u обращается в нуль при $\beta \approx 1$, т.е. при законе $R \sim M$, который реализуется в больших масштабах изменения масс и плотностей. Однако при этом значение u весьма чувствительно к отлнчию β от 1.

Заметим (ср. (18)), что морфологическому типу, по-видимому, следует сопоставлять $\xi \rightarrow S/M^k$, где $k = (3 + \beta)/2$, что при $\rho = \text{const}$ дает $k = 5/3$ (ср. [9, 11]). При этом $\alpha_\xi = \alpha_S + 3k$, где α_S — индекс, соответствующий $f(M, S)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шандарин С.Ф., Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б. Крупномасштабная структура Вселенной // УФН. 1983. Т. 139. С. 83–134.
2. Toomre A., Toomre J. Galactic bridges and tails // Astrophys. J. 1972. Vol. 178. P. 623–666.
3. Комберг Б.В. Две популяции квазизвездных объектов // Астрофизика. 1984. Т. 20. С. 73–83.
4. Hutchings J.B. Recent clues to their nature // Publ. Astron. Soc. Pacif. Vol. 95. P. 799–809.
5. Saunders D., Soifer B., Elias J. et al. Ultraluminous infrared galaxies and the origin of quasars // Astrophys. J. 1988. Vol. 325. P. 74–91.
6. Волощук В.М. Кинетическая теория коагуляции. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 282 с.
7. Silk J., White S. The development of structure in the expending Universe // Astrophys. J. 1978. Vol. 223. P. L59–L62.

8. *Кац А.В.* Нестационарные решения кинетического уравнения, описывающего слияния частиц // Докл. АН УССР. 1986. № 5. С. 53–56.
9. *Генкин И.Л., Генкина Л.М.* Распределение галактик по моментам вращения // Тр. астрофиз. ин-та КазССР. 1973. Т. 20. С. 36–44.
10. *Vinokurov L.I., Kats A.B., Kontorovich V.M.* The relation between the velocity and mass distributions: The role of collisionless relaxation process // J. Stat. Phys. 1985. Vol. 38. P. 217–229.
11. *Fall S.M.* Galaxy formation: Some comparisons between theory and observation // Internal kinematics and dynamics of galaxies / Ed. E. Athanassaoula. Dordrecht: Reidel, 1983. P. 391–399.

УДК 539.184 + 621.385

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА АКТИВНЫХ СРЕД И СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ

В.В. КОЧАРОВСКИЙ. Вл.В. КОЧАРОВСКИЙ

ВВЕДЕНИЕ.

О МАКРОСКОПИЧЕСКИ НАБЛЮДАЕМЫХ КВАНТОВЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ

Работа посвящена замечательному явлению – макроскопическому проявлению квантовых флуктуаций. Речь идет о макроскопической системе, первоначально находившейся в состоянии неустойчивого равновесия. Под действием собственных микроскопических флуктуаций система выходит из этого состояния. Развивается неустойчивость, и квантовые флуктуации усиливаются до макроскопического уровня. В результате в ансамбле одинаково поставленных опытов наблюдаемое поведение системы испытывает гигантские флуктуации с относительной дисперсией порядка единицы, причем предсказать результат отдельного опыта в принципе невозможно.

Подобных процессов множество. Прежде всего это неравновесные фазовые переходы в лазерах, ферромагнетиках, сегнетоэлектриках и т.п. Изложение в работе основано на аналогичном примере из электродинамики – оптическом сверхизлучении (СИ) двухуровневой среды [1].

Макроскопические квантовые эффекты обусловлены когерентным сложением результатов микроскопического взаимодействия большого числа частиц (электронов, фотонов, ионов и т.д.). Таково происхождение, например, макротока спаренных электронов в сверхпроводнике. Определенный класс составляют эффекты квантового поведения макроскопических степеней свободы, например координаты центра масс кристалла или величины тока в электрическом контуре. Теоретически ясно, что законы квантовой механики для микро- и макростепеней свободы по существу одинаковы [2]. Недавно это было проверено в экспериментах по "макроскопическому квантовому туннелированию" в электрическом контуре, содержащем контакт Джозефсона [3].

Выбор неустойчивых макросистем для изучения макроскопических квантовых эффектов не случаен. В устойчивых системах квантовые флуктуации хотя и существуют, но обычно ничтожны и практически ненаблюдаемы. Кроме того, поведение устойчивых систем обычно близко к линейному поведению осцилляторов, для которых квантовая динамика средних координат и импульсов (а также высших моментов) совпадает с классической [4].

Квантовые флуктуации неустойчивых макросистем естественно описывать путем прямого квантования макроскопических коллективных переменных системы исходя из ее классических уравнений. Вывести для каждой макросистемы ее квантовые свойства из микроскопической квантовой

электродинамики взаимодействующих частиц и холодных мод в вакууме – задача сложная. Зачастую она не решается без упрощающих предположений, затрудняющих применение результатов в реальных экспериментах.

Ниже сделана попытка проиллюстрировать подход феноменологической квантовой электродинамики (ФКЭД) активных сред на примере СИ. Существенно, что в этом подходе естественным образом используются хорошо развитые понятия и представления электродинамики сплошных сред [5, 6].

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СИ И ДИССИПАТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим полностью инвертированную в начальный момент времени $t = 0$ (коротким импульсом накачки) среду, состоящую из молекул с двумя энергетическими уровнями. Переход между ними имеет оптическую частоту ω_0 , электродипольный момент d и однородное уширение T_2^{-1} . При достаточно большой концентрации молекул N запасенная в активном образце объема V энергия $\hbar\omega_0\bar{N}V$, $\bar{N}V = \int N(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, излучается не в виде

некогерентного спонтанного излучения отдельных молекул, идущего с вероятностью $T_1^{-1} = 4d^2\omega_0^3/3\hbar c^3$, и не в виде квазистационарной суперлюминесценции (усиленного спонтанного излучения), а в виде мощного когерентного импульса СИ с малыми длительностью τ и задержкой t_d : $\tau \ll t_d \ll T_2 \leq T_1$ (рис. 1). В пределе сосредоточенного образца с размером $L \ll \lambda = 2\pi c/\omega_0$ инкремент СИ $\tau^{-1} \sim \bar{N}V/T_1$ и мощность СИ $Q_{СИ} \sim Q_{спонт} \bar{N}V = (\bar{N}V)^2 \hbar\omega_0/T_1$ в $\bar{N}V \gg 1$ раз больше, чем для некогерентного спонтанного излучения. Явление СИ было предсказано Дике в 1954 г. [7] и впервые наблюдалось в оптике в 1973 г. [8].

Можно сказать, что СИ возникает из-за наведения взаимных корреляций излучающих молекул, вследствие чего они излучают когерентно, грубо говоря, как один большой диполь. Однако для понимания природы указанного коллективного поведения молекул нужен анализ механизма неустойчивости и квантовых флуктуаций коллективных степеней свободы поля и поляризации образца активной среды. Его дает подход макроскопической электродинамики – классической и квантовой [1].

Классическая электродинамика СИ исходит из уравнений Максвелла для электрического \mathbf{E}_d и магнитного \mathbf{B}_d полей в среде

$$\text{rot } \mathbf{E}_d = -c^{-1} \partial \mathbf{B}_d / \partial t, \quad \text{rot } \mathbf{B}_d = c^{-1} \partial (\mathbf{E}_d - 4\pi \mathbf{P}_d) / \partial t + 4\pi \sigma c^{-1} \mathbf{E}_d \quad (1)$$

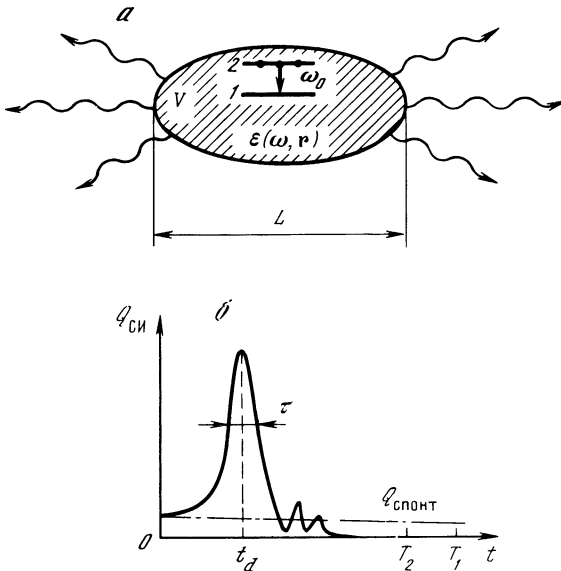
и материальных уравнений для средней поляризации \mathbf{P}_d единицы объема среды. В (1) учтена омическая проводимость σ "фононой" среды. В двухуровневой модели поляризация описывается уравнением осциллятора [9]:

$$\partial^2 \mathbf{P}_d / \partial t^2 + 2T_2^{-1} \partial \mathbf{P}_d / \partial t + (\omega_0^2 + T_2^{-2}) \mathbf{P}_d = \omega_c^2 \mathbf{E}_d / 4\pi, \quad (2)$$

$$\omega_c^2 = -8\pi d^2 \Delta N \omega_0 / \hbar.$$

"Кооперативная частота" среды ω_c зависит от разности населенностей уровней молекул в единице объема $\Delta N = N_2 - N_1$, изменяющейся за счет работы поля \mathbf{E}_d над плотностью тока $\partial \mathbf{P}_d / \partial t$:

$$\partial \Delta N / \partial t = 2\hbar^{-1} \omega_0^{-1} \mathbf{E}_d \partial \mathbf{P}_d / \partial t. \quad (3)$$



Р и с. 1. Сверхизлучение образца активной среды
 а – геометрия; б – осциллограмма мощности $Q_{СИ}(t)$

Свойства плоских волн $\mathbf{E}_d = \frac{1}{2} \mathbf{E} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \text{к.с.}$ вблизи резонанса $\omega \approx \omega_0$ определяются согласно (1) и (2) диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega, \mathbf{r}) \approx 1 + i 4\pi\sigma/\omega - \omega_c^2(\mathbf{r})/2\omega_0(\omega - \omega_0 + i/T_2)$. Она задает дисперсию $\omega(\mathbf{k}) = \omega' + i\omega''$ поперечных *нормальных волн* – фотонов в среде: $\omega^2\epsilon = c^2k^2$. В физике твердого тела их называют поляритонами. Именно они представляют собой реальные коллективные возбуждения и определяют локальные свойства эволюции электромагнитного поля и поляризации в среде. В двухуровневом резонансном приближении поляритонный спектр состоит из двух ветвей [10]

$$\omega_{e,p} = \omega_0 - iT_2^{-1} + \frac{1}{2} [ck - \omega_0 + i(T_2^{-1} - 2\pi\sigma)] \times \\ \times \left\{ 1 \pm [1 + \omega_c^2 / (ck - \omega_0 + i(T_2^{-1} - 2\pi\sigma))^2]^{1/2} \right\} \quad (4)$$

– электромагнитной волны и волны поляризации. В инвертированной среде ($\omega_c^2 < 0, \Delta N > 0$) знаки их энергий противоположны: $w_p \leq 0 \leq w_e$. Выражения для плотности энергии и мощности потерь линейных волн следуют из закона изменения энергии системы (1), (2) при $\Delta N = \text{const}$ [10]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -Q - \frac{c}{4\pi} \text{div} [\mathbf{E}_d \mathbf{B}_d]; \\ w = \frac{\mathbf{E}_d^2 + \mathbf{P}_d^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{\omega_c^2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{P}_d}{\partial t} \right)^2 + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2} \right) \mathbf{P}_d^2 \right], \\ Q = \frac{8\pi}{\omega_c^2 T_2} \left(\frac{\partial \mathbf{P}_d}{\partial t} \right)^2 + \sigma \mathbf{E}_d^2. \quad (5)$$

В правильности разделения энергии и потерь (извечная проблема электродинамики диспергирующих сред [6]) для двухуровневой модели можно убедиться, записав уравнения (1), (2) при $\Delta N = \text{const}$ в лагранжевой форме с диссипативной функцией Рэлея. Не интересуясь потоком энергии поля в пространстве, рассмотрим однородную ($\mathbf{k} = \text{Re} \mathbf{k}$) линейно поляризованную волну $\mathbf{P}_d = \mathbf{P}_\perp(t) \sin(\mathbf{k}\mathbf{r})$, $\mathbf{B}_d = \mathbf{B}_\perp(t) \cos(\mathbf{k}\mathbf{r})$, в которой $\mathbf{P}_d \parallel \mathbf{E}_d = c^{-1} k^{-1} [\mathbf{k}, \mathbf{B}_d] \sin(\mathbf{k}\mathbf{r})$. Тогда, вводя функции Лагранжа L и Рэлея Φ , для амплитуд P_\perp и B_\perp получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{P}_\perp} - \frac{\partial L}{\partial P_\perp} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{P}_\perp}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{B}_\perp} - \frac{\partial L}{\partial B_\perp} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{B}_\perp}; \quad (6)$$

$$L = \frac{\dot{B}_\perp^2/c^2 k^2 - B_\perp^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{\omega_c^2} \left[\dot{P}_\perp^2 - \left(\omega_0^2 + \frac{1}{T_2} \right) P_\perp^2 \right] + \frac{P_\perp \dot{B}_\perp}{ck},$$

$$\Phi = \frac{\sigma}{2c^2 k^2} \dot{B}_\perp^2 + \frac{4\pi}{\omega_c^2 T_2} \dot{P}_\perp^2 \quad (7)$$

($\partial/\partial t$ обозначается точкой). Отсюда, как известно, следует, что $H = \dot{P}_\perp \partial L / \partial \dot{P}_\perp + B_\perp \partial L / \partial B_\perp - L$, $dH/dt = -2\Phi$. Видим, что энергия и потери в (5) "истинные": $w = H$, $Q = 2\Phi$.

Неустойчивой является только одна из двух нормальных волн. При относительно сильной диссипации ($2\pi\sigma > T_2^{-1}$) — это волна поляризации, отрицательная энергия которой становится еще более отрицательной и возрастает по абсолютной величине при отборе энергии вследствие диссипации поля ($Q_p > 0$). В результате амплитуда волны нарастает (инкремент $\omega_p'' = -Q_p/2 w_p > 0$) [10]. Такая неустойчивость называется *диссипативной*. При слабой диссипации ($2\pi\sigma < T_2^{-1}$) реализуется мазерная неустойчивость электромагнитной волны положительной энергии ($\omega_e'' = -Q_e/2 w_e > 0$), возникающая за счет отрицательных потерь ($Q_e < 0$). В предельном случае отсутствия релаксации и диссипации ($Q = 0$) энергия системы сохраняется и можно считать, что нормальные волны с $\omega_{e,p}'' \neq 0$ обладают нулевой энергией, поскольку $w = -Q/2\omega''$. Существование ненулевого инкремента в этом случае связано с переходом энергии от парциальных колебаний поляризации к парциальным колебаниям электромагнитного поля. Такая динамическая раскачка колебаний двух подсистем с противоположными знаками энергии является предельным случаем диссипативной неустойчивости. В любом случае неустойчивость возникает из-за взаимодействия систем (динамических и/или диссипативных) с разными знаками энергии.

В рамках классической электродинамики задача о СИ активного образца (см. рис. 1) состоит в решении уравнений Максвелла–Блоха (1)–(3) с определенными граничными и флуктуационными начальными условиями [1, 11]. На линейной стадии СИ ($\Delta N = N$) она сводится к уравнению ($\epsilon\omega^2/c^2 - \nabla \times \nabla \times$) $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \Gamma(\mathbf{r})$ для образа Лапласа по времени от комплексной амплитуды поля. При условии излучения из образца это уравнение без правой части ($\Gamma = 0$) имеет дискретный спектр собственных нетривиальных решений $\mathbf{E}_m(\mathbf{r})$ с комплексными частотами $\omega_m = \omega'_m + i\omega''_m$. При $\Gamma \neq 0$ решение внутри образца содержит набор указанных *горячих мод* $\sum a_m(\omega) \mathbf{E}_m(\mathbf{r})$ с амплитудами $a_m(\omega)$, задаваемыми начальным условием Γ .

Поле вне образца формируется излучением горячих мод с его поверхности. В присутствии падающего на образец внешнего излучения, например в случае инициированного СИ, решение содержит также проходящие через образец волны со сплошным спектром.

Существуют горячие моды двух типов: (m, e) -моды положительной энергии и (m, p) -моды отрицательной энергии [1, 10, 11]. Их свойства аналогичны свойствам электромагнитных волн и волн поляризации безграничной среды. Однако для мод ограниченного образца к σ добавляется диссипация за счет излучения из образца. Так, для квазиодномерного цилиндрического образца длины L с малым поперечным сечением $S < \lambda L$ диссипация включает потери на дифракцию через боковую поверхность $\sigma_{\text{дифр}} \sim c\lambda/6\pi S$ и на излучение через торцы $\sigma_{\text{изл}} = (c/4\pi L) \ln R^{-1}$, где R – коэффициент отражения от торцов.

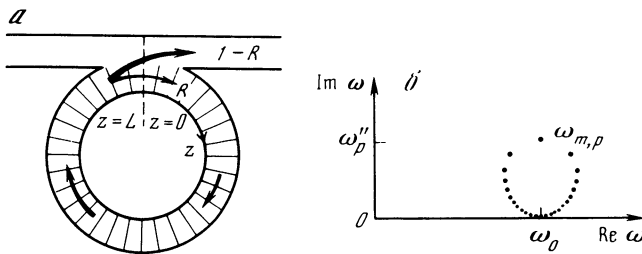
Динамика неустойчивости горячих мод и нормальных волн и порождаемого ею СИ подробно изучена в моделях активного кольца с однонаправленным распространением излучения (рис. 2), плоского слоя с учетом встречных волн, трехмерного шара и некоторых других [1, 11]. Наиболее простая, однонаправленная модель описывается следующими из (1)–(3) уравнениями Максвелла–Блоха [12–14] для медленно меняющихся инверсии ΔN и комплексных амплитуд поля E и поляризации P линейно поляризованных волн $\sim \exp(-i\omega_0 t + i\omega_0 z/c)$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} + 2\pi(\sigma + \sigma_{\text{дифр}}) \right] E = 2\pi i \omega_0 P, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right) P = \frac{i\omega_c^2}{8\pi\omega_0} E, \\ \frac{\partial \Delta N}{\partial t} = \text{Im}(E^*P)/\hbar. \quad (8)$$

В среде без релаксации ($T_2^{-1} = 0$) заменой $P = -i\Delta N \sin \varphi$, $\Delta N = N \cos \varphi$, $E = (\hbar/d) \partial \varphi / \partial t$ они сводятся к уравнению синус-Гордона для угла Блоха $\varphi = \text{Re } \varphi$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} + 2\pi(\sigma + \sigma_{\text{дифр}}) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\Omega_c^2}{4} \sin \varphi, \quad \Omega_c = |\omega_c|_{t=0}. \quad (9)$$

В отсутствие диссипации оно является гамильтоновым с гамильтонианом $\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\partial \varphi / \partial t)^2 + \frac{1}{4} \Omega_c^2 (\cos \varphi - 1)$ и канонически сопряженными координатой φ и импульсом $\pi = \partial \varphi / \partial t + (c/2) \partial \varphi / \partial z$. Отсюда вновь следует, что без обратной связи вблизи резонанса на целом отрезке спектра ($|ck - \omega_0| < < \Omega_c$) возникает неустойчивость из-за взаимодействия парциальных волн с противоположными знаками энергии: $\mathcal{H} = [(c \partial \varphi / \partial z)^2 - (\Omega_c \varphi)^2] / 8 < 0$ для волны с $\varphi \neq 0$, $\pi = 0$ и $\mathcal{H} = \pi^2 / 2 > 0$ для волн с $\pi \neq 0$, $\varphi = 0$. В этом случае развивается однонаправленное СИ волн с непрерывным спектром с асимптотикой линейной стадии $\varphi \sim \exp(\Omega_c (tL/c)^{1/2})$. Наличие обратной связи $R \neq 0$ приводит к выделению из общего решения горячих мод с дискретным спектром. Для модели кольца (9) в пренебрежении запаздыванием в относительно коротком образце $L \Omega_c/c \ll \ln R^{-1}$, $\ln \varphi_{t=0}^{-1}$ (т.е. без учета затухающих электромагнитных мод) спектр $\omega_{m,p} = \omega_0 + i\omega_p'' / (1 + 4\pi im / \ln R^{-1})$, где $\omega_p'' = \Omega_c^2 / 8 \pi \sigma_{\text{изл}}$, $m = 0, \pm 1, \dots$ (рис. 2, ср. (4)). В указанном случае очевидно, что СИ есть следствие диссипативной неус-



Р и с. 2. Модель однонаправленного сверхизлучения в активном кольце с обратной связью

a – геометрия распространения света; *б* – дискретный спектр горячих мод на комплексной плоскости частот

тойчивости $\propto \exp(\omega_{m,p}t)$ (m, p)-мод отрицательной энергии, причем диссипация ($\sigma_{изл}$) обусловлена потерями на само СИ из активного образца.

В общем случае трехмерного образца также существует связь СИ с диссипативной неустойчивостью. Она характеризуется "интегральным" инкрементом $\omega'' = (dW/dt)/2W > 0$, который согласно (5) равен $\omega'' = -(\Sigma_{изл} + \int Q d\mathbf{r})/2W$. При малых объемных потерях Q именно наличие положительного потока энергии $\Sigma_{изл} = \frac{c}{4\pi s_0} \int [E_d, B_d] dS > 0$ через поверхность образца S_0 и отрицательность энергии $W = \int w d\mathbf{r} < 0$ поляризации и поля внутри

образца приводят к инкременту $\omega'' > 0$.

Высвечивание запасенной в активном образце энергии происходит в режиме СИ мод с дискретным спектром [1], если коэффициент отражения (обратной связи) больше критического: $R > R_{cr} \sim (M/\bar{N}V)^{1/4} \ll 1$, где M – число неустойчивых горячих мод с инкрементом порядка максимального. Иначе дискретные моды не успевают выделиться – и реализуется режим СИ, аналогичный предельному режиму СИ волн с непрерывным спектром при $R \rightarrow 0$.

Исходным представлениям Дике [7] о СИ как аperiodической коллективной спонтанной релаксации возбужденных молекул с излучением из образца всей запасенной энергии ближе всего соответствует одноимпульсный режим, порожденный диссипативной неустойчивостью мод или волн поляризации. При уменьшении диссипации до $2\pi(\sigma + \sigma_{дифр} + \sigma_{изл}) < T_2^{-1}$ указанная диссипативная неустойчивость сменяется своим предельным вариантом – неустойчивостью из-за взаимодействия двух динамических подсистем (парциальных колебаний поляризации и поля) с разными знаками энергии.

Подробнее о классической электродинамике СИ см. [1, 11].

2. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ПРОЗРАЧНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕД

Понятия нормальных волн и горячих мод являются основой как классической электродинамики, так и ее квантового обобщения — ФКЭД. Последняя предназначена для описания квантово-статистических свойств макрополей в сплошных средах. В отличие от микроскопической ФКЭД исходит не из уравнений квантового взаимодействия отдельных частиц и фотонов в вакууме, а из классических (не операторных) уравнений для локальных значений макроскопических полей и поляризации в среде [5, 6, 9]. Приведение этих уравнений к гамильтонову виду и последующее каноническое квантование позволяет сразу исследовать квантовую статистику коллективных возбуждений образца среды (квантовых осцилляторов горячих мод и фотонов в среде).

ФКЭД начала развиваться в связи с теорией черенковского излучения электрона Гинзбургом в 1940 г. и позднее другими авторами [6]. Для построения ФКЭД в прозрачной линейной среде обычно применяется гамильтоновский метод разложения поля $E_d = i \sum_{\mathbf{k}, j} (a_{\mathbf{k}j} \mathbf{g}_{\mathbf{k}j} - a_{\mathbf{k}j}^{\dagger} \mathbf{g}_{\mathbf{k}j}^*) \omega_{\mathbf{k}j} / c$ по мо-

дам (нормальным волнам) $\mathbf{g}_{\mathbf{k}j} = (2 \pi \hbar c^2 / \omega_{\mathbf{k}j} \mathcal{V})^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}j} \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r})$ объема квантования $\mathcal{V} \rightarrow \infty$, заполненного средой. В прозрачной среде их частоты действительны: $\omega_{\mathbf{k}j} > 0$, а диэлектрическая проницаемость есть четная функция частоты: $\epsilon_{\gamma\delta}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{\gamma\delta}(-\omega, \mathbf{k})$, так как релаксация отсутствует и уравнения поляризации среды обратимы во времени. Операторы рождения $a_{\mathbf{k}j}^{\dagger}$ и уничтожения $a_{\mathbf{k}j}$ фотонов в среде подчиняются каноническим коммутационным соотношениям

$$[a_{\mathbf{k}j}, a_{\mathbf{k}'j'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{jj'}, \quad [a_{\mathbf{k}j}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'j'}^{\dagger}] = [a_{\mathbf{k}j}, a_{\mathbf{k}'j'}] = 0. \quad (10)$$

Гамильтониан свободного поля

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}, j} \hbar \omega_{\mathbf{k}j} (a_{\mathbf{k}j}^{\dagger} a_{\mathbf{k}j} + 1/2) \equiv 1/2 \sum_{\mathbf{k}, j} (p_{\mathbf{k}j}^2 + \omega_{\mathbf{k}j}^2 q_{\mathbf{k}j}^2)$$

есть сумма энергий нормальных осцилляторов поля с обобщенными координатами $q_{\mathbf{k}j} = (\hbar/2 \omega_{\mathbf{k}j})^{1/2} (a_{\mathbf{k}j}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}j})$ и импульсами $p_{\mathbf{k}j} = i (\hbar \omega_{\mathbf{k}j}/2)^{1/2} (a_{\mathbf{k}j}^{\dagger} - a_{\mathbf{k}j})$. Собственные функции $q_{\mathbf{k}j}$ нормированы на энергию кванта j -й моды:

$$\frac{1}{4 \pi} \int \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\gamma, \delta=1}^3 \frac{d(\omega \epsilon_{\gamma\delta})}{d\omega} (\mathbf{g}_{\mathbf{k}j}^*)_{\gamma} (\mathbf{g}_{\mathbf{k}j})_{\delta} + |[\mathbf{k}, \mathbf{g}_{\mathbf{k}j}^*]|^2 \right\} \omega = \omega_{\mathbf{k}j} \quad (11)$$

$$d \mathbf{r} = \hbar \omega_{\mathbf{k}j}.$$

Квантование по Бозе–Эйнштейну (10), а не по Ферми–Дираку в ФКЭД связано с исходным фактом существования когерентных макрополей. Последнее означает конденсацию в одном и том же квантовом состоянии большого числа элементарных возбуждений и исключает статистику Ферми [15].

В среде с нелинейностью и с заданными внешними токами уравнения Максвелла также можно свести к эквивалентной системе гамильтоновых уравнений и проквантовать их. Систематическое изложение ФКЭД прозрачных сред и ее применения к задачам о генерации и распространении волн

см. в [6, 16–19] и указанной там литературе. Необходимость использования ФКЭД, в частности, для правильного решения задачи о тормозном излучении электрона с учетом сильного влияния соседних атомов в среде была понята еще в работах Тер-Микаэляна, Ландау, Померанчука в 50-х годах.

3. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ДИССИПАТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Согласно классической электродинамике (разд. 1.) в основе СИ и аналогичных ему процессов лежит диссипативная неустойчивость при взаимодействии мод, обладающих разными знаками энергии. Поэтому, прежде чем переходить к ФКЭД активных сред, необходимо обсудить квантовую теорию диссипативной неустойчивости [1]. Сначала рассмотрим ее предельный вариант – *динамическую диссипативную неустойчивость* двух связанных осцилляторов с разными знаками энергии квантов – $\hbar\omega_1^{(0)} < 0$ и $\hbar\omega_2^{(0)} > 0$. Она описывается законечноопределенным гамильтонианом, квадратичным по операторам рождения a_j^\dagger и уничтожения a_j парциальных осцилляторов ($j = 1, 2$), подчиняющихся каноническим коммутационным соотношениям вида (10):

$$H = -\hbar\omega_1^{(0)} a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2^{(0)} a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2} \hbar (\eta a_1 a_2 + \eta^* a_2^\dagger a_1^\dagger),$$

$$da_j/dt = [a_j, H]/i\hbar. \quad (12)$$

Учет слагаемых более высокой степени, делающих гамильтониан положительно определенным, позволяет анализировать и более позднюю, нелинейную стадию неустойчивости. Однако во многих случаях, включая СИ, формирование макрофлуктуаций происходит уже на линейной стадии и тогда можно ограничиться квадратичным гамильтонианом. Вариант (12) описывает, например, неустойчивость в инвертированной двухуровневой среде (см. (4)) при взаимодействии ($\eta = \Omega_c \gg T_c^{-1}$, $2\pi\sigma$) парциальных колебаний поляризации ($\omega_1^{(0)} = \omega_0$) и электромагнитного поля ($\omega_2^{(0)} = ck$) в "одномодовой" модели СИ. Взаимодействие осцилляторов разных знаков энергий характеризуется в резонансном приближении операторами $a_1 a_2$ и $a_2^\dagger a_1^\dagger$, а не традиционно используемыми в квантовой оптике и теории лазеров операторами $a_1^\dagger a_2$ и $a_2^\dagger a_1$ для осцилляторов одного знака энергии [20–22]. Опущенные нерезонансные слагаемые в силу усреднения приводили бы лишь к слабым эффектам типа частотного сдвига Блоха–Сиггерта.

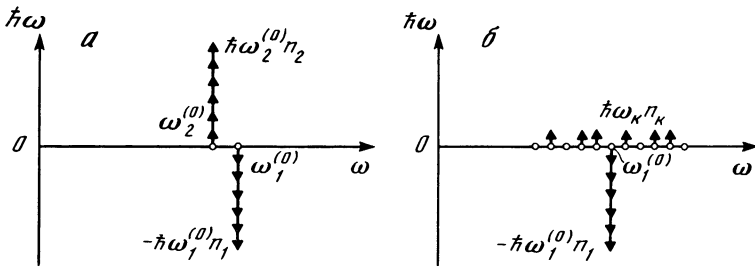
Комплексное преобразование операторов рождения и уничтожения

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1^\dagger &= a_1^\dagger - a_2 \eta / 2 (\omega_1 - \omega_1^{(0)}), \\ \tilde{a}_2 &= -i\eta [a_1^\dagger \eta^* / 2 (\omega_1 - \omega_2^{(0)}) - a_2] / 2 [|\eta|^2 - (\omega_1^{(0)} - \omega_2^{(0)})^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (13)$$

приводит к некоммутирующим нормальным осцилляторам с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega_1 \tilde{a}_2^\dagger \tilde{a}_1^\dagger + \hbar\omega_2 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 + \hbar\omega_1^{(0)}, \\ \omega_{1,2} &= \frac{1}{2} \{ \omega_1^{(0)} + \omega_2^{(0)} \pm i [|\eta|^2 - (\omega_1^{(0)} - \omega_2^{(0)})^2]^{1/2} \}, \end{aligned} \quad (14)$$

и с не каноническими (10), а *перекрестными коммутационными соотноше-*



Р и с. 3. Диаграммы спонтанного рождения квантов из вакуумного начального состояния в процессе диссипативной неустойчивости при взаимодействии динамического осциллятора отрицательной энергии $-\hbar\omega_1^{(0)}$ с динамическим осциллятором положительной энергии $\hbar\omega_2^{(0)}$ (а) или термостатом осцилляторов положительной энергии $\hbar\omega_k$ (б)

ниями [17, 22] $[\tilde{a}_1^+, \tilde{a}_2^+] = 1$, $[\tilde{a}_j^+, \tilde{a}_{j'}] = 0$ ($j = 1, 2$; $j' = 1, 2$). Гейзенберговские уравнения движения для новых, нарастающего и затухающего, осцилляторов имеют вид $\tilde{a}_1^+ = -i\omega_1\tilde{a}_1^+$, $\tilde{a}_2 = -i\omega_2\tilde{a}_2$. Здесь и далее считаем инкремент $\omega_1'' \equiv \text{Im } \omega_1 > 0$.

Важнейшей особенностью эрмитового гамильтониана (12), или эквивалентного ему (14), является неограниченность снизу. Его собственные функции обладают бесконечной нормой, т.е. не принадлежат гильбертову пространству. Поэтому стандартное доказательство вещественности собственных значений эрмитового оператора не проходит и гамильтониан имеет комплексные собственные значения [23] ($\omega_{1,2}'' \neq 0$). Это и нужно для описания неустойчивости.

Решение указанных уравнений элементарно и позволяет полностью исследовать статистику процесса. Согласно следующему из (12) закону сохранений $d(n_1 - n_2)/dt = 0$ разности числа квантов парциальных осцилляторов $n_{1,2} = a_{1,2}^+ a_{1,2}$ динамическая диссипативная неустойчивость развивается благодаря их взаимному обмену квантами возбуждений. Достаточно найти эволюцию статистического распределения $\rho(n, t)$ числа квантов n одного из осцилляторов, например первого. (Индекс у n ниже опускаем.) Такая задача решается методом характеристической функции

$$\theta(u, t) = \text{Sp}\{\rho_0 e^{iun(t)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(n, t) e^{iun} dn, \quad (15)$$

$$\rho(n, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u, t) e^{-iun} du.$$

Она находится с помощью квантово-механического усреднения по оператору матрицы плотности ρ_0 начального состояния системы и является образом Фурье от искомого распределения $\rho(n, t)$. Для ее вычисления используется разложение $\exp(iun) = \sum_{q=0}^{\infty} (iu)^q n^q / q!$ и приведение оператора n^q к

нормально упорядоченной форме: $n^q \equiv (a^+ a)^q = \sum_{j=0}^q \mathcal{D}_q^j (a^+)^j a^j$. (Ср. статистическую теорему Блоха—де Доминисиса и теорему Вика [23].) Здесь

$$\mathcal{D}_{q+1}^j = \mathcal{D}_q^{j-1} \theta(j) + j \mathcal{D}_q^j; \quad \mathcal{D}_q^q = 1, \quad \mathcal{D}_q^0 = \delta_{0,q}, \quad \mathcal{D}_q^1 = \theta(q) = \begin{cases} 1 & \text{при } q > 0 \\ 0 & \text{при } q \leq 0 \end{cases}$$

ступенчатая функция Хевисайда, и [9, 16] $\langle n | a(0) | 0 \rangle = 0, \langle 0 | (a(0))^j (a^+(0) | 0 \rangle = j!$.

Принципиально квантовым результатом является раскачка за счет спонтанных флуктуаций даже первоначально невозбужденных связанных осцилляторов ($\rho_0 = |0, 0\rangle \langle 0, 0|$, $\rho(n, t = 0) = \delta(n)$), т.е. спонтанное рождение пар квантов из вакуумного состояния (рис. 3, а). В этом случае

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ n^q \rho_0 \} &= \sum_{j=0}^q (j!) \mathcal{D}_q^j \bar{n}^j = P_0(t) \delta_{0,q} + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) n^q \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta(u, t) &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(iu)^q}{q!} \sum_{j=0}^q (j!) \mathcal{D}_q^j \bar{n}^j, \end{aligned} \quad (16)$$

где среднее число квантов нарастает с нулевого начального значения: $\bar{n}(t) = |\eta/2 \omega_1''|^2 \text{sh}^2(\omega_1'' t)$. Величина $P_n(t)$ определяет вероятность возбуждения

n квантов к моменту времени t , т.е. $\rho(n, t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t) \delta(n-m)$.

На начальной стадии неустойчивости ($\omega_1'' t \ll 1, \bar{n} \ll 1$), оставляя в (16) члены до второго порядка включительно ($\mathcal{D}_q^2 = (2^{q-1} - 1) \theta(q-1)$) и вычисляя (15), получим следующие вероятности возбуждения одного и двух квантов: $P_1(t) = \bar{n}(1 - 2\bar{n})$, $P_2(t) = \bar{n}^2$. На больших временах $t \gg 1/\omega_1''$, когда $\bar{n} \gg 1$, дискретность числа квантов не важна и, оставляя в (16) только члены с $j = q$ и $j = q-1$ ($\mathcal{D}_q^{q-1} = (q-1)q/2$), приходим к сглаженному распределению $\rho(n, t) = \exp(-n/\bar{n}) [1 - 1/\bar{n} + n/2\bar{n}^2] / \bar{n}$, справедливому при $n \ll \bar{n}^2$. Его асимптотика при $t \rightarrow \infty$

$$\rho(n, t) = \frac{1}{\bar{n}} \exp(-n/\bar{n}), \quad n \geq 0;$$

$$\int_0^{\infty} \rho(n, t) dn = 1, \quad \bar{n}(t) = n_{\text{eff}} \exp(2\omega_1'' t), \quad (17)$$

что соответствует гауссовому распределению амплитуды колебаний мод.

При "старте" с тепловых флуктуаций с температурой T асимптотика $\rho(n, t)$ имеет тот же вид (17), но с большим средним числом квантов:

$$n_{\text{eff}} = |\eta/4 \omega_1''|^2 [\text{cth}(\hbar \omega_1^{(0)}/2 \kappa_B T) + \text{cth}(\hbar \omega_2^{(0)}/2 \kappa_B T)]/2. \quad (18)$$

Отличный от динамического вариант диссипативной неустойчивости возникает при взаимодействии динамической подсистемы отрицательной энергии (осциллятор a_1) с диссипативной подсистемой положительной энергии

(термостат из континуума осцилляторов b_k) [1]:

$$H = -\hbar \omega_1^{(0)} a_1^+ a_1 + \sum_k \hbar \omega_k b_k^+ b_k + \frac{\hbar}{2} \sum_k (\beta_k a_1 b_k + \beta_k^* b_k^+ a_1^+). \quad (19)$$

Гамильтониан (19) порождает связанные уравнения для операторов рождения и уничтожения парциальных осцилляторов с коммутаторами вида (10):

$$\dot{a}_1^+ + i\omega_1^{(0)} a_1^+ = (i/2) \sum_k \beta_k b_k, \quad \dot{b}_k + i\omega_k b_k = -(i/2) \beta_k^* a_1^+. \quad (20)$$

Макроскопичность термостата в пределе непрерывного спектра частот ω_k ($\sum \dots \approx \int \dots g(\omega) d\omega$) и предположение о бесконечно слабом взаимо-

действии каждого осциллятора термостата с динамическим осциллятором ($1 \gg |\beta_k|/\omega_1'' \rightarrow 0$) делают процесс необратимым во времени [21]. Корректность выбора такой модели термостата, т.е. корректность феноменологического описания квантовой динамики исходной классической системы [21], обосновывается тем, что макроскопически наблюдаемые результаты по существу не зависят от выбора микроскопических параметров $g(\omega)$ и $\beta_k = \beta(\omega)$.

Сформулированная задача допускает аналитическое решение в приближении Вайскопфа—Вигнера. Именно, преобразуя (20) по Лапласу и заменяя детерминант получившейся алгебраической системы уравнений $\det = \omega - \omega_1^{(0)} + \sum_k |\beta_k^2|/4(\omega - \omega_k)$ на $\omega - \omega_1$, найдем общее решение

$$a_1^+(t) = \left\{ a_1^+(0) - \frac{1}{2} \sum_k \frac{\beta_k b_k(0)}{\omega_1 - \omega_k} [1 - \exp(i(\omega_1 - \omega_k)t)] \right\} \exp(-i\omega_1 t). \quad (21)$$

Здесь введена наблюдаемая, перенормированная термостатом комплексная частота нормальных колебаний динамического осциллятора

$$\omega_1 = \omega_1^{(0)} + \Delta \omega_1' + i\omega_1''; \quad \Delta \omega_1' = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\beta(\omega)|^2 g(\omega)}{4(\omega - \omega_1^{(0)})} d\omega,$$

$$\omega_1'' = \frac{\pi}{4} g(\omega_1^{(0)}) |\beta(\omega_1^{(0)})|^2 \ll \omega_1^{(0)}. \quad (22)$$

Из решения (21) снова следует, что диссипативная неустойчивость спонтанно развивается даже из невозбужденного вакуумного состояния: $\bar{n}_1(t) = \exp(2\omega_1'' t) - 1$, $t \geq 0$ (рис. 3, б). Эволюцию распределения числа квантов можно найти методом характеристической функции (15). В произвольном случае при "старте" со спонтанных или тепловых флуктуаций вновь верна асимптотика (17) с числом квантов $n_{\text{eff}} = \text{cth}(\hbar\omega_1^{(0)}/2 k_B T) \geq 1$. Отметим, что полученное описание согласуется с распространенным в теории лазеров [20] методом введения операторного источника Ланжевена, роль которого в нашем случае играет правая часть 1-го уравнения (20).

Квантовая теория, развитая на примере моделей (12) и (19), распространяется и на общий случай неустойчивости диссипативного типа, включающей как взаимодействие динамических осцилляторов разных знаков энер-

гий, так и необратимый отбор их энергии термостатами. При этом связь динамического осциллятора с термостатом осцилляторов того же или другого знака энергии, перенормируя его частоту аналогично (22), описывает релаксацию или некогерентное усиление соответственно. Так, для колебаний поляризации двухуровневой среды – это релаксация T_2^{-1} , а для электромагнитной моды – это положительная омическая диссипация σ или отрицательная диссипация σ_a , реализуемая в лазере.

4. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА АКТИВНЫХ СРЕД

Распространим идеи ФКЭД на коллективные процессы в активных средах [1]. Это нетривиальный вопрос, поскольку ФКЭД общепринята лишь для прозрачных сред, в которых $\text{Im } \omega_{kj} = 0$ (разд. 2). Ряд попыток обобщения ФКЭД на поглощающие среды ($\text{Im } \omega_{kj} < 0$), представленных в [17], не завершился созданием физически удовлетворительной теории: вместе с тем, несомненно, для поглощающих сред ФКЭД сводится к квантованию затухающих осцилляторов с положительно определенной энергией [21, 22]. Для активных сред ($\text{Im } \omega_{kj} > 0$) ситуация оказывается качественно иной. Как стало ясно после работ [10, 24], развитие квантовых флуктуаций в активной среде, например в процессе СИ, следует описывать как неустойчивость при взаимодействии квантовых осцилляторов (мод или волн) с разными знаками энергии. Ее можно назвать диссипативной в широком смысле слова, поскольку по отношению к выделенной динамической подсистеме неустойчивых осцилляторов остальные осцилляторы так или иначе играют роль диссипативной подсистемы (разд. 1). Это приводит к необходимости введения в квантовую теорию эрмитового оператора Гамильтона, не являющегося (в линейном приближении) положительно определенным (разд. 3). Такой подход позволяет дать общую схему квантования и описать динамику развития флуктуаций от микро- до макроуровня. При этом можно учитывать частотную и пространственную дисперсию, нелинейность и неоднородность, анизотропию и источники в среде.

В главных чертах процедура квантования ФКЭД для активных линейных сред состоит в следующем. Прежде всего необходимо найти частоты $\omega_j(\mathbf{k})$ и свойства нормальных волн. Затем всюду обратить в нуль все константы релаксации и диссипации и перейти к гамильтоновым уравнениям динамических осцилляторов поля в среде, которые при этом разбиваются на пары осцилляторов с комплексно-сопряженными частотами $\Omega_{\alpha 1,2}^{(0)} = \Omega_{\alpha}^{(0)} \pm i\Omega_{\alpha}^{(0)}$ и отдельные стационарные осцилляторы с действительными частотами $\Omega_{\beta}^{(0)}$. Каждую пару осцилляторов $\Omega_{\alpha 1}^{(0)}, \Omega_{\alpha 2}^{(0)} = \Omega_{\alpha 1}^{(0)*}$ представить в виде системы двух взаимодействующих парциальных осцилляторов разных знаков энергий $-\hbar\omega_{\alpha 1}^{(0)}$ и $+\hbar\omega_{\alpha 2}^{(0)}$ аналогично (12). Амплитуды полученных осцилляторов нормировать на энергию одного кванта (ср. (11)). Далее в гамильтониан к каждому динамическому парциальному осциллятору $\Omega_{\beta}^{(0)}$ и $-\omega_{\alpha 1}^{(0)}, +\omega_{\alpha 2}^{(0)}$ добавить по паре взаимодействующих с ним термостатов парциальных осцилляторов разных знаков энергий так, чтобы перенормированные термостатами частоты $\Omega_{\alpha}^{(0)}$ и $\Omega_{\beta}^{(0)}$ совпали с исходными ω_j (ср. (22)).

Наконец, квантование проводится заменой канонических координат и импульсов всех указанных парциальных осцилляторов на соответствующие операторы с каноническими коммутационными соотношениями (ср. разд. 2). Тогда для динамических осцилляторов с $\Omega_{\alpha}^{(0)} \neq 0$ получаются, конечно, перекрестные коммутационные соотношения (разд. 3). Последнее означает, что гамильтониан системы осцилляторов разных знаков энергий в активной среде в отличие от системы осцилляторов положительной энергии в прозрачной среде не диагонализуется аналогом канонического преобразования Боголюбова [23, 25], сохраняющим коммутационные соотношения. Без понимания этого принципиального обстоятельства невозможно выйти за рамки ФКЭД прозрачных сред и последовательно проквантовать поле в активной и поглощающей средах. Таким образом, анализ квантово-статистических свойств неустойчивых осцилляторов макрополя в ФКЭД сводится к квантовой теории диссипативной неустойчивости.

В пространственно неоднородных и ограниченных образцах среды надо дополнительно учесть изменение структуры собственных мод $g_{\mathbf{r}}$ объема квантования, как это делается в неоднородно заполненных резонаторах, и существование наряду с волнами непрерывного спектра горячих мод с дискретным спектром (разд. 1). Дальнейшее обобщение на нелинейные и нестационарные среды связано с локальной во времени, "мгновенной" линеаризацией уравнений поля в среде и введением соответствующих новых, "текущих" нормальных и парциальных осцилляторов (ср. локальное во времени преобразование Боголюбова в квантовой теории поля [25]).

Важен переход от классических уравнений поля в среде к операторным гейзенберговским уравнениям путем введения операторов компонент поля и поляризации в среде с локальными коммутационными соотношениями. Последние так или иначе определяются локальными свойствами нормальных волн аналогично описанной выше процедуре квантования. Особенно наглядно это видно при квантовании в приближении геометрической оптики [9]. При этом, в частности, вместо операторов $a_{kj}^+(t)$, $a_{kj}(t)$ используются их прообразы Фурье — операторы рождения $a_j^+(t, \mathbf{r})$ и уничтожения $a_j(t, \mathbf{r})$ фотонов в точке \mathbf{r} среды, а коммутаторы (10) также принимают локальный вид $[a_j(t, \mathbf{r}), a_{j'}^+(t, \mathbf{r}')] = \delta_{jj'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, $[a_j, a_{j'}] = 0$. Пространственное \mathbf{r} -представление в отличие от импульсного \mathbf{k} -представления удобно тем, что в нем согласно принципу соответствия гейзенберговские уравнения имеют привычный вид уравнений в частных производных [19]. Перспектива эффективного применения ФКЭД для анализа квантово-статистических явлений в усилителях и генераторах связана, в первую очередь, с возможностью перенесения хорошо изученных методов решения укороченных уравнений из классической теории волн в квантовую теорию гейзенберговских операторов медленно меняющихся амплитуд макрополей. Подобный подход развивался в задачах о взаимодействии и распространении фотонов и экситонов (в приближении кинетического уравнения) [26], о вынужденном параметрическом рассеянии (на основе операторного параболического уравнения) [16] и о СИ [1, 12–14, 24, 27–30].

5. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ

Подход ФКЭД активных сред к описанию макроскопических квантовых флуктуаций параметров импульса СИ, непредсказуемых от выстрела к выстрелу, проиллюстрируем на примере статистики времени задержки t_d и эллипса поляризации СИ дискретных мод [1, 24] (разд. 1). Статистика относится к ансамблю одинаково поставленных опытов (выстрелов). Подчеркнем, что в каждом отдельном выстреле после самого начального флуктуационного этапа система выходит благодаря своей макроскопичности на вполне определенную классическую траекторию еще на линейной стадии [12–14]. Для простоты будем учитывать только M мод с инкрементами ω_m'' ($m = 1, \dots, M$) порядка максимального $1/2 \tau$. Согласно разд. 3 числа квантов n_m в различных модах являются независимыми случайными величинами с одинаковым асимптотическим распределением (17). Вероятность того, что импульс СИ высветится в интервале времени

$(0, t_d)$, равна вероятности того, что суммарное число квантов $q = \sum_{m=1}^M n_m$ с распределением $\rho(q, t_d/\tau) = (q/\bar{n}_1)^{M-1} [(M-1)! \bar{n}_1]^{-1} \exp(-q/\bar{n}_1)$ к моменту t_d превысит половину числа инвертированных молекул $NV/2$. За-

писывая сформулированное условие $\int_0^{t_d/\tau} f(t_d'/\tau) d(t_d'/\tau) = \int_0^{\infty} \rho(q, t_d/\tau) dq$, опирающееся на линейное приближение в описании СИ и аналогичное используемому в [12–14, 27], и дифференцируя его по t_d , получим искомое распределение времени задержки [24]

$$f\left(\frac{t_d}{\tau}\right) = \frac{u^M}{(M-1)!} \exp\left(-M \frac{t_d}{\tau} - u e^{-t_d/\tau}\right), \quad u \equiv \frac{\overline{NV}}{2n_{\text{eff}}} \gg 1. \quad (23)$$

Этот результат означает, что существует зависимость статистики СИ от формы образца, которая сводится к зависимости от формы образца числа неустойчивых мод M (рис. 4,а). Последнее определяется решением соответствующей электродинамической задачи. Например, для шара радиуса $a \gg \lambda$ число мод [10] $M \sim (\omega_0 a/c)^2 \gg 1$; для цилиндра с числом Френеля $F = S/\lambda L$ согласно оценкам [12] $M \sim (F^2 + 1 + 1/F)/3$. При увеличении M среднее время задержки сокращается: $t_d = \tau \ln(u/M)$, а флуктуации в согласии с экспериментами [31, 32] уменьшаются (рис. 4,б):

$$\sigma^2(M) \equiv [\bar{t}_d^2 - (\bar{t}_d)^2] (\bar{t}_d)^{-2} = \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{m^2} \right) [\ln(u/M)]^{-2} \approx \approx M^{-1} [\ln(u/M)]^{-2}. \quad (24)$$

ФКЭД активных анизотропных сред объясняет также статистику флуктуаций эллипса поляризации СИ, наблюдавшихся в экспериментах [12, 28, 29]. Обычно измеряется вероятностное распределение f_β угла $\beta \in [0, \pi/2]$, определяемого по отношению интенсивностей (чисел квантов), детектируемых двумя приемниками с ортогональными линейными поляризациями: $\text{tg}^2 \beta = I_y/I_x \equiv n_y/n_x$. Рассмотрим СИ двух неустойчивых мод с

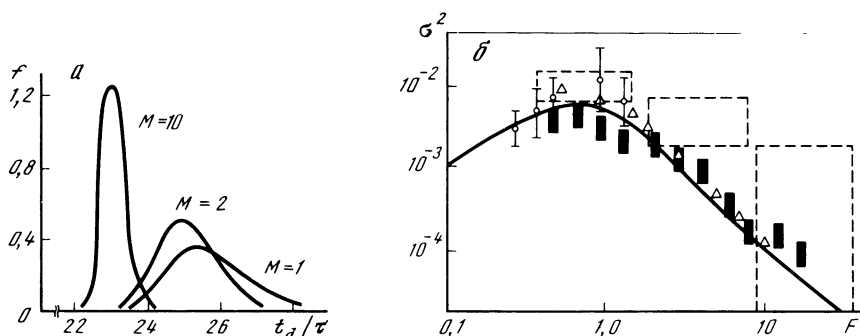


Рис. 4. Зависимость статистики времени задержки от формы образца (а) и вероятностное распределение (23) для $u = 10^{11}$ (б)

Квадрат относительной дисперсии σ^2 времени задержки t_d как функция числа Френеля $F = S/\lambda L$ для цилиндрических образцов ($N \lambda L^2 = 10^4$, $L = \text{const}$): сплошная кривая — огибающая (24), штриховые прямоугольники — эксперимент [31], треугольники, черные прямоугольники и вертикальные отрезки — результаты расчетов из [27, 33, 34] соответственно

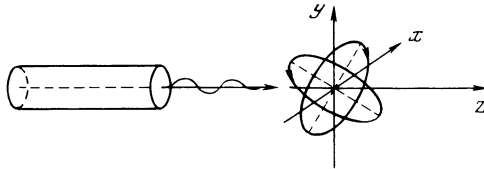
близкими инкрементами $\omega'_1 \approx \omega'_2$ и произвольными эллипсами поляризации, характеризуемыми коэффициентами поляризации K_1 и K_2 . (Коэффициент поляризации поля моды определяется [35] по отношению проекций комплексной амплитуды поля на оси x и y : $K = iE_y/E_x = -i \text{ctg}(\chi + i\theta)$ — и задает угол наклона χ главной оси эллипса к оси y и отношение осей эллипса $\text{th} \theta$ (рис. 5).) Числа квантов в модах распределены статистически независимо по закону (17). Поэтому статистика времени задержки в этом случае дается прежними выражениями (23), (24) с $M = 2$ и нетрудно также вычислить вероятностные распределения отношения n_2/n_1 и угла β :

$$f\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \frac{\Upsilon}{(\Upsilon + n_2/n_1)^2}, \quad f_\beta = \frac{\text{tg} \beta}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\Upsilon s}{\pi |K_2 - K_1|^2} \left[\int_0^{2\pi} \left| \frac{K - K_2}{K - K_1} \right|^2 \cdot \left(\Upsilon + s^2 \left| \frac{K - K_2}{K - K_1} \right|^2 \right)^{-2} d\varphi \right]_{|K| = \text{ctg} \beta}, \quad (25)$$

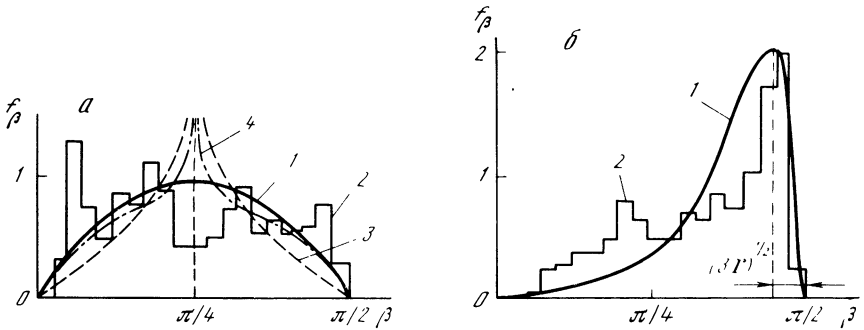
где $\Upsilon = \bar{n}_2/n_1 \sim \exp[2(\omega''_2 - \omega''_1)t]$, $s = [(1 + |K_1^2|)/(1 + |K_2^2|)]^{1/2}$ и $K = |K| \exp(i\varphi)$. В случае линейных ортогональных поляризаций мод $K_1 = K_2^{-1} = 0$ результат (25) упрощается: $f_\beta = \Upsilon \sin 2\beta / (\Upsilon \cos^2 \beta + \sin^2 \beta)^2$ (рис. 6).

Полученные распределения f_β качественно согласуются с наблюдениями [28, 29], включая значительные изменения (вплоть до невоспроизводимости) гистограмм при небольшом варьировании условий опыта. Последнее связано с экспоненциально большим усилением проявлений даже слабой анизотропии (и гиротропии) в процессе СИ (рис. 6, б).

Цитированные работы [27–29, 33, 34] относятся к экспериментам по СИ волн с непрерывным спектром в разреженных газах, где $L \leq c/\Omega_c$ и отражение от границ очень слабое, в отличие от СИ мод с дискретным спектром в резонаторах и активированных кристаллах [36–38]. Тем не менее



Р и с. 5. Схема сверхизлучения двух эллигически поляризованных мод



Р и с. 6. Вероятностное распределение угла β , характеризующего ориентацию и эксцентриситет эллипса поляризации сверхизлучения двух мод с линейными ортогональными поляризациями

a – в случае поляризационного вырождения ($\omega_1'' = \omega_2''$, $\Upsilon = 1$), *б* – в случае слабой анизотропии, задаваемой линейной поляризацией излучения накачки под углом $\beta = \pi/2$ ($\omega_1'' \neq \omega_2''$, $\Upsilon = 10$).

1 – линейная теория ФКЭД – формула (25); 2 – пример экспериментальной гистограммы [28, 29]; 3 и 4 – линейная и нелинейная теория по [28, 29]

поведение статистики СИ при изменении масштабов цилиндрического образца активной среды (см. рис. 4,б) и ее анизотропии (см. рис. 6) в обоих режимах СИ оказывается сходным. Микроскопическая квантовая электродинамика однонаправленного СИ линейно поляризованных волн с непрерывным спектром в отсутствие диссипации и релаксации была развита в [13, 14]. Можно показать, что те же результаты получаются непосредственным квантованием уравнений Максвелла–Блоха (8) методом ФКЭД активных сред, описанным в настоящей работе. При учете двух самовозбуждающихся волн с различными эллипсами поляризации ($K_1 \neq K_2$, см. рис. 5) макрорезультаты эллипса поляризации результирующего СИ описываются статистикой (25) с $\Upsilon = \bar{I}_2/\bar{I}_1$ (см. рис. 6). Последний результат есть следствие совпадения асимптотик вероятностного распределения интенсивности однонаправленного СИ волн с непрерывным спектром [30, 39] и числа квантов СИ мод с дискретным спектром (17).

В случае СИ волн с непрерывным спектром в трехмерном образце с большим числом Френеля $F \equiv S/\lambda L \gg 1$ излучение в соседние дифракционные телесные углы $\sim \lambda^2/S$ формируется статистически независимо (ср. известную в оптике теорему ван Циттерта–Цернике) [27]. Число таких "дифракционных мод" $M \sim F^2$. Очевидно, приведенный выше вывод вероятностного распределения времени задержки СИ можно повторить и

для такого режима СИ, заменяя динамику и статистику дискретных мод на динамику и статистику волн с непрерывным спектром однонаправленного СИ. Это было сделано в [39] – результат аналогичен изображенному на рис. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Носителями квантовых свойств в образце активной среды являются его коллективные возбуждения – нормальные волны и горячие моды. Их квантовые флуктуации усиливаются в процессе развития диссипативной неустойчивости взаимодействующих волн и/или мод разных знаков энергий до макроскопического уровня. С этим и связано происхождение непредсказуемых от выстрела к выстрелу макроскопических квантовых флуктуаций в коллективных нестационарных процессах типа СИ. Описывать квантовые свойства макросистем естественнее и проще всего путем непосредственного феноменологического квантования нормальных волн и горячих мод, т.е. квантования классических уравнений электродинамики сплошных сред методом ФКЭД. При этом квантовая задача изучается именно в той постановке и приближениях, которые адекватны классической задаче; например, квантовую статистику однонаправленного СИ можно анализировать в рамках того же, но проквантованного уравнения синус-Гордон (9). В целом ФКЭД позволяет корректно учесть влияние на СИ геометрии, неоднородности и анизотропии среды, отражений от границ образца, самовозбуждения мод с дискретным спектром и волн с непрерывным спектром, нелинейного взаимодействия мод и/или волн и т.д. Представления макроскопического подхода ФКЭД активных сред полезны для сравнительного анализа различных коллективных когерентных процессов и установления их места в общей картине волновых процессов в активных средах [1, 40].

На этой школе, посвященной памяти замечательного физика-теоретика Я.Б. Зельдовича, уместно вспомнить его приверженность подобному подходу к макроскопическим задачам физики. При обсуждении этих проблем два года назад на предыдущей школе он подчеркивал, что классическая электродинамика имеет свою логику, свои качественные понятия и уравнения и мы не "обязаны" всякий раз развивать микроскопическую квантовую электродинамику, в частности, для описания макрофлуктуаций. В качестве примера он приводил рассмотренную им задачу об излучении вращающегося проводящего цилиндра в резонаторе [41], близкую к задаче о СИ, и приветствовал развитие представленной ФКЭД активных сред о диссипативной неустойчивости горячих мод отрицательной энергии. Я.Б. Зельдович считал полезным применение в подобных задачах всего богатства приближенных теорий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В. Волны поляризации и сверхизлучение в активных средах: Препр. ИПФ АН СССР № 227, 228. Горький, 1989: УФН. 1989. Т. 159, № 2. С. 193–260
2. Leggett A.J. Macroscopic quantum systems and the theory of measurement // Suppl Progr Theor. Phys. 1980, N 69, P. 80–100.

3. Devoret M.H., Martinis J.M., Esteve D. Macroscopic quantum mechanics experiments // *Helv. phys. acta*. 1988. Vol. 61, N 3. P. 622–635.
4. Додонов В.В., Манько В.И., Руденко В.Н. О квантовых свойствах высокодобротных макроскопических резонаторов // *Квантовая электрон.* 1980. Т. 7, № 10 С. 2124–2135.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука, 1982. 624 с.
6. Гинзбург В.Л. *Теоретическая физика и астрофизика*. М.: Наука, 1987. 488 с.
7. Dicke R.H. Coherence in spontaneous radiation processes // *Phys. Rev.* 1954. Vol. 93, N 1. P. 99–110.
8. Skribanowitz N., Herman J.P., McGillivray J., Feld M.S. Observation of Dicke superradiance in optically pumped HF gas // *Phys. Rev. Lett.* 1973. Vol. 30, N 8. P. 309–312.
9. Файн В.М. *Фотоны и нелинейные среды*. М.: Сов. радио, 1972. 472 с.
10. Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский В.В. Эффект сверхизлучения и диссипативная неустойчивость в инвертированной двухуровневой среде // *ЖЭТФ* 1984. Т. 87, № 5. С. 1565–1581.
11. Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский В.В. Сверхизлучение: Метод электродинамики сплошных активных сред // *Нелинейные волны* / Под ред. А.В. Гапонова-Грекова, М.И. Рабиновича, М.: Наука, 1989. С. 358–376.
12. Gross M., Haroche S. Superradiance // *Phys. Rep.* 1982. Vol. 93, N 5. P. 301–396.
13. Haake F., King H., Schröder G., Haus J., Glauber R. Fluctuations in superfluorescence // *Phys. Rev. A*. 1979. Vol. 20, N 5. P. 2047–2063.
14. Haake F., King H., Schröder G., Haus J., Glauber R. Delay-time statistics of superfluorescent pulses // *Phys. Rev. A*. 1981. Vol. 23, N 3. P. 1322–1333.
15. Казаков М.И., Лифшиц И.М. *Квазичастицы*. М.: Знание, 1976. 80 с.
16. Клышко Д.Н. *Фотоны и нелинейная оптика*. М.: Наука, 1980. 256 с.
17. Олейник В.П., Белоусов И.В. *Проблемы квантовой электродинамики вакуума диспергирующих сред и сильных полей*. Кишинев: Штиинца, 1983. 256 с.
18. Hillery M., Mlodinow L.D. Quantization of electrodynamics in nonlinear media // *Phys. Rev. A*. 1984. Vol. 30, N 4. P. 1860–1865.
19. Abram J. Quantum theory of light propagation: Linear medium // *Phys. Rev. A* 1987. Vol. 35, N 11. P. 4661–4672.
20. Хакен Г. *Лазерная светодинамика*. М.: Мир, 1988. 350 с.
21. Глаубер Р., Манько В.И. Затухание и флуктуации в системах связанных квантовых осцилляторов // *ЖЭТФ*. 1984. Т. 87, № 3. С. 790–804.
22. Dekker H. Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator // *Phys. Rep.* 1981. Vol. 80, N 1. P. 1–112.
23. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.). *Введение в квантовую статистическую механику*. М.: Наука, 1984. 384 с.
24. Kocharovskiy V.V., Kocharovskiy V.V. Superradiance statistics for three-dimensional samples // *Opt. Commun.* 1985. Vol. 53, N 5. P. 345–348.
25. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*. М.: Энергоатомиздат, 1988. 288 с.
26. Davydov A.S., Serikov A.A. Quantum-statistical theory of light propagation in crystals // *Phys. status solidi b*. 1973. Vol. 56, N 1. P. 351–363.
27. Mostowski J., Sobolewska B. Three-dimensional theory of initiation of superfluorescence // *Phys. Rev. A*. 1984. Vol. 30, N 3. P. 1392–1400.
28. Crubellier A., Liberman S., Pillet P. Superradiance theory and random polarization // *J. Phys. B*. 1986. Vol. 19, N 18. P. 2959–2971.
29. Crubellier A., Liberman S., Pillet P. Experimental study of quantum fluctuations of polarization in superradiance // *J. Phys. B*. 1981. Vol. 14, N 4. P. L177–L182.
30. Haake F., Reibold R. Interplay of superfluorescence and incoherent processes in multilevel systems // *Phys. Rev. A*. 1984. Vol. 29, N 6. P. 3208–3216.
31. Vreken Q.H.F., der Weduwe J.J. Quantum fluctuations in superfluorescence delay time // *Phys. Rev. A*. 1981. Vol. 24, N 5. P. 2857–2860.
32. Nattermann K., Fabricius N., Von der Linde D. Observation of transverse effects on quantum fluctuations in stimulated Raman scattering // *Opt. Commun.* 1986. Vol. 57, N 3. P. 212–216.
33. Drummond P.D., Eberly J.H. Transverse coherence and scaling in four-dimensional simulations of superfluorescence // *Phys. Rev. A*. 1982. Vol. 25, N 6. P. 3446–3449.

34. *Watson E.H., Gibbs H.M., Mattar F.P., Cormier M. et al.* Quantum fluctuations and transverse effects in superfluorescence // *Phys. Rev. A.* 1983. Vol. 27, N 3. P. 1427–1434.
35. *Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В.* Линейное взаимодействие электромагнитных волн в неоднородных слабоанизотропных средах // *УФН.* 1983. Т. 141, № 2. С. 257–310.
36. *Moi L., Goy P., Gross M., Raimond J.M., Fabre C., Haroche S.* Rydberg-atom masers // *Phys. Rev. A.* 1983. Vol. 27, N 4. P. 2043–2081.
37. *Schiller A., Schwan L.O., Schmid H.D.* Spatial coherence in large-sample superfluorescence of O_2^- centers in KCl // *J. Luminescence.* 1988. Vol. 40/41, N 2. P. 541–542.
38. *Schiller A., Schwan L.O., Schmid H.D.* Large-sample effects in superfluorescence of O_2^- centers in KCl // *J. Luminescence.* 1987. Vol. 38, N 1. P. 243–246.
39. *Reibold R.* Statistics of composed pulses in superfluorescence // *Phys. Lett. A.* 1986. Vol. 115, N 7. P. 325–328.
40. *Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В.* Циклотронное сверхизлучение – классический аналог сверхизлучения Дике // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 29, № 9. С. 1095–1116.
41. *Зельдович Я.Б., Рожанский Л.В., Старобинский А.А.* Вращающиеся тела и электродинамика во вращающейся системе отсчета // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 29, № 9. С. 1008–1016.

УДК 539.184

УСИЛЕНИЕ СВЕТА В ТРЕХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ БЕЗ ИНВЕРСИИ НАСЕЛЕННОСТЕЙ

О.А. КОЧАРОВСКАЯ, Я.И. ХАНИН

ВВЕДЕНИЕ

Для усиления света в квантовых системах, как известно, необходимо преобладание переходов с более высоких энергетических уровней на более низкие. В двухуровневой системе единственный путь к этому – создание инверсии населенной, т.е. преимущественное заселение верхнего уровня. В трехуровневой системе, как показано ниже, существует и альтернативный вариант – усиление без инверсии населенностей. Это обстоятельство связано с возможностью интерференции амплитуд вероятностей разных оптических переходов. В частности, в Λ -схеме (рис. 1) существует такое когерентное суперпозиционное состояние нижних уровней, вероятность перехода из которого вверх близка к нулю [1,2]. Вместе с тем вероятность перехода сверху вниз (в состояние, отличное от указанной когерентной суперпозиции) не подавляется интерференцией. Она пропорциональна населенности верхнего уровня. Поэтому уже малой его заселенности оказывается достаточно для усиления света.

Ранее исследовалось явление когерентного просветления трехуровневой среды [2]. Было показано, что конечный образец поглощающей среды становится практически прозрачным в результате самосогласованного перехода атомов под действием мощного излучения в суперпозиционное состояние нижних уровней, называемое состоянием когерентного захвата населенностей [1,2]. Очевидно, что проходящий через неинвертированную среду свет не может перевести ее в квантовое состояние, способное обеспечить его усиление. Однако безынверсное усиление света возможно, если

возбудить когерентную смесь уровней с помощью внешней когерентной накачки, как это показано ниже.

Указанный эффект может быть реализован в разнообразных физических ситуациях, включающих как случай узких, так и широких однородных оптических линий как импульсного, так и непрерывного излучения. Ниже для конкретности рассмотрим распространение ультракороткого импульса (УКИ) в трехуровневой среде Λ -конфигурации в условиях, когда однородная ширина оптических линий превышает спектральную ширину импульса, которая в свою очередь перекрывает частоту расщепления: $T_2^{-1} \gg \tau_p^{-1} \gg \omega_{21}$.

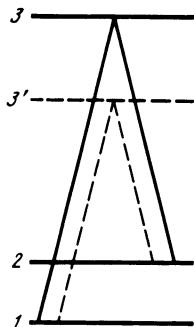


Рис. 1. Трехуровневая среда Λ -конфигурации (уровни 1 и 2 оптически связаны с уровнем 3)

Штриховой линией обозначен вспомогательный смежный уровень 3', через который может осуществляться резонансная оптическая накачка на переходах 1-3', 2-3'

В этих условиях УКИ резонансно взаимодействует сразу с обоими оптическими переходами, так что традиционное для задач вынужденного комбинационного рассеяния выделение двух несущих, отстоящих на частоту порядка частоты расщепления, здесь бессмысленно. Последнее обстоятельство принципиально отличает рассматриваемую ситуацию от известного случая распространения симултона [3], реализующегося в прямо противоположных условиях.

1. УРАВНЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УКИ С ТРЕХУРОВНЕВОЙ СРЕДОЙ

В случае, когда поле резонансно взаимодействует сразу с обоими оптическими переходами среды, уравнения для матрицы плотности $\hat{\rho}$ и одномерное волновое уравнение для поля $E_d = \frac{1}{2} E \exp(-i\omega_p t + ikz) + \text{к.с.}$ после укорочения по несущей частоте поля ω_p принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \partial \sigma_{31} / \partial t + i(\omega_{31} - \omega_p) \sigma_{31} &= i E [\mu_{32} \rho_{21} + \mu_{31} (\rho_{11} - \rho_{33})] / 2\hbar - \sigma_{31} / T_2, \\
 \partial \sigma_{32} / \partial t + i(\omega_{32} - \omega_p) \sigma_{32} &= i E [\mu_{31} \rho_{21}^* + \mu_{32} (\rho_{22} - \rho_{33})] / 2\hbar - \sigma_{32} / T_2, \\
 \partial \rho_{21} / \partial t + i\omega_{21} \rho_{21} &= i(\mu_{32}^* \sigma_{31} E^* - \mu_{31} \sigma_{32}^* E) / 2\hbar - \rho_{21} / \tau_2, \\
 \partial \rho_{22} / \partial t &= i(E^* \mu_{32}^* \sigma_{32} - \text{к.с.}) / 2\hbar + R_2, \\
 \partial \rho_{11} / \partial t &= i(E^* \mu_{31}^* \sigma_{31} - \text{к.с.}) / 2\hbar + R_1, \\
 \partial \rho_{33} / \partial t &= i [E (\mu_{31} \sigma_{31}^* + \mu_{32} \sigma_{32}^*) - \text{к.с.}] / 2\hbar + R_3, \\
 \partial E / \partial z + c^{-1} \partial E / \partial t &= 4\pi i \omega_p N C^{-1} (\mu_{31}^* \sigma_{31} + \mu_{32}^* \sigma_{32}).
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь σ_{3i} — комплексные амплитуды недиагональных элементов матрицы плотности $\rho_{3i} = \sigma_{3i} \exp(-i\omega_p t)$, μ_{3i} — дипольные моменты переходов, $i = 1, 2$; N — концентрация атомов, c — скорость света; R_1, R_2, R_3 — функ-

ции населенностей ρ_{kk} ($k = 1, 2, 3$), описывающие процессы накачки и релаксации, τ_2 — время релаксации низкочастотной (НЧ) когерентности — недиагонального элемента матрицы плотности НЧ-перехода ρ_{21} . В рассматриваемом приближении однородных линий оптических переходов, широких по сравнению со спектром излучения, НЧ-отстройками $\omega_{3i} - \omega_p$, кооперативными частотами и частотами Раби, оптическая поляризация адиабатически следует за полем. Тогда первые два уравнения системы (1.1) сводятся к алгебраическим соотношениям. Выражая из них амплитуды σ_{3i} , подставим их в оставшиеся уравнения системы. Кроме того, примем во внимание, что процессы НЧ-осцилляций, а также накачки и релаксации слишком медленные, чтобы заметно изменить состояние среды за время действия импульса ($\tau_p \ll \omega_{21}^{-1}$, τ_2 , T_1^k — продольные времена релаксации). В результате получим следующую самосогласованную систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= - [2\eta n + (1 + \eta^2)u] \sigma I / 2\hbar \omega_p, \\ \partial n / \partial t &= - 3 [(1 + \eta^2)n - (1 - \eta^2)\tilde{n} + 2\eta u] \sigma I / 2\hbar \omega_p, \\ \partial \tilde{n} / \partial t &= [(1 - \eta^2)n - (1 + \eta^2)\tilde{n}] \sigma I / 2\hbar \omega_p, \\ \partial I / \partial z + c^{-1} \partial I / \partial t &= - [(1 + \eta^2)n - (1 - \eta^2)\tilde{n} + 2\eta u] \sigma I N. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Она описывает перенос интенсивности излучения $I = c |E|^2 / 8\pi$ через трехуровневую среду с учетом НЧ когерентных эффектов. Здесь $\sigma = 4\pi\mu_{31}^2 \omega_p T_2 / c\hbar$ — сечение перехода 3-1, $u = \text{Re } \rho_{21}$, $\eta = \mu_{31} / \mu_{32}$. В соответствии с условием нормировки $\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1$ населенности всех трех уровней выражаются через полусумму $n = (n_{23} + n_{13})/2$ и полуразность $\tilde{n} = (n_{23} - n_{13})/2$ разностей населенностей на оптических переходах следующим образом:

$$\rho_{33} = (1 - 2n)/3, \quad \rho_{22} = \tilde{n} + (1 + n)/3, \quad \rho_{11} = -\tilde{n} + (1 + n)/3. \quad (1.3)$$

2. ПОВЕДЕНИЕ ТРЕХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛЕ УКИ

Преобразование параметров среды в поле УКИ определяется решением системы первых трех уравнений (1.1):

$$\begin{pmatrix} u \\ n/\sqrt{3} \\ \tilde{n} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^3 C_{\alpha} \mathbf{x}^{(\alpha)} e^{-\lambda_{\alpha}\xi}, \quad C_{\alpha} = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{x}_0 \equiv \begin{pmatrix} u_0 \\ n_0/\sqrt{3} \\ \tilde{n}_0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{x}_0 — вектор состояния среды до прихода УКИ, $\xi = \sigma \int_{-\infty}^t I(t') dt' / 2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4(1 + \eta^2)$, $\lambda_3 = 1 + \eta^2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} -2\eta/(1 + \eta^2) \\ 1/\sqrt{3} \\ (1 - \eta^2)/(1 + \eta^2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\eta/(1 + \eta^2) \\ -\sqrt{3}/2 \\ (1 - \eta^2)/2(1 + \eta^2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(3)} &= \begin{pmatrix} (1 - \eta^2)/(1 + \eta^2) \\ 0 \\ 2\eta/(1 + \eta^2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{x}^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Существование нулевого собственного значения $\lambda_1 = 0$ означает, что имеется класс состояний $C_1 x^{(1)}$, в которых среда не взаимодействует с полем. В состоянии $C_1 x^{(1)}$ атомы переходят под действием сильного поля, когда $\lambda_2 \xi(\tau_p) \gg 1$.

В соответствии с (1.3) и (2.1) изменение населенности верхнего уровня под действием поля определяется выражением

$$\rho_{33}^{(0)} - \rho_{33} = C_2 [1 - \exp(-\lambda_2 \xi)]. \quad C_2 = -\eta u_0 / (1 + \eta^2) - n_0 / 2 + (1 - \eta^2) \tilde{n}_0 / 2(1 + \eta^2). \quad (2.3)$$

Импульс будет истощать верхний уровень для множества начальных состояний среды, определяемых условием: $C_2 > 0$.

3. БЕЗЫНВЕРСНОЕ УСИЛЕНИЕ УКИ

Используя (1.2), (1.3) и (2.4), найдем замкнутое уравнение для преобразования интенсивности [4]:

$$\partial I / \partial z + c^{-1} \partial I / \partial t = 2 I \sigma N (1 + \eta^2) C_2 \exp(-\lambda_2 \xi). \quad (3.1)$$

Его интегрирование по длительности импульса дает закон преобразования энергии импульса ($W_p \equiv \int_0^{\tau_p} I(t') dt'$):

$$W_p(z) = W(0) + \hbar \omega_p N \int_0^z (\rho_{33}^{(0)} - \rho_{33}(\tau_p)) dz. \quad (3.2)$$

Импульс может усиливаться за счет энергии, запасенной в среде в результате опустошения верхнего уровня, что соответствует условию $C_2 > 0$.

В частном случае, когда переход 3-2 запрещен, т.е. $\eta = 0$, имеем $2C_2 = n_{13}$ и уравнение (3.1) совпадает с уравнением переноса интенсивности в безынерционной ($T_1 \ll \tau_p$) двухуровневой среде в балансном приближении. Его решение описывает хорошо известные процессы усиления импульса в инвертированной и поглощения в неинвертированной среде [5]. В общем случае его решение имеет аналогичный вид:

$$I(t, z) = \frac{I_0(t - z/c)}{1 - \{1 - \exp(-\sigma N \lambda_2 \int_0^z C_2 dz)\} \exp[-\lambda_2 \xi_0(t - z/c)]}, \quad (3.3)$$

$$\xi_0(t) = \sigma \int_{-\infty}^t I_0(t') dt' / 2\hbar \omega_p,$$

где $I_0(t)$ — интенсивность импульса на входе в среду ($z = 0$). Принципиально, что коэффициент C_2 в трехуровневой среде зависит не только от разностей населенностей на оптических переходах, но также от НЧ-когерентности. Поэтому возможно усиление УКИ даже в среде без инверсии (если $u_0 < 0$) и, наоборот, поглощение, несмотря на наличие инверсии (если $u_0 > 0$).

Область начальных состояний среды, соответствующая безынерсному

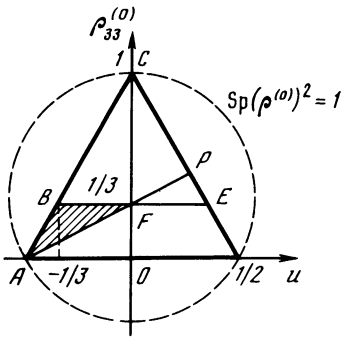


Рис. 2. Плоскость начальных состояний среды в случае $\text{Im} \rho_{21}^{(0)} = 0$, $\tilde{n}_0 = 0$

Буквами обозначены области безынверсного усиления (ABF), усиления в среде с инверсией ($BCPF$) и поглощения в среде с инверсией (PEF)

усилению; наряду с условием $C_2 > 0$ определяется неравенствами (рис. 2):

$$0 \leq \rho_{33}^{(0)} \leq \rho_{11}^{(0)}, \rho_{22}^{(0)}; |\rho_{21}^{(0)}| \leq (\rho_{11}^{(0)} \rho_{22}^{(0)})^{1/2},$$

$$\text{Sp}(\rho^{(0)})^2 \equiv \sum_{i=1}^3 \rho_{ii}^{(0)2} + 2|\rho_{21}^{(0)}|^2 \leq 1. \quad (3.4)$$

Первое из них означает отсутствие инверсии. Последние два необходимы для положительной определенности матрицы плотности $\hat{\rho}$.

Следует подчеркнуть, что даже малое заселение уровня ($\rho_{33}^{(0)} \ll 1/3$) достаточно для усиления, если возбуждено максимальное значение НЧ-когерентности — $u_0 \approx (\tilde{\rho}_{11}^{(0)} \rho_{22}^{(0)})^{1/2}$. В соответствии с (3.1) коэффициент усиления будет такой же, как в двухуровневой среде с инверсией, равной $\rho_{33}^{(0)}$.

4. О СПОСОБАХ ВОЗБУЖДЕНИЯ НЧ-КОГЕРЕНТНОСТИ

Когерентность ρ_{21} может быть возбуждена, например, резонансным микроволновым полем в форме $\pi/2$ -импульса. Последний преобразует атомы в состояние с максимальным значением $\text{Im} \rho_{21}$ и равными населенностями подуровней [6]. После его воздействия вектор Блоха, соответствующий НЧ-переходу, будет вращаться в плоскости $(u, \text{Im} \rho_{21})$ с частотой ω_{21} (см. (1.1)). Результат преобразования УКИ зависит от фазы НЧ-осцилляций перед его приходом. Чтобы достигнуть максимально возможного усиления (при данной заселенности $\rho_{33}^{(0)}$), УКИ должен приходиться в среду, когда $u < 0$ и максимально по модулю. Для этого УКИ должен запаздывать по отношению к СВЧ-импульсу на $1/4$ или $3/4$ периода $2\pi/\omega_{21}$ (в зависимости от знака разности населенностей на НЧ-переходе перед приходом СВЧ-импульса \tilde{n}^*). В соответствии с законом сохранения вектора Блоха, чем больше величина этой разности, тем большая когерентность будет возбуждена $|u_0| = |\tilde{n}^*|$. Для ее увеличения один из подуровней нужно опустошить, например, путем селективного по частоте или поляризации воздействия резонансного излучения или посредством охлаждения среды. Подставляя $|u_0| = |\tilde{n}^*|$ в неравенство $C_2 > 0$ и принимая во внимание то обстоятельство, что $\pi/2$ -импульс не меняет полной населенности подуровней, находим необходимое условие безынверсного усиления $\rho_{33}^{(0)} > \min(\rho_{11}^*, \rho_{22}^*)$. Таким образом, перед приходом $\pi/2$ -импульса верхний

уровень должен быть заселен больше, чем один из нижних подуровней. Заметим, что последнее не означает возможности усиления оптического излучения до возбуждения НЧ-когерентности. Действительно, в силу большой ширины оптических линий ($T_2^{-1} \gg \omega_{21}$) поле взаимодействует сразу с обоими оптическими переходами и при $\rho_{33}^{(0)} < 1/3$ поглощение на неинвертированном переходе превалирует. В случае $\eta = 1$ возбуждение НЧ-когерентности $\pi/2$ -импульсом полностью исключает это поглощение и приводит к такому же коэффициенту усиления, как для инвертированного перехода с разностью населенностей $\rho_{33}^{(0)} - \min(\rho_{11}^*, \rho_{22}^*)$.

При наличии в среде смежного уровня $3'$ (см. рис. 1) НЧ-когерентность может быть возбуждена двумя монохроматическими полями [1] с частотами $\omega_{3',1}$ и $\omega_{3',2}$ (в случае узких однородных линий смежных оптических переходов $T_2^{-1} \ll \omega_{21}$) или цугом УКИ [2] (в случае широких линий $T_2^{-1} \gg \omega_{21}$). Максимальное значение НЧ-когерентности, возбуждаемой этими методами, определяется равновесной населенностью смежного уровня: $u_0 = (3\rho_{3'3'}^{(0)} - 1)/2$. Подставим это выражение в неравенство $C_2 > 0$. Отсюда следует необходимое условие усиления: $\rho_{33}^{(0)} > \rho_{3'3'}^{(0)}$. Оно означает, что рабочий уровень должен быть заселен больше, чем смежный. Частичное заселение верхнего уровня, необходимое для усиления $\rho_{33}^{(0)} > \rho_{3'3'}^{(0)} > 0$, может быть обеспечено некогерентной оптической накачкой или другими традиционными методами.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Возможность безынерсного усиления была продемонстрирована выше на примере распространения УКИ в трехуровневой среде в условиях $T_2^{-1} \gg \tau_p^{-1} \gg \omega_{21}$, когда импульс резонансно взаимодействует сразу с обоими оптическими переходами.

Вместе с тем следует подчеркнуть, что безынерсное усиление имеет место и в более традиционном случае узких однородных оптических линий $T_2^{-1} \ll \omega_{21}$, когда среда взаимодействует с двумя квазимонохроматическими полями с несущими частотами $\omega_a \approx \omega_{31}$ и $\omega_b \approx \omega_{32}$, удовлетворяющими условию: $\omega_a - \omega_b = \omega_{21}$. Анализ показывает, что инкремент, связанный с параметрической неустойчивостью, появляется здесь при стороннем возбуждении достаточно большой величины НЧ-когерентности $|\sigma_{21}| > (n_{13} n_{23})^{1/2}$. Если использовать для ее возбуждения, как обсуждалось выше, два резонансных поля на смежных переходах (см. рис. 1), то максимальная величина σ_{21} достигается при достаточной интенсивности этих полей $I \gg I_0 = \hbar/8\pi\mu'^2 T_2' T_2$, где μ' , T_2' — дипольный момент и время релаксации смежных оптических переходов. В результате подстановки соответствующих значений σ_{21} , n_{13} , n_{23} , n_{13}^0 , n_{23}^0 условие усиления $|\sigma_{21}| > (n_{13} n_{23})^{1/2}$ принимает вид $\rho_{33}^{(0)} > \rho_{3'3'}^{(0)}$. Величина равновесной разности населенностей $\rho_{33}^{(0)} - \rho_{3'3'}^{(0)}$ определяет коэффициент усиления, который в случае $\rho_{33}^{(0)} - \rho_{3'3'}^{(0)} \ll \rho_{11}^{(0)} - \rho_{33}^{(0)}$ может быть записан в виде $k \approx g(\rho_{33}^{(0)} - \rho_{3'3'}^{(0)})$, где $g = 2\pi\mu^2 T_2(\omega_a + \omega_b)/\hbar c$.

Открытой проблемой является анализ нелинейных режимов усиления, учитывающих истощение накачки и влияние усиливаемых полей на НЧ-когерентность, а также исследование безынерсной генерации, осуществимой при помещении трехуровневой среды в резонатор.

Предсказанный эффект может быть использован для получения генерации на тех квантовых переходах, где трудно или невозможно реализовать инверсию населенностей.

По-видимому, этот эффект может быть реализован в парах натрия. Накачка может здесь осуществляться излучением лазера на красителе, а в качестве рабочего и вспомогательного уровней могут быть использованы верхние уровни, соответствующие D_1 и D_2 линиям натрия. Возбуждение НЧ-когерентности осуществимо, например, на НЧ-переходе, отвечающем сверхтонкому расщеплению основного состояния с частотой 1,77 ГГц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Orriols G.* Nonabsorption resonances by nonlinear coherent effects in a three-level system // *Nuovo cim.* В. 1979. Vol. 53, N 1. P. 1–24.
2. *Кочаровская О.А., Ханин Я.И.* Захват населенностей и когерентное просветление трехуровневой среды периодической последовательностью ультракоротких импульсов // *ЖЭТФ*, 1986, Т. 90, № 5, С. 1610–1619.
3. *Koponicki M.J., Eberly J.H.* Simultaneous propagation of short different wavelength optical pulses // *Phys. Rev. A* 1981. Vol. 24, N 5. P. 2567–2583.
4. *Кочаровская О.А., Ханин Я.И.* Когерентное усиление ультракороткого импульса в трехуровневой среде без инверсии населенностей // *Письма в ЖЭТФ*, 1988 Т. 48, № 11, С. 581–584.
5. *Крюков П.Г., Летохов В.С.* Распространение импульса света в резонансно усиливающей (поглощающей) среде // *УФН*, 1969, Т. 99, № 2, С. 169–227.
6. *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир 1978, 224 с.

УДК 537.312.8:538.945

О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ ВТОРОГО РОДА

И.Л. МАКСИМОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхпроводники являются физической системой в которой наблюдается множество нелинейных эффектов. Наибольший интерес в этом плане представляет собой так называемая слабая сверхпроводимость. Уравнения, описывающие нелинейную динамику джозефсоновских контактов хорошо известны [1], большой ряд работ посвящен нахождению точных решений этих уравнений.

Данная работа посвящена исследованию нелинейной динамики токовых состояний в сверхпроводниках второго рода. К данному классу материалов относятся также недавно открытые высокотемпературные сверхпроводники, что делает изучаемую проблему важной и актуальной. Следует отметить, однако, что динамика критического состояния в сверхпроводниках второго рода исследована явно недостаточно. Между тем существование характерной неустойчивости критического состояния — скачка магнитного потока [2] — делает эту проблему достаточно нетривиальной и

интересной. С физической точки зрения термомагнитная неустойчивость представляет собой связанное развитие тепловых и электромагнитных возмущений в сверхпроводниках, находящихся в критическом состоянии. Связанное нарастание возмущений, возникающее при определенных условиях, сопровождается значительным разогревом сверхпроводника и завершается, как правило, переходом в нормальное состояние, а также резким проникновением магнитного потока в образец [3]. Как условия возникновения, так и динамика развития неустойчивости изучались ранее в линейном приближении по малым возмущениям [4,5]. Найденные критерии неустойчивости достаточно хорошо описывают известные экспериментальные данные (см. монографию [6] и ссылки, указанные там же). Вопрос о дальнейшей эволюции неустойчивости обсуждался, главным образом, лишь в связи с так называемыми ограниченными неустойчивостями [6,7]. Ранние попытки изучения динамики неустойчивости в квазилинейном приближении [4,8] не были в достаточной степени обоснованы.

В настоящей работе исследуется нелинейная динамика критического состояния в сверхпроводниках с учетом эффектов дисперсии и диссипации. Обнаружено существование термомагнитной ударной волны; получены оценки для скорости и ширины ее фронта. Исследована устойчивость найденных нелинейных волн; показано, что уединенная волна устойчива по отношению к малым одномерным возмущениям ее профиля. Теоретически предсказан взрывной режим развития термомагнитных возмущений большой амплитуды, реализующийся на финальной стадии эволюции скачка магнитного потока. Показано, что новый физический механизм - нелинейное взаимодействие двух термомагнитных ударных волн - является ответственным за взрывную динамику критического состояния в сверхпроводниках.

2. МОДЕЛЬ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Динамика критического состояния в сверхпроводнике определяется взаимодействием двух подсистем - тепловой и электромагнитной. Пространственно-временное распределение температурного $T(\mathbf{r}, t)$, электрического $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитного $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ полей описывается уравнением теплопроводности совместно с уравнениями Максвелла:

$$\nu \dot{T} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi c^{-1} \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{H} / \partial t, \quad (3)$$

где $\nu(T)$ и $\kappa(T)$ - коэффициенты теплоемкости и теплопроводности соответственно. Уравнение критического состояния (иначе - вольт-амперная характеристика) сверхпроводника описывает зависимость плотности тока \mathbf{j} от T , \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0(T, \mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{j}_c(T, \mathbf{H}) + \mathbf{j}_1(\mathbf{E}), \quad (4)$$

где \mathbf{j}_c - критическая (т.е. обусловленная закреплением магнитного потока), $\mathbf{j}_1(\mathbf{E})$ - "нормальная" (т.е. обусловленная движением потока) составляющие полной плотности тока. В широком температурном интервале

справедлива линейная аппроксимация

$$|j_c| = j_0 - a(T - T_0) \quad (5)$$

Здесь $a = -dj_c/dT|_{T=T_0} \approx j_0/(T_c - T_0)$ — коэффициент, характеризующий интенсивность термически стимулированного высвобождения флюксонов с центров их закрепления в сверхпроводнике; T_c и T_0 — критическая и равновесная температуры сверхпроводника соответственно. С целью упрощения последующего математического анализа задачи мы будем пользоваться биновской моделью критического состояния [9], т.е. пренебрежем зависимостью j_c от H . Отметим, что зависимость $j_0(E)$, являющаяся практически линейной при $E \gg E_0$ [5], характеризуется большой дифференциальной проводимостью в области слабых полей $E \rightarrow 0$. Более подробное обсуждение принятой нами модели критического состояния, а также области ее применимости проведено в [6].

3. ТЕРМОМАГНИТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Стационарное распределение температуры и поля может стать неустойчивым по отношению к малым их возмущениям δT и δE . Эта неустойчивость возникает, если глубина проникновения магнитного потока в образец l превышает пороговое значение l_j [2,3]. Порог и динамику начальной стадии развития неустойчивости легко определить, анализируя дисперсионные кривые $\omega(k)$ линеаризованной системы уравнений (1) — (5). Выполнив стандартную процедуру линеаризации и исключив переменную δE , мы приходим к обезразмеренному уравнению на $\delta T(x/l, t/t_K)$ в простейшем случае плоской геометрии образца:

$$\delta T^{IV} - (1 + \mu) \delta \dot{T}'' - \beta \delta \dot{T} + \mu \delta \ddot{T} = 0, \quad (6)$$

где $\mu = 4\pi\sigma\kappa/c^2\nu = D_{th}/D_m$ — параметр, характеризующий отношение

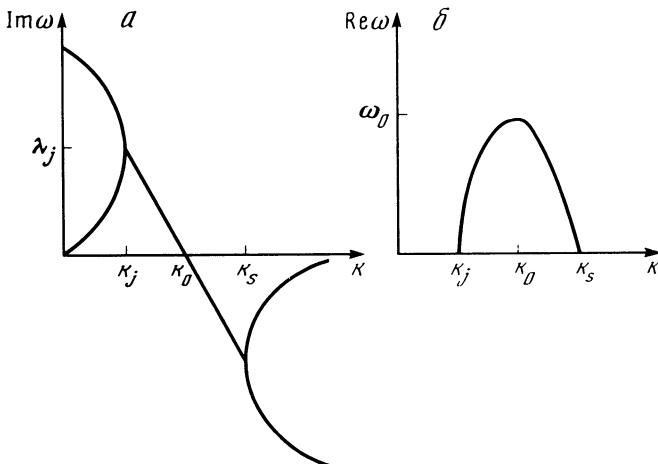


Рис. 1. Дисперсионные кривые $\omega(k)$: зависимости инкремента $\lambda = \text{Im } \omega$ (а) и частоты $\text{Re } \omega$ (б) от волнового числа k для малых термомагнитных возмущений

коэффициентов тепловой и магнитной диффузии материала, $t_k = l^2 / D_{1k}$ — тепловое время задачи, а $\beta = 4\pi j_0 a l^2 / c^2 \nu$ — величина, характеризующая меру активности критического состояния. Для решений вида $\delta T(x/l, t/t_k) \sim \exp[i(kx/l - \omega t/t_k)]$ дисперсионные кривые $\omega(k)$ уравнения (6) изображены на рис. 1. Видно, что область абсолютной неустойчивости ($\text{Im } \omega > 0, \text{Re } \omega = 0$) соответствует длинноволновой части спектра $k \leq k_j$ (безразмерный инкремент возмущения на пороге неустойчивости $k = k_j$ равен $\lambda_j \equiv \text{Im } \omega(k_j) = k_j^2 / \sqrt{\mu}$). Линейному анализу устойчивости критического состояния посвящено большое число работ, в которых детально исследовано влияние геометрии, а также внешних условий на пороговые (k_j, λ_j) и осцилляционные (k_0, ω_0 ; см. рис. 1) параметры системы [5, 6]. Отметим появление осцилляционной части спектра в области $k_j < k < k_s$. С физической точки зрения возникновение осцилляций отражает возможность обмена энергией между тепловой и электромагнитными модами в процессе развития неустойчивости. На наш взгляд, именно осцилляционная часть спектра ответственна за существование ограниченных неустойчивостей [7, 10], неоднократно наблюдавшихся экспериментально [8, 11].

4. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕРМОМАГНИТНАЯ ВОЛНА

Существование термомангнитной неустойчивости означает, что сверхпроводник второго рода является активной нелинейной средой, которая может допускать возникновение автоволновых или диссипативных структур. Исследованию этого вопроса и посвящена дальнейшая часть работы.

Рассмотрим вначале плоский полубесконечный образец ($x > 0$), находящийся при адиабатических тепловых условиях во внешнем электрическом поле $\mathbf{E} = (0, E_e, 0)$. Данная ситуация может быть реализована экспериментально в однородном (на масштабе $L \gg l$) магнитном поле \mathbf{H} , растущем с постоянной скоростью $\dot{\mathbf{H}}_e = (0, 0, \dot{H}_e)$; амплитуда возникающего вихревого электрического поля есть $E_e \approx L \dot{H}_e / c$. Будем искать решение уравнений (1)–(5) в классе бегущих волн:

$$E_y = E(\zeta), \quad H_z = H(\zeta), \quad T = T(\zeta); \quad \zeta = x - vt.$$

Используя данную подстановку, можно легко понизить порядок системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого, разумеется, следует принять во внимание граничные условия в глубине сверхпроводника:

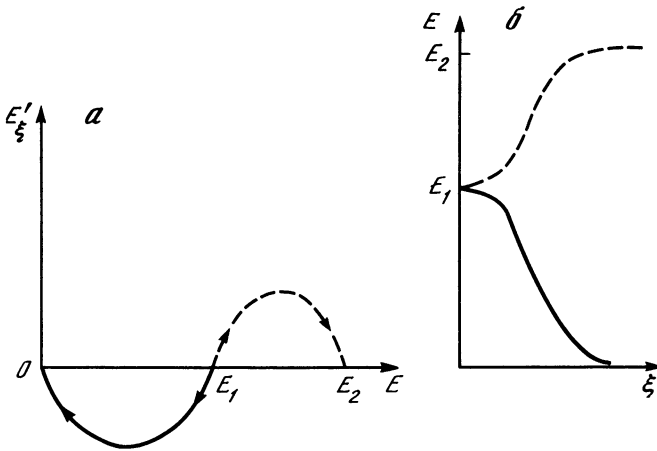
$$E(\infty) = 0, \quad E'_\zeta(\infty) = 0, \quad T(\infty) = T_0,$$

а также использовать интегралы уравнений (2) и (3). В частности, соотношение $E = (v/c)H$, отражающее специфику избранной системы отсчета, а также интеграл

$$j = -(c^2 / 4\pi v) E'_\zeta,$$

следующий из (2) и (3) непосредственно. Окончательно мы приходим к уравнению второго порядка, описывающему распределение $E(\zeta)$.

$$E''_{\zeta^2} + \frac{v}{D_m(E)} \left[E'_\zeta + \frac{va}{\sigma(E) \kappa(T)} \frac{T}{T_0} \nu(T) dT \right] - \frac{a}{2\kappa(T)} E^2 = 0. \quad (7)$$



Р и с. 2. Фазовая плоскость уравнения (7) (а) и профиль нелинейных волн для случая слабого разогрева (сплошная линия) и с учетом зависимости $\nu(T)$ (штриховая) (б)

Связь между T и E вытекает из соотношений (2) – (5):

$$T(E, E'_\xi) = T_0 + \frac{1}{a} \left[j_0(T_0, E) + \frac{c^2}{4\pi\nu} E'_\xi \right]. \quad (8)$$

Граничные условия на границе образца $x = 0$ ($\xi \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$) для волны с фиксированной амплитудой электрического поля E_e имеют вид: $E(-\infty) = E_e$, $E'_\xi(-\infty) = 0$, $T'_\xi(-\infty) = 0$.

Анализ фазовой плоскости (E, E'_ξ) уравнения (7) обнаруживает существование двух особых точек – положений равновесия системы (рис. 2, а):

- 1) $E = 0$, $E'_\xi = 0$, $T = T_0$ и 2) $E = E_e$, $E'_\xi = 0$, $T = T^* = T(E_e, 0)$.

Сепаратриса, соединяющая эти особые точки, представляет собой решение типа ударной волны с амплитудой E_e . Отметим, что в области линейной ВАХ ($E > E_0$) в пределе слабого разогрева $(T^* - T_0) \ll T_0$ уравнение (7) переходит в первый интеграл стационарного уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса, имеющего решение указанного выше типа [12]. Собственное число задачи ν_E может быть найдено из условия, что общее решение $E = E_\nu(\xi)$ совпадает с сепаратрисой $E = \bar{E}_{\nu_E}$, соединяющей точки равновесия 1 и 2. Окончательно, скорость E -волны определяется уравнением

$$\nu_E = c E_e \left(8\pi \int_{T_0}^{T^*} \nu(T) dT \right)^{-1/2},$$

где $T^* = T(E_e, 0)$ – температура разогретой области за фронтом волны (см. (8)).

Для оценки ширины фронта ударной волны необходимо исследовать асимптотическое поведение решения $\bar{E}(\xi)$ вблизи особых точек уравнения (7). Подробно вопрос о структуре волны рассмотрен в [13]; здесь мы

приведем оценку $\Delta\zeta$ по порядку величины:

$$\Delta\zeta \simeq 2v^{-1}(D_{th} + D_m)|_{T=T^*, E=E_e} \quad (9)$$

Видно, что ширина фронта определяется большим из коэффициентов тепловой или магнитной диффузии в материале.

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Анализ фазовой плоскости уравнения (7) был проведен выше в приближении слабого разогрева, что эквивалентно пренебрежению температурной зависимостью теплофизических параметров сверхпроводника $\nu(T)$ и $\kappa(T)$. Оказывается, что учет этой зависимости может привести к качественно новым результатам. Разумеется, точное решение уравнения (7) $\bar{E}(\zeta)$ найти невозможно. Поэтому мы ограничимся здесь изучением стационарных точек системы и определим скорость волны конечной амплитуды. Как выяснено в предыдущем разделе, скорость волны существенно определяется теплоемкостью материала $\nu(T)$ (теплопроводность не влияет на тип особых точек, так как в силу граничных условий тепловой поток $\zeta dT/d\zeta$ исчезающе мал при $\zeta \rightarrow \pm \infty$). Учитывая доминирующий вклад фононной составляющей в теплоемкость сверхпроводника, аппроксимируем $\nu(T) = \nu_0 (T/T_0)^3$. В этом приближении точки равновесия на фазовой плоскости определяются из уравнения:

$$2\pi v^2 c^{-2} \nu_0 T_0 [(1 + j_0(T_0, E/a T_0))^4 - 1] = E^2. \quad (10)$$

Полагая $j_0 = \sigma_0 E$, нетрудно установить, что при $A \equiv (2\pi v^2/c^2) \nu_0 \sigma_0^2/a^2 T_0 < A_{кр} = 3/49$ существуют три решения уравнения (10): $E = 0$, $E = E_1$ и $E = E_2 > E_1$ (см. рис. 2, а). В противоположном случае имеется лишь тривиальное решение $E = 0$. Значение $A = A_{кр}$ соответствует касанию параболы и кривой четвертого порядка в (10) (т.е. слиянию E_1 и E_2 : $E_1 = E_2 = E^* = 6/7 aT_0/\sigma_0$). Связь амплитуды и скорости волны может быть получена в двух предельных случаях:

$$1) A \ll A_{кр}$$

$$E_1 = \frac{8\pi\sigma_0}{c^2} \frac{\nu_0 v^2}{a}, \quad E_2 = \left(\frac{aT_0}{\sigma_0}\right)^2 \frac{c}{(2\pi\nu_0 T_0)^{1/2}} \frac{1}{v} \gg E_1;$$

$$2) (A_{кр} - A)/A_{кр} \ll 1;$$

$$E_{1,2} = E^* \{1 \mp 2,2(A_{кр} - A)^{1/2}\}.$$

Детальный анализ фазовой плоскости (E, E_1^2) показывает, что точки $E = 0$ и $E = E_2$ — устойчивые узлы, а $E = E_1$ — седло. Следовательно уравнение (7) допускает существование двух сепаратрис: $E_1 0$ и $E_1 E_2$ (см. рис. 2, а), описывающих нелинейные волны двух типов: $\Delta E_1 = E_1$ и $\Delta E_2 = E_2 - E_1$ (см. рис. 2, б). Экзотическая зависимость v от ΔE_2 : $v \sim (\Delta E_2)^{-1}$ скорее всего означает неустойчивость второй из волн. В связи с этим отметим, что наблюдение волн второго типа возможно, по-видимому, лишь в образцах конечных размеров с несимметричными граничными условиями.

6. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ

Для исследования устойчивости нелинейной стационарной волны по отношению к малым возмущениям ее профиля необходимо решить довольно сложную систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Полный анализ этой проблемы еще не проведен ввиду отсутствия аналитического решения уравнения (7). Тем не менее эта задача может быть решена для некоторой модельной зависимости $j_0(E)$ в приближении слабого разогрева: $(T^* - T_0)/(T_c - T_0) \ll 1$. А именно будем предполагать, что $\partial j_0/\partial E \equiv \sigma_0 = \text{const}$ при $E \rightarrow 0$ [14]. Тогда в предельном случае $\mu \ll 1$ (материалы с большим параметром Гинзбурга–Ландау), пренебрегая процессом перераспределения тепла в образце, находим решение (7) в виде

$$\bar{E}(\xi) = 0,5 E_e [1 - \text{th}(\mu \nu \xi / 2 \kappa)],$$

где $\nu \equiv \nu(T_0)$, $\kappa \equiv \kappa(T_0)$. В противоположном случае $\mu \gg 1$ (так называемые композитные сверхпроводящие материалы [6]), когда доминирует тепловой механизм распространения волны, уравнение (7) совпадает с уравнением Бюргерса и имеет решение [15]:

$$\bar{E}(\xi) = 0,5 E_e [1 - \text{th}(\nu \xi / 2 \kappa)].$$

Имея целью описать два предельных случая одновременно, введем аппроксимационную зависимость $E = \bar{E}(\xi)$:

$$\bar{E}(\xi) = 0,5 E_e \left[1 - \text{th} \left(\frac{\nu v}{2\kappa} \frac{\mu}{1 + \mu} \xi \right) \right], \quad (11)$$

асимптотически справедливую в обеих ситуациях и дающую максимальную погрешность $\sim 25\%$ при $\mu \approx 1$. Для выяснения вопроса об устойчивости волны нам необходимо линеаризовать систему уравнений (1)–(5) по малым тепловым $\delta T = T - \bar{T}(\xi) = \delta \bar{T}(\xi) \exp(\lambda t)$ и электромагнитным $\delta E = E - \bar{E}(\xi) = \delta \bar{E}(\xi) \exp(\lambda t)$; $\delta H = H - \bar{H}(\xi) = \delta \bar{H}(\xi) \exp(\lambda t)$ возмущениям исходного профиля $\bar{T}(\xi)$, $\bar{E}(\xi)$, $\bar{H}(\xi)$, определяемого соотношениями (8)

и (11). Введя безразмерную переменную $z = \frac{\nu v}{2\kappa} \frac{\mu}{1 + \mu} \xi$, инкремент $\Lambda = \lambda \frac{4\kappa}{\nu v^2} \frac{\mu}{1 + \mu}$, и выполнив несложные вычисления, приходим к уравнению на перенормированное возмущение $\psi(z) = \text{ch } z \delta \bar{E}$:

$$\psi'' + [-\Lambda(2 - \text{th } z) - 1 + 2/\text{ch}^2 z] \psi = 0. \quad (12)$$

При вычислениях мы использовали то обстоятельство, что вблизи порога термомангнитной неустойчивости доминируют медленные возмущения с $\Lambda < 1$ [5], и соответственно пренебрегли слагаемыми порядка Λ^2 и выше в уравнении (12). Формально (12) совпадает с уравнением Шредингера для квантовой частицы в несимметричной потенциальной яме, форма которой, заметим, зависит от энергии частицы. С физической точки зрения нечетное слагаемое в (12) описывает дрейфовый эффект – влияние движения волны на динамику малых возмущений ее профиля. Решение, ограни-

ченное при $\zeta \rightarrow +\infty$, имеет вид

$$\psi(z) = (1 - th z)^{p-0,5} (1 + th z)^{q-0,5} F(\alpha, \beta, \gamma; (1 - th z/2)),$$

где $p = [(1 + 3\Lambda)^{1/2} + 1]/2$, $q = [(1 + \Lambda)^{1/2} + 1]/2$ и $\alpha = 1 + p + q$, $\beta = \alpha - 3$, $\gamma = 2q$.

Используя хорошо известную формулу трансформации гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ (см., например, [16]), нетрудно показать, что асимптотическое поведение возмущения $\delta E_{\Lambda}(z) \delta \bar{E}_{\Lambda} = \delta E_{\Lambda}(0)(1 - th z)^p (1 + th z)^q F(\alpha, \beta, \gamma; (1 - th z)/2)$ при $z \rightarrow -\infty$ представляется в виде

$$\delta E_{\Lambda} |_{z \rightarrow -\infty} \sim \exp[(1 + q - 2p)z].$$

Так как $1 + q - 2p = 0,5 [1 + (1 + \Lambda)^{1/2} - 2(1 + 3\Lambda)^{1/2}] \leq 0$ для всех $\Lambda \geq 0$, то $\delta \bar{E}_{\Lambda} \geq 0 \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow -\infty$. Аналогичный вывод вытекает из анализа другого линейно независимого решения, экспоненциально растущего при $z \rightarrow +\infty$. Таким образом, ограниченные решения уравнения (12) возможны только при $\Lambda < 0$. Это означает, что ограниченные одномерные возмущения исходного профиля волны должны непременно затухать в процессе ее распространения. Следовательно, мы можем заключить, что найденная ударная волна устойчива по отношению к малым термомангнитным возмущениям рассмотренного типа. Возмущения другого вида могут возникать в результате пространственного искривления исходного профиля волны (двумерный случай) или в процессе взаимодействия ударных волн при развитии скачка магнитного потока (двухволновое взаимодействие). Решение последней проблемы требует более детального анализа нелинейной динамики критического состояния. Один из возможных подходов, основанный на асимптотически точном решении задачи, будет обсужден ниже.

7. ВЗРЫВНАЯ ДИНАМИКА КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Рассмотрим теперь сверхпроводящий образец конечной толщины $2b$ ($0 \leq |x| \leq b$) с симметричным относительно плоскости $x = 0$ распределением электрического поля $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ и тока. Мы не будем ограничивать себя поиском автомодельных решений того или иного типа, попытаемся найти точное решение системы (1)–(4). Разумеется, в общем случае это сделать нельзя. Поэтому мы рассмотрим позднюю стадию развития термомангнитных возмущений, когда они достигают заметной величины. Для таких возмущений большой амплитуды $T \leq T_c$, $E \gg E_0$ вольт-амперная характеристика сверхпроводника может быть представлена в линейном виде:

$$j = j_0 - a(T - T_0) + \sigma E,$$

а температурной зависимостью коэффициента теплоемкости можно пренебречь: $\nu(T) \approx \nu(T_c) \equiv \nu$. Имея целью дать ясную картину эволюции термомангнитной неустойчивости, рассмотрим более простой случай жестких (или высокотемпературных) сверхпроводников. В этих материалах с $\mu \ll 1$ скачок потока носит адиабатический характер, т.е. неустойчивость развивается на фоне неизменного теплового потока. Последнее обстоятельство позволяет опустить слагаемое $\nabla(\kappa \nabla T)$ в уравнении (1). Исключая

температуру T из системы (1)–(5), мы находим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для $E = E(x, t)$:

$$(E \ddot{E}'' - \dot{E} E''') + D_m^{-1} (\dot{E}^2 - E \ddot{E}) + a \nu^{-1} E^2 E'' = 0, \quad (13)$$

Уравнение (13) впервые было получено автором в [17]. В связи с особой ролью, которую играют тепловые процессы в сверхпроводниках, нахождение полного спектра решений (13) (и его модификаций) является весьма актуальной и интересной задачей динамики нелинейных систем. Отыскивая решение (13) методом нелинейного разделения переменных [18]:

$$E(x, t) = R(x) \varphi(t),$$

находим, что данная подстановка непротиворечива, если $R(x)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$R_{xx}'' = A = \text{const} \quad (14)$$

и

$$\varphi \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 = 2\tau^{-2} \varphi^3, \quad (15)$$

где $\tau = [(8\pi\nu\sigma/ac^2)A^{-1}]^{1/2}$. Нарастающие возмущения ($\dot{\varphi} > 0$) описываются функцией $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = (B\tau)^2 \text{sh}^{-2}(\gamma - Bt),$$

где $4B^2$ – первый интеграл уравнения (14) и $\text{sh } \gamma = B\tau$ (мы полагаем $\varphi(0) = 1$). Симметричное (относительно $x = 0$) распределение температуры и электрического поля описывается следующими выражениями:

$$E(x, t) = \left(A \frac{x^2}{2} + \tilde{E}\right) \frac{(B\tau)^2}{\text{sh}^2(\gamma - Bt)}, \quad (16)$$

$$T(x, t) = T_0 + \frac{1}{a} \left[\sigma E(x, t) - \frac{2\sigma\nu}{a\tau} \frac{\text{sh } Bt}{\text{sh}(\gamma - Bt)} \right], \quad (17)$$

где \tilde{E} – константа интегрирования уравнения (14), описывающая интенсивность флуктуационного электрического поля [19]. Из (16), (17) следует, что напряженность электрического поля и температура нарастают до бесконечности за конечное время $\Delta t = \gamma/B$. Такое поведение характерно для взрывных неустойчивостей [20] которые были предсказаны и наблюдаются в плазме [21–23], а также в гидродинамических течениях с неоднородным профилем скорости [24, 25]. Однако в сверхпроводниках развитие взрывной неустойчивости ограничивается условием $T \leq T_c$. Следовательно, уравнение $T(x, t) = T_c$ определяет положение $x = \bar{x}(t)$ границы раздела нормальной и сверхпроводящей фаз внутри образца.

Полученные результаты позволяют дать более детальную картину развития неустойчивости критического состояния в сверхпроводниках II рода [26]. Как было показано в разд. 2, скачок магнитного потока реализуется, если магнитное поле на поверхности образца H_e превысит пороговое значение $H_j = 4\pi c^{-1} j_c l_j$. Стадия экспоненциального роста малых возмущений длится в течение промежутка времени $\Delta t_j \sim t_j \ln(E^*/\bar{E})$, где t_j – характерное время нарастания неустойчивости, \bar{E} – средняя величина начальной флуктуации, переводящей сверхпроводник в режим неустойчивого течения

потока. В случае, когда скачок потока инициирован транспортным током, в глубь сверхпроводника распространяются движущиеся навстречу термоманнитные волны с амплитудами $E_{\pm} = E^*$ (соответственно $H_{\pm} = \mp H_j$) и скоростями $v_{\pm} = \mp v$; $v = c E^*/H_j$. Однако данная картина представляет лишь промежуточно-асимптотический режим эволюции системы [27], основанный на представлении об уединенных ударных волнах. Эти волны движутся без взаимодействия до момента перекрытия их фронтов ($t = 0$ в нашем случае), когда расстояние между ними становится порядка $2 \Delta \zeta$. Нелинейное взаимодействие двух ударных волн, реализующиеся при $t > 0$, формирует взрывную динамику неустойчивости на финальной стадии развития скачка магнитного потока.

8. ДИНАМИКА ПРОНИКНОВЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОТОКА В СВЕРХПРОВОДНИК

Используя описанную выше качественную картину и соотношения (16), (17), мы можем найти зависимость $\bar{x}(t)$ в случае полного скачка потока. Мы рассмотрим ситуацию, когда ударная волна, распространяясь, вызывает переход в нормальное состояние за ее фронтом; следовательно, $E^* \approx j_0/\sigma$. Мы полагаем, что при $t = 0$ $\bar{x}_{\pm}(0) = \pm \Delta \zeta$, и пренебрегаем перекрытием волн ($\tilde{E} = 0$) в начальный момент. Используя условие $T(\Delta \zeta, 0) = T_{\zeta}$ (или $E(\Delta \zeta, 0) = E^* = j_0/\sigma$), нетрудно найти оценку для A : $A = 2E^*/(\Delta \zeta)^2$ и, окончательно, функцию $\bar{x}_{-}(t)$ (напомним, $\bar{x}_{+} = -\bar{x}_{-}$):

$$\bar{x}_{-}(t) = -\frac{\Delta \zeta}{\tau} \frac{\text{sh}(\gamma - Bt)}{B} \left[1 + \frac{2\nu\sigma}{a^2(T_c - T_0)\tau} \frac{\text{sh} Bt}{\text{sh}(\gamma - Bt)} \right]^{1/2}. \quad (18)$$

В предельном случае $B\tau \ll 1$ это выражение можно упростить:

$$\bar{x}_{-}(t) = -\Delta \zeta \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \left[1 + \frac{2D_m}{(\Delta \zeta)^2} \frac{t}{(1 - t/\tau)} \right]^{1/2}. \quad (19)$$

Из (19) следует, что скорость проникновения магнитного потока $u = d\bar{x}_{-}/dt$ имеет корневую сингулярность вблизи точки схлопывания $u|_{t \rightarrow \tau} \approx [D_m/2(\tau - t)]^{1/2}$. Отметим, что скорость схлопывания потока $u|_{t \rightarrow \tau}$ не зависит от амплитуды сливающихся волн E^* . Время взрыва легко оценить, зная величину A :

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta \zeta l_j}{D_m} \left[\frac{\pi^3 \nu (T_c - T_0)}{H_j^2} \right]^{1/2}. \quad (20)$$

Подставляя в (20) выражение для H_j в квазиadiaбатическом случае: $H_j^2 = \pi^3 \nu (T_c - T_0)$, значение скорости ударной волны $v = c j_0/\sigma H_j \approx D_m/l_j$, а также оценку ширины фронта в пределе $\mu \ll 1$: $\Delta \zeta \approx 2D_m/v = 2l_j$, мы получаем простую оценку:

$$\tau = (4/\pi) l_j^2 / D_m. \quad (21)$$

Из (21) видно, что время взрыва τ практически совпадает с временем магнитной диффузии в системе $t_m = l_j^2 / D_m$. Этот временной интервал намного меньше периода роста возмущений на линейной стадии: $t_j = (4/\pi^2) t_m / \sqrt{\mu}$ [5], и несколько меньше характерного времени движения волны $t_b \approx b/v = (b/l_j) t_m$ [13].

9. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе рассмотрены два возможных режима нелинейной динамики критического состояния сверхпроводников. Обсудим подробнее некоторые физические особенности и ограничения, сопутствующие каждому из режимов. В отношении ударной волны следует подчеркнуть, что решение данного типа получено для произвольной температурной зависимости теплофизических параметров сверхпроводника $\nu(T)$ и $\kappa(T)$ (за исключением разд. 5), а также в достаточно общих предположениях о виде функции $j_1(E)$. Такая возможность возникает как следствие трансляционной инвариантности системы уравнений (1)–(5) относительно преобразований Римана. Последнее обстоятельство допускает обобщение метода на случай произвольной модели критического состояния – зависимости j_c от T и H . Более серьезное ограничение возникает при использовании граничных условий ($\xi = \pm \infty$) в образцах конечных размеров. Выписанные в разд. 4 условия справедливы в случае $\Delta\xi \ll b$. Таким образом, найденные в работе нелинейные волны могут наблюдаться только в достаточно толстых образцах. Возможно, именно такие термомагнитные волны наблюдались Урбаном [28], во время его экспериментов по исследованию граничных неустойчивостей в макроскопических сверхпроводящих образцах.

Как было выяснено в разд. 6, нелинейная волна устойчива по отношению к малым одномерным возмущениям. Однако профиль волны может существенно искажаться вследствие взаимодействия с другой уединенной волной. Эта ситуация может быть реализована в процессе развития неустойчивости критического состояния в сверхпроводнике. Например, если скачок магнитного потока инициирован транспортным током (симметричное распределение электрического поля: $E(x, t) = E(-x, t)$), взаимодействие волн формирует взрывную неустойчивость критического состояния в соответствии со сценарием, рассмотренным в разд. 7 (см. также [29]). Отметим две важные особенности полученного в работе результата: 1) обнаружен первый пример взрывной динамики в сверхпроводниках (и, возможно, вообще в низкотемпературных системах); 2) установлен новый механизм взрывной динамики в нелинейных физических системах, поскольку в сверхпроводниках именно взаимодействие (слияние) двух волн с положительной энергией ответственно за взрывное поведение системы. Данный механизм существенно отличается от хорошо известного трехволнового взаимодействия [20], ответственного за взрывную неустойчивость в плазме [21] или в пограничном слое [25]. Природу нового механизма можно понять, учтя, что динамика больших ($E \gg E_0$) термомагнитных возмущений в сверхпроводниках характеризуется квадратичной нелинейностью совместно с сильной дисперсией и интенсивной диссипацией. С математической точки зрения взрывное нарастание возмущений тесно связано с взрывным поведением решений уравнения Бюргерса, отмеченным в [30] для сред с отрицательной вязкостью. Действительно, в соответствии с асимптотикой (19) при $t \rightarrow \tau$

$$|\bar{x}_{\pm}| \approx [2 D_m (\tau - t)]^{1/2}$$

слияние магнитного потока можно интерпретировать как процесс диффузии с отрицательным коэффициентом диффузии $-2 D_m$. Нетрудно

показать далее, что напряженность магнитного поля H имеет корневую сингулярность на поверхности $x = \bar{x}_{\pm}(t)$:

$$H(\bar{x}_{\pm}(t), t) = \pm 16 \pi^{-2} \Phi_i / |\bar{x}_{\pm}(t)|. \quad (22)$$

С физической точки зрения подобное обострение профиля магнитного поля возникает вследствие сохранения начального магнитного потока $\Phi_i = 0,5 H_j l_j$ при распространении волны. По-видимому, подобный эффект был наблюден экспериментально в работе [31], где отмечались резкие всплески электрического напряжения в зоне слияния магнитного потока $x \approx 0$. Со спектральной точки зрения усиление высокочастотных мод за счет подкачки энергии со стороны низкочастотных гармоник ответственно за резкое обострение профиля ударной волны [20, 30].

Обсудим вкратце случай, когда распределение тока внутри образца антисимметрично. Эта ситуация реализуется в сверхпроводнике, помещенном во внешнее магнитное поле $\mathbf{H} = (0, 0, H_e)$. В этом случае, как следует из анализа в разд. 4 (см. также [31]), в глубь сверхпроводника могут распространяться устойчивые термомагнитные волны с симметричным распределением магнитного поля $H(x, t) = H(-x, t)$ (соответственно $E(x, t) = -E(-x, t)$). Физически очевидно, что процесс слияния таких волн будет происходить существенно иначе, чем в предыдущем случае. Для количественного описания процесса необходимо, учитывая симметрию задачи, заменить в уравнении (12) a на $a \operatorname{sgn} x$. Соответственно уравнение (13) примет вид

$$R_x'' = A \operatorname{sgn} x,$$

антисимметричное решение которого будет

$$R(x) = (A x |x| / 2 + Gx), \quad (23)$$

а распределение поля $E(x, t)$:

$$E(x, t) = (A x |x| / 2 + Gx) (B\tau)^2 \operatorname{sh}^{-2}(\gamma - Bt). \quad (24)$$

Распределение температуры $T(x, t)$ дается уравнением (17) с соответствующей заменой параметра a . Анализируя (24), легко увидеть, что вблизи зоны слияния $x \rightarrow 0$ в (23) доминирует линейное по x слагаемое. Следовательно, вблизи точки схлопывания $t \rightarrow \Delta t = \gamma/B$ зависимость $\bar{x}_{-}(t)$ имеет вид

$$\bar{x}_{-}(t) \approx -D_m (A/G) (\Delta t - t),$$

а скорость движения магнитного потока u постоянна:

$$u = d\bar{x}_{-}/dt \approx D_m A/G.$$

Из условия при $t = 0$: $|\bar{x}_{\pm}(0)| = \Delta \xi$ можно оценить $G = pA \Delta \xi$ (где $p \geq 1$; более точная оценка дает $p = 16/\pi^2$). Следовательно, скорость слияния магнитного потока $u \approx v/p < v$ уменьшается по сравнению со скоростью движения уединенных волн. Физически это замедление обусловлено взаимным отталкиванием вихревых нитей в области с повышенной концентрацией флюксоидов [1, 19].

Следует признать, что точное аналитическое решение системы (1)–(5) для взрывной стадии неустойчивости в общем случае найти невозможно.

Ясно, однако, что учет зависимости $\nu(T)$ и $j_c(H)$ не может радикально изменить полученные выше результаты для взрывной стадии неустойчивости. Например, рост теплоемкости с температурой ($dv/dT > 0$) приведет к некоторому замедлению неустойчивости и скажется на длительности взрывной стадии: $\tau \sim \nu^{1/2}$. Что касается влияния магнитного поля, то этот вопрос требует специального обсуждения. Для оценок достаточно брать теплофизические величины при $T \approx T_c$ и вычислять критическую плотность тока при $H \approx H_j$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость. М.: Атомиздат, 1980. 253 с.
2. Leblanc M.A.R., Vernon F.L. Observation of the behaviour and structure of flux jumps in hard superconductors // Phys. Lett. 1964. Vol. 13, N 4, P. 291–293.
3. Кремлев М.Г. Об устойчивости критических состояний в сверхпроводниках II рода // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 17, № 6. С. 350–353.
4. Wipf S.L. Magnetic instabilities in type-II superconductors // Phys. Rev. 1967. Vol. 161, N 2. P. 404–416.
5. Минц Р.Г., Рахманов А.Л. Магнитные неустойчивости в жестких сверхпроводниках // УФН. 1977. Т. 121. С. 499–524.
6. Минц Р.Г., Рахманов А.Л. Неустойчивости в сверхпроводниках. М.: Наука, 1984. 262 с.
7. Maksimov I.L., Mints R.G. Critical state stability and oscillations in type-II superconductors // J. Phys. D. 1980. Vol. 13, N 8, P. 1689–1698.
8. Chicaba J. Effect of thermal insulation on flux jumps in Nb–50% Ti rods // Cryogenics. 1970. Vol. 10, N 4, P. 306–313.
9. Bean C.P. Magnetization of hard superconductors // Rev. Mod. Phys. 1964. Vol. 36, N 1. P. 31–39.
10. Mints R.G., Rakhmanov A.L. Limited flux jumps in hard superconductors // J. Phys. D. 1983. Vol. 16, N 12, P. 2495–2503.
11. Akachi T., Ogasawara T., Yasukochi K. Magnetic instabilities in high field superconductors // Jap. J. Appl. Phys. 1981. Vol. 20, N 8, P. 1559–1571.
12. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
13. Максимов И.Л., Мастаков Ю.Н., Тайланов Н.А. Нелинейная термомангнитная волна в сверхпроводниках второго рода // ФТТ. 1986. Т. 28, № 8. С. 2323–2328.
14. Ларкин А.Н., Овчинников Ю.Н. Электродинамика неоднородных сверхпроводников // ЖЭТФ. 1973. № 4. С. 1704–1714.
15. Максимов И.Л., Адахамов А.А., Тайланов Н.А. Об устойчивости нелинейной термомангнитной волны в сверхпроводнике // ФТТ. 1988. Т. 30, № 3, С. 580–582.
16. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высш. шк., 1965. 282 с.
17. Maksimov I.L. The explosive dynamics of thermomagnetic instability in hard superconductors // Jap. J. Appl. Phys. 1987. Vol. 26, pt 1: Proc. Intern. Conf. on low temperature phys. LT-18, Kyoto, 1987.
18. Пелиновский Е.Н. Некоторые точные методы в теории нелинейных волн // Изв. вузов. Радиофизика, 1976. Т. 19, № 5, С. 883–901.
19. Жен П.де. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968. 280 с.
20. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л. Нелинейные волны в неравновесных средах // Изв. вузов. Радиофизика, 1976. Т. 19, № 5. С. 721–766.
21. Дикасов В.М., Рудаков Л.И., Ротов Д.Д. О взаимодействии волн с отрицательной энергией в слаботурбулентной плазме // ЖЭТФ. 1965. Т. 48, № 3. С. 913–922.
22. Fukai J., Krishan S., Harris E.G. Explosive plasma instabilities // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13, N 12. P. 3031–3037.
23. Hatan F. Explosion instability in a plasma with a beam // Tenth Intern. Conf. on phenomena in ionized gases. Oxford, 1971. P. 323–335.
24. Klebanoff P.S., Tidstrom K.D., Sargent L.M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 12. P. 1–15.

25. *Craik A.D.D.* Non-linear resonant instability in boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1971. Vol. 50, P. 393–413.
26. *Maksimov I.L.* Explosive thermomagnetic instability in superconductors // *Phys. Lett. A.* 1988, Vol. 128, N 5, P. 289–293.
27. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1978, 178 с.
28. *Urban E.W.* Partial flux jumps in superconducting tubes // *Cryogenics.* 1970, Vol. 10, N 1, P. 62–63.
29. *Maksimov I.L.* Thermomagnetic shock wave and magnetic flux penetration into superconductors // *Shock waves in condensed matter, 1987* / Eds S.C. Schmidt, N.C. Holmes. 1988. P. 167–170.
30. *Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е.* Взрывная неустойчивость нелинейных волн в средах с отрицательной вязкостью // *ПММ*, 1974, Т. 38, № 6, С. 991–995.
31. *Maksimov L.L.* Thermomagnetic shock waves in hard superconductors // *J. Phys. D.* 1988, Vol. 21, N 2, P. 251–254.
32. *Flippen R.* The radial velocity of magnetic field penetration in type II superconductors // *Phys. Lett.* 1965, Vol. 17, N 3, P. 193–194.

УДК 539.292

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛАХ

В.Я. ДЕМИХОВСКИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

При распространении звуковых и электромагнитных возбуждений в металлах, помещенных в магнитное поле, наблюдаются многочисленные резонансные явления, обусловленные взаимодействием волны с электронами проводимости (см., например, [1]). В резонанс с волной попадают те электроны, у которых средняя скорость вдоль магнитного поля \bar{v}_z и циклотронная частота ω_c удовлетворяют условию

$$k_{\parallel} \bar{v}_z - \omega - l\omega_c = 0,$$

где k_{\parallel} — проекция волнового вектора на ось z , направленную по магнитному полю \mathbf{B}_0 , ω — частота волны, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Именно эти электроны (в дальнейшем мы будем называть их резонансными) определяют затухание и спектр звуковых волн, а также геликонов, доплеронов, альвеновских и других электромагнитных возбуждений, распространяющихся в металлах.

Сформулированное условие резонанса получено без учета влияния волны на электронные траектории. Очевидно, что волна конечной амплитуды влияет в первую очередь на движение резонансных электронов, причем нелинейный характер движения в поле волны и магнитном поле должен приводить к нелинейным явлениям типа волна–частица, хорошо известным в физике плазмы.

В последнее десятилетие подобные эффекты активно изучались в физике твердого тела. В чистых металлах и полупроводниках теоретически [2] и экспериментально [3] были исследованы бесстолкновительное затухание звука, нелинейное циклотронное затухание доплеронов и нелинейное магнитное затухание Ландау геликонов [4, 5], аномальный скин-эффект [6] и т.д.

Для теоретического описания перечисленных нелинейных явлений, как правило, использовались упрощенные представления о спектре электронов проводника – зависимость энергии от импульса считалась квадратичной, а поверхность Ферми сферической или цилиндрической. Очевидно, что такой подход позволяет лишь приближенно рассчитать динамические характеристики электронов проводимости. В данной работе будет рассмотрена связь электронного спектра $\epsilon(\mathbf{p})$ и геометрии поверхности Ферми реального металла с динамическими характеристиками электронов.

Сначала мы исследуем динамику электронов в поле волны, распространяющейся под произвольным углом к направлению постоянного магнитного поля и установим возможные типы резонансов. Будет показано, что в металлах со сложным спектром есть как обычные резонансы, на которых движение электрона подобно движению математического маятника, так и более сложные резонансы. Далее будут установлены характерные частоты колебаний захваченных частиц и ширина резонансов и проведен расчет коэффициента затухания продольного звука в металле, т.е. построена теория нелинейных магнитоакустических осцилляций.

Согласно современным представлениям движения резонансных частиц имеют регулярный характер лишь до тех пор, пока соседние резонансы не перекрываются. В противном случае движения становятся хаотическими. Мы покажем, что в металлических образцах с длиной пробега электронов порядка 1 см могут быть реализованы условия, при которых циклотронные резонансы перекрываются и движение электронов в поле волны становится хаотическим на большей части поверхности Ферми. В заключение обсудим характер затухания звука в режиме глобальной стохастичности.

Результаты, изложенные в настоящей работе, получены автором совместно с В.А. Бурдовым [7, 8].

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПЕРЕМЕННЫХ ТИПА ДЕЙСТВИЕ – УГОЛ. РЕЗОНАНСЫ

Классические уравнения движения электронов проводимости в магнитном поле, как известно, имеют вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0], \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}}, \quad (1)$$

где \mathbf{p} – кинематический импульс, \mathbf{r} – координата, \mathbf{v} – скорость, e – заряд электрона, c – скорость света. Интегралами системы (1) являются энергия $\epsilon(\mathbf{p})$ и проекция импульса на направление магнитного поля p_z , т.е. в импульсном пространстве электрон движется по линии пересечения изоэнергетической поверхности $\epsilon = \text{const}$ с плоскостью $p_z = \text{const}$. В координатном пространстве проекция электронной орбиты на плоскость, перпендикулярную \mathbf{B}_0 , подобна циклотронной орбите в \mathbf{p} -пространстве и повернута относительно нее на угол $\pi/2$ по оси O_z . В отличие от свободных электронов движение электрона проводимости вдоль магнитного поля является неравномерным, причем средняя скорость в этом направлении есть

$$\bar{v}_z = \partial \epsilon(S, p_z) / \partial p_z,$$

где энергия является функцией проекции импульса p_z и S — площади, ограниченной электронной орбитой в импульсном пространстве. Циклотронная частота электрона проводимости определяется выражением

$$\omega_c = 2\pi e B_0 c^{-1} \partial \epsilon(S, p_z) / \partial S,$$

а расстояние, которое проходит электрон вдоль магнитного поля за циклотронный период, есть

$$\bar{v}_z \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{c}{e B_0} \frac{\partial S(\epsilon, p_z)}{\partial p_z}.$$

Для исследования динамики электронов со сложным спектром $\epsilon(\mathbf{p})$ в полях бегущих звуковых (или электромагнитных) волн и в постоянном во времени и однородном магнитном поле удобно ввести вместо \mathbf{p} и \mathbf{r} новые канонические переменные типа действие—угол. Для этого, выбирая калибровку векторного потенциала в виде $\mathbf{A}(0, B_0 x, 0)$, запишем гамильтониан в магнитном поле следующим образом:

$$H_0 = \epsilon(p_x, x - x_0, p_z), \quad (2)$$

где $x_0 = c p_y / e B_0 = \text{const}$ — координата центра ларморовской орбиты. Вместо канонических переменных p_x, x и p_z, z введем переменные I и \tilde{p}_z и сопряженные им ϑ и Z . При этом действие I определим, как обычно;

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p_x(\epsilon, p_z, x) dx = \frac{c}{2\pi e B_0} \oint p_x dp_y = \frac{c}{2\pi e B_0} S. \quad (3)$$

Остальные переменные определяются с помощью производящей функции F_2 , зависящей от новых импульсов и старых координат:

$$F_2(I, \tilde{p}_z, x - x_0, z) = z \tilde{p}_z + \int p_x(I, \tilde{p}_z, x - x_0) d(x - x_0).$$

Согласно [9] имеем

$$p_z = \tilde{p}_z, \quad Z = z + \int \frac{\partial p_x(I, \tilde{p}_z, x - x_0)}{\partial \tilde{p}_z} d(x - x_0),$$

$$\vartheta = \int \frac{\partial p_x}{\partial I} d(x - x_0).$$

Канонические уравнения движения в новых переменных суть

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_z &= 0, \quad \dot{Z} = \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{p}_z} \Big|_I = \bar{v}_z = \text{const}, \\ \dot{I} &= 0, \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial H_0}{\partial I} \Big|_{\tilde{p}_z} = \omega_c = \text{const}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\bar{v}_z(I, \tilde{p}_z)$ — средняя скорость в направлении z , $\omega_c(I, \tilde{p}_z)$ — циклотронная частота. Поскольку переменные p_z и \tilde{p}_z совпадают, в дальнейшем мы не будем их различать.

Нашей основной задачей является изучение динамики электронов проводимости в поле звуковой волны, распространяющейся под произвольным

углом к направлению магнитного поля. Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H = H_0 - \Phi(\mathbf{p}) \cos(k_{\parallel}z + k_{\perp}x - \omega t),$$

или в переменных действие–угол

$$H = \epsilon(I, p_z) - \Phi(I, p_z, \vartheta) \cos[k_{\parallel}(Z + \Delta Z(I, p_z, \vartheta)) + k_{\perp}(x_0 + \Delta x(I, p_z, \vartheta)) - \omega t]. \quad (5)$$

Здесь $\Phi(\mathbf{p}) = \Lambda_{ik}(\mathbf{p}) u_{ik}^0$, $\Lambda_{ik}(\mathbf{p})$ – тензор деформационного потенциала, u_{ik}^0 – тензор деформации решетки. Волновой вектор лежит в плоскости (x, z) .

Исследуем систему, описываемую гамильтонианом (5), с помощью резонансной теории возмущений [10]. Аналогичная задача для электрона с законом дисперсии $\epsilon = p^2/2m$ в поле продольной волны, распространяющейся под углом к магнитному полю, решена Смитом и Кауфманом [11].

Дальнейшее рассмотрение удобно провести в системе координат, движущейся вдоль магнитного поля со скоростью ω/k_{\parallel} . Переход в эту систему осуществляется с помощью производящей функции

$$F_2 = (k_{\parallel}Z - \omega t)p + \vartheta I, \quad (6)$$

которая вводит новую фазу $\psi = k_{\parallel}Z - \omega t$ и импульс $p = p_z/k_{\parallel}$. Преобразуя (5) с помощью (6) и разлагая периодическую по ϑ функцию, описывающую возмущение, в ряд Фурье, получим

$$H = \epsilon(I, k_{\parallel}P) - \omega p - \Phi_0 \sum_m V_m(I, p) \cos(\psi - m\vartheta + \vartheta_m), \quad (7)$$

где $V_m(I, p)$ – коэффициенты фурье – разложения

$$V_m(I, p) = \frac{1}{2\pi} \int \cos(\psi + k_{\parallel}\Delta z(\vartheta) + k_{\perp}\Delta x(\vartheta)) \cos(m\vartheta) d\vartheta, \quad (8)$$

ϑ_m – начальные фазы. Из условия постоянства фазы l -й гармоники возмущения в (7)

$$\psi - l\vartheta + \vartheta_l = \text{const}$$

следует условие резонанса электронов

$$k_{\parallel} \bar{v}_z - \omega - l\omega_c = 0. \quad (9)$$

Обсудим динамику на резонансах. Для этого в духе резонансной теории возмущений введем медленную α и быструю фазу β :

$$\begin{aligned} \alpha &= \psi - l\vartheta + \vartheta_e, \\ \beta &= \vartheta \end{aligned} \quad (10)$$

и сопряженные импульсы $p_{\alpha} = p$, $p_{\beta} = I + lp_{\alpha}$. Теперь слагаемое с $m = l$ в сумме в (7) зависит только от медленной фазы α , а остальные слагаемые также от β . Усредняя (7) по быстрой фазе, получим эффективный гамильтониан на l -м резонансе

$$H = \epsilon(p_{\alpha}, p_{\beta} - lp_{\alpha}) - \omega p_{\alpha} - \Phi_0 V_e(p_{\alpha}, p_{\beta}) \cos \alpha, \quad (11)$$

не зависящий от β . Далее отметив, что $p_\beta = \text{const}$, проведем в (11) разложение по $p_\alpha - p_l$, где p_l – резонансный импульс:

$$H = \epsilon(p_e, p_\beta - lp_e) - \omega p_e + \left. \frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha} \right|_{p_e} (p_\alpha - p_e) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_\alpha^2} (p_\alpha - p_e)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 H_0}{\partial p_\alpha^3} (p_\alpha - p_e)^3 - \Phi_0 V_e \cos \alpha. \quad (12)$$

Здесь

$$H_0 = \epsilon(p_\alpha, p_\beta - lp_\alpha) - \omega p_\alpha.$$

Первая производная в (12) на резонансе обращается в нуль:

$$\left. \frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha} \right|_I = \left. \frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha} \right|_I + \left. \frac{\partial H_0}{\partial I} \right|_{p_\alpha} \left. \frac{\partial I}{\partial p_\alpha} \right|_{p_\beta} = k_{\parallel} \bar{v}_z - \omega - l\omega_c = 0.$$

Отбросив постоянное слагаемое и вычисляя вторую и третью производные, можно записать гамильтониан (12) как

$$H = \frac{1}{2} G (p_\alpha - p_l)^2 + \frac{1}{3} R (p_\alpha - p_l)^3 - \Phi_0 V_l \cos \alpha. \quad (13)$$

На обычном резонансе можно пренебречь членами порядка $(p_\alpha - p_l)^3$ и тем самым свести (13) к гамильтониану маятника с характерной частотой

$$\tilde{\omega}_l = \left(\frac{V_l \Phi_0}{2\pi m_c} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2} \right|_{p_l} \right)^{1/2} k_{\parallel}. \quad (14)$$

Максимальное отклонение импульса p_α от резонансного значения равно

$$\Delta p_\alpha = 2\tilde{\omega}_l / G. \quad (15)$$

В том случае, когда резонансный импульс p_l попадает в точку экстремума функции $\partial S / \partial p_z$, коэффициент G , пропорциональный $(\partial^2 S / \partial p_z^2)|_{p_l}$ обращается в нуль и гамильтониан на l -м резонансе имеет вид

$$H = \frac{1}{3} R (p_\alpha - p_l)^3 - \Phi_0 V_l \cos \alpha. \quad (16)$$

Рассмотрим характер движения на этом резонансе более подробно. Канонические уравнения, следующие из (16), теперь выглядят следующим образом:

$$\dot{p}_\alpha = -p_0 V_l \sin \alpha, \quad \dot{\alpha} = R (p_\alpha - p_l)^2 \quad (17)$$

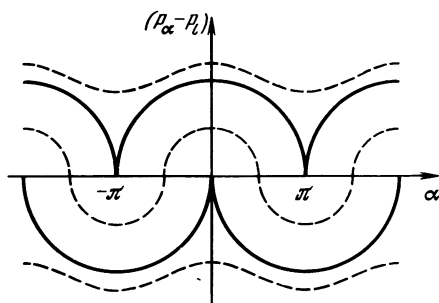
Соответствующий фазовый портрет представлен на рисунке. Точки равновесия $p_\alpha = p_l$, $\alpha = \pi$, можно рассматривать здесь как результат слияния особых точек типа "центр" и "седло". Характерная частота колебаний равна

$$\tilde{\omega}_l^{\text{ext}} = (\Phi_0^2 V_l^2 R)^{1/3},$$

а ширина резонанса есть $\Delta p_\alpha^{\text{ext}} = (6\Phi_0 V_l R^{-1})^{1/3}$.

Специально остановимся теперь на случае, когда звуковая волна распространяется перпендикулярно \mathbf{B}_0 . Если ось x направлена вдоль волнового вектора, то гамильтониан выглядит следующим образом:

$$H = \epsilon(I, p_z) - \Lambda_{xx} k_{\perp} u_0 \sum_m V_m(I, p_z) \cos(m\vartheta - \omega t + \vartheta_m). \quad (18)$$



В металлах, как правило, реализуется невырожденный случай, т.е. циклотронная частота в отличие от свободных электронов зависит от действия (a также от p_z) и $\partial^2 \epsilon / \partial I^2 \neq 0$. Поэтому здесь движение на резонансе $\omega = l\omega_c$ подобно движению математического маятника с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} G (I - I_1)^2 - \Phi_0 V_l \cos \alpha, \quad (19)$$

где $G = l^2 \partial^2 \epsilon / \partial I^2$, $\alpha = l\vartheta - \omega t$ — медленная фаза. Частота захваченных частиц теперь есть

$$\tilde{\omega}_l = l [(\partial^2 \epsilon / \partial I^2) \Phi_0 V_l]^{1/2}. \quad (20)$$

Резонансы с кубической зависимостью гамильтониана от действия в этой геометрии представляются маловероятными.

3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Электронная функция распределения в поле звуковой волны может быть найдена из кинетического уравнения, которое в переменных действие—угол имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{p} \frac{\partial f}{\partial p} + \dot{I} \frac{\partial f}{\partial I} + \dot{\psi} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \dot{\vartheta} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = - \frac{f - f_0}{\tau_p}. \quad (21)$$

Производные от канонических переменных I , p , ψ , ϑ определяются с помощью (7). Интеграл столкновений записан в приближении времени релаксации, τ_p — уходное время, f_0 ($\epsilon + V$) локально равновесная функция распределения. Как обычно, в задаче о взаимодействии звука с электронной системой проводника будем искать решение (21) в форме

$$f = f_0 + g, \quad (22)$$

где неравновесная добавка удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \dot{p} \frac{\partial g}{\partial p} + \dot{I} \frac{\partial g}{\partial I} + \dot{\psi} \frac{\partial g}{\partial \psi} + \dot{\vartheta} \frac{\partial g}{\partial \vartheta} + \frac{g}{\tau_p} = - \frac{df_0}{dt}. \quad (23)$$

Кинетическое уравнение (23) запишем в окрестности изолированного резонанса, предполагая, что резонансы удалены друг от друга достаточно далеко. Для этого в уравнениях характеристик, которые совпадают с уравнениями движения, следует перейти к резонансным переменным

$p_\alpha, p_\beta, \alpha, \beta$, определяемым формулой (10). После усреднения по быстрой фазе β получим

$$(k_{\parallel} \bar{v}_z - \omega - l\omega_c) \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \Phi_0 V_l \sin \alpha \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} + \frac{g}{\tau_p} = \omega \Phi_0 V_l f'_0 \sin \alpha. \quad (24)$$

Если резонансный импульс p_l не совпадает с точкой экстремума функции $\partial S / \partial p_z$, вблизи резонанса имеем $k_{\parallel} \bar{v}_z - \omega - l\omega_c = G(p_\alpha - p_l)$. Тогда уравнение (24) в безразмерных переменных записывается как

$$s \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \sin \alpha \frac{\partial g}{\partial s} + a_l g = \omega \tilde{p}_l f'_0 \sin \alpha. \quad (25)$$

Здесь введена безразмерная скорость $s = (p_\alpha - p_l) / \tilde{p}_l$, $\tilde{p}_l = (\Phi_0 V_l G^{-1})^{1/2}$, параметр нелинейности на l -м резонансе равен $a_l = (\tilde{\omega}_l \tau_p)^{-1}$, где $\tilde{\omega}_l = (\Phi_0 V_l G)^{1/2}$ — частота колебания захваченных частиц. Решение (25) для захваченных и пролетных частиц при $a_l \ll 1$ есть

$$\begin{aligned} g_* &= \omega \tilde{p}_l f'_0 [a_l \alpha - s], \\ g_{ut} &= \omega \tilde{p}_l f'_0 [a_l (\alpha - \bar{\alpha}) - (s - \bar{s})]. \end{aligned} \quad (26)$$

Средняя скорость пролетных частиц \bar{s} и $\bar{\alpha}$ определены следующим образом:

$$\bar{s} = \pi / \kappa K(\kappa), \quad \kappa^2 = (1 + H) / 2, \quad \bar{\alpha} = \pi F(\alpha / 2, \kappa) / K(\kappa),$$

K и F — полный и неполный эллиптические интегралы 1-го рода. На резонансе, совпавшем с экстремумом $\partial S / \partial p_z$, имеем $k_{\parallel} \bar{v}_z - l\omega_c - \omega = R(p_\alpha - p_l)^2$ и кинетическое уравнение есть

$$s^2 \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \sin \alpha \frac{\partial g}{\partial s} + a_l^{\text{ext}} g = \omega \tilde{p}_l^{\text{ext}} f'_0 \sin \alpha. \quad (27)$$

Здесь безразмерная скорость и время определены следующим образом:

$$s = (p_\alpha - p_l) / \tilde{p}_l^{\text{ext}}, \quad \tilde{\omega}_l^{\text{ext}} = (\Phi_0^2 V_l^2 R)^{1/3}, \quad \tilde{p}_e^{\text{ext}} = (\Phi_0 V_l R^{-1})^{1/3},$$

$a_l^{\text{ext}} = (\tilde{\omega}_l^{\text{ext}} \tau_p)^{-1}$. Решение (27) при $a_l^{\text{ext}} \ll 1$ выглядит аналогично (26):

$$g = \omega \tilde{p}_l^{\text{ext}} f'_0 [a_l^{\text{ext}} (\xi - \bar{\xi}) - (s - \bar{s})]. \quad (28)$$

Средняя скорость определяется, как обычно, $\bar{s} = T^{-1} \int_0^T s(\tau) d\tau$, однако

теперь ее связь с энергией не выражается через эллиптический интеграл первого рода. Переменная ξ не совпадает с координатой α , причем $\bar{\xi} = \bar{s} \tau$, где $\tau = \tilde{\omega}_l^{\text{ext}} t$.

4. МАГНИТОАКУСТИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ ПОГЛОЩЕНИЯ ЗВУКА В РЕЖИМЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ РЕЗОНАНСОВ

Как известно, коэффициент затухания звука, распространяющегося в металле, помещенном в магнитном поле, испытывает магнитоакустические осцилляции при изменении $|\mathbf{B}_0|$. При строго перпендикулярном к \mathbf{B}_0 распространении звука могут наблюдаться циклотронный резонанс и геометрические осцилляции поглощения. Эти резонансные явления так или иначе связаны с резонансными электронами.

В звуковых полях большой интенсивности должны наблюдаться нелинейное затухание звука, интенсивная генерация гармоник и другие нелинейные явления, связанные с захватом частиц на резонансах. Здесь мы рассмотрим нелинейные магнитоакустические осцилляции. Для этого найдем работу, совершаемую волной над частицами,

$$A = \langle \partial V / \partial t \rangle n_{\text{рез}}, \quad (29)$$

где $V = \Phi_0 \sum_m V_m \cos(\psi - m\vartheta)$, $n_{\text{рез}} = 2 \int g dp / (2\pi\hbar)^3$ – концентрация резонансных частиц. Коэффициент затухания определяется из условия баланса энергии в системе волна–частица

$$dS/d\eta = -A = 2\Gamma S, \quad (30)$$

где S – поток звуковой энергии, Γ – коэффициент затухания, η – координата.

Магнитоакустические осцилляции Γ могут быть связаны, как известно, с выходом одного из резонансов (при изменении \mathbf{B}_0) на экстремум $\partial S / \partial p_z$ [1]. Поскольку плотность электронных состояний на таких сечениях велика, осцилляции будут наиболее сильными. Для расчета вклада в Γ соответствующей группы электронов следует воспользоваться найденной функцией распределения (28), а также (29) и (30). В результате найдем вклад в затухание звука l -го резонанса

$$\Gamma_l = \Gamma_n C (a_l^{\text{ext}})^{3/2}, \quad (31)$$

где Γ_n – линейный коэффициент затухания, C – безразмерная константа порядка единицы, $a_l^{\text{ext}} = (\tilde{\omega}_l^{\text{ext}} \tau_p)^{-1}$ – параметр нелинейности.

На резонансах, описываемых стандартным гамильтонианом, аналогично расчеты дают полный коэффициент затухания

$$\Gamma = \frac{|\mathbf{K}|}{2\rho w \hbar^3 \cos\varphi} \sum_l \frac{V_l^2 m_c}{(\partial^2 S / \partial p_z^2)|_{p_l}} \cdot 2a_l, \quad (32)$$

где ρ – плотность, w – скорость звука, φ – угол наклона \mathbf{k} к \mathbf{B}_0 , $a_l = (\tilde{\omega}_l \tau_p)^{-1}$ – параметр нелинейности на l -м резонансе. Выражение, описывающее осцилляции коэффициента поглощения звука при изменении магнитного поля в линейном режиме, может быть получено из (32) заменой всех множителей $2a_l$ на единицу.

Согласно (31) и (32) в нелинейном режиме можно ожидать уменьшение амплитуды осцилляций коэффициента затухания, причем в первом случае поглощение в максимуме Γ_l пропорционально Φ_0^{-1} , а во втором случае $\sim \Phi_0^{-1/2}$.

5. ХАОС НА ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

Движение частиц на изолированных резонансах остается регулярным лишь до тех пор, пока соседние резонансы не перекрываются. С ростом амплитуды волны инвариантные поверхности в фазовом пространстве, связанные с резонансами, разрушаются и движение становится хаотическим. Нетрудно убедиться, что условие перекрытия обычных резонансов (критерий Чирикова) согласно (14) и (15) имеет вид

$$K = 2(\tilde{\omega}_{l+1} + \tilde{\omega}_l) / \omega_c \geq 1, \quad (33)$$

а на резонансах, описываемых гамильтонианом (16),

$$K = 6^{2/3} \tilde{\omega}_l^{\text{ext}} / \omega_c \geq 1. \quad (34)$$

Оценки показывают, что при интенсивностях звука порядка 10^2 Вт/см² условие (33) в типичном металле может быть выполнено на большей части поверхности Ферми. При указанных интенсивностях и $\tau_p = 10^{-8}$ с выполняется также условие $a_l \ll 1$. Критерий (34) выполняется при несколько больших интенсивностях звука. Для расчета затухания звука в условиях глобальной стохастичности необходимо вновь вычислить электронную функцию распределения. В той части поверхности Ферми, где резонансы перекрыты и движение электрона имеет случайный характер основная часть электронной функции распределения удовлетворяет уравнению диффузии вида [12]

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(D \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \right) = \frac{f_0 (\epsilon + V) - f^{(0)}}{\tau_p} \quad (35)$$

с коэффициентом диффузии

$$D = (\pi/2) \Phi_0^2 \langle V_l^2 / \omega_c \rangle. \quad (36)$$

На границах области стохастичности p_1 и p_2 потоки равны нулю:

$$D \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Big|_{p_1} = D \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \Big|_{p_2} = 0.$$

Для расчета затухания необходимо, кроме $f^{(0)}$, найти еще линейную по V_l добавку $f^{(1)}$.

В металлах с изотропным спектром такая программа реализована в работе [8], т.е. найдено решение: уравнение (35) и функция $f^{(1)}$ в поле продольной звуковой волны, распространяющейся под углом к магнитному полю. Как следует из [8], роль параметра нелинейности в стохастическом режиме играет величина

$$b = (p_2 - p_1) / p_0,$$

т.е. отношение интервала стохастичности $p_2 - p_1$ к диффузионному импульсу $p_0 = (D\tau_p)^{1/2}$.

В слабых магнитных полях, когда выполняются условия (35) и (36) и резонансы перекрыты, магнитоакустические осцилляции коэффициента затухания звука Γ слабо выражены, причем коэффициент поглощения меньше линейного Γ_L . Разность $\Gamma_L - \Gamma$ должна возрастать с интенсивностью волны и электронного времени релаксации τ_p , поскольку то и другое приводит к увеличению параметра b . В более сильном магнитном поле, когда условия (35) и (36) не выполнены, очевидно, должны наблюдаться осцилляции Γ , связанные с изолированными резонансами.

В заключение следует отметить, что изложенный здесь подход может быть использован также при изучении нелинейной динамики и кинетики электронов в поле электромагнитных волн, распространяющихся в металлах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 211 с.
2. *Гальперин Ю.М., Каган В.Д., Козуб В.И.* О нелинейном затухании Ландау звуковых волн в проводниках // ЖЭТФ. 1972. Т. 62, № 4, С. 1521–1530.
3. *Филь В.Д., Денисенко В.И., Безуглый П.А.* Нелинейное поглощение звука в галлии // Физика низких температур. 1975. Т. 1, № 9. С. 1217–1219.
4. *Волошин И.Ф., Вугальтер Г.А., Демиховский В.Я., Фишер Л.М., Юдин В.А.* Нелинейное циклотронное поглощение дырочного доплерона в кадмии // ЖЭТФ. 1977. Т. 72, № 1. С. 257–261.
5. *Вугальтер Г.А., Демиховский В.Я.* Нелинейное затухание теликонов в металлах // ЖЭТФ. 1976. Т. 70, № 4. С. 1419–1428.
6. *Любимов О.И., Макаров Н.М., Ямпольский В.А.* Нелинейный скин-эффект в металлах // ЖЭТФ. 1983. Т. 85, № 2. С. 614–626.
7. *Бурдов В.А., Демиховский В.Я.* Стохастизация электронов продольной звуковой волной в металлах // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 5. С. 150–163.
8. *Бурдов В.А., Демиховский В.Я.* Нелинейная теория магнитоакустических осцилляций и акустического циклотронного резонанса в металлах // ЖЭТФ. 1990. Т. 97, № 1. С. 312–321.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988. 184 с.
10. *Лихтенберг А., Либман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 121 с.
11. *Smith G.R., Kauffman A.N.* Stochastic acceleration by an obliquely propagating wave: An example of overlapping resonances // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. P. 2230–2242.
12. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 116 с.

УДК 621.373.826+535.8

ПЕРСПЕКТИВЫ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ЛАЗЕРОВ НА ЛАЗЕРНОМ РЫНКЕ

И.Г. ЗУБАРЕВ, Г.А. ПАСМАНИК, В.Г. СИДОРОВИЧ,
Е.И. ШКЛОВСКИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель данной работы – дать краткую характеристику тех перспективных применений твердотельных лазеров (ТТЛ), которые могут достаточно широко быть представлены на лазерном рынке. Нами сделана попытка сформулировать рекомендации по развитию соответствующих областей квантовой электроники, а также выявить приоритеты, согласно которым целесообразно проводить лазерные исследования. Будут рассмотрены в основном оптические системы на основе импульсных, частотно-импульсных и непрерывных неодимовых лазеров на стекле и кристаллах, в первую очередь алюмоиттриевом гранате (АИГ) со сравнительно высоким КПД и расходимостью, близкой к дифракционному пределу.

Если говорить об относительной доле ТТЛ в общей реализации всех лазеров на капиталистическом рынке, то в 1988 г. она составила примерно 18% (112–115 млн из примерно 630 млн долларов). В ближайшие годы при увеличении общего объема производства лазеров относительная доля ТТЛ, по-видимому, существенно не изменится. Однако можно ожидать изменения существующих пропорций во всем разнообразии изготавливаемых сейчас ТТЛ. Возрастающую роль будут играть ТТЛ, накачиваемые лазер-

ными диодами. Доля устройств на АИГ с неодимом остается в настоящее время наибольшей среди всех других ТТЛ, но заметна тенденция ее относительного уменьшения, так как появляются новые типы лазерных кристаллов (например, ГСГГ, ИСГГ и т.д.). В настоящее время отсутствуют коммерческие лазеры с устройствами обращения волнового фронта (ОВФ). В ближайшие годы можно ожидать появления оснащенных устройствами ОВФ ТТЛ с дифракционной расходимостью излучения и повышенной средней мощностью.

2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ТТЛ

Если рассматривать ситуацию, сложившуюся на сегодняшний день, и постараться проследить тенденцию ее изменения в будущем, то надо выделить следующие области научно-технического приборостроения, в которых достаточно широко используются и могут быть использованы в дальнейшем ТТЛ: 1) научные исследования; 2) медицина; 3) обработка материалов; 4) дистанционные измерения; 5) микроэлектроника; 6) голографическая интерферометрия; 7) космическая геодезия.

Научные исследования – 1-я (на 1989 г.) по объему область сбыта ТТЛ. В 1988 г. объем соответствующей продажи составил 33 млн долларов. Широко ТТЛ применяются в спектроскопии, при исследовании сверхбыстрых процессов, в диагностике примесей, при создании лазерной плазмы и исследовании взаимодействия мощного лазерного излучения с веществом.

Медицина составляет 2-й по объему продажи рынок ТТЛ. В 1988 г. на западном рынке для медицинских применений было продано ТТЛ примерно на 30 млн долларов. Однако возможна тенденция к относительному сокращению количества ТТЛ, применяемых в медицине, которые частично вытесняются эксимерными лазерами, лазерами на красителях, ионными лазерами.

Обработка материалов – 3-я по значению область использования ТТЛ. Число проданных лазеров в 1988 г. на эти цели составило 1200 шт. на общую сумму, близкую к 30 млн. долларов. Прогноз на 1995 г. составляет около 5000 шт (ежегодный рост ~ 20%). Можно ожидать выхода этой области применения ТТЛ на первое место по объему продукции.

Дистанционные измерения характеристик окружающей среды – еще формирующаяся область применений ТТЛ. По-видимому, в течение ближайших нескольких лет рыночный спрос в этой области будет непрерывно нарастать, в том числе в связи с увеличением внимания к экологическим проблемам, и может достигнуть уровня в десятки миллионов долларов в год. Для решения широкого класса практических задач дистанционной диагностики (измерение малых примесей, скорости ветра, турбулентности атмосферы, колебания земной коры) требуются оптические системы (лидары), весьма сильно различающиеся по элементной базе и компоновке схемы. Стоимость уникальных лидаров может достигать весьма высоких величин.

Применение ТТЛ в микроэлектронике в настоящее время в основном сводится к подгонке пленочных резисторов и конденсаторов, пайке электронных компонент, скрайбированию полупроводниковых материала-

лов, сверлению отверстий в керамике. Использование ТТЛ для фотолитографии требует перехода к 4-й или 5-й гармонике (длина волны $\sim 0,2 \div 0,25$ мкм). Полученное таким образом излучение практически всегда является когерентным, а формирование литографических изображений в когерентном свете имеет известные недостатки, связанные с дифракцией излучения на резких краях шаблонов или масок и его рассеянии на дефектах оптических элементов, пылинках и т.д. Кроме того, нестабильность интенсивности в 1-й гармонике существенно усугубляется в высших гармониках. По этой причине сейчас трудно давать определенные прогнозы рынка в этой области, хотя перспективы здесь имеются. Это связано, в частности, с возможностями компенсации в условиях когерентного излучения аберраций оптических элементов, в том числе крупногабаритных, составляющих проекционную литографическую систему.

Использование излучения ТТЛ в качестве точечного источника жестких квантов (рентгеновского и гамма-излучений) и потока ионов также может представить интерес для микроэлектронной промышленности. Потребителями здесь являются в первую очередь те отрасли, которые направлены на ретгенолитографию и эпитаксию тонких пленок. Ведущиеся сейчас исследования позволяют надеяться, что частотно-импульсные ТТЛ со средней мощностью в 100 Вт и более займут относительно высокую долю рынка комплектующих соответствующих установок. На сегодняшний день созданы многомодовые лазеры с мощностью в сотни ватт. На повестке дня – создание одномодовых лазеров с мощностью, превышающей 100 Вт.

Голографическая интерферометрия, несмотря на то, что ее физические основы достаточно надежно установлены, широкого применения пока еще не нашла. Это связано с трудностями создания надежных, удобных в эксплуатации источников, обладающих высокой когерентностью и сравнительно большой энергией импульсов, требуемых на подсвет диффузно рассеивающих объектов больших размеров. Можно ожидать, что потребности машиностроительных отраслей промышленности, нуждающихся в создании неразрушающих средств контроля скрытых дефектов различных конструкций, стимулируют разработку мобильных голографических систем регистрации, пригодных к эксплуатации в условиях цеха и в полевых условиях.

Лазерное освещение также может оказаться перспективным. В отличие от оптических систем построения изображений в некогерентном свете, узкая полоса и высокая направленность лазерного излучения позволяют осуществлять подсветку предметов и реализовать прием излучения в условиях сильного свечения посторонних источников, например, при пожаре. Существенными факторами, от которых будет зависеть развитие этого направления, являются КПД лазеров и простота их эксплуатации.

Другой аспект данной проблемы – использование импульсных ТТЛ для записи чередующихся голограмм, т.е. для записи голографического кино. Для освещения сцены площадью 10×10 м² требуются в этом случае ТТЛ, дающие импульсно-периодическое когерентное излучение со средней мощностью в несколько десятков ватт.

Укажем также такую область применения ТТЛ, как космическая геодезия, использующую лазеры для контроля с высокой точностью расстояний до спутников и от спутников до различных мест на Земле; координаты

спутников с большой точностью необходимо знать, например, в том случае, когда на борту имеются узкополосные генераторы радиодиапазона, служащие маяками для наземных объектов, которые по доплеровским сдвигам относительно своих эталонных генераторов определяют собственные координаты. Здесь важным является использование частотно-импульсных одномодовых лазеров с весьма короткой (субнаносекундной) длительностью и достаточно высокой (~ 1 Дж) энергией импульсов на частоте 2-й гармоники, т.е. в том диапазоне, где существуют наиболее чувствительные счетчики фотонов. В настоящее время лазеры с субнаносекундными импульсами внедряются на станциях слежения за искусственными спутниками, расположенными в различных районах земного шара.

3. НАУЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Применение ТТЛ в научных исследованиях основано на нескольких моментах.

Во-первых, это возможность возбуждения с помощью излучения 2-й или 3-й гармоники ТТЛ лазера на красителях или новых типов широкополосных ТТЛ (например, на основе $Ti:Al_2O_3$), которые в свою очередь используются в спектральных исследованиях и в исследованиях, связанных с генерацией сверхкоротких пикосекундных и фемтосекундных импульсов. Сейчас такие исследования ведутся во многих научных центрах.

Основное внимание, с одной стороны, уделяется вопросам получения узкополосного перестраиваемого по частоте излучения для измерения спектральных характеристик атомов, ионов и даже ядер и, в случае достаточно мощного излучения, воздействия на них с целью их селекции и отделения от других частиц. С другой стороны, использование синхронизованных импульсов ТТЛ для накачки красителей позволяет при наличии дополнительно поглотителя генерировать сверхкороткие импульсы в единицы пикосекунд, последующая нелинейная самомодуляция которых в оптических волокнах дает возможность их эффективного сжатия с использованием вспомогательных элементов с достаточно сильной материальной (призмы) или межмодовой (дифракционные решетки или волноводы) дисперсией.

Во-вторых, использование высших (3-й, 4-й и 5-й) гармоник ТТЛ позволяет исследовать новые особенности взаимодействия излучения с веществом. Сюда относятся вопросы, связанные с созданием высокотемпературной плазмы, исследованием поверхности твердых тел. Особое место занимают проблемы диагностики быстропротекающих импульсных процессов. Например, исследование по светорассеянию на ионах приводит к необходимости использования весьма мощных зондирующих импульсов. Поскольку плазма сама по себе может светиться, то зондирующее излучение должно быть пространственно когерентным, иметь узкую спектральную линию, так как в этом случае удастся выделить рассеянный свет на фоне собственного свечения плазмы. Аналогичным образом осуществляется измерение интерферометрическими методами пространственного распределения плотности раскаленных газов.

Еще одна область научных исследований – ИК-спектроскопия конден-

сированных сред. Для этой цели может быть использован накачиваемый 2-й гармоникой ТТЛ лазер на красителе, последующее ВКР которого дает перестраиваемое излучение в ближнем ИК-диапазоне. Измерение коэффициента прохождения этого излучения через различные, в том числе возбужденные, среды дает многообразную спектроскопическую информацию. Другие варианты спектроскопии основаны на возможности использования накачиваемого излучением ТТЛ параметрического генератора света, работающего в области ближнего и среднего ИК-диапазонов. Для увеличения средней мощности излучения параметрического генератора света, работающего в импульсно-периодическом режиме, по всей видимости, целесообразно несколько удлинить импульсы ТТЛ (до 100 – 200 нс). При этом для сохранения достаточно высокой эффективности нелинейного преобразования в кристаллах с квадратичной нелинейностью и избежания оптического пробоя вместо моноимпульса удобно генерировать последовательность 10–20 субнаносекундных импульсов с интервалом следования, определяемым длиной резонатора.

4. МЕДИЦИНА

Спектр применяемых лазеров в этой области в настоящее время достаточно широк. Хотя, по-видимому, основную часть задач, связанных с медицинскими применениями лазеров, можно решить с помощью двух разновидностей ТТЛ – неодимового (длина волны излучения $\lambda = 1,064$ мкм) и эрбиевого ($\lambda = 2,94$ мкм) лазеров. Причина этого заключается в следующем. В лазере на АИГ с неодимом можно получить все возможные режимы генерации – ультракороткие импульсы (от фемтосекунд до пикосекунд), импульсы с модуляцией добротности (1 – 100 нс), режим свободной генерации (длительность импульсов от десятков микросекунд до десятков миллисекунд) и, наконец, режим непрерывной генерации. В первых двух режимах возможно также преобразование излучения с помощью методов нелинейной оптики в другие спектральные диапазоны. Причем во всех указанных выше режимах лазеры на АИГ с неодимом обеспечивают необходимые для медицинских применений и мощности, и энергии импульсов. Многообразие же режимов генерации вызывается многообразием применений, в каждом из которых имеются оптимальные параметры излучения для воздействия на биологические объекты.

Так, например, с помощью ультракоротких импульсов, поглощающихся в глазном яблоке, удается регулировать глазное давление. Импульсы с модулированной добротностью подходят для возбуждения во внутренних органах звуковых волн, приводящих к разрушению находящихся там камней. Режим свободной генерации подходит для резки тканей и костей, устранения ложных нервных каналов, приводящих к сердечной аритмии, других хирургических операций. В частности, в режиме свободной генерации излучения, подводимого при помощи светопровода, эффективно удаляются атеросклеротические бляшки в кровеносных сосудах и разнообразные наростки. Непрерывный режим работы лазера подходит для прижигания, остановки кровотечения.

Эрбиевый лазер, хотя он и не работает в непрерывном режиме, обладает следующим уникальным свойством. Его длина волны излучения попадает

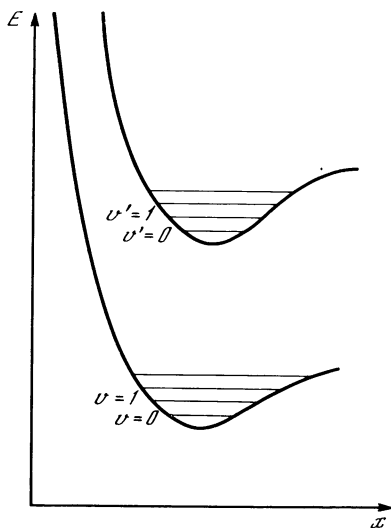
в максимум полосы поглощения воды, где коэффициент поглощения $\alpha \approx (30 \div 60) \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ ($\sim 45\,000 \text{ см}^{-1}$). Поэтому его излучение поглощается в тонком поверхностном слое биологических тканей. Это обеспечивает абляционный режим воздействия, т.е. удаление тканей без тепловых эффектов на окружающие области.

В частности, применение излучения эрбиевого лазера оказывается исключительно эффективным для удаления некротических (омертвевших) тканей. Причем как только после удаленного слоя некротической ткани излучение начинает воздействовать на живую ткань, последняя начинает кровоточить, свидетельствуя о чистоте поверхности. Такого типа очистка поверхности дает положительные результаты при заживлении многих ран. Излучение эрбиевого лазера также используется для удаления бляшек, причем оно вводится в сосуды с использованием светопровода на основе ZrF_4 , а вся операция контролируется с помощью рентгеновской аппаратуры с малой интенсивностью излучения.

Не менее, а может быть, и более впечатляющие успехи в применении излучения твердотельных лазеров в офтальмологии. Это и восстановление заросших каналов для смачивания глаз, и приваривание отслоившейся сетчатки, и исправление близорукости с помощью разрезов по краям роговицы, количество, длина и глубина которых рассчитываются для каждого отдельного глаза, и масса других операций. ТТЛ здесь хороши как раз возможностью получать разные режимы генерации, которые особенно необходимы в офтальмологии. Для перечисленных выше целей в настоящее время применяют и эксимерные лазеры. Их излучение также поглощается в тонком поверхностном слое тканей. Однако некоторые исследования показывают, что действие УФ-излучения может приводить, помимо прочего, к сшивкам молекул ДНК, что в свою очередь способно вести к мутагенезу и канцерогенным эффектам.

И, наконец, несколько слов о терапевтическом действии лазерного излучения (заживление ожогов, язв и т.п.). Оно было открыто с использованием гелий-неонового лазера. По мнению ряда специалистов, его причина заключается в возбуждении синглетных уровней молекулярного кислорода и последующих химических превращениях.

Схема уровней молекулярного кислорода (расстояние между колебательными переходами $\nu = 0, 1, \dots$ молекул кислорода $\Delta\nu = 1550 \text{ см}^{-1}$) и два первых перехода в электронном спектре условно изображены на рисунке. Указанные электронные переходы запрещены, но запреты снимаются при столкновениях. Поэтому поглощение на возможных переходах растет с давлением в газовой фазе и велико в жидкостях при растворении



в них кислорода. Сечение поглощения на основном переходе $\nu = 0 \rightarrow \nu' = 0$ ($\lambda = 1,27$ мкм) максимально. Излучение, соответствующее $\lambda = 1,06$ мкм, приводит к переходу $\nu = 0 \rightarrow \nu' = 1$. В жидкостях этот переход и другие переходы, отвечающие более коротким длинам волны, имеют близкие сечения поглощения, отличающиеся не более чем в 2 раза.

Какие именно химические реакции протекают с участием возбужденного синглетного кислорода, неизвестно. Но приблизительное равенство сечений переходов на разных длинах волн, кроме $\lambda = 1,27$ мкм, может объяснить слабую чувствительность этого эффекта к длинам волн используемого излучения.

5. ОБРАБОТКА МАТЕРИАЛОВ

К обработке материалов обычно относят сварку, резку и сверление, термоупрочнение и легирование. Наибольшее распространение в микроэлектронике получили скрайбирование, маркировка. Для сварки наиболее эффективны импульсы длительностью несколько миллисекунд гладкой формы (без пиковой модуляции). Например, при необходимости соединить два прутка с помощью оптического излучения оплавляют их концы, расположенные на расстоянии в десятые доли миллиметра. Диаметр сфокусированного лазерного луча должен превышать этот зазор. Требуемые для сварки плотности мощности составляют $\sim 10^5$ Вт/см². Сварка, как правило, производится при подаче аргона (в качестве защитной среды от окисления поверхности шва). Характерная мощность лазера — 100–200 Вт. Скорость непрерывной сварки при толщине листа стали 1–2 мм примерно 1 м/мин. Одномодовое излучение здесь, вообще говоря, необязательно. Но если для сварки луч следует подавать в достаточно большой герметизированный объем, например в баллоны большого размера, то удобнее использовать одномодовое излучение. Сварка с помощью одномодового излучения используется в микроэлектронике (присоединение проволоки к контакту), где характерные размеры светового пятна должны составлять не более 15–20 мкм. Средняя мощность лазера в этих условиях может быть невелика (~ 1 Вт).

Резка и сверление, особенно тугоплавких металлов, алмазов, требуют гораздо большей плотности мощности (10^8 – 10^9 Вт/см²). Это связано с необходимостью испарения основной доли удаляемого вещества. Указанные плотности мощности достигаются за счет модуляции импульса длительностью в несколько миллисекунд короткими пиками в несколько сот наносекунд. При пиках в десятки наносекунд и короче образуется плазма, экранирующая поверхность; при пиках, превышающих по длительности микросекунду, при резке и сверлении возникают термонапряжения и трещины, особенно в хрупких материалах.

Теоретически без учета отражения от стенок глубина прореза может достигать длины фокальной перетяжки, равной для одномодового пучка $2ka^2$, где a — минимальный радиус луча в области перетяжки, k — волновое число. Отношение ширины пучка к глубине прореза равно $1/ka$. Для многомодового излучения это отношение возрастает во столько раз, во сколько расходимость пучка больше дифракционного предела.

Рассмотрим следующий пример. Допустим, что с помощью одномодово-

го пучка с длиной волны 1,06 мкм необходимо осуществить резку металлического листа толщиной 1 см. Из приведенной выше формулы следует, что для этого требуется иметь радиус светового луча в перетяжке $a \approx 30$ мкм. Для сравнения заметим, что при использовании одномодового излучения лазера с длиной волны 10,6 мкм резка на ту же глубину осуществляется при величине $a = 100$ мкм. Из этого примера видно, что использование CO_2 -лазера для резки приводит к выносу вещества, в несколько раз большему, чем при использовании неодимового лазера, что снижает производительность технологической установки при прочих равных условиях. Кроме того, использование излучения $\lambda = 10,6$ мкм снижает эффективный нагрев из-за отражения этого излучения от обрабатываемой поверхности. Переход к многомодовому излучению требует еще большего увеличения толщины шва, что автоматически ведет к еще большему выбросу материала.

Перспективным с этой точки зрения может явиться переход к коротким длинам волн видимого или ультрафиолетового диапазонов, в частности, за счет генерации гармоник с использованием кристаллов КТР и ВВО.

Для того чтобы испаряемый материал эффективно удалялся, используется соосный с лучом поддув газа (в частности, кислорода, который способствует горению и обработке поверхности).

В рассмотренном выше примере с помощью одного пичка длительностью 300–400 нс при плотности мощности $3 \cdot 10^8$ Вт/см² удаляется слой вещества толщиной примерно 50 мкм. Если в импульсе ("вспышке") длительностью в несколько миллисекунд содержится 100 пичков, то за одну "вспышку" удаляется слой в 5 мм. Если энергия одного пичка составляет 100 мДж (10 Дж на "вспышку"), то площадь освещаемой поверхности составит 10^{-4} см² или 50×200 мкм². Отсюда легко оценить среднюю скорость реза металла толщиной 1 см: 200 мкм за две "вспышки", что при частоте "вспышек" 10 Гц (средняя мощность 100 Вт) соответствует 1 мм/с. Это типичное значение не только для обычной, но и для контурной резки, сверления.

На практике очень удобен "гибкий" подвод излучения к обрабатываемой поверхности, в частности с помощью светопровода диаметром 1–2 мм. Для получения одномодового излучения на выходе такого светопровода может быть использована двухпроходовая схема. Она сводится к подаче на один из торцов этого светопровода одномодового излучения от одномодового волокна или от небольшого переносного лазера, прохождению этого излучения по светопроводу, усилению его в оптической системе, обращению волнового фронта (ОВФ), в вторичному усилению и вновь обратному прохождению через светопровод. Однако создание двухпроходовой системы на среднюю мощность 100 Вт требует использования новых оптических узлов — невзаимных элементов на основе ячеек Фарадея с постоянными магнитами, ОВФ-зеркал, состоящих из высокоочищенных жидкостей и газов, лазерных усилителей, обеспечивающих при достаточно большом превышении угла видения над дифракционным пределом и относительно высоком КПД в несколько процентов многократное (в сотни раз) усиление излучения за два или четыре прохода. Хотя наличие таких элементов удорожает стоимость лазеров примерно вдвое, тем не менее их создание оправдано, поскольку они смогут заменить широкий класс режущих преци-

зионных станков, а также осуществить металлообработку крупногабаритных изделий на месте их стационарного расположения с высокой производительностью и прецизионной точностью (за счет использования одномодового излучения).

Термоупрочнение и легирование сводятся к прогреву поверхности лазерным излучением на глубину 100–200 мкм и последующему охлаждению. При прогреве используют либо непрерывное излучение, либо излучение с длительностью в несколько миллисекунд без пичков. В отличие от CO₂-лазера при применении ТТЛ не требуется покрывать обрабатываемую поверхность специальным поглощающим составом, поскольку излучение с длиной волны ~1 мкм, как правило, достаточно эффективно поглощается материалом. При легировании до нагрева на поверхность наносят разнообразные присадки, а затем их переплавляют. Одномодового излучения при указанных операциях не требуется, и существующие лазеры с мощностью 15–20 мВт удовлетворяют потребителя.

Обработка полупроводниковых и других материалов в микроэлектронике сводится главным образом к скрайбированию (т.е. резке подложек), маркировке, сверлению отверстий. Конкуренцию лазерным методам скрайбирования составляют так называемые методы дисковой резки, позволяющие в более сильной степени избежать ломки поверхностной структуры. Однако в последнее время за счет оптимального выбора режимов работы схемы лазерного скрайбирования удалось наладить бездефектную резку поверхностных структур. При этом сколы, появляющиеся в глубине подложки, практически не влияют на работоспособность микросхемы. Подобные же методы скрайбирования годятся не только для подложек из кремния, но и из керамики, особенно в условиях, когда необходимо изготовление их небольшой партии. Типичные режимы работы лазера – генерация импульсов длительностью 100 нс с частотой повторения 10–20 кГц при средней мощности несколько ватт.

Лазерное скрайбирование подходит также для заготовки стеклянных фотошаблонов. Здесь более удобно использовать непрерывное лазерное излучение, луч которого "колет" стекло за счет термонапряжений, а образующаяся в результате этого раскола трещина "отслеживает" ход светового луча. Для этой цели применимы непрерывные ТТЛ.

6. ДИСТАНЦИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Эти измерения включают диагностику загрязнения атмосферы и воды, анализ химического состава содержащихся в них примесей, определение скорости воздушных и водных потоков, распределения плотности и температуры, детектирования акустических волн в воде и воздухе, а также нахождение пространственно-временного распределения турбулентности в атмосфере.

Почти всегда при дистанционном зондировании очень существенна средняя мощность используемого для этой цели излучения, увеличение которой означает прямое повышение мощности регистрируемого сигнала. В лидарах, контролирующих загрязнение атмосферы, целесообразно использовать перестраиваемые по частоте лазеры. При создании перестраиваемых источников видимого и ближнего ИК-диапазонов существенной является реали-

зация высоких КПД ТТЛ и больших коэффициентов преобразования в перестраиваемое излучение. На сегодняшний день средняя мощность перестраиваемого излучения не превышает, как правило, 1 Вт. Если для лабораторных исследований этого обычно вполне хватает, то для дистанционных спектроскопических исследований мощности в 1 Вт явно недостаточно. Вопрос об увеличении средней мощности перестраиваемого по частоте излучения до десятков ватт является весьма актуальным. Соответствующие лазеры должны пользоваться хорошим спросом.

Достижение высокой средней мощности может быть получено в большинстве случаев в частотно-импульсном, а не в непрерывном режиме. Это связано с тем, что нелинейные процессы преобразования по частоте, как правило, малоэффективны при непрерывном излучении небольшой мощности. Увеличение же мощности непрерывного излучения далеко не всегда приводит к увеличению эффективности возбуждения смещенных по частоте компонент, так как одновременно ведет к развитию побочных паразитных эффектов, затрудняющих процессы нелинейного преобразования.

На основе ТТЛ сейчас создаются лидары, обеспечивающие перестройку излучения в диапазонах 1–4 мкм, а при использовании второй гармоники также в видимом диапазоне. При необходимости излучение таких лидаров может быть двухчастотным, т.е. состоять из двух гармоник, либо с малым, либо с большим смещением частоты (в последнем случае частота одной из гармоник совпадает, как правило, с частотой ТТЛ). Указанные лидары годятся для измерения степени загрязненности атмосферы и воды неорганическими и органическими частицами, диагностики химического состава газовых примесей.

Шире начинает использоваться когерентный прием излучения, сводящийся, в частности, к записи динамических голограмм между опорной волной и рассеянным в атмосфере слабым сигналом. В этом случае целесообразно использовать матричный квантовый приемник, регистрирующий микроструктуру рассеянного света в режиме счета фотонов. Любопытно, что при таком когерентном приеме чувствительность метода, основанного на регистрации теплового рассеяния, повышается не с укорочением длины волны λ (как следовало бы ожидать исходя из того, что интенсивность рассеянного света пропорциональна 4-й степени частоты), а, наоборот, с ее увеличением. Это связано с тем, что число рассеянных фотонов в одну поперечную и продольную моду (на один пространственно-временной элемент разрешения) пропорционально вероятности индуцированного перехода на трассе наблюдения (зависящей от энергии и не зависящей от длины волны светового импульса), умноженной на число тепловых фотонов в моде. Число тепловых фотонов \bar{n} в моде в свою очередь зависит от отношения энергии теплового движения молекул к энергии фотона $kT/\hbar\Omega$, где Ω – частота звука, на котором происходит обратное рассеяние. При увеличении длины волны уменьшается Ω и поэтому возрастает значение $kT/\hbar\Omega$. По этой причине число рассеянных квантов тем больше, чем больше длина волны, т.е. когерентную регистрацию теплового рассеяния более предпочтительно осуществлять с источниками инфракрасного, а не ультрафиолетового диапазона. На принципах когерентного приема основаны лидары, рассчитанные на измерение скорости ветра v . Когерентность

важна для выделения малого (доплеровского) смещения частоты обратно рассеянного света.

При рассеянии на аэрозоле ситуация с чувствительностью несколько изменяется. В этом случае число фотонов, рассеянных в одну поперечную моду за время $\sim \lambda/v$, обеспечивающее регистрацию доплеровского сдвига, не зависит от длины волны λ .

Перспективной представляется разработка лидаров для дистанционного контроля температуры, скорости водных потоков. В настоящее время стала возможной разработка лидаров нового поколения, использующих в своей основе нелинейные эффекты, возбуждаемые в воздухе достаточно мощным лазерным импульсом с малой угловой расходимостью. К таким эффектам, в частности, относятся:

тепловое воздействие – для создания тепловой линзы резонансно поглощающимся излучением и определения за счет этого коэффициента поглощения и тем самым концентрации поглощающих примесей;

вынужденное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна (РМБ) – для возбуждения возвращающегося назад импульса, попадающего точно в приемно-передающий объектив, что резко поднимает чувствительность приемной аппаратуры,

Рассмотрим для примера тепловые эффекты. Допустим, что резонансно поглощающее излучение фокусируется в интересующий нас слой воздуха. Если при этом энергия импульсного излучения превышает критическую энергию тепловой самодефокусировки, зависящей, разумеется, от коэффициента поглощения, то фокальная перетяжка этого излучения уширится в сравнении с дифракционным пределом. Образующаяся в подобных условиях тепловая линза в воздухе может быть идентифицирована посредством регистрации пространственной структуры зондирующего импульса, обратно рассеянного молекулами или аэрозолями, содержащимися в нагретом объеме в области фокальной перетяжки.

Дело в том, что уширение фокальной перетяжки приводит к изменению поперечной спекл-структуры обратно рассеянного света. Регистрируя это изменение, можно судить о величине коэффициента поглощения. Оценки показывают, что таким образом могут быть измерены весьма малые коэффициенты поглощения – такие, которые приводят практически к ничтожному интегральному ослаблению светового пучка на трассе. Речь идет о коэффициентах поглощения, не регистрируемых с использованием стандартных методов, основанных на применении двух разночастотных импульсов и сопоставлении их ослабления по обратному рассеянию на трассе.

7. МИКРОЭЛЕКТРОНИКА

Процессы тонкопленочной микротехнологии используются при изготовлении множества различных приборов. Наиболее важными из таких процессов являются процессы изготовления интегральных схем, в основе которых лежит планарная технология (последовательное изготовление слоев с заданным рисунком, расположенных друг над другом и состоящих из материалов с различными электрическими свойствами). Эти так называемые литографические слои можно получать, изменяя с помощью внешнего воздействия свойства подложки. В настоящее время процесс получе-

ния рисунка является преимущественно фотолитографическим. В этом процессе рисунок трафарета проектируется на поверхность подложки, предварительно покрытой слоем фоторезиста (обычно полимера). Под действием света фоторезист приобретает способность растворяться или, наоборот, не растворяться в определенном классе растворителей (при этом свет соответственно разрывает или сшивает связи между молекулами). После проявления в растворителе спроектированный рисунок остается на поверхности подложки и незащищенные участки подвергаются ионной, плазменной или химической обработке.

В фотолитографии необходимо учитывать пространственную когерентность световых пучков, так как при высокой когерентности даже слабый рассеянный свет может заметно исказить рисунок (эффект Цернике). Уменьшить степень когерентности излучения с длительностью импульса в единицы и десятки наносекунд в настоящее время простыми способами невозможно. Поэтому приходится разрабатывать такие схемы, в которых пространственная когерентность не ухудшает качества литографических изображений.

Для этого прежде всего желательно предварительно сформировать излучение с плоским или сферическим волновым фронтом. Тогда можно использовать либо контактную печать, либо проектирование. Контактная литография имеет серьезный недостаток: при случайном касании шаблона и подложки создаются дефекты. Во многих схемах, где разрешение превышает несколько микрометров, во избежание контакта создается зазор между шаблоном и подложкой. Для такой бесконтактной печати при просвете шаблона излучением с плоским волновым фронтом минимальная ширина линий рисунка на поверхности интегральных схем определяется дифракцией на глубине зазора l и равна $\sqrt{l\lambda}$.

Более удобно репродуцирование изображений посредством оптических проекционных систем. Здесь возможно уменьшение изображения относительно размера фотошаблона. Чтобы когерентные свойства излучения из-за дифракции на резких краях полупрозрачного фотошаблона не ухудшили качества изображений, желательно с учетом ограниченной светосилы оптической системы использовать шаблоны с "мягкими" (полупрозрачными) краями. В этом случае возможно применение излучения не только с плоским или сферическим волновым фронтом, а также и с равномерным распределением амплитуды по сечению пучка. При этом важно, чтобы резист имел пороговый фотоотклик и слабые дифракционные лепестки в изображении не проявлялись.

Несмотря на отмеченные недостатки, когерентные свойства излучения дают одно серьезное преимущество, которого по сути нет при применении некогерентного света. Дело в том, что именно когерентное излучение наиболее эффективно может использоваться для компенсации аберраций оптических элементов проекционной системы. Такая компенсация существенна тогда, когда требуется разрешение меньше 1 мкм и проекционные линзы работают в условиях дифракционных ограничений. При таких разрешениях создание безаберрационных линз с рабочим полем порядка 10 см весьма затруднительно и поэтому изображение обычно создают поэтапно (мимо линзы двигаются последовательно либо шаблон и подложка, либо только подложка, а на время импульсной экспозиции движение приостано-

навливаются). Для компенсации aberrаций оптических элементов может быть использовано ОВФ. Этот процесс реализуется практически лишь при когерентном излучении. В принципе можно рассчитывать, что с помощью ОВФ удастся скомпенсировать aberrации светосильных объектов.

Существенным отличием лазерного излучения от излучения тепловых источников является возможность получения как высоких средних, так и больших пиковых интенсивностей излучения. Благодаря этому усиливаются нелинейные процессы в фоторезисте. Более того, сейчас изготавливаются фоторезисты, допускающие возможность сухой обработки (абляции) с высокой контрастностью при плотностях энергии $w \approx 0,5 \text{ Дж/см}^2$, что потенциально увеличивает разрешающую способность до $0,3 \text{ мкм}$, если использовать достаточно коротковолновую ультрафиолетовую подсветку. Для реализации субмикрометрового разрешения требуется создать преломляющую оптику, не имеющую хроматических aberrаций, — такую оптику, при которой характерные ширины линий эксимерных лазеров в десятки обратных сантиметров не влияют на дифракционное разрешение, реализуемое на поверхности интегральных схем. Поскольку изготовление ахроматических линз в УФ-диапазоне представляет сложную задачу, можно использовать отражательную оптику либо уменьшить ширину линии лазера за счет применения методов внутрирезонаторной селекции. Однако на практике применение отражательной оптики уменьшает поле зрения, а возбуждение линии за счет внутрирезонаторных селекторов может приводить к потере мощности излучения эксимерных лазеров. По этой причине узкополосное излучение гармоник ТТЛ становится вполне конкурентноспособным в сравнении с излучением эксимерных лазеров.

Еще одна особенность когерентного излучения — возможность компрессии лазерного импульса методом ВРМБ, в результате которой длительность импульсов укорачивается от десятков наносекунд до наносекунды. Укорочение до 1 нс целесообразно в условиях, когда требуется достичь субмикрометров разрешения. Это связано с тем, что при абляции поверхности в результате воздействия на нее длинных ($\tau \geq 10 \text{ нс}$) лазерных импульсов весьма существенным становится поперечное рассеяние излучения на оптических неоднородностях поверхностного слоя резиста, создаваемых самим же световым пучком. Если же импульс имеет длительность не более 1 нс , то абляция происходит уже после воздействия импульса и оптические неоднородности вблизи поверхности, вызывающие рассеяние света, не успевают сформироваться. В этом отношении реализация одноимпульсной экспозиции с лазерными импульсами короче или порядка 1 нс представляется весьма заманчивой. При этом резко снижаются требования на устойчивость проекционной системы. Однако энергия УФ-излучения в таком коротком импульсе должна составлять десятки джоулей. Для достижения разумной производительности фотолитографических установок частота повторения должна превышать 1 Гц , т.е. средняя мощность излучения должна составлять величину $P \geq 100 \text{ Вт}$.

Еще одна область использования ТТЛ — контроль интегральных схем. Сюда относится контроль пространственного расположения элементов на поверхности этих схем за счет построения изображения подсвеченной поверхности резиста. В принципе возможен вариант записи голограммы в

когерентном свете с последующим сравнением полученных результатов с эталонными.

Наиболее распространенными в микроэлектронике задачами, требующими создания источника жестких квантов и частиц, являются рентгенолитография и лазерно-плазменная эпитаксия тонких пленок. Для генерации рентгеновского излучения требуется создание на поверхности мишени плотности мощности $I \approx 10^{13} \div 10^{14}$ Вт/см², а для эпитаксии тонких пленок $I \approx 10^{11}$ Вт/см². Рассмотрим здесь более подробно первую из указанных задач.

В настоящее время контактная печать – единственный практически осуществимый метод использования рентгеновских лучей в целях микролитографии, поскольку размер поля и разрешение рентгеновских линз все еще недостаточны для осуществления проекционного метода создания изображения на поверхности образца. Для указанных целей используется относительно мягкое рентгеновское излучение ($\lambda \approx 0,4 \div 0,5$ нм) с тем, чтобы в резисте поглощалось достаточно энергии. При таких длинах волн дифракционные эффекты пренебрежимо малы вплоть до ширин линий на поверхности рисунка, составляющих величину порядка 0,2 мкм для практически реализуемых расстояний между шаблоном и подложкой в 50 мкм. Шаблон изготавливают не на кварцевой пластинке, как это принято в фотолитографии, а на тонкой (меньше 10 мкм) мембране из таких материалов, как кремний, карбид кремния и другие (кварц поглощает мягкое рентгеновское излучение и поэтому его не используют в рентгенолитографии для изготовления шаблона). Поглотителем служат пленки из металлов с высокой атомной массой, нанесенные посредством электронолучевой литографии.

Рентгенолитография обеспечивает более высокое разрешение по сравнению с любыми оптическими проекционными камерами и более низкую стоимость, чем электронолучевая литография.

Источники рентгеновского излучения с возбуждаемой лазером плазмой являются возможной альтернативой весьма дорогостоящему синхротрону, хотя выход излучения в них в настоящее время в десятки раз меньше. Рентгеновское излучение таких источников обусловлено наличием в плазме ионов высокой кратности, которые приводят к генерации линейчатого и непрерывного спектров с энергией квантов в области единиц кэВ. Подбором мишени и параметров лазера можно добиться, чтобы максимум рентгеновского излучения соответствовал нужному диапазону длин волн. Длительность рентгеновского импульса лазерно-плазменного источника составляет единицы – десятки наносекунд, а его размеры – 100 мкм и меньше. В зависимости от типа используемого лазера можно получить рентгеновское излучение либо с большой пиковой, либо с большой средней мощностью.

Эффективность преобразования (конверсии) энергии лазера в "мягкое" рентгеновское излучение ($\hbar\omega \approx 0,1 \div 0,7$ кэВ) мало меняется при изменении потока на мишени от 10^{12} до 10^{14} Вт/см², оставаясь на уровне 8–10% для $\lambda \approx 1$ мкм и 35–40% для $\lambda = 0,25$ мкм. Эта зависимость имеет несколько отличный вид у медной и золотой мишеней, что обусловлено неодинаковым вкладом в указанные спектральные диапазоны соответствующих оболочек ионов меди и золота. Что касается "жесткого" рентгеновского излучения ($\hbar\omega = 1 \div 2$ кэВ), то при $I \leq 5 \cdot 10^{12} \div 10^{13}$ Вт/см² наблюдает-

ся резкое падение величины конверсии и это особенно отчетливо заметно у меди как для "мягкого", так и для "жесткого" рентгеновского излучения. В то же время мишень из золота не подходит для эффективного преобразования энергии лазера в "жесткое" рентгеновское излучение. Общий вывод таков: для получения значительной конверсии в диапазоне нескольких кэВ у мишени с соответствующим атомным номером необходимо иметь минимально возможную температуру плазмы, соответствующую падению излучательной способности ионов, и обеспечить на мишени световые потоки $I \approx 10^{13}$ Вт/см². Очень короткие световые импульсы с $\tau < 0,4$ нс не обеспечивают высокой эффективности преобразования из-за того, что объем плазмы, излучающий в рентгеновском диапазоне, с уменьшением длительности облучения (при прочих равных условиях) также уменьшается. Лазерные импульсы длительности $\tau \approx 10$ нс наиболее приемлемы для получения хорошей конверсии при высоких значениях светового потока на мишени. Таким образом, можно сказать, что приемлемым диапазоном длительностей лазерного импульса является 0,5–10 нс, который, по-видимому, можно расширить до 25 нс.

Анализ показывает, что при средней мощности твердотельного лазера 200 Вт, работающего на длине волны $\lambda = 1,06$ мкм в "жестком" рентгеновском диапазоне ($\hbar\omega \approx 1$ кэВ), можно получить среднюю мощность 16 Вт (в 2π ср), что соответствует 10 мВт/см² (на расстоянии 20 см от источника). В области "мягкого" рентгеновского диапазона плотность средней мощности на расстоянии $l = 20$ см от источника составит по крайней мере 30 мВт/см². Импульсно-периодический КГФ-лазер со средней мощностью 200 Вт на том же расстоянии от мишени обеспечит 25 и 62 мВт/см² в "жестком" и "мягком" рентгеновских диапазонах соответственно. Эти величины существенно превышают потоки средней мощности рентгеновского излучения, на которые могут быть способны электронолучевые рентгеновские источники. Это обстоятельство является важным для использования рентгеновских источников в литографии.

Как было отмечено выше, спектр излучения лазерно-плазменного источника является довольно широким $0,1 \leq \hbar\omega \leq 5$ кэВ, причем "жесткая" компонента излучения резко обрывается при $\hbar\omega \geq 2$ кэВ. Это имеет преимущество, поскольку при $\hbar\omega \geq 3$ кэВ в резисте возникают электроны, рассеяние которых в объеме резиста ухудшает качество получаемого изображения, т.е. снижает разрешение.

Другим преимуществом лазерно-плазменного источника является малый размер (меньше 100 мкм), что уменьшает эффект получения при контактной печати. Например, разрешение 0,1 мкм может быть получено, если зазор между маской и подложкой составляет 20 мкм, а источник удален от резиста на расстояние 10 см. Эти параметры, а также высокая эффективность преобразования в рентгеновское излучение делают лазерно-плазменные источники привлекательными для использования в рентгенолитографии. С помощью таких источников может быть осуществлено экспонирование за одну или несколько лазерных вспышек (в области "мягкого" рентгеновского излучения чувствительность изменяется от 1 до 10 мДж/см², а в области "жесткого" рентгеновского излучения от 10 до 100 мДж/см²). Более высокая чувствительность рентгенорезиста в "мягкой" области спектра обусловлена большим коэффициентом поглощения резиста при $\hbar\omega \lesssim 1$ кэВ.

Из указанных соотношений, а также из требований на длительность лазерного импульса (считая чувствительность резиста заданным параметром) можно определить характеристики лазерной системы, пригодной для создания эффективного рентгеновского литографического источника. Для экспонирования в области $\hbar\omega = 1$ кэВ и при использовании рентгенорезиста с чувствительностью менее 10 мДж/см² могут оказаться пригодными твердотельный или КгF-лазеры со средней мощностью 20 Вт ($W = 1$ Дж, $f = 20$ Гц). При работе с рентгеновскими источниками в области $\hbar\omega \geq 1$ кэВ требования к лазеру становятся более жесткими. В этой области чувствительность резиста не лучше 10 мДж/см², а световой поток на мишени не должен быть меньше 10^{13} Вт/см². Если задаться чувствительностью рентгенорезиста в 25 кДж/см², отвечающей реальной ситуации, то потребуются лазер со средней мощностью не менее 100 Вт.

В основе создания такого лазера могут лежать разные подходы. В одном случае это может быть лазер с малой энергией в импульсе (например, 1 Дж), но работающий с высокой частотой ($f = 100$ Гц). Длительность импульса такого лазера должна быть $\tau = 1$ нс, а качество пучка обеспечивать фокальное пятно малых размеров (1 мм). Подобный лазер может быть реализован на основе активных элементов типа "slab" или на обычных – цилиндрической формы. Преимущество "высокочастотного" источника состоит в том, что из-за малой энергии в каждом рентгеновском импульсе разогрев маски невелик.

Другой подход заключается в разработке лазерных систем с большой энергией в импульсе (например, 20 Дж) и сравнительно малой частотой повторения ($f = 5$ Гц).

Если иметь в виду КгF-лазеры, то благодаря преимуществу использования ультрафиолетового излучения ($\lambda = 0,249$ мкм), можно добиться эффективности преобразования в рентгеновское излучение до 35% . При этом требуемую производительность литографического процесса можно обеспечить, используя КгF-лазер, мощность которого в 3 раза меньше, чем у твердотельных лазеров. Однако из-за дополнительных требований, налагаемых на величину интенсивности света на мишени ($\sim 10^{13}$ Вт/см²), необходимо предпринять большие усилия для создания КгF-лазера с нужными параметрами пучка.

Заметим, наконец, что описанные здесь источники рентгеновского излучения могут применяться и для медицинских целей, в первую очередь в тех случаях, когда требуется локальное зондирование отдельных участков тела с небольшой площадью поверхности.

8. ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ

Основная идея метода двухэкспозиционной голографии заключается в наложении оптических полей, рассеиваемых исследуемым предметом в различные моменты времени. Этот предмет (например, машина, здание, судно или просто лист обшивки сотовой конструкции) вибрирует под действием внешнего виброгенератора, благодаря чему смещение каждого элемента его поверхности тем больше, чем слабее он связан с остальными элементами конструкции. В жесткой бездефектной конструкции смещение отдельных элементов относительно мало и поле смещений образует гео-

метрическую фигуру какой-то определенной, обычно правильной формы. Если же в такой конструкции наступает разрушение связи какого-то элемента с остальными, например, из-за дефектов в сварочном шве, то этот элемент смещается на большую величину. В этом случае на поле смещений наблюдается 'выброс' в том месте, где присутствуют дефекты конструкции.

Когерентные световые поля несут на себе всю информацию о малых, порядка длины волны смещениях подсвечиваемых предметов. Например, в плоскости изображения предмета мы имеем

$$|E(t, \mathbf{r}_1) + E(t + \Delta t, \mathbf{r}_1)|^2 = |E(t, \mathbf{r}_1)|^2 + |E(t + \Delta t, \mathbf{r}_1)|^2 + E(t, \mathbf{r}_1)E^*(t + \Delta t, \mathbf{r}_1) + \text{к.с.}$$

В зависимости от знака фазы в интерференционном слагаемом суммарная интенсивность обеих полей увеличивается или уменьшается. Это означает, что при достаточно больших Δt на изображение предмета наложится муар, тем более контрастный, чем больше отклонение от того или иного элемента поверхности.

Для освещения крупногабаритных предметов (моста, сооружений большого размера) требуется достаточно большая энергия импульса. Расчеты показывают, что при использовании высокоочувствительной приемной системы диффузно рассеивающий предмет необходимо подсвечивать когерентным излучением с плотностью энергии импульса не менее 10^{-6} Дж/см². Наиболее подходящим для такого подсвета являются ТТЛ (на рубине или неодиме). При площади поверхности 10^6 см² потребуются энергия импульса ~ 1 Дж. Для измерения в условиях производства частота повторения импульсов может составлять либо десятые или сотые доли герца, либо десятки герц. В первом случае обычно регистрируется непосредственно когерентное излучение с интенсивностью, пропорциональной $|E(\mathbf{r}_1, t) + E(\mathbf{r}_1, t + \Delta t)|^2$. При обработке соответствующих изображений муар должен быть выявлен на спекл-неоднородном фоне, характерном для рассеяния диффузно отражающих предметов. Во втором случае может быть осуществлено усреднение изображений, регистрируемых в различные моменты времени при подсвете предметов, вообще говоря, с разных ракурсов. В этих условиях проще производить идентификацию муара, поскольку он накладывается на полутонное изображение.

Средняя мощность источника подсветки зависит, очевидно, от частоты повторения и изменяется соответственно от долей до десятков ватт. Для реализации чувствительности, обеспечивающей прием света от диффузно рассеивающего предмета с плотностью энергии на его поверхности 10^{-6} Дж/см², необходимо иметь матричный фотоприемник с высоким квантовым выходом. На практике этот приемник должен быть сочленен с узкополосным фильтром, требуемым для работы в освещенном помещении, тем более что в ряде случаев голографическую интерферограмму необходимо регистрировать через раскаленный газ, например через горящую струю, истекающую из сопла двигателя.

Для регистрации изображения в реальном масштабе времени требуется использовать среды с достаточно инерционной оптической памятью. Для этих целей подходят, например, фоторефрактивные кристаллы, в которых

сначала поочередно записываются голограммы импульсов, рассеянных при первичном и вторичном подсвете, а затем осуществляется считывание этих голограмм третьим импульсом, строящим двухэкспозиционное изображение предмета. Подобная регистрация предпочтительнее непосредственного ввода в компьютер интерферограмм, записанного для каждого из подсветов, с целью последующего сравнения и обработки, поскольку и используемые при этом массивы информации чрезвычайно велики, что делает практически нереальным выявление муара в реальном масштабе времени. Стоимость приемно-передающей системы, обеспечивающей реализацию указанных параметров, весьма велика.

К задаче голографической интерферометрии примыкает проблема измерения малых смещений на больших расстояниях, в частности, контроль сейсмических волн на твердой или водной поверхности Земли, контроль землетрясений. Основной вопрос заключается здесь в идентификации непосредственно интересующего нас эффекта на фоне влияния разнообразных паразитных факторов. На принципах голографической интерферометрии возможно построение оптической системы для определения с большой точностью скорости удаленных предметов, их углового вращения.

Представляется, что создание передвигающейся интерференционной системы для решения ряда перечисленных выше проблем вполне реально не только в стенах лаборатории, но и в условиях производства, а также при натурных измерениях на больших трассах.

К рассмотренным здесь вопросам примыкает проблема наблюдения предметов при лазерной подсветке. Здесь достаточно использовать одноэкспозиционную регистрацию изображения. Таким образом может быть создан когерентный аналог обычного прожектора, превосходящий его по параметрам из-за высокой направленности импульсов лазерного подсвета и возможности строить изображение предмета в условиях паразитной засветки и обратного рассеяния на трассе распространения луча.

Выше уже упоминалось про возможность регистрации голографического кино. По-видимому, сейчас наиболее серьезная проблема состоит уже не в формировании светового пучка, необходимого для надежной регистрации голографии, а в реализации условий записи большого количества голограмм в трехмерных средах, например, в фоторефрактивных кристаллах. Тогда набор указанных кристаллов может играть ту же роль, что и пленка в обычной кинематографии. Поскольку в каждом кристалле содержится информация о большом числе кадров, их общее количество может быть и не так велико. В ближайшее время голографическое кино может представить практический интерес в научных исследованиях кинетических процессов в горячих газах и плазме, быстро протекающих процессов в сплошных средах.

9. КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Локализация космических аппаратов и Луны позволяет решать две группы задач. Первая группа — это определение траектории и характера движения самого космического аппарата в основном с целью использования этой информации для уточнения наземными объектами своего местоположения. Вторая группа — определение по известным параметрам движе-

ния космического аппарата ряда геофизических характеристик, например уровня поверхности океана или полярных шапок, параметров дрейфа континентов, а также координат пунктов геодезической сети и т.д.

Из известных космических объектов технически доступной является локация Луны. Движение Луны хорошо изучено, численные методы позволяют уточнять характер движения Луны. Разрабатываемые в настоящее время лазерные локационные станции четвертого поколения должны иметь длительности импульсов ~ 100 пс. Когда точности измерения расстояний станут меньше 1 мм, появится возможность исследовать релятивистские эффекты в характере движения Луны. Это даст возможность экспериментальной проверки различных релятивистских теорий гравитации. Очевидно, что для генерации пикосекундных импульсов, да еще с высокой средней мощностью, что необходимо для локации Луны, наилучшим образом подходят твердотельные лазеры.

Для решения задач второй группы, кроме Луны, необходимо лоцировать искусственные спутники типа американского "Лагеос" или советского "Эталон", специально предназначенные для этой цели. Эти спутники представляют собой массивные шары, геометрические центры которых с большой точностью совпадают с центром тяжести. "Лагеос" имеет диаметр порядка 0,5 м, а "Эталон" — около 1,5 м. Среднее удаление от Земли для "Лагеоса" — около 6000 км, а для "Эталона" — около 2000 км.

Задачи, условно отнесенные нами ко второй группе, можно решать двумя принципиально разными способами. Первый из них заключается в том, что передатчик и приемник находятся на Земле, а на космическом объекте находится ретроотражатель, возвращающий излучение к поверхности Земли. Во втором способе, наоборот, на космическом объекте находится передатчик и приемник, а на Земле ретроотражатели.

Луна для решения задач второй группы практически потеряла свое значение по сравнению с искусственными спутниками. Она находится значительно дальше и для локации требуются значительно более совершенные установки. Именно поэтому в мире только четыре станции занимаются локацией Луны (две американские, одна французская, одна советская). в то время как локацией спутников занимаются на менее четырех десятков станций.

Точности измерения различных параметров на Земле, как, например, при построении геодезической сети, зависят, в частности, от числа точек, в которых эти измерения одновременно производятся. Создать очень большое число лазерных локационных станций невыгодно из-за их дороговизны. Поэтому уже сейчас именуются лазерные передатчики на основе твердотельных лазеров, установленные на спутниках. Это так называемые альтиметры, которые измеряют расстояние вертикально вниз до поверхности Земли. Именно с их помощью открыто локальное понижение уровня океана, производятся наблюдения за состоянием полярных шапок Земли и т.д. Однако многие задачи, в том числе и определение деформации земной поверхности, требуют создания более совершенного спутникового локатора. В частности, в США есть проект спутникового локатора, который за один пролет должен осуществить локацию нескольких сотен (~ 300) мишеней из угольковых отражателей, установленных в специальных местах. При этом размер каждой мишени будет составлять ~ 20 см,

она будет состоять ориентировочно из 15 уголкового отражателей диаметром 3 см. Для спутника должна быть разработана очень эффективная система наведения, поскольку на поиск и локацию одной мишени отводится всего около 3 с.

Для решения всех перечисленных задач также наилучшим образом подходит твердотельные лазеры, причем те, расходимость которых близка к дифракционному пределу.

УДК 536.42

ДЕТОНАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ФИЗИКЕ КИПЕНИЯ

В.В. БАРЕЛКО, С.А. ЖУКОВ

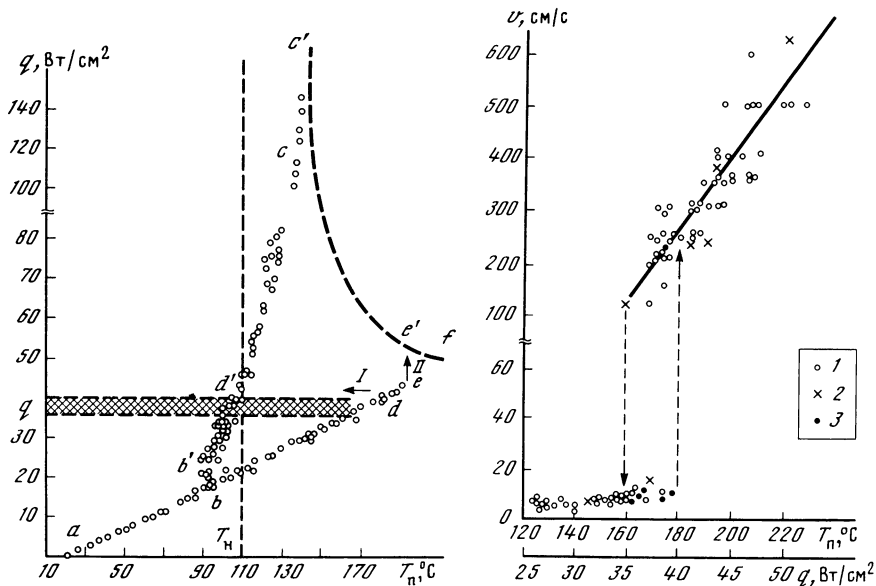
Физика кипения до недавнего времени считалась областью, не имеющей какого-либо отношения к химической физике, в частности к таким ее классическим разделам, как горение, взрыв, детонация. Однако привлечение представлений и теоретического аппарата из названных разделов смежной науки в физику кипения оказалось плодотворным и позволило сформулировать принципиально новые подходы к анализу ряда фундаментальных аспектов в механизмах парогенерации. Наиболее важные из них — это, во-первых, вопросы о природе и динамике развития пороговых явлений (так называемый кризис кипения [1]), а во-вторых, о закономерностях перехода однофазного режима теплопередачи в жидкой среде к режиму ее кипения на поверхностях тепловыделяющих элементов (ТВЭЛов).

Что касается первой группы вопросов, то они рассмотрены в цикле работ [2–5]. В указанном цикле механизм, аналогичный горению, положен в основу автоволнового подхода к описанию динамических особенностей явлений "кризиса кипения". Это привело к получению ряда важных следствий для теории и практики эксплуатации электронагревательных и ядерных ТВЭЛов.

Данная работа, концентрируя внимание на второй группе вопросов, продолжает тенденцию на взаимопроникновение химической физики и физики кипения. Она посвящена изучению механизмов переходов от конвекции к кипению, рассмотренных как изолированно в процессе искусственно вызванного распада метастабильного режима теплопередачи, так и в качестве элементарной стадии в режиме стационарного кипения¹. Как будет видно из дальнейшего, объяснение наблюдавшихся закономерностей проведено на базе основных положений физики детонационных волн.

Исследование переходных процессов проведено на примере кипения на нагреваемых током металлических нитях в жидких средах, недогретых до температур насыщения. В экспериментах использованы различные жидкие углеводороды. В данной работе приводятся данные, полученные

¹ Более детально результаты работы изложены в [6].



Р и с. 1. Зависимость интенсивности теплосъема элемента от температуры нагревательного элемента (толуол, $T_{\text{ж}} = 20^{\circ}\text{C}$)

Р и с. 2. Зависимость скорости волны распада метастабильности от температуры элемента T (тепловой нагрузки q) в толуоле с $T_{\text{ж}} = 20^{\circ}\text{C}$

1, 2 — платиновый элемент $\phi 100$ мкм (1); 200 (2); 3 — никелевый нагревательный элемент $\phi 100$ мкм

при кипении в среде толуола, качественно характерные для широкого круга неполярных жидкостей.

Опыты проводились в кювете прямоугольного сечения, изготовленной из оптического кварцевого стекла. Для поддержания постоянной температуры жидкой среды внутри кюветы устанавливался змеевиковый холодильник. Проволочный нагревательный элемент погружали в жидкость в горизонтальном положении и ориентировали в кювете вдоль большей оси ее сечения, что обеспечивало возможность визуализации и фотокиноregistрации процесса перехода от одного режима к другому через прозрачные стенки кюветы. Основной объем работы выполнен на платиновых датчиках. Контрольные опыты проведены с элементами из никелевой проволоки.

Применение тонких проволочных элементов, изотермичных по сечению, упростило изучаемую картину в результате сведения ее к одномерной схеме с преимущественной ориентацией направления движения фронта волны перехода вдоль одной координаты — оси нити. Кроме этого, проволочный нагревательный элемент, выполняя функции термодатчика, позволял производить осциллографические измерения скорости распространения волны распада однофазного режима с помощью разработанной ранее электротермографической методики изучения волновых процессов на основе регистрации динамической вольт-амперной характеристики элемента. Приведенные ниже результаты получены при работе с датчиком диаметром

10^{-2} см. Для датчиков указанной геометрии применение электротермографической методики позволяло без искажений проводить измерения скоростей бегущей волны вплоть до величин 10^3 см/с. Особенности различных стадий переходного процесса выяснялись с помощью скоростной кинотехники при скоростях съемки до 4000 кадр/с и увеличении изображения в 5 раз.

Прежде чем приступить к изучению динамических особенностей, необходимо было получить ряд сведений о закономерностях стационарной теплопередачи как в стабильном, так и в метастабильном режимах.

На рис. 1 приведена стационарная нагрузочная характеристика платинового нагревателя в среде толуола. Она складывается из трех ветвей. Ветвь *abd* соответствует однофазному свободно конвективному режиму теплоотдачи. На участке *ab* этот режим является устойчивым, а на *bd* метастабильным. Метастабильный режим сохраняет устойчивость к самопроизвольному распаду вплоть до нагрузок, соответствующих точке *d*. Вторая ветвь *bc*, отходящая от участка стабильного однофазного теплоотвода *ab*, соответствует устойчивому стационарному режиму пузырькового кипения.

Ширина области метастабильности зависит от способа питания элемента электрической мощностью и от степени недогрева жидкости до температуры насыщения. Максимальная ее ширина обеспечивалась путем питания датчика от источника стабилизированного тока и поддержанием температуры жидкой среды на уровне комнатной (температура насыщения толуола $110,6^\circ\text{C}$).

Процесс перехода от конвекции к пузырьковому кипению возбуждался практически во всей области метастабильности в ответ на внесение локального возмущения, которое могло быть организовано различными способами, вызывающими местный перегрев элемента. Наряду с ранее применявшимся газоструйным методом [3] в данной работе использована и более тонкая методика возбуждения переходного процесса. Она основана на включении в методическую схему дополнительного проволочного нагревателя, ориентированного перпендикулярно оси основного и размещенного в непосредственной близости от него. Осуществив питание дополнительного нагревателя от независимого источника и подняв нагрузку до уровня, соответствующего устойчивому кипению на нем, легко возбудить локальный распад метастабильного режима на исследуемом элементе, распространяющийся затем на всю поверхность нагревателя.

Исходной информацией при количественном изучении закономерностей автоволновых перестроек метастабильного режима работы нагревательного элемента служила его вольт-амперная характеристика. Регистрация изменений во времени тока и напряжения на нагревателе осуществлялась с помощью потенциометров-самописцев, цифровых вольтметров с выходом на цифropечать и осциллографической техники.

По характерным особенностям осциллограмм переходных процессов внутри области метастабильности можно выделить три интервала. В интервале нагрузок до $\bar{q} = 40$ Вт/см² времена развития переходного процесса изменяются от 1 до 0,3 с. При нагрузках $q > \bar{q}$ скорость распада однофазного метастабильного режима скачком возрастает приблизительно на порядок (характерные времена $0,3 - 0,1 \cdot 10^{-1}$ с).

В узком интервале нагрузок, примыкающих к значению \bar{q} , переходный

процесс в зависимости от начальных условий может реализовываться в режиме как малой, так и большой скорости. В ряде экспериментов были зафиксированы переходы, начавшиеся в режиме малой скорости, а затем спонтанно перешедшие в режим быстрого распада.

Если принять, что локально вносимые возмущения инициируют процесс распада автоволнового типа, то данные электротермографического изучения легко представить в виде зависимости скорости бегущей волны от тепловой нагрузки или температуры элемента (рис. 2). Результаты наглядно иллюстрируют вывод о двух режимах бегущей волны распада метастабильного режима. Первый режим характеризуется скоростью волны порядка 10 см/с, а второй — 10^2 см/с. Приведенные значения скоростей превышают на один—два порядка значения, характерные для изученных ранее тепловых автоволновых процессов [2, 3].

Смена материала элемента, его геометрии и жидкой среды не приводит к качественным изменениям результатов.

Сделанный выше вывод об автоволновом характере распада метастабильного режима был подтвержден с помощью скоростной киносъемки. Типичная кинограмма процесса перестройки в режиме медленной волны представлена на рис. 3. Фронт волны характеризуется наличием в нем парового пузырька, отделяющего исчезающую метастабильную зону от вытесняющей ее зоны кипения. Пузырек-граница совершает свое поступательное движение в среднем с постоянной скоростью, совпадающей с данными на рис. 2.

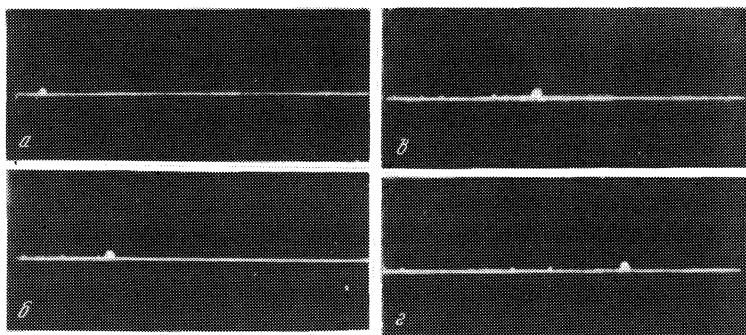
Резкое возрастание скорости движения волны распада при $q > \bar{q}$ сильно изменяет структуру ее фронта (рис. 4). Скорости столь высоки, что микродисперсная паровая эмульсия, образующаяся в перегретой пленке жидкости в начальной стадии разрушения метастабильности, не успевает за время прохождения волны коалесцировать в макропузырь. В силу этого фактора фронт приобретает вид вытянутого вдоль элемента пароземulsionного облака, движущегося по прилегающему к поверхности слою и имеющего достаточно четко выраженное положение передней и задней его границ. Измерив длину облака и зная скорость его движения, можно оценить время жизни микродисперсного переходного состояния. Оно оказалось равным $(1 \div 3) \cdot 10^{-3}$ с и почти не зависящим от нагрузки.

С помощью киносъемки при нагрузках, близких к \bar{q} , удалось зарегистрировать самопроизвольную смену медленного режима движения на быстрый (рис. 5).

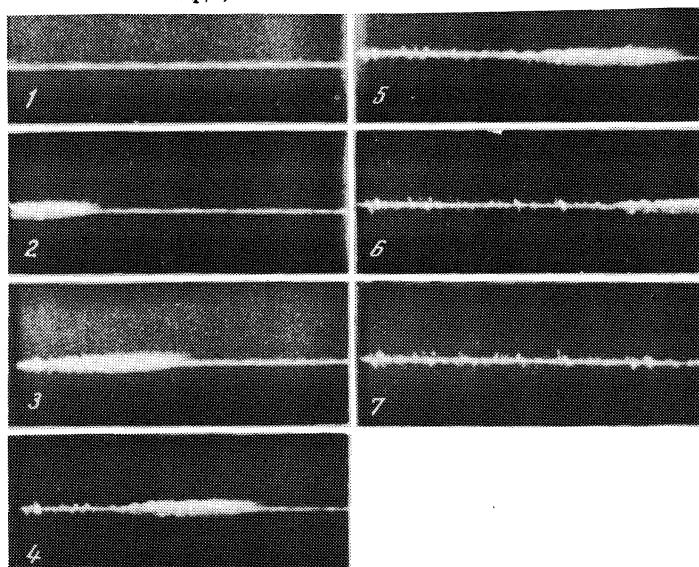
Попытаемся представить себе качественную картину описанного выше автоволнового процесса потери устойчивости метастабильного состояния, исходя из следующих положений.

1. Метастабильный режим устойчив ко всем возмущениям, которые не вызывают потери сплошности (разрыва) прилегающей к поверхности элемента перегретой пленки или не приводят к перегреву этой пленки выше температуры самопроизвольного распада (выходу за спинополь).

2. Происходящий в зоне инициирования распад однофазной перегретой жидкой пленки сопровождается выделением паровой фазы, при этом скорость образования этой фазы столь высока, что она, не успевая отойти в объем, должна оказывать сильное механическое воздействие (удар) на соседние, еще не возмущенные участки метастабильной пленки.



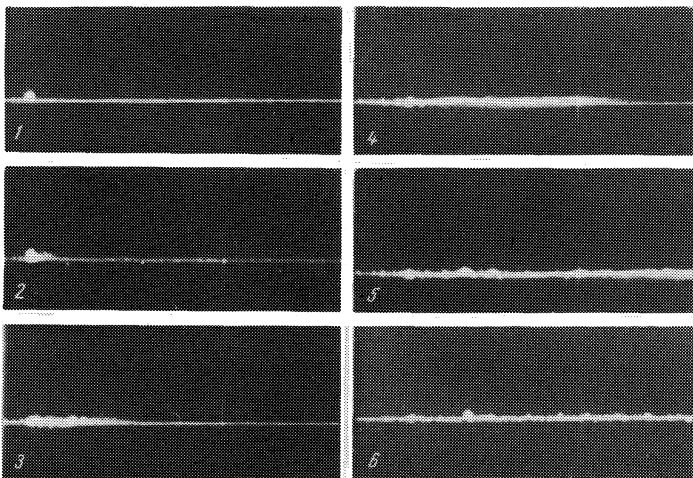
Р и с. 3. Кинограмма распространения медленной волны распада метастабильности (скорость съемки 1000 кадр/с)



Р и с. 4. Кинограмма распространения быстрой волны распада метастабильности (скорость съемки 4000 кадр/с)

Опираясь на сформулированные положения, поставим вопрос о реальности возникновения при локальном распаде ударной волны (кавитационной природы), которая может в ближайших слоях вызвать разрыв жидкости или отслоение ее от поверхности элемента, если наведенные ударом напряжения превысят предел прочности жидкой среды на растяжение или на срез. Потеря сплошности жидкой пленки спровоцирует фазовый переход и паровыделение в среднем участке элемента, что в свою очередь, явится причиной возникновения следующего ударного воздействия. Нам представляется, что именно такой механизм с обратной связью между процессом распада метастабильного состояния и механическим разрушением перегретой пленки лежит в основе наблюдаемого на опыте самоподдерживающегося автоволнового процесса.

Описанная картина самоподдерживающейся ударной (кавитационной) волны очень близка по своей сущности к волне детонации. Разница состоит



Р и с. 5. Кинограмма процесса перестройки медленной волны в быструю (скорость съемки 1000 кадр/с)

в том, что в процессе детонации источником, подпитываемым энергией ударную волну, является химическая реакция; в рассматриваемых же здесь процессах фазовых переходов кавитационная волна питается механической энергией, высвобождающейся при послойном распаде метастабильной перегретой пленки жидкости в форме ударной парогенерации. Высказанные соображения позволяют указать на возможную связь развиваемых представлений с известным в физике кипения явлением "парового взрыва". Для этого лишь следует предположить, что паровой взрыв — это детонационная волна ударного паровыделения, возникающая при распаде больших объемов метастабильной жидкости.

Автоволновой подход к анализу переходных процессов распада метастабильного режима побудил нас с этих новых позиций рассмотреть пространственные и временные особенности стационарного режима пузырькового кипения в среде недогретой жидкости — режима характерного для многих типов парогенерирующих установок. Кинографическое наблюдение за процессом кипения привело нас к выводу о том, что стационарный режим пузырькового кипения представляет собой суперпозицию целого набора одновременно протекающих на различных участках поверхности элемента (но находящихся в различных временных фазах) процессов детонационного распада локализованных зон метастабильности. Таким образом, режим стационарного кипения в недогретой жидкости может быть определен как *поливолновой процесс*.

Высказанные соображения дают основание для утверждения о неизбежности появления химических эффектов ударно-волновой природы при кипении в холодных жидкостях. В частности, действием этих эффектов может быть объяснено интенсивное образование накипи на поверхностях парогенерирующих установок именно в зоне недогрева, казалось бы более холодной, чем зона насыщенного кипения. Иными словами, выпадение соли и связывание ее с поверхностью происходят в актах хрупкого разруше-

ния жидкости, приводящих к химической активации и поверхности, и самой жидкости. Как следует из всего предыдущего, такие процессы и реализуются при детонационном распаде метастабильных приповерхностных слоев.

Далее заметим, что режим пузырькового кипения в недогретой жидкости, включающий в число своих стадий детонационный процесс, сопровождающийся кавитационными актами, локализованными в непосредственной близости от твердой поверхности ТВЭЛа (а не в удалении от нее, как считалось ранее, при схлопывании парового пузыря в холодном объеме), должен быть сопряжен с резким возрастанием ударно-механических нагрузок на эту поверхность. Действительно, такое кипение, по нашим наблюдениям, оставляет заметные следы разрушения в виде возросшей шероховатости элемента аналогично характерным последствиям, появляющимся на поверхностях металлических ультразвуковых волноводов, определенное время проработавших в жидкой среде [7]. По нашему мнению, в приведенной схеме содержится физическая суть механизма явления выкрашивания и усталостного разрушения тепловыделяющих поверхностей — явления, характерного для энергетических систем с высокой теплонпряженностью.

В заключение считаем необходимым отметить работу [8], в которой, по-видимому, впервые теоретически рассмотрена общая идея (вне связи с конкретной физической системой) о возможности действия детонационного механизма в процессах распада метастабильных состояний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кутателадзе С.С.* Теплопередача при конденсации и кипении. М.; Л.: Машгиз, 1952. 210 с.
2. *Жуков С.А., Барелко В.В., Мержанов А.Г.* К теории волновых процессов на тепловыделяющих поверхностях при кипении жидкостей // ДАН СССР. 1978. Т. 242, № 5. С. 1064–1067.
3. *Zhukov S.A., Barelko V.V., Merzhanov A.G.* Wave processes on heat generating surfaces in pool boiling // Intern. J. Heat. and Mass Transfer. 1980. Vol. 24. P. 47–65.
4. *Жуков С.А., Барелко В.В., Бокова Л.Ф.* Волновые процессы на тепловыделяющих поверхностях при кипении жидкостей // Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький, 1981. С. 149–165.
5. *Zhukov S.A., Barelko V.V.* Nonuniform steady states of the boiling process in the transition region between the nucleate and film regimes // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1983. Vol. 26, N 8. P. 1121–1130.
6. *Жуков С.А., Барелко В.В.* Динамические и структурные особенности процессов распада метастабильного режима однофазной конвективной теплопередачи и формирования пузырькового кипения: Препр. ОИХФ АН СССР. Черноголовка, 1987.
7. *Кепп Р., Дейли Дж., Хеммит Ф.* Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
8. *Кузнецов Н.М.* О детонации и газодинамических скачках при фазовых превращениях метастабильных веществ // ЖЭТФ. 1965. Т. 49, № 5. С. 1526–1530.

АВТОВОЛНОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ХИМИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В.В. БАРЕЛКО, И.М. БАРКАЛОВ, В.И. ГОЛЬДАНСКИЙ,
А.М. ЗАНИН, Д.П. КИРЮХИН

ВВЕДЕНИЕ

В данном сообщении рассматривается явление, в которое всего семь лет назад вряд ли кто-либо поверил. Речь идет о твердофазных химических превращениях, совершающихся при очень низких температурах (вплоть до температуры жидкого гелия) со скоростями, соизмеримыми и даже превышающими значения, характерные для самых быстрых в химии реакций – высокотемпературных реакций горения. Да и сами режимы взаимодействия очень похожи на процессы горения – они реализуются в виде самопроизвольно движущегося по твердому образцу узкого фронта реакции и описываются автоволновой динамикой. Естественно, что сходство это оказалось только внешним и присущие горению классические механизмы самоактивации с тепловой обратной связью к открытым явлениям не имели отношения. При анализе результатов постепенно выстроилась гипотеза, опирающаяся на ведущую роль в активации матрицы процесса послыоного автодиспергирования исходных твердых растворов реагентов.

Иными словами, для интерпретации явлений была введена схема положительной обратной связи, суть которой состоит во взаимодействии стадии разрушения исходной инертной матрицы (стадии, поставляющей в процесс химически активные свежие поверхности сколов) со стадией собственно превращения (стадией, инициирующей последующее диспергирование твердого образца реагентов). Цепь переходов между различными формами энергии, реализующуюся при действии описанной схемы, можно представить в следующем виде: энергия химической реакции, выделившаяся во фронте превращения, преобразуется в потенциальную механическую энергию упруго деформирующейся твердой матрицы, накапливающуюся в непрореагировавшем примыкающем к фронту слое образца; при превышении в ходе этого процесса накопления порога прочности происходит разрушение (диспергирование) очередного слоя, что приводит к включению в нем реакции, сопровождающейся энергосвободением, и т.д., пока не завершится процесс по всему объему образца [1–3].

ОБЪЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ

Автоволновые режимы твердофазного превращения обнаружены в большом числе реакционных систем, различающихся как по механизму химического превращения, так и по фазовому состоянию твердой матрицы. В ряду исследованных систем есть процессы хлорирования углеводородов, гидробромирования олефинов и полимеризации. Среди изученных реакций есть примеры реализации процесса как в стеклообразных матрицах, так и поликристаллических.

Для осуществления автоволнового процесса превращения некоторые

системы требовали предварительного радиолита или фотолита (накопление стабилизированных активных центров). Были и такие системы, в которых для возбуждения автоволнового превращения не требовалось какой-либо предварительной накачки энергии в матрицу (например, твердые соконденсаты хлора и этилена).

Ниже в качестве иллюстрации приводятся данные, относящиеся к реакции хлорирования в стеклообразном твердом растворе хлора (молярное соотношение 1:3) в метилциклогексане или хлористом бутиле, предварительно подвергнутому радиолиту гамма-лучами ^{60}Co .

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АКТИВИРУЮЩЕЙ РОЛИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ В СТАДИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ РЕАКЦИИ

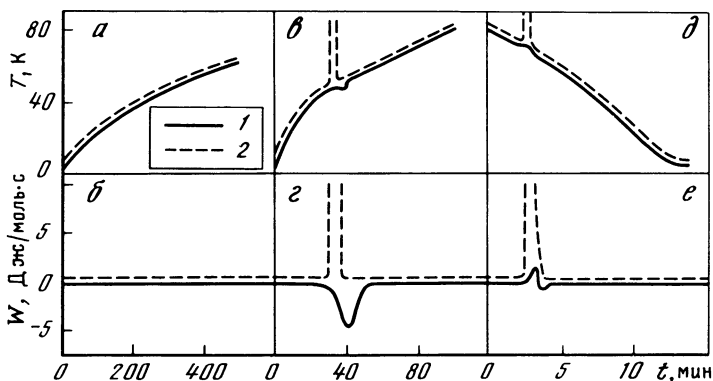
Для осуществления хрупкого разрушения образца первоначально был принят метод наведения термоупругих напряжений путем подбора скорости изменения температуры образца, достаточно большой, чтобы вызвать растрескивание. Для регистрации скорости изменения температуры и наблюдения сигналов, сопровождающих разрушение, был выбран способ дифференциальной сканирующей калориметрии. Подробнее о методе см. [4].

Медленный разогрев образцов от 4,2 до 77 К не приводит к растрескиванию, и калориметр не фиксирует каких-либо тепловых эффектов (рис. 1, *a* и *б*, сплошные линии). Быстрый разогрев приводит к растрескиванию образца, и сопутствующий ему тепловой эффект регистрируется калориметром (рис. 1, *в* и *г*, сплошные линии). После такого подбора скорости разогрева, приводящей к хрупкому разрушению образца, были проведены аналогичные эксперименты, но с образцами, предварительно обработанными определенной дозой излучения ^{60}Co для создания в системе стабилизированных активных центров. В ходе медленного разогрева облученного образца, не приводящего к его растрескиванию, тепловыделения за счет химической реакции не удается зарегистрировать (рис. 1, *a* и *б*, штриховые линии). При быстром же разогреве в момент хрупкого разрушения происходит химическое превращение (рис. 1, *в* и *г*, штриховые линии) [5].

Хрупкое разрушение образца и сопутствующее ему включение реакции удалось реализовать и при быстром охлаждении. На рис. 1, *д* и *е* приведены данные для образца, охлаждение которого проводилось достаточно быстро, чтобы вызвать растрескивание. Как видно, в облученном образце разрушение его сопровождается химическим превращением (в необлученном образце превращения не происходило).

Для доказательства решающей роли образования трещин как фактора, инициирующего химическое превращение, был поставлен прямой эксперимент с нетермическим разрушением образца при фиксированной температуре. С этой целью хрупкое разрушение осуществляли при постоянной температуре термостата 4,2 К поворотом замороженного в образец тонкого металлического стержня. В момент внесения такого возмущения в образец, содержащий стабилизированные активные центры, возникал быстрый, можно сказать, "взрывной" процесс химического превращения. Несмотря на локальное инициирование, реакционный процесс охватывал всю кювету — темная окраска образца, вызванная гамма-радиолитом, исчезала.

Описанные выше результаты позволили сделать два принципиально



Р и с. 1. Изменение во времени температуры образца МЦГ + Cl₂ (3:1) (а, в, в) и сопровождающих его тепловых эффектов (б, з, е)

1 — необлученные образцы; 2 — образцы, облученные γ -лучами ^{60}Co при 77 К дозой 27 кГр

важных вывода. Во-первых, установлено, что в изученных системах хрупкое разрушение образцов вызывает вспышку химического превращения. Во-вторых, обнаружено, что развитие процесса при инициировании его разрушением имеет самоускоряющийся характер и охватывает весь образец. Следовательно, образование первичной трещины играет роль спускового устройства, включающего некоторый механизм положительной обратной связи, обеспечивающий самоподдерживающийся режим процесса. Для выяснения этого механизма были поставлены опыты по изучению динамики развития реакции в ответ на внесенное возмущение.

Выявленные особенности динамики развития вспышки убедительно показали, что классический тепловой механизм обратной связи не является определяющим в обнаруженном явлении. Установление ведущей роли свежесформированной при разрушении образца поверхности позволило сформулировать в качестве гипотезы следующий нетепловой механизм самоактивации изученных систем: возникающая на свежесформированной поверхности и в прилегающей к ней области химическая реакция в свою очередь генерирует нарушения сплошности, например, вследствие возникающих в ходе реакции температурных или плотностных градиентов, создающих разрушающие образец напряжения. Такая разветвленно-цепная модель качественно описывает полученные экспериментальные факты:

1) критические явления возникновения и спонтанного самоускоряющегося развития реакции в твердой матрице, сопровождающейся интенсивным его диспергированием; 2) возможность инициирования такого взрывного процесса созданием в начальный момент некоторой затравочной сети трещин путем механического или термического разрушения образцов (в отсутствие таких возмущений скорость реакции неизмеримо мала); 3) выхождение критических явлений (детали см. библиографию в [1–3]).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ РЕГИСТРАЦИЯ АВТОВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ ПРЕВРАЩЕНИЯ

Известно, что принципиальной особенностью систем, описываемых нелинейными моделями разветвленно-цепного типа, является то обстоятельство, что им присущи автоволновые явления. Автоволновые режимы превращения должны были возникать в образцах достаточной протяженности в ответ на локально внесенное возмущение. Эти соображения и определили экспериментальную задачу данного этапа исследований. Она заключалась в поиске автоволновых явлений, установлении факта их существования и в изучении динамических характеристик и структурных особенностей фронта бегущей по твердому образцу волны химического превращения.

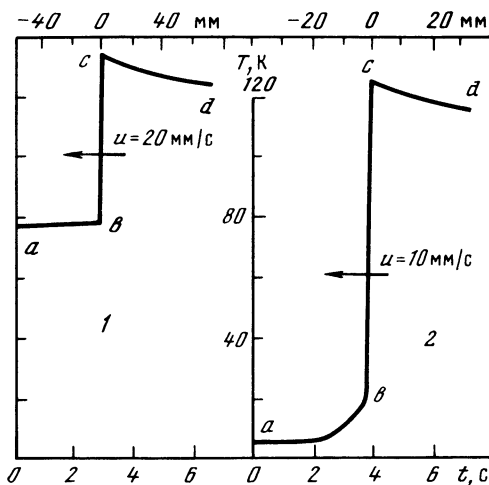
В первых же опытах локальным возмущением (путем создания механическим воздействием местного скола в образце или с помощью подачи теплового импульса, разрушающего ограниченный участок твердой матрицы) удалось инициировать процесс самопроизвольного распространения волны реакции. Ниже приводятся характерные результаты исследований, полученные в опытах с цилиндрическим образцом замороженной смеси реагентов диаметром 0,5–1,0 см и длиной 5–20 см. Поскольку прохождение реакции по образцу сопровождалось изменением его цветности, то для измерения скорости движения фронта с успехом были использованы возможности кинотехники. Структура фронта изучалась термографически с помощью вмороживаемых в образец термопар.

На кинограммах хорошо видно, как при локальном механическом разрушении быстро формируется фронт, параллельно самому себе распространяющийся вдоль оси кюветы с постоянной скоростью 1–2 см/с.

Для изучения структуры фронта волны (ее температурного профиля) была проведена серия опытов по термографированию автоволнового процесса. Скорость измеряли по времени прохождения волны между двумя термопарами.

На рис. 2 приведены характерные профили фронта бегущих температурных волн (во временной и пространственной развертке) при начальных температурах 77 и 4,2 К. Рисунок профиля при изменении температуры термостата не претерпевает качественных изменений. Он состоит из следующих стадий: *ab* – инертный прогрев (при 77 К эта стадия не регистрировалась, т.е. была практически изотермической); *bc* – скачкообразное включение и взрывообразное протекание реакции (характерный излом в точке *c*); *cd* – стадия охлаждения. Стадия *bc* быстропротекающая. Осциллографическая развертка этой зоны фронта бегущей волны дала для 77 К длительность $\sim 0,1$ с, т.е. при скорости волны $u = 2$ см/с ширина этой зоны $\delta \approx 0,2$ см, а для 4,2 К – длительность $\sim 0,3$ с, ширина $\delta \approx 0,3$ см (скорость волны $u = 1$ см/с).

В приведенной структуре бегущего фронта низкотемпературной реакции явно усматриваются особенности, совершенно нетипичные для процессов классического теплового самораспространения: 1) слабовыраженная или вообще отсутствующая стадия инертного предвзрывного разогрева; 2) скачкообразное включение и выключение реакции – характерные изломы в точках *b* и *c*, при этом включение реакции в точке происходит при темпе-



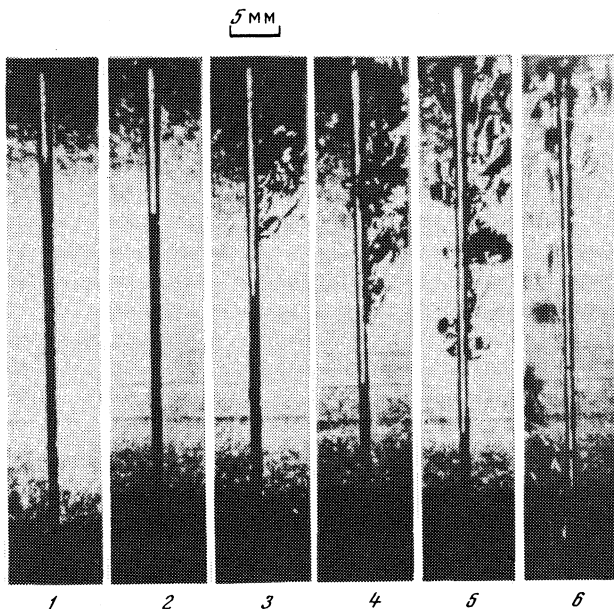
Р и с. 2. Временная и пространственная развертки характерных температурных профилей волн распространения реакции $\text{ХБ} + \text{Cl}_2$ при 77 К (1) и 4,2 К (2)
Доза предварительного облучения 27 кГр

ратурах, существенно более низких, чем температура начала термоактивированной реакции ($T_c \approx 100 \text{ К}$); 3) совпадение динамической картины развития процесса при самопроизвольном послойном инициировании реакции бегущей волной со случаем вынужденного зажигания реакции ударным нагревом; 4) слабовыраженное изменение скорости распространения волны при переходе от температуры термостата 77 и 4,2 К с соответствующим сильным изменением теплоотдачи.

Следующим важным шагом в выяснении роли теплового фактора в механизме изучаемых явлений явилась постановка исследований по влиянию размера образца на закономерности автоволнового процесса. Можно ли интенсификацией теплоотдачи путем уменьшения диаметра цилиндрической ампулы с замороженной смесью реагентов сделать невозможным самоподдерживающийся волновой режим превращения?

Для проведения опытов по бегущим волнам в капиллярах диаметром 0,5–1,0 мм (что соответствует увеличению более чем на порядок параметра, характеризующего интенсивность теплоотдачи) было установлено, что вырождения автоволнового процесса не происходит ни в одной из рассматриваемых систем. Более того, оказалось, что характерные значения скоростей автораспространения реакции не претерпевают каких-либо заметных изменений в этих условиях. На рис. 3 представлена кинопанорама распространения фронта реакции ($\text{ХБ} + \text{Cl}_2$) в капилляре диаметром 1 мм, погруженном в ванну жидкого гелия (доза облучения 45 кГр – скорость движения фронта волны $\sim 2,5 \text{ см/с}$).

В развитие задачи была постановка серии опытов с тонкими пленочными образцами реагентов. Опыты проводили с пленками, намороженными на плоскую подложку и погруженными в жидкий азот, т.е. в условиях отсутствия какого-либо экрана между поверхностью пленки и ванной хладагента. При нанесении укола или царапины в пленках возбуждался автоволно-



Р и с. 3. Кинограмма распространения фронта реакции в капилляре диаметром 1 мм при 4,2 К

Интервалы времени между кадрами 1 и 2 — 0,14 с; 2 и 3 — 0,06 с; 3 и 4, 4 и 5 — 0,14 с; 5 и 6 — 0,72 с. Доза 45 кГр

вой процесс. Переход к таким объектам обеспечил реализацию квазиизотермических условий протекания процесса и тем самым способствовал проявлению упомянутого выше изотермического механизма, состоящего в послойном самодиспергировании образца за счет разности плотностей исходных и конечных продуктов реакции. Новые условия не только не подавили автоволну, а сделали явление еще более ярко выраженным.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АВТОВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ТВЕРДОФАЗНЫХ КРИОХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

Экспериментальные результаты позволили углубить гипотезу о механохимической природе самоактивации процесса твердофазного превращения и построить предлагаемую качественную картину развития автоволнового процесса химического взаимодействия в рассматриваемых системах. Она может быть представлена в виде движущейся по твердому образцу узкой зоны, сильно иссеченной развитой сетью свежееобразованных трещин. Химическая реакция возникает именно в этой зоне на поверхности трещин (или вблизи них) и в свою очередь создает условия для продолжения разрушения в соседнем слое твердой матрицы. Такое послойное диспергирование образца вызывается бегущим полем напряжений. Образование этого поля может быть обусловлено, как уже говорилось, либо различием плотностей исходных и конечных продуктов (изотермический механизм), либо наве-

дением в образце за счет экзотермики реакции крутых температурных градиентов (неизотермический механизм). Естественно, что оба фактора могут действовать и одновременно. На данном этапе мы сосредоточились на анализе неизотермического механизма применительно к условиям реализации процесса в массивных цилиндрических образцах, в которых, как было выше показано, реакционные разогревы существенны и роль термонапряжений в актах диспергирования образца должна быть весьма заметна.

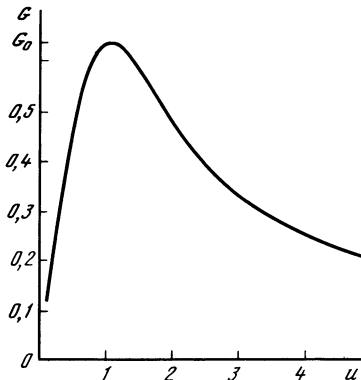
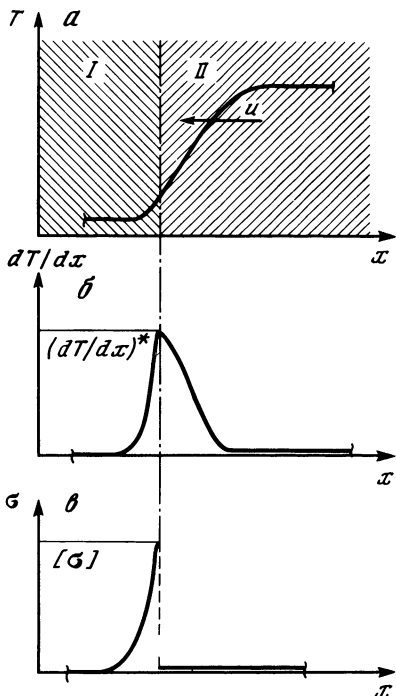
Модель [6] построена на следующих допущениях. Рассматривается образец бесконечной протяженности без учета теплообмена с окружающей средой, т.е. считается, что характерное время реакционного тепловыделения много меньше характерного времени теплоотвода. Эти условия являются основанием для проведения анализа в рамках одномерной модели. В соответствии с гипотезой включение реакции в данном сечении образца происходит при наведении в этом сечении напряжения, превышающего предел прочности твердой матрицы. Поскольку речь идет о термических напряжениях и рассматривается область упругого деформирования и хрупкого разрушения, то применительно к условиям нашей задачи от напряжений можно перейти к температурным градиентам, считая, что между ними существует однозначное соответствие (рис. 4). Такая замена переменных сильно упрощает модель, позволяет исключить из рассмотрения уравнения механики и свести анализ к одному лишь уравнению теплового баланса, в которое вместо предельного напряжения хрупкого разрушения вводится в качестве параметра некоторое критическое значение температурного градиента.

С учетом принятых допущений уравнение описывающее реализующийся в рассматриваемых системах автоволновой процесс, принимает вид, казалось бы аналогичный по своей структуре основному уравнению теории горения [7]:

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} - Ucp \frac{dT}{dx} + Q = 0. \quad (1)$$

Здесь T — температура, x — координата, λ — коэффициент теплопроводности, c и ρ — соответственно теплоемкость и плотность твердой смеси реагентов, Q — тепловой источник (скорость выделения тепла реакции), u — скорость распространения фронта температурной волны.

Принципиальные различия в физической сущности рассматриваемого процесса и процесса горения находят отражения в характере функциональной зависимости Q , являющейся функцией не температуры, а ее производной по координате. Представим Q в виде функции, изменяющейся скачком от 0 до Q^* при $dT/dx = (dT/dx)^*$ и сохраняющей это значение неизменным в течение определенного временного интервала τ . Физически это означает, что тепловыделение в реакции включается только в ответ на хрупкое разрушение образца от термических напряжений, достигающих предела прочности материала. Использование в качестве параметра времени реакции τ отражает те представления развиваемой гипотезы, в соответствии с которыми период сохранения химической активности в ходе образования трещин ограничен в силу действия процесса дезактивации (например, рекомбинации активных частиц на поверхностях разрушения). Применительно к рассматриваемой здесь стационарной модели (1) в параметре τ



Р и с. 4. Качественная иллюстрация характерного вида температурного профиля (а), температурного градиента (б) и поля напряжений (в) во фронте бегущей волны

I — неохваченная реакцией зона образца; *II* — зона образца, диспергированная реакционным процессом

Р и с. 5. Зависимость критического градиента температуры от скорости распространения волны реакции

заклучена информация о реакционной зоне (зоне диспергирования) в бегущем фронте, размер которой равен $U\tau$. В каждой точке внутри этой зоны реакция идет со скоростью Q^* , а вне границ $Q = 0$.

Граничные условия записываются в следующем виде:

$$T|_{x=-\infty} = T_0; \quad T|_{x=+\infty} = T_0 + Q\tau/c\rho \equiv T_m,$$

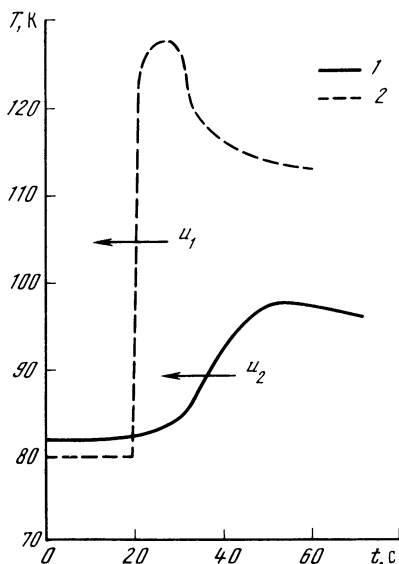
где T_0 — начальная температура образца, а T_m — максимальная температура адиабатического нагрева образца. Модель считается квазигомогенной, т.е. полагается, что характерный размер зерна, образуемого в зоне диспергирования, много меньше ширины фронта температурной волны.

Уравнение (1) с тепловым источником в виде функции указанного типа и приведенными выше граничными условиями интегрируется в аналитической форме и имеет решение в виде бегущей волны. Основное внимание уделим анализу зависимости скорости распространения волны реакции от параметра. Эта зависимость, приведенная на рис. 5, имеет вид

$$g(u) \equiv \{1 - \exp(-u^2)\} u^{-1} = G. \quad (2)$$

Здесь $u = U(\tau/a)^{0,5}$ — безразмерная скорость бегущей волны (подлежащий определению параметр), $G = (dT/dx)^*(a\tau)^{0,5}/(T_m - T_0)$ — заданный безразмерный критический градиент температуры, $a = \lambda/c\rho$ — коэффициент температуропроводности.

Как видно из рис. 5, автоволновое решение уравнения (2) существует только при $G < G_0 \approx 0,64$. Физически это означает, что в описываемой дан-



Р и с. 6. Временная развертка температурных профилей волн распространения реакции $\text{ХБ} + \text{Cl}_2$

Сборка находилась в парах над жидким азотом: 1 – запуск медленным и 2 – быстрым темпами нагрева (разряд конденсатора через нагреватель); $u_1 = 12$ мм/с; $u_2 = 1$ мм/с

ной моделью системе автоволновой режим распространения реакции по твердой смеси реагентов становится невозможен при определенном упрочнении материала образца, снижении теплового эффекта и скорости реакции, увеличении теплопроводности системы.

Существенной особенностью уравнения (1) является неединственность его решений. В области $G < G_0$ одному значению этого параметра соответствуют два значения стационарной

скорости бегущей волны. Сопоставим закономерности обоих режимов волнового процесса. Для упрощения этого анализа перейдем к области $G \ll G_0$, в которой уравнение (2) разрешим относительно u . Выражение для u , соответствующее режиму малой скорости, имеет вид

$$u = a(dT/dx)^* / (T_m - T_0) \quad \text{или} \quad u = a(dT/dx)^* / (Q^* \tau / c\rho), \quad (3)$$

а режиму большой скорости

$$u = (T_m - T_0) / (dT/dx)^* \tau \quad \text{или} \quad u = (Q^* / c\rho) / (dT/dx)^*. \quad (4)$$

В первом режиме, несмотря на различия по физической природе, можно увидеть признаки, сближающие его с классическим горением. Скорость волны зависит от теплопроводности так же, как и в случае распространения пламени. Положение зоны реакции во фронте волны такое же, как при горении, т.е. она находится вблизи максимальной температуры T_m (именно вблизи T_m реализуется критический градиент $(dT/dx)^*$, включающий реакцию), большая же часть температурного профиля фронта соответствует инертному прогреву образца (зона, называемая в теории горения "михельсоновской").

Закономерности второго режима существенно отличаются от первого. Главное, что обращает внимание в (5), – это отсутствие зависимости скорости от теплопроводности. Физическое объяснение этого результата, неожиданного для задачи с кондуктивным теплопереносом, связано с особенностями структуры фронта "быстрой" волны. В отличие от первого режима температурный профиль фронта волны существенно круче и координата включения реакции лежит в передней его части вблизи T_0 . Именно этим фактором и объясняется исчезновение влияния параметра a на волно-

вой процесс, поскольку температурные градиенты велики и близки к критическому значению уже в непрогретой части фронта.

По качественным признакам ближе к наблюдаемым на опыте явлениям режим "быстрой" волны.

Для проверки соответствия механизма явлений, наблюдающихся на опыте и рассмотренных теоретически, представлялось принципиально важным попытаться реализовать в эксперименте второй режим волнового процесса. Иницирование его в соответствии с теорией осуществлялось не импульсным нагревом, а с помощью нагревателя, температура которого медленно поднималась.

В специально поставленных экспериментах образец размещался в криостате над парами кипящего азота. В этих условиях удалось наблюдать наряду с "быстрой" (не отличающейся по скорости от ранее описанной) и "медленную" волну (рис. 6). Как видно, скорость "медленной" волны приблизительно на порядок меньше "быстрой", что совпадает с данными расчета по формулам (3), (4).

Следует отметить, что реализация "медленной" волны на практике сопровождалась определенными трудностями. Не в каждом эксперименте иницирование медленным локальным нагревом вызывало возникновение медленно распространяющейся волны. Часто, несмотря на особенности этого способа иницирования, возбуждалась "быстрая" волна. Наблюдались случаи, когда сформировавшаяся "медленная" волна в процессе своего движения переходила в "быструю". Этот результат является следствием того обстоятельства, что режим "медленной" волны неустойчив.

АВТОВОЛНОВОЕ ПРЕВРАЩЕНИЕ В УСЛОВИЯХ ВСЕСТОРОННЕГО СЖАТИЯ И РОЛЬ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

Из сделанного выше анализа вытекало, что воздействие на прочностные характеристики твердой смеси реагентов может служить инструментом проверки развиваемых представлений. С этой целью поставлены работы по исследованию влияния высоких давлений на динамические характеристики автоволновых превращений [8] и роли динамики нагружения и режимов разрушения образца на возбуждение реакции механическим воздействием [9].

В соответствии с предсказанием теории увеличение давления на образец сопровождалось уменьшением скорости фронта волны реакции. Падение скорости при $6 \cdot 10^8$ Па весьма значительное — приблизительно в 2,5–3 раза по сравнению с процессом в несжатом образце. Таким образом, создание давлением более однородной и упорядоченной структуры матрицы и происходящее при этом ее упрочнение и затруднение трещинообразования замедляют движение бегущей волны диспергирования-превращения, что естественно связано на основании соотношения (4) с возрастанием критического значения температурного градиента $(dT/dx)^*$, приводящего к хрупкому разрушению образца.

Опыты по исследованию роли динамики механического нагружения, определяющей хрупкий или пластический характер разрушения проводили с пленочными образцами толщиной 50–100 мкм, приготовленными из сме-

си хлор-хлористый бутил. На микрофотографиях видно, что удар бойком (давление $\sim 10^8$ Па, за время $\sim 0,1$ с) оставляет после себя сеть трещин. В облученной пленке такое хрупко разрушающее воздействие приводит к возбуждению автоволны.

Локальное воздействие бойком (диаметр 0,6 мм) на подвергнутую той же дозе гамма-облучения пленку в режиме автоволнового распространения химической реакции оставляло явный след в виде вдавленного, пластически деформированного участка, имеющего форму сечения бойка.

Таким образом, ни существенное пластическое деформирование (как при однородном сжатии, так и при локальном срезе) изученных нами твердых реакционных систем, ни статическое их высоконапряженное состояние не являются факторами, обуславливающими наблюдаемые при превращениях этих систем критические явления и автоволновые процессы. Иными словами, в этой серии опытов представления о решающей роли хрупкого разрушения в механизме рассматриваемых явлений получили новые веские доказательства (подробнее см. в [1–3]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное сообщение подводит итоги первого цикла исследований нового для низкотемпературной химической кинетики автоволнового механизма твердофазных превращений. Этот цикл развивался главным образом в рамках феноменологического подхода. Естественно, что перед следующим этапом стоит целый ряд принципиально важных вопросов, связанных с выяснением элементарных стадий превращения, с раскрытием детальных схем перехода механических форм энергии, накапливаемой в твердой матрице, в химическую, с установлением природы химически активных состояний, образующихся во фронте бегущей волны, и определением их времени жизни.

Тем не менее, завершая изложение материала, следует подчеркнуть, что рассмотренный этап, несмотря на определенную ограниченность феноменологических рамок, имеет основополагающее значение в создании и развитии автоволновой идеологии в криохимии твердого тела. Роль выполненного исследования состоит не только в самом факте обнаружения и в разработке простейших макрокинетических моделей явления. Очень важным итогом этапа является вывод о широкой распространенности автоволнового механизма превращения в твердофазной химии низких температур. Представления же о природе самоактивации замороженных растворов реагентов, естественно, будут углубляться по мере накопления нового материала. В этой связи упомянем некоторые данные, выявленные в самое последнее время.

Большой интерес представляют данные по автоволновой полимеризации твердого ацетальдегида [10]. Своеобразие этой системы обусловлено рядом обстоятельств: во-первых, однокомпонентностью исходного реагента, во-вторых, малостью по сравнению с ранее изученными тепловыми эффектами реакции (соизмеримого с теплотой кристаллизации), и, в-третьих, возможностью реализовать в одной химической реакции бегущую волну превращения в образцах с различными исходными фазовыми состояниями — как в стекле, так и в поликристаллической матрице.

В другой полимеризующейся системе – циклопентадиен с хлористым бутилом [11] было зарегистрировано заметное ускорение процесса распространения волны. Эту особенность удалось связать с фактом образования и накопления при γ -облучения в некоторых матрицах трудно конденсирующихся продуктов радиолитического распада (водород, окись углерода, метан). Газы, десорбируясь с осколков матрицы при ее диспергировании во фронте бегущей волны, облегчают дальнейшее разрушение образца, что и является причиной возрастания скорости движения фронта.

В работах [12, 13] приводятся дополнительные соображения, подтверждающие особую роль потенциальной механической энергии, накапливающейся в радиолитических образцах и преобразующейся затем в химическую форму энергии во фронте волны автодиспергирования-превращения.

Из общего ряда исследованных систем резко выделяются по динамике автоволнового превращения процессы взаимодействия в соконденсатах хлора с этиленовыми углеводородами, а также и ранее изученные реакции хлорирования при переходе от γ -радиационного способа активации матрицы к фотолизу [14]. В названных процессах зарегистрированы скорости распространения реакционной волны по твердому образцу реагентов, измеряемые величинами порядка метров и десятков метров в секунду. Есть основания предполагать, что в этих системах реализуется новый механизм автодиспергирования матрицы, близкий по своей сущности к детонационному. Однако здесь речь идет не об обычной схеме возбуждения детонационной волны, известной в классической теории взрыва, а об особом типе детонации, который можно назвать безгазовым.

Активно изучаемые (особенно в последние годы) процессы перехода твердого тела из метастабильного, аморфного состояния в поликристаллическое имеют автоволновой характер и внешне весьма похожи на рассмотренные в данном обзоре режимы твердофазных криохимических реакций [15]. Нельзя исключить в названном классе процессов действие того же самого механизма автодиспергирования, облегчающего фазовое превращение за счет перевода его из объема стекла на поверхность разрушения. Действительно, оба класса процессов близки по физической сущности, связаны с перестройкой твердой матрицы; и тот, и другой экзотермичны с разницей лишь в величине теплового эффекта.

Аналогичным механизмом можно объяснить весьма интересный зарегистрированный в [16] процесс перестройки метастабильной кристаллической фазы высокого давления, закаленной в сплаве Zn–Sb, в другую метастабильную, более устойчивую аморфную фазу.

И последнее. Развиваемые положения вполне правомерно привлечь и для объяснения процессов "холодной" эволюции вещества во Вселенной. В частности, можно представить себе процесс образования из замороженной смеси элементов таких соединений, как аммиак и метан, обнаруживаемых в заметных количествах в твердом состоянии на холодных планетах Солнечной системы. Суточные изменения температур и возникающие при этом термические напряжения в твердом покрове планеты являлись инструментом его непрерывного разрушения, вследствие чего и происходило химическое связывание компонентов, диспергируемых в солнечной мельнице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барелко В.В., Баркалов И.М., Гольданский В.И., Занин А.М., Кирюхин Д.П. Высокоскоростные автоволновые режимы превращения в низкотемпературной химии твердого тела // Успехи химии. 1989. Т. 74. С. 339–384.
2. Barelko V.V., Barkalov I.M., Goldanskii V.I., Kiryukhin D.P., Zanin A.M. Autowave modes of conversion in low-temperature chemical reactions in solids // Adv. Chem. Phys. 1988. Vol. 74. P. 339–384.
3. Барелко В.В., Баркалов И.М., Гольданский В.И., Занин А.М., Кирюхин Д.П. Автоволновые режимы превращения в низкотемпературной химии твердого тела: Препр. ОИХФ АН СССР. Черноголовка, 1988. 48 с.
4. Баркалов И.М., Кирюхин Д.П. Исследование полимеризации в твердых и вязких средах калориметрическим методом // Высокомолекуляр. соединения А. 1980. Т. 22, № 4. С. 723–737.
5. Занин А.М., Кирюхин Д.П., Баркалов И.М., Гольданский В.И. Твердофазные низкотемпературные превращения, инициированные механическим разрушением // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33, № 6. С. 336–339.
6. Барелко В.В., Баркалов И.М., Ваганов Д.А., Занин А.М., Кирюхин Д.П. Об одной модели автоволнового процесса в низкотемпературных твердофазных химических реакциях // Хим. физика, 1983, Т. 2, № 7. С. 980–984.
7. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 263 с.
8. Занин А.М., Кирюхин Д.П., Никольский В.С., Баркалов И.М., Гольданский В.И. Влияние высоких давлений на автоволновые процессы в низкотемпературных химических реакциях // Изв. АН СССР. Сер. хим. 1983. № 6. С. 1228–1231.
9. Кирюхин Д.П., Занин А.М., Барелко В.В., Баркалов И.М., Гольданский В.И. Влияние скорости нагружения образцов на развитие автоволнового процесса в низкотемпературных твердофазных реакциях // ДАН СССР. 1986. Т. 288, № 2. С. 406–409.
10. Кичигина Г.А., Кирюхин Д.П., Занин А.М., Баркалов И.М., Гольданский В.И. Автоволновое распространение полимеризации твердого ацетальдегида, инициированной его хрупким разрушением при 4,2–77 К // Хим. физика. 1988. Т. 7, № 4. С. 543–547.
11. Кичигина Г.А., Кирюхин Д.П., Занин А.М., Баркалов И.М. Автоволновой режим низкотемпературной радиационной полимеризации циклопентадиена // Высокомолекуляр. соединения. 1989. Т. 9. С. 410–421.
12. Кирюхин Д.П., Барелко В.В., Баркалов И.М. Аморфизация кристаллического метанола при низкотемпературном радиолизе // ДАН СССР. 1989. Т. 306, № 3. С. 654–657.
13. Барелко В.В., Кирюхин Д.П., Занин А.М., Баркалов И.М. Правомерны ли представления об исключительной роли стабилизированных радикалов и ионов в радиационно-химических твердофазных превращениях // Химия высоких энергий. 1989. Т. 6. С. 543–548.
14. Баркалов И.М., Гольданский В.И., Занин А.М., Кирюхин Д.П. Автоволновой режим низкотемпературного хлорирования в фотолизированном стеклообразном растворе хлора в хлористом бутиле // ДАН СССР. 1987. Т. 296, № 4. С. 891–894.
15. Шкловский В.А. Тепловая неустойчивость фронта фазового превращения при распаде "замороженных" метастабильных состояний // ЖЭТФ. 1982. Т. 82, № 2. С. 536–547.
16. Баркалов О.И., Белаш И.Т., Большаков А.И., Понятовский Е.Г. Калориметрическое исследование аморфизации и последующей кристаллизации фазы высокого давления в системе Zn–Sb // ФТТ. 1988. Т. 30, № 9. С. 2724–2729.

КОГЕРЕНТНОЕ УСИЛЕНИЕ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ

С.П. БОНДАРЕВ

1. В настоящей работе рассматривается когерентное усиление слабых сигналов в среде, состоящей из двухуровневых атомов с неоднородно уширенным контуром спектральной линии. Показано, что при больших усилениях слабых сигналов формируются импульсы, близкие к отклику усилителя на δ -импульс. Отличие входного импульса от δ -образного приводит к появлению в выражении для огибающей усиленного импульса медленно меняющейся функции, определяемой спектром входного импульса.

Случай, когда влияние неоднородного уширения несущественно, рассмотрен в [1]. Вывод работы [1] о близости усиленного импульса к автомодельному согласуется с выводом настоящей работы, поскольку при отсутствии неоднородного уширения автомодельное решение совпадает с откликом на δ -импульс.

2. Уравнения, описывающие распространение импульса в двухуровневой усиливающей среде с неоднородно уширенным контуром спектральной линии, имеют вид

$$\partial_z u = \alpha_0 \int d\Delta g(\Delta) R(\Delta), \quad (1)$$

$$\partial_\tau R = -i\Delta R + nu, \quad (2)$$

$$\partial_\tau n = -\frac{1}{2}(uR^* + u^*R). \quad (3)$$

Здесь $u = \mu E/\hbar$, $R = iP/\mu N_0$, где E и P – медленно меняющиеся амплитуды электрического поля и поляризации, μ – дипольный момент перехода, N_0 – начальная плотность инвертированных атомов. Величина n определяет разность населенностей верхнего и нижнего уровней, $\tau = t - z/c$ – запаздывающее время, c – скорость света, $\alpha_0 = 2\pi N_0 \omega_0 \mu^2/\hbar c$, ω_0 – несущая частота входного импульса. Функция $g(\Delta)$ описывает контур неоднородного уширения. Ниже мы будем предполагать, что $g(\Delta)$ – четная функция. Частота ω_0 совпадает с положением максимума контура неоднородного уширения.

Предполагается, что усиливающая среда занимает полупространство $z > 0$ и на границе среды при $z = 0$ задан слабый входной импульс $u(z = 0, t) = u_0(\tau)$ такой, что $u_0(\tau) = 0$ при $\tau < 0$. Длительность входного импульса τ_p меньше времени релаксации T_2^* , обусловленной неоднородным уширением.

На начальной стадии усиления, когда интенсивность импульса не слишком велика и можно пренебречь изменением инверсии, т.е. положить в (1)–(3) $n = 1$, реализуется линейный режим усиления. Огибающую импульса в этом случае можно представить в виде интеграла

$$u(z, \tau) = (2\pi)^{-1} \int d\nu \epsilon(\nu) \exp[izk(\nu) - i\tau\nu], \quad (4)$$

где

$$k(\nu) = \alpha_0 \int d\Delta \frac{g(\Delta)}{\nu - \Delta}, \quad (5)$$

а $\epsilon(\nu)$ – спектр входного импульса.

Импульсы, образующиеся при больших линейных усилениях, обладают характерными свойствами. Рассмотрим эти свойства.

3. Большие усиления реализуются при достаточно большой длине усилителя z и на достаточно больших временах τ после прихода начала импульса. Интеграл (4) при этих значениях $\{z, \tau\}$ содержит быстро меняющуюся функцию $\exp[izk(\nu) - i\nu\tau]$. Для его приближенного анализа применим метод перевала.

Вычислив интеграл (4) с помощью метода перевала, получим следующее приближенное выражение для огибающей:

$$u(z, \tau) = A(z, \tau) \exp[\psi(z, \tau)], \quad (6)$$

где

$$A = \epsilon(\nu_1) [-2\pi iz \partial_\nu^2 \kappa(\nu_1)]^{-1/2}, \quad (7)$$

$$\psi = i [zk(\nu_1) - \tau\nu_1]. \quad (8)$$

При четной функции $g(\Delta)$ функция ψ принимает вещественные положительные значения. Мы предположили здесь, что основной вклад в (4) вносит одна точка перевала $\nu_1 = \nu_1(z, \tau)$, которая находится из уравнения

$$z \partial_\nu \kappa - \tau = 0. \quad (9)$$

В случае, когда учитывается вклад нескольких точек перевала, огибающая представляется в виде суммы выражений типа (6).

Если усиленный импульс наблюдается на временах $\tau \ll T_2^*$, влияние релаксации пренебрежимо мало. Положив в (5) $g(\Delta) = \delta(\Delta)$, находим для этого случая $\kappa(\nu) = \alpha_0/\nu$. Выражение (6) при этом имеет вид

$$u(z, \tau) = \frac{\epsilon(i\sqrt{\alpha_0 z/\tau})}{2\pi^{1/2}(\tau^3/\alpha_0 z)^{1/4}} \exp(2\sqrt{\alpha_0 z\tau}). \quad (10)$$

Из условий применимости выражения (6) следует, что A — медленно меняющаяся функция, ψ — быстро меняющаяся функция времени. Выделив в (6) множитель $\epsilon(\nu_1)$, представим (6) в виде

$$u(z, \tau) = \epsilon(\nu_1) \Theta(z, \tau). \quad (11)$$

Функция

$$\Theta(z, \tau) = [-2\pi iz \partial_\nu^2 \kappa(\nu_1)]^{-1/2} \exp[izk(\nu_1) - i\nu_1\tau] \quad (12)$$

описывает отклик усилителя на δ -образный входной импульс. В случае входного импульса $u_0(\tau) = u^0 \delta(\tau)$ имеем $\epsilon(\nu_1) = u^0 = \text{const}$. Отличие входного импульса от δ -образного приводит к появлению в выражении для огибающей медленно меняющейся функции $\epsilon(\nu_1)$, определяемой спектром входного импульса на частоте $\nu_1 = \nu_1(z, \tau)$, которая находится из уравнения (9). Поскольку быстро меняющаяся функция $\exp \psi$ определяется откликом усилителя на δ -импульс, огибающая импульса, образующегося при больших линейных усилениях, локально ведет себя как огибающая импульса, образующегося в случае δ -образного входного импульса.

Покажем, что свойство близости усиленного импульса к отклику усилителя на δ -импульс и его связь со спектром слабого входного импульса сохраняются на нелинейной стадии усиления.

4. Для анализа импульса, образующегося на нелинейной стадии усиления

слабого сигнала, используем метод обратной задачи рассеяния. Стандартные детали этого метода для усилителя приведены в [1, 2]. Решение задачи сводится при этом к исследованию системы сингулярных интегральных уравнений. Вычислив с помощью метода перевала интегралы, стоящие в этих уравнениях, получим следующее приближенное выражение для огибающей:

$$u(z, \tau) = 2\partial_\tau \psi \operatorname{sech}(\psi - \ln |4\partial_\tau \psi / A|) \exp[i \arg(A/\partial_\tau \psi)], \quad (13)$$

где A и ψ определяются выражениями (7) и (8). При $|A/4\partial_\tau \psi|^2 < 1$ (13) переходит в выражение (6), описывающее импульс в случае больших линейных усилениях. Если отсутствует неоднородное уширение, (13) имеет вид

$$u(z, \tau) = 2 \left(\frac{\alpha_0 z}{\tau} \right)^{1/2} \operatorname{sech} \left(2\sqrt{\alpha_0 z \tau} - \ln \left| \frac{8(\pi^2 \alpha_0 z \tau)^{1/4}}{\epsilon(i\sqrt{\alpha_0 z/\tau})} \right| \right) \times \\ \times \exp[i \arg(\epsilon(i\sqrt{\alpha_0 z/\tau}))]. \quad (14)$$

Импульс, формирующийся на нелинейной стадии усиления, имеет осциллирующую структуру. Выражения (13), (14) описывают этот импульс в области первого основного фрагмента.

Как и в случае больших линейных усилениях, из условия применимости выражения (13) следует, что A — медленно меняющаяся функция, ψ — быстро меняющаяся функция. Поскольку зависящая от входного импульса функция A является медленно меняющейся, локальное поведение огибающей усиленного импульса определяется нелинейным откликом усилителя на слабый δ -импульс. Отличие входного импульса от δ -обратного приводит к появлению в выражении для огибающей медленно меняющейся функции $\epsilon(\nu_1)$, определяемой спектром входного сигнала на частоте $\nu_1 = \nu_1(z, \tau)$, которая находится из уравнения (9).

Импульс, образующийся при больших линейных усилениях, близок к отклику от δ -импульс. Это свойство имеет место независимо от того, применим метод обратной задачи рассеяния для анализа импульса на нелинейной стадии усиления или неприменим. Система уравнений (1)–(3), которая может быть проинтегрирована с помощью метода обратной задачи рассеяния, представляет возможность обоснования предположения о том, что свойство близости усиленного импульса к отклику на δ -импульс, которое реализуется при больших линейных усилениях, сохраняется на нелинейной стадии усиления.

Решение нелинейных уравнений, соответствующее слабому входному сигналу, можно построить исходя из решений соответствующих слабому входному δ -импульсу. Такой подход представляет интерес в тех случаях, когда неприменим метод обратной задачи рассеяния. Если известно выражение для отклика усиления $G(u^0, z, \tau)$ на слабый δ -импульс $u_0(\tau) = u^0 \delta(\tau)$, решение, соответствующее слабому входному сигналу, получим, считая параметр u^0 медленной функцией от $\{z, \tau\}$. Связь u^0 с входным импульсом установим, сшивая решение задачи усиления, полученное в линейном приближении, с выражением для $G(u^0, z, \tau)$ в области их перекрытия. Из выражения (11), определяющего огибающую при больших линейных усилениях, следует, что отличие входного импульса от δ -образного приведет к замене u^0 на $\epsilon(\nu_1)$. Соответственно на нелинейной стадии

усиления импульс, обусловленный слабым затравочным сигналом, будет описываться выражением

$$u(z, \tau) = G(\epsilon(\nu_1), z, \tau). \quad (15)$$

Если несущественно влияние неоднородного уширения, система уравнений (1)–(3) эквивалентна уравнению синус-Гордона. В этом случае, как показано в [1], при больших усилениях слабых сигналов формируются импульсы, близкие к автомодельному. Этот вывод согласуется с результатом настоящей работы, поскольку при отсутствии неоднородного уширения автомодельное решение соответствует входному δ -импульсу. Ряд моделей когерентного взаимодействия импульсов с нелинейной средой, когда при усилении слабых сигналов образуются импульсы, близкие к автомодельному, рассмотрен в [3].

При отсутствии неоднородного уширения усиленный импульс описывается выражением

$$u(z, \tau) = (\alpha_0 z / \tau)^{1/2} S(\zeta, S_0), \quad (16)$$

где $\zeta = (\alpha_0 z \tau)^{1/2}$ – автомодельная переменная. Автомодельный параметр S_0 является медленной функцией от $\{z, \tau\}$ и определяется спектром входного импульса $S_0 = \epsilon(\nu_1)$.

В [1] утверждается, что S_0 определяется поведением огибающей входного импульса в окрестности начала этого импульса. Этот вывод справедлив в случае длинного усилителя при больших значениях $|\nu_1| = (\alpha_0 z / \tau)^{1/2}$, когда выполняется условие

$$(\alpha_0 z / \tau)^{1/2} \gg \tau_p^{-1}. \quad (17)$$

В этом случае вследствие действия обрезывающей функции $\exp[-\eta(\alpha_0 z / \tau)^{1/2}]$ интеграл

$$\epsilon(\nu_1) = \int_0^{\infty} d\eta u_0(\eta) \exp[-\eta(\alpha_0 z / \tau)^{1/2}] \quad (18)$$

будет зависеть от поведения $u_0(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$. Другой режим усиления, когда S_0 определяется площадью входного импульса, исследовался теоретически и экспериментально в работе [4]. Из (18) следует, что этот режим реализуется для коротких входных импульсов при умеренных длинах усилителя, когда $|\nu_1|$ мало и выполняется условие, обратное (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Манаков С.В. Распространение ультракороткого оптического импульса в двухуровневом лазерном усилителе // ЖЭТФ. 1982. Т. 83, № 1. С. 68–83.
2. Габитов И.Р., Захаров В.Е., Михайлов А.В. Уравнения Максвелла–Блоха и метод обратной задачи рассеяния // ТМФ. 1985. Т. 63, № 1. С. 11–34.
3. Заболоцкий А.А. Многоволновое когерентное взаимодействие и нелинейное частотное смещение // ЖЭТФ. 1989. Т. 94, № 11. С. 33–45.
4. Варнавский О.П., Головлев В.В., Киркин А.Н. и др. Когерентное распространение импульсов малой площади в активированных кристаллах // ЖЭТФ. 1986. Т. 90, № 5. С. 1596–1609.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И КИНЕТИКА МАГНОНОВ

В.С. ЛЬВОВ

ВВЕДЕНИЕ

В последние два десятилетия неуклонно возрастает интерес к сильно неравновесным системам. Прежде всего он связан с изучением поведения веществ при высоких уровнях мощности внешнего воздействия: диэлектриков в поле мощной лазерной волны, магнетиков в сильных СВЧ-полях, плазмы, нагреваемой до термоядерных температур, и т.д. Фактически появилась новая физическая дисциплина — *физика нелинейных волн*. Ее задача — изучать по возможности с единой точки зрения явления и процессы, возникающие при возбуждении, распространении и взаимодействии волн конечной амплитуды в различных средах. При этом выясняется, например, что образование "девятого вала" в штормовом море, самофокусировка света и коллапс ленгмюровских волн в плазме имеют общую физическую причину.

В физике нелинейных волновых процессов, которой посвящены Горьковские школы, глава о спиновых волнах (магнонах) является одной из наиболее продвинутых. Одна из причин этого в том, что эксперименты на спиновых волнах в магнитодиэлектриках гораздо более просты, чем аналогичные эксперименты на звуке в кристаллах, на ленгмюровских и других типах волн в плазме, в нелинейной оптике и др. Часто их можно проводить при комнатной температуре, в хорошо освоенном диапазоне частот, на монокристаллах отличного качества. Спиновые волны легко возбуждаются СВЧ магнитным полем до существенно нелинейного уровня, когда их поведение целиком определяется взаимодействием между собой. В этой области имеется богатый экспериментальный материал и хорошо разработанные, далеко продвинутые теоретические модели. Они несомненно могут оказаться полезными для развития других глав нелинейной физики. К сожалению, эти результаты относительно мало известны. Цель настоящей статьи — привлечь внимание теоретиков и экспериментаторов, работающих в физике плазмы, нелинейной оптике, гидродинамике, нелинейной акустике и т.п., к родственной им области — нелинейным спиновым волнам. Я думаю, что уменьшение барьера отчужденности между этими главами нелинейной физики будет взаимно плодотворным. Для того чтобы способствовать этому, я написал книгу "Нелинейные спиновые волны" [1] (М.: Наука, 1987), которая в существенно переработанном и более современном виде будет опубликована в издательстве "Шпрингер" под названием "Нелинейная динамика и кинетика магнонов".

1. НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНОНЫ В МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКАХ

1.1. Магнитоупорядоченные диэлектрики

В настоящее время известно огромное количество веществ (диэлектриков, полупроводников и металлов, как кристаллических, так и аморфных), обладающих магнитной структурой. Это означает, что в их состав входят парамагнитные атомы (ионы) с нескомпенсированными спиновыми магнитными моментами электронов $\mu = \mu_B S$ (μ_B — магнетон Бора, $1/2 \leq S \leq 7/2$ — спин атома). Эти моменты при низких температурах определенным образом ориентированы друг относительно друга. В простейшем случае — у *ферромагнетиков* — магнитные моменты всех атомов параллельны. В результате возникает макроскопический магнитный момент, равный их сумме. Физическая причина, приводящая к магнитному упорядочению, — *обменное взаимодействие*. Оно имеет электростатическую природу и связано с принципом Паули, запрещающим двум электронам находиться в одном квантово-механическом состоянии. Гамильтониан обменного взаимодействия

$$H_{ex} = -JS_1 S_2 \quad (1)$$

называется *гейзенберговским*, J — *обменный интеграл*. В ферромагнетиках $J > 0$. По порядку величины $S(S+1)J/3 \approx T_C$ — температура Кюри. При $T > T_C$ магнитное упорядочение исчезает. У разных веществ T_C варьируется в пределах 1–1000 К.

1.2. Спиновые волны и уравнения движения

В возбужденном состоянии *плотность магнитного момента* $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ зависит от координаты \mathbf{r} и времени t . Эта зависимость разлагается в ряд по плоским волнам, которые при $T \ll T_C$ являются слабо взаимодействующими. Они называются *спиновыми волнами* или *магнонами*. Точно так же звуковые волны называют фононами, когда хотят подчеркнуть их квантово-механические свойства.

Обменное взаимодействие при $T \ll T_C$ с высокой точностью фиксирует модуль $M(\mathbf{r}, t)$. Таким образом, спиновые волны — это волны прецессии магнитного момента. $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ подчиняется феноменологическому *уравнению Блоха* [1]

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = g \frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}} \times \mathbf{M}, \quad (2)$$

которое описывает эту прецессию и, кроме M , сохраняет полную энергию магнетика W (W — функционал от $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$, $g \approx \mu_B/\hbar$ — магнитомеханическое отношение электрона).

1.3. Классический гамильтонов формализм и спиновые волны в магнетиках

Мы видим, что уравнение Блоха (2) имеет специфический вид, совершенно непохожий, например, на уравнения Максвелла в нелинейном диэлектрике. Последние кардинально отличаются от уравнений Эйлера для сжимаемой жидкости. Между тем спиновые, электромагнитные или звуковые волны — это прежде всего волны, т.е. колебания среды, передающиеся эстафетно из одной точки в другую. Если мы интересуемся только особенностями распространения волн малой (но конечной) амплитуды, например явлением дифракции или самофокусировки, то совершенно не обязательно знать, что именно колеблется — магнитный момент, электрическое поле или плотность среды. Вся информация о свойствах среды, необходимая и достаточная для изучения распространения в ней взаимодействующих волн, содержится в их законе дисперсии $\omega(\mathbf{k})$. Точно так же можно думать, что есть другие универсальные функции свойств среды, знания которых достаточно для описания взаимодействия волн. Такие функции возникают при переходе к гамильтонову методу описания движения среды. Этот метод применим к широкому классу слабо взаимодействующих и слабо диссипативных волновых систем. Он проявляет их общие свойства.

1.3.1. Переход к каноническому описанию магнонов. Запишем уравнения Блоха (2) в гамильтоновом виде [1] :

$$i\delta a/\delta t = \delta H/\delta a^* \quad (3)$$

Здесь H — функция Гамильтона, которая в данном случае представляет собой энергию W , выраженную через канонические переменные $a(\mathbf{r}, t)$, $a^*(\mathbf{r}, t)$. Они связаны с намагниченностью преобразованием, найденным в 1969 г. Захаровым, Львовым, Старобинцем [1] :

$$\begin{aligned} M_x + iM_y &= a[2gM_0(1 - gaa^*/2M_0)]^{1/2}, \\ M_x - iM_y &= a^*[2gM_0(1 - gaa^*/2M_0)]^{1/2}, \quad M_z = M_0 - gaa^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Это классический аналог преобразования Гольдштейна—Примакова, связывающего операторы спина \hat{S} с бозе-операторами \hat{a} , \hat{a}^+ . Канонические переменные a , a^* суть классический предел \hat{a} , \hat{a}^+ .

1.3.2. Функция Гамильтона при малой нелинейности. При малой нелинейности, когда $gaa^* \ll M_0$ можно разложить функцию Гамильтона H в ряд по $a(\mathbf{r}, t)$, $a^*(\mathbf{r}, t)$. В импульсном \mathbf{k} -представлении это разложение имеет вид:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 + H_{\text{int}}, \quad H_{\text{int}} = H_3 + H_4 + \dots, \\ H_0 &= \text{const}, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Постоянная H_0 , не зависящая от a , a^* , не входит в уравнения (3) и ее можно опустить. Члены первого порядка по a , a^* в H_1 отсутствуют, поскольку мы предполагаем, что в отсутствие волн, когда $a = 0$, среда находится в равновесии. Среди членов второго порядка по a , a^* не выписаны слагаемые с $a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k}}^* a_{-\mathbf{k}}^*$. Если они появятся, то их можно устранить

с помощью линейного канонического ($U-V$) -преобразования

$$b_k = U_k a_k + V_k a_{-k}^* \quad (6)$$

соответствующим выбором U_k и V_k . Впредь мы будем считать, что это преобразование сделано и гамильтониан H_2 имеет вид (5). Тогда в переменных a линеаризованные уравнения движения становятся тривиальными:

$$\partial a_k / \partial t + i\omega_k a_k = 0. \quad (7)$$

Они описывают распространение невзаимодействующих спиновых волн с законом дисперсии $\omega(\mathbf{k})$. Вся информация о взаимодействии волн содержится в коэффициентах разложения H_{int} в ряд по a, a^* :

$$\begin{aligned} H_3 &= \frac{1}{2} \sum_{1,2,3} [V(1,2,3) a_1^* a_2 a_3 + \text{к.с.}] \delta(1-2-3) + \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{123} [U(123) a_1 a_2 a_3 + \text{к.с.}] \delta(1+2+3), \\ H_4 &= \frac{1}{2} \sum_{12,34} T(12,34) a_1^* a_2^* a_3 a_4 \delta(1+2-3-4). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее $a_j = a(\mathbf{k}_j)$, $V(1,2,3) = V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ и т.п., $\sum_{1,2,3} = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$ и т.п. Физический смысл H_3, H_4 легко понять из аналогии с квантовой механикой: H_3 описывает трехволновые процессы типа $1 \leftrightarrow 0$ и $0 \leftrightarrow 3$ (превращение одной волны в две и наоборот, рождение трех волн из вакуума и наоборот) Выписанные члены в H_4 описывают четырехволновые процессы рассеяния типа $2 \leftrightarrow 2$. В присутствии внешнего СВЧ магнитного поля накачки в гамильтониане H_{int} возникает дополнительный член

$$H_p = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} [h \exp(-i\omega_p t) V_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{-\mathbf{k}}^* + \text{к.с.}], \quad (9)$$

описывающий *параметрическое возбуждение* спиновых волн — процесс индуцированного распада фотона с частотой ω_p и нулевым волновым вектором на два магнона с волновыми векторами $\mathbf{k}, -\mathbf{k}$ и частотами $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_p/2$.

1.3.3. Уравнения движения. Нужно сказать, что уравнения (5) сохраняют энергию магнонной системы H . Между тем в реальной ситуации всегда есть магнон-фононное взаимодействие, взаимодействие магнонов с дефектами решетки и т.п., которые приводят к небольшой диссипации их энергии. Этот процесс можно учесть феноменологически — добавляя в уравнениях движения мнимую часть $\gamma_{\mathbf{k}}$ и частоте $\omega_{\mathbf{k}}$. В результате получим

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \gamma_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} = \frac{-i\delta H_{int}}{\delta a_{\mathbf{k}}^*}. \quad (10)$$

Гамильтониан взаимодействия (5)–(9) вместе с уравнениями движения (10) дает каноническую формулировку задачи о нелинейном поведении магнонов, понятную физикам, не знакомым с магнетизмом. Вся магнитная специфика заключена в функции $\omega(\mathbf{k})$ и коэффициентах гамильтониана взаимодействия.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МАГНОНОВ

Широкий класс нелинейных волновых процессов описывается динамическими уравнениями движения для комплексных амплитуд волн (10), в которых существенны фазовые соотношения. Их поэтому естественно назвать *динамическими процессами* в отличие от процессов другого класса, которые описываются кинетическими уравнениями для чисел заполнения и которые можно назвать *кинетическими процессами*. Среди динамических процессов можно назвать процесс слияния двух волн в одну, генерацию второй гармоники, распад одной волны на две, различные типы четырехволновых процессов, включая самофокусировку и коллапс [1–3]: В настоящей лекции мы рассмотрим только один динамический процесс – параметрическое возбуждение магнонов. Это явление было открыто в 1957 г. Суллом [4] (*поперечная накачка*, когда $h \perp M$) и Моргенталером в 1960 г. [5] (*параллельная накачка*, когда $h \parallel M$).

2.1. Введение в S-теорию

2.1.1. Параметрическая неустойчивость. Для того чтобы вычислить порог параллельной накачки, подставим в уравнения (10) $H_{int} = H_p$ из формулы (9). В результате имеем линейные уравнения движения для медленных амплитуд $b_k(t)$:

$$b_k(t) = a_k(t) \exp(i\omega_p t/2), \quad b_{-k}^* = a_{-k}^* \exp(-i\omega_p/2), \quad (11)$$

$$\partial b_k / \partial t + [\gamma_k + i(\omega_k - \omega_p/2)] b_k + ihV_k b_{-k}^* = 0. \quad (12)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$b_k(t) = |b_k(0)| \exp(\nu_k t - i\varphi_k), \quad (13)$$

$$b_{-k}^*(t) = |b_{-k}(0)| \exp(\nu_k t + i\varphi_{-k}).$$

Тогда для *инкремента параметрической неустойчивости* ν_k имеем

$$\nu_k = -\gamma_k \pm [|hN_k|^2 - (\omega_k - \omega_p/2)^2]^{1/2}. \quad (14)$$

Минимальный порог возбуждения h_1 (соответствующий $\max \nu_k = 0$) определяется из условия

$$h_1 = \min(\gamma_k / |V_k|). \quad (15)$$

При $h > h_1$ начинается экспоненциальный рост (13) амплитуды пар с инкрементом (14). При этом из (12) следует, что

$$\cos(\varphi_k + \varphi_{-k} - \varphi_p) = (\omega_k - \omega_p/2) / |hV_k|. \quad (16)$$

Это означает, что на линейной стадии параметрической неустойчивости устанавливается определенное соотношение между фазами волн в паре. Фазовую корреляцию волн с равными по модулю и противоположно направленными волновыми векторами по аналогии со сверхпроводимостью можно назвать *спариванием*.

2.1.2. Диагональный гамильтониан S-теории. Рост амплитуды волн продолжается до тех пор, пока не станет существенным их взаимодействие между собой. Поскольку все параметрически возбужденные волны имеют почти равные частоты (близкие к $\omega_p/2$), трехволновое взаимодействие

оказывается нерезонансным. Из гамильтониана H_4 (8) наиболее существенными оказываются следующие слагаемые:

$$H_S = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} [T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} |a_{\mathbf{k}}|^2 \cdot |a_{\mathbf{k}'}|^2 + \frac{1}{2} S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}^* a_{-\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'} a_{-\mathbf{k}'}],$$

$$T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = T_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}; \mathbf{k},\mathbf{k}', \quad S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = T_{\mathbf{k},-\mathbf{k}; \mathbf{k}',-\mathbf{k}'}. \quad (17)$$

Они либо не зависят от фаз волн вообще, либо зависят только от суммы фаз $\Psi_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}} + \varphi_{-\mathbf{k}}$ в парах. Все остальные члены в H обращаются в нуль при усреднении по хаотическим фазам волн и вносят вклад в уравнение движения лишь во втором порядке теории возмущений по H_4 . Редукция H_4 до вида H_S (17), диагонального по парам волн, была предложена Захаровым, Львовым, Старобинцем [6] и привела к созданию простой и эффективной "S-теории", в рамках которой в 1970–74 гг. удалось продвинуться в изучении запорогового поведения магновов, объяснить качественно многие наблюдаемые в эксперименте эффекты, в большинстве случаев получить удовлетворительное качественное согласие с экспериментом [7]. Впоследствии S-теория была воспринята (в основном советскими) исследователями, которыми были получены интересные и важные экспериментальные результаты по нелинейному поведению параметрических магновов, связанные с новым пониманием физики происходящих явлений. Наиболее подробно S-теория и относящиеся к ней эксперименты изложены в моей монографии [1] и обзорах [7–9]. Я уверен, что значение этих результатов выходит за рамки физики магнитоэлектриков. Они сыграли и, безусловно, будут продолжать играть важную роль в развитии физики нелинейных волн в других средах. Здесь будет кратко изложены основы S-теории.

2.1.3. Основные уравнения S-теории. Подставляя в уравнения (10) гамильтониан взаимодействия, получаем основные уравнения S-теории:

$$\begin{aligned} \partial b_{\mathbf{k}} / \partial t + [\gamma_{\mathbf{k}} + i(\omega_{NL}(\mathbf{k}) - \omega_p/2)] b_{\mathbf{k}} + iP_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^* &= 0, \\ \partial b_{-\mathbf{k}}^* / \partial t + [\gamma_{\mathbf{k}} - i(\omega_{NL}(\mathbf{k}) - \omega_p/2)] b_{-\mathbf{k}}^* - iP_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Они отличаются от линейных уравнений (12), описывающих параметрическую неустойчивость, только перенормировкой частоты $\omega(\mathbf{k}) \rightarrow \omega_{NL}(\mathbf{k})$ и накачки $hV(\mathbf{k}) \rightarrow P(\mathbf{k})$, возникающей из-за первой и второй сумм в (17) соответственно:

$$\omega_{NL}(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) + 2 \sum_{\mathbf{k}'} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} |b_{\mathbf{k}'}|^2, \quad P_{\mathbf{k}} = hV_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'} S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}'}. \quad (19)$$

Отсюда видно, что приближение диагонального гамильтониана (17) по существу является приближением самосогласованного поля. Классическими примерами этого приближения является теория молекулярного поля Кюри–Вейсса, теория Ландау фазовых переходов второго рода, теория Ландау слабонадкритических вторичных течений в гидродинамике, а также БКШ-теория сверхпроводимости.

2.2. Основное состояние в S -теории

2.2.1. Устойчивость основного состояния. Полагая в (18) $\partial b_{\mathbf{k}}/\partial t = 0$, рассмотрим стационарные решения этого уравнения. Сразу видно, что в тех точках \mathbf{k} -пространства, где $b_{\mathbf{k}} = 0$, детерминант этой системы равен нулю:

$$|P_{\mathbf{k}}|^2 = \gamma_{\mathbf{k}}^2 + [\omega_{NL}(\mathbf{k}) - \omega_p/2]^2. \quad (20)$$

Это уравнение двух поверхностей, причем на произвольной их части можно положить $b_{\mathbf{k}} = 0$. Таким образом, мы имеем бесчисленное множество стационарных состояний. Требование их устойчивости относительно нарастания волн в точках, где в стационаре $b_{\mathbf{k}} = 0$ сильно сужает их класс. Во-первых, решение устойчиво, если две поверхности (20) сливаются в одну:

$$\omega_{NL}(\mathbf{k}) = \omega_p/2. \quad (21)$$

Во-вторых, в тех точках *резонансной поверхности* (21), где $b_{\mathbf{k}} \neq 0$,

$$|P_{\mathbf{k}}| = \gamma_{\mathbf{k}}, \quad i\gamma_{\mathbf{k}} = P_{\mathbf{k}} \exp(i\Psi_{\mathbf{k}}). \quad (22)$$

В остальных частях этой поверхности

$$|P_{\mathbf{k}}| < \gamma_{\mathbf{k}}. \quad (23)$$

Отметим, что неоднозначность решений стационарных уравнений и устранение этого произвола (полное или частичное) с помощью условий устойчивости не является специфическим для S -теории. Это общее свойство приближения самосогласованного поля в теории нелинейных волн.

2.2.2. Простейшее решение S -теории. В простейшем изотропном случае, когда $V_{\mathbf{k}} = V$, $\gamma_{\mathbf{k}} = \gamma$ и $S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = S$, очевидно, есть изотропное решение $N(\Omega) = N/4\pi$ ($\Omega = \theta, \varphi$ – полярный и азимутальный углы). При этом из (19) и (22) следует, что

$$N = \sum_{\mathbf{k}} |b_{\mathbf{k}}|^2 = [(hV)^2 - \gamma^2]^{1/2} / |S|, \quad hV \sin \Psi = \gamma. \quad (24)$$

Второе соотношение – условие баланса энергии: $W_+ = W_-$, где $W_+ = \omega_p hVN \sin \Psi$ – энергия, поступающая из накачки, $W_- = \gamma(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{k}})N$ – расходуемая энергия. Ограничение амплитуды N происходит из-за того, что фазы пар $\Psi_{\mathbf{k}}$ отличаются от оптимального значения $\pi/2$, при котором поток энергии в систему максимален. Соотношение (24) имеет принципиально важное значение в S -теории. Оно проверялось в прямых экспериментах по измерению фазы пар Ψ при параметрическом возбуждении магнонов в ферромагнетике $Y_3Fe_5O_{12}$ [10, 11]. Было показано, что в пределах ошибки эксперимента точки ложатся на биссектрису координатного угла в полном соответствии с (24). Это свидетельствует о том, что S -теория правильно описывает существенные черты запорогового поведения параметрических магнонов.

2.2.3. Перестройки функции распределения с ростом надкритичности. Условию устойчивости (23) $P(\Omega) < \gamma(\Omega)$, которое определяет угловую функцию распределения $N(\Omega)$ параметрических магнонов, полезно придать геометрическую интерпретацию: поверхность $P(\Omega)$ лежит целиком внутри поверхности $\gamma(\Omega)$ и касается ее в точках, где $N(\Omega) = 0$. В случае аксиальной симметрии, характерном для многих ферромагнетиков

(в том числе, и для $Y_3Fe_5O_{12}$), это касание происходит по линиям $\theta = \text{const}$, $0 < \varphi < \pi/2$ (по параллелям резонансной поверхности). Первое касание происходит на экваторе ($\theta = \pi/2$) и состояние с одной группой пар $N(\theta, \varphi) = N_1 \delta(\theta - \pi/2)/2$ существует в широком диапазоне надкритичностей $h_1 \leq h \leq h_2$. Для $Y_3Fe_5O_{12}$ $h_2 \approx (3 \div 4)h_1$. Для магнитных полей $H > 1500$ Э при $h = h_2$ происходит касание на параллели $\theta \approx 50^\circ$ и рождается вторая группа пар, при больших h рождается третья группа и т.д. При $H < 1500$ Э в $Y_3Fe_5O_{12}$ эволюция функции распределения происходит совсем иначе: при $h > h_2$ (зависящем от H) поверхность $P(\Omega)$ "прилипает" к поверхности $\gamma(\Omega)$ на полосе $|\theta - \pi/2| < \delta$, ширина которой $\delta \propto (h - h_2)$. В результате возникает непрерывное распределение пар вблизи экватора с шириной 2δ . Описанные здесь выводы теории находятся в количественном соответствии с данными эксперимента на $Y_3Fe_5O_{12}$ [12].

2.3. Нестационарная самосогласованная динамика параметрических магнонов

2.3.1. Спектр коллективных колебаний параметрических магнонов и методы их возбуждения. Линеаризуя нестационарные уравнения S -теории (18) на фоне основного состояния системы и полагая амплитуды возмущений $\alpha_k, \alpha_k^* \propto \exp(-\Omega t)$, получим систему однородных по α, α^* алгебраических уравнений. Условие их разрешимости определяет частоту $\text{Re } \Omega$ и затухание $\text{Im } \Omega$ коллективных колебаний. В аксиально симметричном случае можно получить [1]

$$\Omega_m = -i\gamma \pm [4S_m(2T_m + S_m)N_1^2 - \gamma^2]^{1/2}. \quad (25)$$

Здесь m – номер аксиальной моды, T_m и S_m – соответствующие фурье-гармоники по аксиальному углу φ функций (17) $T_{kk'}$ и $S_{kk'}$; для простоты предполагается, что $T_m = T_{-m}$, $S_m = S_{-m}$. Надо сказать, что коллективные колебания могут быть пространственно неоднородными. В таком случае Ω_m зависит от их волнового вектора k , причем Ω_m в (25) есть $\Omega_m(0)$. В простейших случаях закон дисперсии $\Omega_m(k)$ приведен в монографии [1].

Описанные выше коллективные колебания системы параметрических магнонов можно возбуждать (так же как и колебания любой другой природы) различными методами – с помощью резонансного внешнего воздействия, параметрически или ударным образом. И все эти способы их возбуждения были реализованы в экспериментах на ферро- и антиферромагнетиках. Проще всего построить теорию и интерпретировать экспериментальные данные для резонансного возбуждения коллективных колебаний. Именно таким образом в 1972 г. они и были обнаружены экспериментально и исследованы Зауткиным, Львовым, Старобинцем [13]. В этой работе на образец $Y_3Fe_5O_{12}$, помимо параллельной накачки, подавался другой СВЧ-сигнал с частотой ω , которая отличалась от частоты накачки ω_p на частоту коллективных колебаний Ω_0 . При этом роль резонансной внешней силы играли биения между двумя СВЧ-сигналами. Впоследствии в 1975 г. [14] Орлом и Старобинцем был реализован прямой резонансный метод возбуждения с помощью переменного магнитного поля на частоте Ω , которая лежит в радиочастотном диапазоне (порядка 1 МГц). В принципе

коллективные колебания можно возбуждать и звуком, частота и волновой вектор которого совпадают с их частотой и волновым вектором. К резонансным методам возбуждения коллективных колебаний примыкает изящный метод ударного возбуждения с помощью резкого изменения частоты и фазы накачки, предложенной Прозоровым и Смирновым в 1974 г. [10]. Их данные по собственной частоте коллективных колебаний в антиферромагнитном $MnCO_3$ так же, как и данные работы [13] по резонансной частоте коллективных колебаний в ферромагнетике $Y_3Fe_5O_{12}$ находятся в количественном соответствии с формулой

$$\Omega_0^2 = 4\gamma^2(2T_0 + S_0)S_0[(h/h_1)^2 - 1]^{1/2}, \quad (26)$$

следующей из теории (24), (25) (при $\gamma \ll hV$). Это еще раз свидетельствует о том, что S -теория верно описывает параметрическое возбуждение магнонов в ферро- и антиферромагнетиках.

Кроме рассмотренного выше линейного взаимодействия ($H_m \alpha^* + \text{к.с.}$) коллективных колебаний параметрических магнонов α с внешним радиочастотным полем H_m , приводящего к резонансу на частоте $\Omega = \Omega_0$, S -теория предсказывает нелинейное взаимодействие типа ($H_m \beta^* \beta^* + \text{к.с.}$). Оно должно приводить к параметрическому резонансу коллективных мод β в радиочастотном поле с частотой $\Omega = 2\Omega_0$. К этому же эффекту, как нетрудно понять, относится и неустойчивость исходной моды α с частотой Ω , возбуждаемой радиочастотным полем, по отношению к распаду на две моды β с частотой $\Omega/2$. В результате действия обоих механизмов при превышении некоторой критической амплитуды радиочастотного поля H_m возникает *двойной параметрический резонанс* магнонов – параметрическое возбуждение коллективных колебаний в системе параметрически возбужденных магнонов. Это явление было обнаружено и экспериментально исследовано Зауткиным и др. в 1977 г. [15].

2.3.2. Автоколебания намагниченности при параметрическом возбуждении магнонов. Уже в первых экспериментах по параметрическому возбуждению магнонов в 1961 г. Хартвиком, Перессини и Вейссом [16] было обнаружено, что стационарный режим часто не устанавливается и намагниченность совершает сложные автоколебания вокруг среднего значения. С тех пор вопрос о физической природе автоколебаний был одним из центральных в задаче о параметрическом возбуждении. Выдвигались различные гипотезы (см., например, монографию [17]), однако все они представляют только исторический интерес. В рамках S -теории автоколебания получили естественное объяснение как результат развития неустойчивости коллективных колебаний, о которых речь шла выше. Действительно, если

$$S_m(2T_m + S_m) > 0, \quad (27)$$

то из (25) следует, что $\text{Im } \Omega_m > 0$. Как видно из этой же формулы, при этом $\text{Re } \Omega_m = 0$, т.е. неустойчивость основного состояния является чисто периодической. Поэтому взаимодействие различных мод автоколебаний является предельно сильным и вопрос об их поведении на нелинейной стадии требует компьютерного анализа. Он был приведен в работах [18, 19]. Существенным результатом этих численных экспериментов было доказательство того, что при надкритичностях $p = h/h_1$, меньших $p_c \approx 1 \div 1,5$ дБ, система параметрических магнонов выходит на устойчивый пре-

дельный цикл, областью притяжения которого является все фазовое пространство. При $p > p_c$ траектории вблизи этого цикла становятся экспоненциально неустойчивыми, причем средний по циклу инкремент расходимости (показатель Ляпунова) растет пропорционально $p - p_c$. При малых $p - p_c$ вблизи предельного цикла образуется узкий слой, заполненный экспоненциально неустойчивыми траекториями, и происходит переход к хаотическим автоколебаниям. Эти и другие особенности автоколебаний в численном эксперименте на нестационарных уравнениях S -теории (18) находятся в качественном соответствии с результатами лабораторных исследований [18, 19]. Что касается условий возникновения автоколебаний, то детальные экспериментальные исследования Зауткина и Старобинца [20], проведенные на ферромагнитном $Y_3Fe_5O_{12}$ в широком температурном и полевым интервале на образцах различной формы, показали хорошее количественное соответствие критерию неустойчивости (27).

3. НЕЛИНЕЙНАЯ КИНЕТИКА МАГНОНОВ

3.1. Кинетическое уравнение, термодинамическое равновесие и релаксация

Выше мы отмечали, что взаимодействие широких в k -пространстве пакетов магнонов можно описывать с помощью кинетического уравнения для чисел заполнения $n_k(t) = \langle |b_k|^2 \rangle / \hbar$

$$\frac{1}{2} dn_k/dt = St_k \{ n_k \}. \quad (28)$$

Столкновительный член St является функционалом от чисел заполнения в некоторой области k -пространства. Если основным является трехмагнонное взаимодействие H_3 (8), то

$$\begin{aligned} St_k^{(3)} \{ n_k \} = & \frac{\pi}{\hbar^2} \sum_{12} |V_{k,12}|^2 [n_1 n_2 (n_k + 1) - \\ & - n_k (n_1 + 1) (n_2 + 1) \delta(\omega_k - \omega_1 - \omega_2) \delta(k - k_1 - k_2) + \\ & + \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{12} |V_{2,k1}|^2 [n_2 (n_k + 1) (n_1 + 1) - n_k n_1 (n_2 + 1)] \times \\ & \times \delta(\omega_2 - \omega_k - \omega_1) \delta(k_2 - k - k_1). \end{aligned} \quad (29)$$

Если же трехмагнонное взаимодействие отсутствует или запрещено законом сохранения энергии-импульса, то ведущим является четырехмагнонное взаимодействие и

$$\begin{aligned} St_k = St_k^{(4)} \{ n_k \} = & \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{123} |T_{k1,23}|^2 \times \\ & \times [(n_k + 1) (n_1 + 1) n_2 n_3 - n_k n_1 (n_2 + 1) (n_3 + 1)] \times \\ & \times \delta(\omega_k + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3). \end{aligned} \quad (30)$$

Выражения (29), (30) легко получаются с помощью "золотого правила квантовой механики" в теории возмущений и приведены в курсах теоретической физики, нелинейной акустики, и т.д.

Кинетические уравнения (28)–(30) имеют стационарное решение в виде распределения Бозе–Эйнштейна

$$n_{\mathbf{k}} = n_0(\mathbf{k}) = [\exp(\hbar \omega_{\mathbf{k}}/T) - 1]^{-1}, \quad (31)$$

описывающего термодинамическое равновесие с температурой T .

Если для одного $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ $n(\mathbf{k})$ слегка отклонить от равновесия (31), то

$$[n_0(\mathbf{k}_0) - n(\mathbf{k}_0)] \propto \exp(-2 \gamma_0(\mathbf{k}_0) t), \quad (32)$$

где $\gamma_0(\mathbf{k})$ – *декремент затухания магнов* – коэффициент пропорциональности при $n(\mathbf{k})$ в столкновительном члене. Для трехмагнонных процессов распада

$$\gamma_d(\mathbf{k}) = \frac{\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{k}=1+2} |V_{\mathbf{k},12}|^2 [n_1 + n_2 + 1] \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_1 - \omega_2). \quad (33a)$$

Для трехмагнонных процессов слияния:

$$\gamma_{sp}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{2=\mathbf{k}+1} |V_{2,\mathbf{k}1}|^2 [n_1 - n_2] \delta(\omega_2 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_1). \quad (33b)$$

Для четырехмагнонных процессов рассеяния

$$\begin{aligned} \gamma_{sc}(\mathbf{k}) = & (\pi/\hbar^2) \sum_{\mathbf{k}+1=2+3} |T_{\mathbf{k}1,23}|^2 \times \\ & \times [n_1(n_2 + n_3 + 1) - n_2 n_3] \delta(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3). \end{aligned} \quad (33)$$

Вблизи от равновесия вместо $n(\mathbf{k}_i)$ можно подставить распределение Бозе–Эйнштейна (31). Разумеется, наибольший интерес представляют кинетические эффекты вдали от термодинамического равновесия, которые и составляют предмет нелинейной кинетики. Из большого разнообразия нелинейных кинетических эффектов в магнетиках, мы рассмотрим только два эффекта, которые представляются мне поучительными.

3.2. Затухание монохроматической волны в нелинейной среде [21]

Выше, при вычислении декремента затухания волны $\gamma(\mathbf{k})$ мы считали, что весь остальной резервуар магнов ($s \neq \mathbf{k}_0$) находится в термодинамическом равновесии. Можно думать, что это так, если число магнов в изучаемом пакете много меньше обычного числа тепловых магнов N_T . Однако законы сохранения энергии и импульса разрешают участвовать в релаксации узкого ($\Delta \omega_{\mathbf{k}} \ll \omega_{\mathbf{k}}$) пакета лишь небольшой части общего резервуара тепловых волн ΔN_T . Поэтому уже при сравнительно малой интенсивности узкого пакета N , сравнимой с ΔN_T , диссипируемая им энергия может существенно отклонить в этой области числа заполнения тепловых магнов от равновесных значений. При этом время релаксации пакета начинает зависеть от его амплитуды, т.е. релаксация становится нелинейной.

Особенно сильно этот эффект должен проявиться при релаксации монохроматической волны, с которой в соответствии с кинетическим уравнением могут взаимодействовать волны с волновыми векторами \mathbf{k} , лежащи-

ми на некоторой поверхности. Например, для процессов распада волн с $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ эта поверхность имеет вид

$$\omega(\mathbf{k}_0) = \omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}). \quad (34)$$

Формально число волн ΔN_T на этой поверхности равно нулю. Если же учесть, что в действительности закон сохранения (34) выполняется с точностью до затухания $\gamma(\mathbf{k})$, то

$$\Delta N_T^0 \simeq 4\pi n_0(\mathbf{k}) k^2 \gamma(\mathbf{k}) / (\partial \omega / \partial \mathbf{k}). \quad (35)$$

Для этого пакета волн можно схематически написать кинетическое уравнение в виде

$$\partial N_T / \partial t = -\gamma(\mathbf{k}) [\Delta N_T - \Delta N_T^0] + \Phi, \quad (36)$$

где $\Phi \simeq \gamma(\mathbf{k}_0) |A|^2$ — приходный член, отражающий тот факт, что в каждом акте релаксации монохроматической волны с амплитудой A число волн в нашем пакете увеличивается на одну. Поэтому приходный член в уравнении (36) должен совпадать (с точностью до изменения знака) с уходным членом для монохроматического пакета. При $\Phi = 0$ уравнение (36) описывает релаксацию числа волн ΔN_T к термодинамически равновесному значению ΔN_T^0 (35). Из (35), (36) следует оценка для относительного изменения числа волн в пакете:

$$a = \frac{\delta n(\mathbf{k})}{n_0(\mathbf{k})} \simeq \frac{\Delta N_T - \Delta N_T^0}{N_T^0} \simeq \frac{\gamma(\mathbf{k}_0) |A|^2}{\gamma^2(\mathbf{k})} \frac{\partial \omega / \partial \mathbf{k}}{n_0(\mathbf{k}) k^2}.$$

Если подставить сюда оценку для

$$\gamma(\mathbf{k}_0) \simeq |V|^2 k^2 n(\mathbf{k}_0) / (\partial \omega / \partial \mathbf{k}),$$

следующую из (29), то

$$a \simeq |V|^2 \cdot |A|^2 / \gamma^2(\mathbf{k}). \quad (37)$$

Понятно, что при $a \ll 1$

$$\gamma(\mathbf{k}_0, |A|^2) - \gamma(\mathbf{k}_0, 0) \simeq a \gamma(\mathbf{k}_0, 0). \quad (38)$$

Если же $a \approx 1$, то затухание монохроматической волны должно существенно отличаться от равновесного. Аккуратные вычисления [21] дают для процессов распада

$$\gamma_d(\mathbf{k}, |A|^2) = \frac{\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{k}=1+2} \frac{|V_{\mathbf{k},12}|^2 (n_1 + n_2 + 1) \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_1 - \omega_2)}{[1 - |V_{\mathbf{k},12}|^2 \cdot |A|^2 / \gamma_1 \gamma_2]^{1/2}} \quad (39a)$$

и для процессов слияния

$$\gamma_{sp}(\mathbf{k}, |A|^2) = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{2=\mathbf{k}+1} \frac{|V_{2,\mathbf{k}1}|^2 (n_1 - n_2) \delta(\omega_2 - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_1)}{[1 + |V_{2,\mathbf{k}1}|^2 \cdot |A|^2 / \gamma_1 \gamma_2]^{1/2}}. \quad (39b)$$

При $A = 0$ эти выражения совпадают с выражениями (33). При малых A подтверждается оценка (38). Существенно, что в процессах слияния затухание уменьшается с ростом A (эффект просветления среды), а в процессах распада — увеличивается. При $A = A_1$, где

$$A_1 = (\gamma_1 \gamma_2)^{1/2} / |V_{\mathbf{k},12}|, \quad (40)$$

затухание (39а) формально обращается в бесконечность. Напомним, что формула (40) дает выражение для порога распадной неустойчивости монохроматической волны. При $A > A_1$ вторичные волны с $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k} = \mathbf{k}_2$ растут во времени экспоненциально и формула (39а) неприменима.

3.3. Кинетическая неустойчивость магнонов

Пусть в магнетике параметрически возбуждены магноны на резонансной поверхности $2\omega(\mathbf{k}_p) = \omega_p$, $n_p(\mathbf{k})$ — их функция распределения. В изотропном случае

$$n_p(\mathbf{k}) = N_p k_p^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_p/2) 2\pi^2 (\partial\omega/\partial k). \quad (41)$$

Общая функция распределения $n(\mathbf{k})$ включает термодинамически равновесную часть $n_0(\mathbf{k})$:

$$n(\mathbf{k}) = n_0(\mathbf{k}) + n_p(\mathbf{k}). \quad (42)$$

Отличие функции распределения (42) от равновесия изменяет затухание волн во всем \mathbf{k} -пространстве. Изучим вначале случай, когда для параметрических магнонов разрешены процессы распада

$$\omega_p/2 = \omega(\mathbf{k}_p) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_p = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (43)$$

Рассмотрим теперь затухание магнонов с $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$. Для них формулы (43) соответствуют процессам слияния. В соответствии с (33) и (42):

$$\begin{aligned} \gamma_{sp}(\mathbf{k}_1) = & \gamma_{sp}^0(\mathbf{k}_1) - \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{k}_p = \mathbf{1} + \mathbf{2}} |V(\mathbf{k}_p, \mathbf{1}, \mathbf{2})|^2 \times \\ & \times n_p(\mathbf{k}_p) \delta(\omega_p/2 - \omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \quad (44)$$

Первое слагаемое в (44) возникает из-за равновесной части функции распределения (42), второе — обусловлено параметрическими магнонами. Принципиально, что этот член — отрицательный и при достаточно большом n_p общее затухание $\gamma_{sp}(\mathbf{k}_1)$ так же может стать отрицательным. В результате число магнонов с $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$ будет экспоненциально нарастать. Это явление можно назвать *кинетической неустойчивостью первого порядка*. Порог кинетической неустойчивости можно оценить из (44), подставляя туда распределение (41). В результате имеем

$$\gamma_{sp}(\mathbf{k}_1) - \gamma_{sp}^0(\mathbf{k}_1) \simeq |V|^2 N_p/k_p (\partial\omega/\partial k), \quad (45a)$$

$$|V|^2 N_{cr} \simeq k (\partial\omega/\partial k) \gamma \simeq \omega_k \gamma_k. \quad (45b)$$

Сравнивая эту оценку с формулой (40), видим, что порог кинетической неустойчивости первого порядка (по числу волн N_p в пакете) в ω_k/γ_k раз выше, чем порог распадной неустойчивости (монохроматической волны), которая носит динамический характер.

Теория кинетической неустойчивости, обусловленной трехволновыми процессами, наиболее подробно развита для антиферромагнетиков, в которых разрешены распады параметрических магнонов на магноны и звук [22]. Экспериментально проявления этой неустойчивости обнаружены в антиферромагнитном FeVO_3 [23]. Совсем недавно неустойчивость первого рода была обнаружена в $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ [24].

В нераспадной области спектра кинетическая неустойчивость первого порядка невозможна. Однако с ростом отклонения распределения магнов (42) от равновесия (с ростом N_p) возникает *кинетическая неустойчивость второго порядка*, в которой два параметрических магнона, сливаясь, дают два вторичных магнона. В отличие от (43) законы сохранения имеют вид

$$\omega_p = \omega(k_{p1}) + \omega(k_{p2}) = \omega(k_1) + \omega(k_2), \quad (46)$$

$$k_{p1} + k_{p2} = k_1 + k_2$$

Подставляя функцию распределения (42) в формулу (33), имеем следующее выражение для затухания вторичных манонов:

$$\gamma_{se}(k_1) = \gamma_{sc}^0(k_1) - (2\pi/\hbar^2) \sum_{k_{p1} + k_{p2} = k_1 + k_2} |T(k_{p1}, k_{p2}, k_1, k_2)|^2 n_p(k_{p1}) n_p(k_{p2}) \delta(\omega_p - \omega_1 - \omega_2). \quad (47a)$$

Используя (41), получим оценку

$$\gamma_{sc}(k_2) - \gamma_{sc}^0(k_2) \simeq \pi |TN_p|^2 / k_p (\partial\omega/\partial k). \quad (47b)$$

Видно, что при достаточно большом $N_p = N_{cr}$ затухание вторичных магнов может стать отрицательным. Для N_{cr} из (47b) следует

$$|TN_{cr}|^2 \simeq \gamma(k_1) k_p (\partial\omega/\partial k). \quad (48)$$

Здесь в затухание γ мы включили вклад всех существенных процессов релаксации.

Более детальный анализ, проведенный в [25], показал, что в ферромагнетиках неустойчивость (48) имеет минимальный порог для магнов на дне спин-волнового спектра ($k_1 \parallel M, k_p \gg k_1 \simeq (10^2 \div 10^3) \text{ см}^{-1}$, у которых затухание $\gamma(k_2)$ минимально. Экспериментально кинетическая неустойчивость второго порядка обнаружена в 1981 г. [24]. Самым ярким ее проявлением является электромагнитное излучение вторичных магнов, возникающее пороговым образом с ростом амплитуды накачки. Это излучение достаточно монохроматично $\Delta\omega_{rad}/\omega_{rad} \simeq (10^{-3} \div 10^{-2})$, его частота

$$\omega_{rad} = \omega(k_1) + \omega(k_2) \quad (49)$$

практически не отличается от удвоенной частоты дна спин-волнового спектра ω_0 и линейно зависит от внешнего магнитного поля H . Для сферических образцов

$$\omega_0 = g(H - 4\pi M_0/3), \quad (50)$$

где $g = 2\pi \cdot 2,8 \text{ ГГц/кЭ}$ — магнитомеханическое отношение электрона. Механизм излучения ясен из (49): два вторичных магнона с $k = k_1$ и $k = -k_1$, сливаясь, дают фотон с $k = 0$. Прямое излучение вторичных магнов на частоте ω_0 сильно подавлено из-за того, что $k_1 \simeq 10^2 \text{ см}^{-1}$ много больше, чем волновой вектор фотона на частоте $\omega_0 = k_{ph} \approx 10^{-1} \text{ см}^{-1}$. В работах [26, 27] развита нелинейная теория кинетической неустойчивости в ферритах, находящаяся в хорошем соответствии с экспериментом на $Y_3Fe_5O_{12}$.

Существует много других кинетических эффектов, возникающих при все большем отклонении магненов от равновесия. Их изучение только начинается. Я надеюсь, что смогу рассказать о них на одной из следующих Школ по нелинейным волнам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987.
2. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Неустойчивость монохроматических спиновых волн // ФТТ. 1969. Т. 11, № 10. С. 2923–2932.
3. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Новый механизм ограничения амплитуды спиновых волн при параллельной накачке // ФТТ. № 11. С. 2047–2055.
4. Suhl H. Theory of ferromagnetic resonance at high signal power // Phys. and Chem. Solids. 1957. Vol. 1. P. 209–227.
5. Morgenthaler F.R. Parallel-pumped magnon instabilities in a two-sublattice ferromagnetic crystal // J. Appl. Phys. 1960. Vol. 31, suppl. P. 95S–97S.
6. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Стационарная нелинейная теория параметрического возбуждения волн // ЖЭТФ. 1970. Т. 59, № 10. С. 1200–1214.
7. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // УФН. 1974. Т. 114, № 4. С. 609–654.
8. L'vov V.S. Solutions and nonlinear effects in parametrically excitation of spin waves // Solitons / Eds S.E. Trullinger, et al. Amsterdam: Elsevier, 1986.
9. L'vov V.S., Prozorova L.A. Spin waves above the threshold of parametric excitations // Spin waves and magnetic excitations / Eds A.S. Borovik-Romanov, S.K. Sinka. Amsterdam: Elsevier, 1988. P. 1.
10. Прокурова Л.А., Смирнов А.И. Нелинейные высокочастотные свойства железогитриевого гранта при низких температурах // ЖЭТФ. 1974. Т. 69, № 2. С. 758–763.
11. Мелков Г.А., Круценко И.В. Механизм ограничения амплитуды параметрически возбужденных спиновых волн // ЖЭТФ. 1977. Т. 72, № 2. С. 564–575.
12. Зауткин В.В., Львов В.С., Подивилов Е.В. Перестройки распределения при параметрическом резонансе в ферритах // ЖЭТФ. 1989. Т. 96, № 7. С. 314–328.
13. Зауткин В.В., Львов В.С., Старобинец С.С. О резонансных явлениях в системе параметрических спиновых волн // ЖЭТФ. 1972. Т. 63, № 3. С. 182–190.
14. Орел Б.И., Старобинец С.С. Радиочастотная магнитная восприимчивость и коллективный резонанс магненов при параллельной накачке // ЖЭТФ. 1975. Т. 68, № 1. С. 317–325.
15. Зауткин В.В., Львов В.С., Орел Б.И., Старобинец С.С. Коллективные колебания магненов большой амплитуды и двойной параметрический резонанс // ЖЭТФ. 1977. Т. 72, № 4. С. 272–284.
16. Hartwick T.S., Peressini E.R., Weiss M.T. Suppression of subsidiary absorption in ferrites by modulation techniques // Phys. Rev. Lett. 1961. Vol. 6, N 3. P. 176–177.
17. Моносов Я.А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971.
18. Львов В.С., Мушер С.Л., Старобинец С.С. Теория автоколебаний намагниченности при параметрическом возбуждении спиновых волн // ЖЭТФ. 1973. Т. 64, № 3. С. 1084–1097.
19. Гранкин В.Л., Львов В.С., Моторин В.И., Мушер С.Л. Вторичная турбулентность параметрически возбужденных спиновых волн // ЖЭТФ. 1981. Т. 81, № 2. С. 757–768.
20. Зауткин В.В., Старобинец С.С. Автоколебания намагниченности при параллельной накачке спиновых волн // ФТТ. 1974. Т. 16, № 3. С. 678–686.
21. Львов В.С. О затухании монохроматической волны в нелинейной среде // ЖЭТФ. 1975. Т. 68, № 1. С. 308–316.
22. Лутовинов В.С., Фалькович Г.Е., Черепанов В.Б. Нравновесные распределения квазичастиц при параметрическом возбуждении в антиферромагнетике с распадным спектром // ЖЭТФ. 1986. Т. 90, № 4. С. 1781–1794.
23. Костюжанский Б.Я., Прокурова Л.А., Свистов Л.Е. Изучение электромагнитного излучения параметрически возбужденными в антиферромагнетике магнонами // ЖЭТФ. 1984. Т. 86, № 1. С. 1101–1116.

24. Лутовинов В.С., Мелков Г.А., Тараненко А.Ю., Черепанов В.Б. Кинетическая неустойчивость спиновых волн первого рода в феррите // ЖЭТФ. 1990. Т. 9, № 3.
25. Лавриненко А.В., Львов В.С., Мелков Г.А., Черепанов В.Б. Кинетическая неустойчивость сильно неравновесной системы спиновых волн и перестраиваемое излучение феррита // ЖЭТФ. 1981. Т. 81, № 2. С. 1022-1036.
26. Львов В.С., Черепанов В.Б. Нелинейная теория кинетического возбуждения волн // ЖЭТФ. 1981. Т. 81, № 3. С. 1406-1422.
27. Тараненко А.Ю., Черепанов В.Б. Поглощение энергии в феррите за порогом кинетической неустойчивости // ЖЭТФ. 1989. Т. 95, № 5. С. 1810-1820.

УДК 530.182

СУДЬБА ГИПОТЕЗЫ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ В ТЕОРИИ РАЗВИТОЙ ВОЛНОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Г.Е. ФАЛЬКОВИЧ

Обычно в утверждение об универсальности спектра развитой турбулентности вкладывают следующий смысл: в интервале масштабов, промежуточных между источником и стоком, турбулентность изотропна и распределение энергии по масштабам зависит от единственного внешнего параметра — потока энергии в k -пространстве [1–3]. В соответствии с этой гипотезой были получены изотропные однопараметрические спектры (называемые обычно колмогоровскими) как для вихревой гидродинамической [1–4], так и для волновой турбулентности в гидродинамике, физике плазмы, акустике [5]. Следует указать, однако, что во всех случаях взаимодействие и волн, и вихрей, помимо энергии, сохраняет суммарный импульс. Любой же реальный источник турбулентности является анизотропным и несимметричным, что приводит к появлению ненулевого импульса системы.

Переносящие малый поток импульса \mathbf{R} стационарные поправки δn_k к несущим поток энергии P слаботурбулентным колмогоровским решениям n_k были построены в работе [6]. Для волн со степенным законом дисперсии $\omega_k \sim k^\alpha$ эти так называемые дрейфовые поправки имеют простой вид

$$\delta n_k/n_k \sim (\mathbf{Rk}) \omega_k / (Pk^2) \sim \cos \theta_k (\omega_k/k) \sim k^{\alpha-1} \cos \theta_k, \quad (1)$$

обусловленный тем, что $y = (\mathbf{Rk}) \omega_k / (Pk^2)$ является единственным безразмерным параметром, который можно составить из рассматриваемых величин.

В случае распадных законов дисперсии $\alpha > 1$, и доля анизотропной части спектра возрастает с ростом k , т.е. при удалении от источника волн в глубь инерционного интервала. В нераспадной ситуации аналогичный эффект имеет место для колмогоровских решений, переносящих поток волнового действия в область длинных волн. В этом случае доля дрейфовой поправки

$$\delta n_k/n_k \sim (\mathbf{Rk}) / (Qk^2) \sim \cos \theta_k k^{-1} \quad (2)$$

также нарастает в глубь инерционного интервала, т.е. в малые k .

В соответствии с результатами работы [6] дрейфовые поправки обращают в нуль интеграл столкновений для волн, линеаризованный на фоне

изотропного колмогоровского решения. Возникает вопрос: устанавливаются ли решения (1) и (2) при наличии анизотропии источника волн?

В работах [7–9] было обнаружено, что дрейфовые поправки устанавливаются на фоне спектров с потоком энергии для капиллярных и звуковых волн и не устанавливаются для спектра гравитационных волн с потоком действия. Исходя из полученного в [8] общего критерия устойчивости изотропных колмогоровских спектров, можно доказать следующую теорему: дрейфовые решения могут устанавливаться только в том случае, когда переносимый ими поток импульса в пространстве масштабов направлен в том же направлении, что и поток основного интеграла движения. Физически это условие представляется совершенно естественным, поскольку приток импульса в систему волн должен быть обусловлен анизотропией источника. Математическая же идея доказательства основана на том, что поток импульса пропорционален производной интеграла столкновений по индексу дрейфового решения, что позволяет связать знак потока с величинами, фигурирующими в критерии работы [8]: знаком разности индексов дрейфового и изотропного решений и знаком линеаризованного интеграла столкновений для анизотропной моды с индексом, равным колмогоровскому. Действительно, легко убедиться непосредственным вычислением, что в трех упомянутых случаях поток импульса направлен в большие k , туда же, куда и поток энергии для капиллярных и звуковых волн, и против потока действия для гравитационных волн.

В тех случаях, когда дрейфовые поправки устанавливаются, их доля в спектре нарастает при удалении от источника в k -пространстве. Таким образом, имеет место структурная неустойчивость изотропного решения: малая анизотропия источника приводит к существенно анизотропному стационарному распределению волн в инерционном интервале. Наличие структурной неустойчивости изотропного колмогоровского решения означает отсутствие простейшей универсальности — одного параметра (потока энергии или действия) недостаточно для задания стационарного распределения. Сколько же необходимо параметров?

Пожалуй, наименее очевиден ответ на этот вопрос для турбулентности звуковых волн с малой положительной дисперсией $\omega_k \propto k^{1+\epsilon}$, $\epsilon \ll 1$. В этом случае, как показано в [8, 9], при наличии малой анизотропии источника в инерционном интервале устанавливаются не только переносящие поток импульса дрейфовые решения (1), но и построенные в [7] стационарные анизотропные поправки, соответствующие высшим угловым гармоникам

$$\delta n_k / n_k \propto P_m (\cos \theta) k^{\epsilon m (m+1)/2}, \quad \epsilon m^2 < 1. \quad (3)$$

Здесь P_m — полиномы Лежандра. При $m = 1$ (3) совпадает с (1). Как видно из (3), чем выше номер гармоники, тем быстрее растет ее доля в спектре при увеличении k . Таким образом, турбулентность слабодиспергирующих волн представляет собой пример наиболее структурно неустойчивой системы — для нее слабоанизотропным источником возбуждается наибольшее число угловых гармоник ($m \simeq \epsilon^{-1/2}$). Для остальных рассмотренных систем (см. [9]) гармоники с номерами выше первого не возбуждаются. Для слабодиспергирующих волн в работах [7, 10] был также построен набор

анизотропных стационарных решений кинетического уравнения

$$n_m(k) = k^{-9/2 + \epsilon m(m+1)/4} P_m^{1/2}(\cos \theta). \quad (4)$$

Эти решения были получены в рамках дифференциального приближения по угловым переменным и справедливы лишь в областях, где $P_m(\cos \theta) > 0$. Они описывают набор невзаимодействующих струй постоянной (по k) угловой ширины порядка π/m .

Наличие решений (4), (3) приводило к предположению о том, что в области больших k угловая форма спектра может быть изрезанной с масштабом порядка малого угла взаимодействия (см. далее (7)). По сути, это бы означало отсутствие всякой универсальности спектра турбулентности в инерционном интервале. Позднее, однако, было обнаружено [11], что для турбулентности звука с положительной дисперсией можно аналитически построить универсальное стационарное решение кинетического уравнения, зависящее от двух потоков сохраняющихся величин – энергии и импульса. Такое решение, разумеется, будет анизотропным.

Кинетическое уравнение для слабодиспергирующих волн имеет следующий вид [5]:

$$\sigma n_k / \partial t = \int k k_1 |k - k_1| [\delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k - k_1})(n_{k_1} n_{k - k_1} - n_k n_{k_1} - n_k n_{k - k_1}) - 2\delta(\omega_{k_1} - \omega_{k - k_1} - \omega_k)(n_k n_{k_1 - k} - n_{k_1} n_{k_1 - k} - n_{k_1} n_k)] dk_1. \quad (5)$$

Полагая закон дисперсии масштабно инвариантным $\omega_k \propto k^{1+\epsilon}$ и слабо отличающимся от акустического ($\epsilon \ll 1$), проинтегрируем (5) по полярному углу и в стационарном случае получим уравнение ($x = k_1/k$):

$$\int_0^1 (1-x)^{1+\epsilon} (2-\epsilon)/(1+\epsilon) x^2 (n_1 n_2 - n_1 n_k - n_2 n_k) dx d\varphi - 2 \int_1^\infty (x^{1+\epsilon} - 1)^{(2-\epsilon)/(1+\epsilon)} x^2 (n_k n_2 - n_1 n_2 - n_1 n_k) dx d\varphi = 0. \quad (6)$$

Здесь $n_1 = n[k_1, \theta_{kk_1}(k_1, \varphi)]$ должно в соответствии с δ -функцией из (5) браться на поверхности, задаваемой соотношениями

$$\cos \theta_{kk_1} = [1 + x^2 - (1-x)^{1+\epsilon}] / (2x) \approx 1 + \epsilon [x \ln x + (1-x) \ln(1-x)]^{(1-x)/x} \quad (7a)$$

в первом интеграле и

$$\cos \theta_{kk_1} = [(x^{1+\epsilon} - 1)^{2/(1+\epsilon)} - 1 - x^2] / (2x) \approx 1 - \epsilon [x \ln x - (x-1) \ln(x-1)]^{(x-1)/x} \quad (7b)$$

во втором интеграле. Что же касается $n_2 = n(k_2, \theta_{kk_2})$, то $\theta_{kk_2} = -x \theta_{kk_1} / (1-x)$ в первом и $\theta_{kk_2} = x \theta_{kk_1} / (x-1)$ – во втором интеграле. Как видно, углы между взаимодействующими волнами малы, за исключением узких областей вблизи $x = 0, 1$, а также $x \rightarrow \infty$. Однако в силу схожести интегралов в кинетическом уравнении (см. далее (9)) эти области не вносят вклада во взаимодействие волн. Будем искать аксиально симметричное решение уравнения (6), зависящее от k, P и $(\mathbf{R}k)$, где \mathbf{R} – поток импульса. В соответствии с размерностным соотношением $Pk \propto$

$\omega R \omega_k$ такое решение должно иметь следующий вид:

$$n_k = P^{1/2} k^{-9/2} f[(\mathbf{Rk}) \omega_k / (Pk^2)] = P^{1/2} k^{-9/2} f(y). \quad (8)$$

Здесь f — неизвестная функция безразмерного параметра y . Малость дисперсии позволяет воспользоваться дифференциальным приближением по переменной y , поскольку

$$\begin{aligned} y_1 &= (\mathbf{Rk}_1) \omega_{k_1} / (k_1^2 P) = \cos \theta_{k_1} \mathbf{R}(k_1/k_a)^\epsilon \approx \\ &\approx (k/k_a)^\epsilon [\cos \theta_{kR} + \sin \theta_{kR} \sin \varphi \theta_{kk_1} - \cos \theta_{kR} \theta_{kk_1}^2 / 2 + \\ &+ \cos \theta_{kR} \ln(k_1/k)], \end{aligned}$$

т.е. $|y_1 - y| \ll 1$. Разложим в (6) $f(y_1)$ и $f(y_2)$ до членов порядка ϵ , затем, разбив второй интеграл на два одинаковых слагаемых, в одном из них совершив замену $x \rightarrow x^{-1}$, а в другом $x \rightarrow (1-x)^{-1}$ (преобразованием Захарова). После этого, учитывая, что $n_k \sim k^{-9/2}$ является точным решением (6), получим следующее уравнение в первом порядке по ϵ :

$$\begin{aligned} &[(df(\frac{df}{dy})^2 + f \frac{d^2f}{dy^2}) \sin^2 \theta_{kR} (\frac{k}{k_a})^\epsilon \int_0^1 x^2 (1-x)^2 [x \ln x + \\ &+ (1-x) \ln(1-x)] [x^{-9/2} (1-x)^{-9/2} - x^{-9/2} - (1-x)^{-9/2}] dx = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение на $f(y)$ стоит множителем при сходящемся интеграле. Решение тривиально находится:

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{ay + b}, & y > -b/a, \\ 0, & y < -b/a. \end{cases} \quad (10)$$

Согласно (8) и (10) n_k должно обратиться в нуль на некоторой поверхности в k -пространстве. На самом деле, при $y \rightarrow -b/a$ резко возрастают производные $f(y)$ и в узкой окрестности поверхности (при $y + b/a \lesssim \sqrt{\epsilon}$) нарушаются условия применимости дифференциального приближения. Решение полного уравнения (6) должно приводить к гладкой, но быстроубывающей на масштабе характерного угла взаимодействия (т.е. $\sqrt{\epsilon}$) функции $f(y)$. При $y \rightarrow -\infty$ $f(y) \rightarrow 0$. Постоянные интегрирования a и b можно включить в определение потоков R и P . При этом константу a следует считать положительной, так как замена $a \rightarrow -a$ означает просто поворот системы координат $\theta \rightarrow \pi - \theta$. А вот два знака b задают два различных семейства решений [9]:

$$n_k = k^{-9/2} (R \omega_k \cos \theta/k + P)^{1/2}, \quad (11a)$$

$$n_k = k^{-9/2} (R \omega_k \cos \theta/k - P)^{1/2}. \quad (11b)$$

Первое из них (11a) соответствует сужающемуся с ростом k спектру. Оно, в частности, должно описывать стационарное распределение, порождаемое слабоанизотропным источником с малым потоком импульса ($R \omega_k \ll Pk$). В этом случае, разлагая (11a) по $P \omega_k / (Pk)$, получим при малых k в нулевом порядке изотропное колмогоровское решение, в первом — дрейфовую поправку (1), в следующих порядках — высшие гармоники (3), доля которых возрастает с ростом k . При больших k практически все волны сосредоточены в правой полусфере. Решение (11b) описывает расши-

ряющийся спектр. Его ширина $\Delta\theta(k)$ увеличивается с ростом k по закону

$$R \omega_k \cos \Delta\theta(k) = Pk.$$

Если на границе инерционного интервала (при $k = k_0$) $R \omega(k_0) \approx Pk_0$, то начальная ширина спектра $\Delta\theta(k_0)$ может быть очень малой. Величину $\Delta\theta(k_0)$ снизу ограничивает только угол взаимодействия $\sqrt{\epsilon}$, ибо при такой ширине теряет силу дифференциальное приближение, в рамках которого получены решения (11). Таким образом, можно думать, что решение (11б) должно порождаться узкими источниками, ширина которых $0 < \Delta\theta \ll \pi/2$. Среди них могут быть и предельно узкие источники с $\Delta\theta$ порядка или даже меньше, чем угол взаимодействия $\sqrt{\epsilon}$. В частности, сильно изрезанный по углу источник может порождать решение, имеющее в качестве промежуточной асимптотики набор узких, но уширяющихся струй (11б), сливающихся при больших k в одно плавное распределение типа (11). Существенно, что в пределе больших k и $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ оба решения (11а) и (11б) совпадают. Спектр определяется только потоком импульса и представляет собой одну широкую струю, угловая форма которой не зависит от вида граничных условий:

$$n_k \rightarrow k^{-9/2 + \epsilon/2} (R \cos \theta)^{1/2}.$$

Для того чтобы ответить на вопрос, какое стационарное решение установится в инерционном интервале при воздействии конкретного источника — многоструйное (4) или универсальное (11), необходимо решить временную задачу установления, что к настоящему моменту не сделано.

Представляется, однако, что наличие решений (11) свидетельствует о возможности универсальной структуры спектра в инерционном интервале. Тот факт, что решения (11) допускают широкий набор граничных условий при малых k (в области источника) — от изотропного до предельно узкого с масштабом $\sqrt{\epsilon}$, видимо, означает, что стационарный спектр, порождаемый произвольным источником, в области больших k имеет универсальную форму (11).

Все изложенное выше приводит к следующей формулировке гипотезы универсальности для спектра развитой волновой турбулентности. Если дрейфовая мода переносит поток импульса в направлении потока изотропного интеграла движения (энергии или действия), то в инерционном интервале спектр является двухпараметрическим (разумеется, если такое решение устойчиво). В противном случае при движении в k -пространстве от источника к стоку спектр изотропизуется и выходит на однопараметрическое колмогоровское решение (также если оно глобально устойчиво).

Я благодарен А.М. Балку, В.Е. Захарову, Е.А. Кузнецову, А.М. Рубенчику, В.С. Львову и А.В. Шафаренко за полезные обсуждения затронутых здесь вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1987. 500 с.
2. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299–307.
3. Обухов А.М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1941. Т. 4. С. 453–458.

4. *Львов В.С., Белиничер В.И.* Масштабно-инвариантная теория развитой гидродинамической турбулентности // ЖЭТФ. 1987. Т. 93, № 2. С. 533–560.
5. *Захаров В.Е.* Колмогоровские спектры слабой турбулентности // Основы физики плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1984. Т. 2.
6. *Кац А.В., Конторович В.М.* Свойства симметрии интеграла столкновений и неизотропные стационарные решения в теории слабой турбулентности // ЖЭТФ. 1973. Т. 84, № 1. С. 151–159.
7. *Львов В.С., Фалькович Г.Е.* Об анизотропных спектрах слабой звуковой турбулентности // ЖЭТФ. 1981. Т. 81, № 2. С. 592–602.
8. *Фалькович Г.Е., Шафаренко А.В.* Влияние слабой анизотропии источника на колмогоровский спектр акустической турбулентности // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 2. С. 297–305.
9. *Zakharov V.E., Balk A.M.* Stability of weak turbulence Kolmogorov spectra // Plasma theory and nonlinear and turbulent process in physics: Proc. Intern. Workshop, Kiev, 1987. Singapore: World sci. publ., 1988. P. 338.
10. *Фалькович Г.Е.* Нелинейные эффекты при взаимодействии звука и параметрически возбуждаемых спиновых волн с тепловыми: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: ИЯФ СОАН СССР, 1984.
11. *Львов В.С., Фалькович Г.Е.* Универсальные двухпоточковые спектры слабой звуковой турбулентности: Препр. ИАНЭ № 399. Новосибирск, 1988. 7 с.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС И САМООРГАНИЗАЦИЯ

УДК 517.9

РЕНОРМХАОС В СИСТЕМАХ, ДЕМОНСТРИРУЮЩИХ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

С.П. КУЗНЕЦОВ

1. РЕНОРМДИНАМИКА И РЕНОРМХАОС

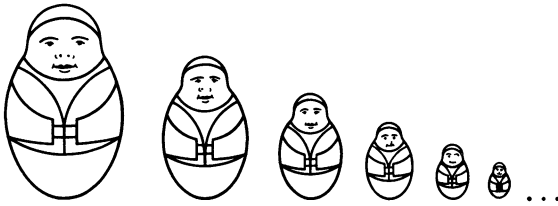
Ренормгрупповой подход — один из мощных инструментов современной теоретической физики, позволяющий анализировать системы, в которых возникают и сосуществуют образования с широким диапазоном пространственных и временных масштабов. Этот подход возник в квантовой теории поля, а затем нашел плодотворное применение в теории фазовых переходов и критических явлений [1]. Наконец, начиная с работ Фейгенбаума [2–4], ренормгрупповой подход активно используется для изучения поведения нелинейных динамических систем у порога возникновения хаоса.

Каково содержание ренормгруппового анализа в контексте задач нелинейной динамики? Первый шаг состоит обычно в дискретизации времени. Описание динамики дается тогда некоторым оператором эволюции \hat{f}_0 , связывающим состояния в n -й и $n + 1$ -й моменты: $\bar{x}_{n+1} = \hat{f}_0[\bar{x}_n]$. Наиболее важным является следующий шаг. Это переход к увеличенному интервалу дискретизации, сопровождающийся подходящим пересчетом масштаба динамической переменной или, более общо, некоторой заменой переменной. На этом этапе вводится новый оператор эволюции, который, очевидно, можно выразить через старый: $\hat{f}_1 = \hat{R}[\hat{f}_0]$. Фигурирующий здесь оператор \hat{R} (обычно нелинейный) называют оператором ренормпреобразования.

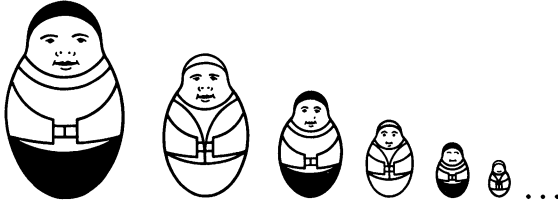
Далее можно повторить описанную процедуру много раз и определить таким образом последовательность операторов эволюции \hat{f}_2, \hat{f}_3 и т.д. Все построение напоминает известную в теории фазовых переходов блочную процедуру Каданова [1] и приводит к содержательным результатам в тех случаях, когда система характеризуется нетривиальной динамикой на разных временных масштабах, включая сколь угодно большие. Это как раз и имеет место на пороге хаоса, возникающего через удвоения периода или через квазипериодические режимы [2–5].

Уравнение, выражающее оператор эволюции на очередном этапе построения через предыдущие, называют уравнением ренормгруппы. Можно сказать, что это уравнение задает динамику в пространстве операторов — ренормдинамику. Порядковый номер этапа построения выступает как аналог времени — ренормвремя.

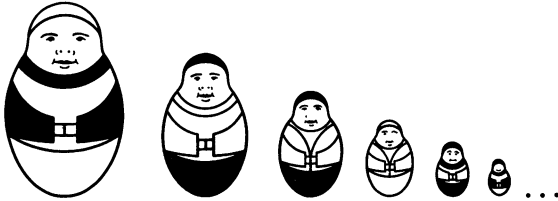
Традиционный тип ренормдинамики — ситуация неустойчивой неподвижной точки в пространстве операторов. Именно этот случай рассматривался в задачах теории фазовых переходов и в первых работах по ренормгрупповому анализу сценариев возникновения хаоса в динамических системах.



a



б



в

Р и с. 1. Матрешки, иллюстрирующие три разных типа ренормдинамики
a – неподвижная точка; *б* – ренормцикл; *в* – ренормхаос

Мыслимы, однако, и такие ситуации, когда уравнение ренормгруппы порождает более сложную ренормдинамику и демонстрирует, например, периодическую или хаотическую зависимость операторов эволюции \hat{f}_n от ренормвремени n . Насколько известно автору, впервые такая возможность обсуждалась в работе Остланда с соавторами [5] применительно к задаче о переходе к хаосу через квазипериодические режимы в отображении окружности и независимо в работах Чирикова и Шепелянского [6, 7], которые рассматривали аналогичную гамильтонову задачу и которым принадлежат сами термины ренормдинамика и ренормхаос.

К каким особенностям структуры фазового пространства и пространства параметров динамических систем ведет наличие того или иного типа ренормдинамики? Переход ко все более большим и большим временным масштабам в ходе описанного построения ассоциирован с рассмотрением все более мелких образований в фазовом пространстве и пространстве параметров. Поэтому нетривиальной ренормдинамике соответствует наличие структур типа вложенных друг в друга матрешек. Если "матрешки" подобны друг другу и каждая последующая меньше предыдущей в одно и то же число раз (скейлинг), то это ренормдинамика типа неподвижной точки (рис. 1, *a*). Если при уменьшении масштаба точное повторение наступает

через некоторое число шагов M , то это ренормцикл периода M (рис. 1, б). Наконец, для ренормхаоса характерно то, что повторения вообще не происходит и подобия (скейлинга) нет, кроме как в среднем, статистическом смысле (рис. 1, в).

Ясно, что должна существовать взаимосвязь между характеристиками ренормдинамики и свойствами структур типа вложенных матрешек в фазовом пространстве и пространстве параметров. В случае, когда уравнение ренормгруппы имеет неподвижную точку, такая связь хорошо известна. В частности, каждому неустойчивому направлению неподвижной точки отвечает существенный параметр задачи, а соответствующее собственное число ренормпреобразования определяет масштабный фактор скейлинга по этому параметру. Случай ренормцикла периода M сводится к неподвижной точке, если определить новое ренормпреобразование как M -ю степень старого. Что же касается ренормхаоса, то вопрос о взаимосвязи его количественных характеристик и масштабных свойств пространства параметров и фазового пространства еще нуждается в дальнейшей проработке.

Для углубления понимания концепции ренормхаоса желательно иметь, конечно, побольше примеров его реализации. Ситуации, изученные в связи с переходом от квазипериодичности к хаосу [5–7], достаточно сложны. Более простые примеры возникают в задачах о поведении систем, демонстрирующих фейгенбаумовский переход к хаосу через удвоения периода, и будут рассмотрены в настоящей работе. Разд. 2 посвящен обсуждению глобальных скейлинговых свойств аттрактора Фейгенбаума с точки зрения ренормхаоса. Здесь развит приближенный подход, проливающий свет на некоторые новые стороны, вообще говоря, известных результатов. В методологическом плане он близок к термодинамическому формализму [8] или формализму трансфер-матрицы [9]. В разд. 3 обсуждается ренормхаос в задачах о периодическом внешнем воздействии на систему Фейгенбаума и о скейлинговых закономерностях в спектре. Этот материал основан частично на наших совместных работах с Пиковским.

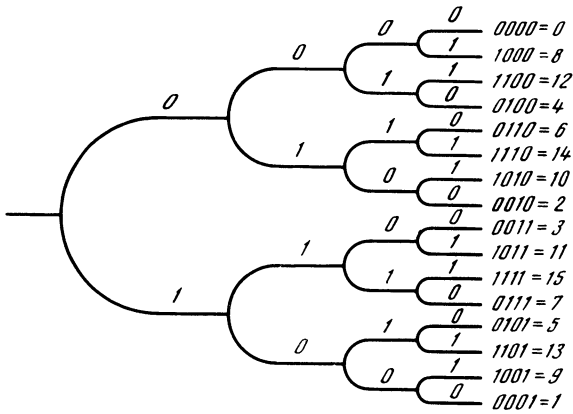
2. ГЛОБАЛЬНЫЕ МАСШТАБНЫЕ СВОЙСТВА АТТРАКТОРА ФЕЙГЕНБАУМА И РЕНОРМХАОС

2.1. Обобщенная ренормализационная схема

Как мы сейчас увидим, ренормхаос возникает уже при изучении простейших традиционных задач теории динамического хаоса. Рассмотрим известное рекуррентное отображение

$$x_{n+1} = 1 - Ax_n^2 \quad (1)$$

и связанный с ним графический образ — дерево Фейгенбаума. Это дерево представляет собой график зависимости элементов циклов отображения (1) от параметра A и показано схематически на рис. 2. Каждому маршруту движения вверх по дереву сопоставлен двоичный код, так что при разветвлении приписывается символ 1 той из двух веток, которая сильнее отклоняется от родительской ветви, а 0 — той, которая отклоняется слабее. Можно ввести и код спуска с дерева, который получается прочтением той же последовательности нулей и единиц в обратном порядке. Для цик-

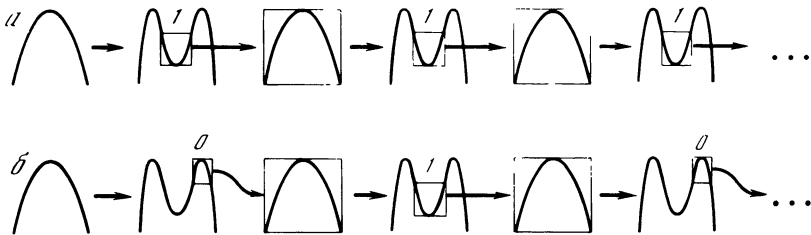


Р и с. 2. Дерево Фейгенбаума и правило кодирования маршрутов на нем

лов конечного периода 2^n каждому элементу отвечает свой код из n символов. Замечательно, что код спуска с ветки дерева, соответствующей какому-либо элементу цикла, есть двоичное представление номера этого элемента в порядке следования во времени. (Нулевой номер приписывается наиболее удаленному от точки экстремума элементу цикла.) Для предельного объекта – аттрактора Фейгенбаума, который получается в результате бесконечного числа бифуркаций удвоения периода, элементы кодируются бесконечными двоичными последовательностями. Отсюда, между прочим, следует, что это множество имеет мощность континуума.

Напомним теперь содержание традиционного ренормгруппового анализа, развитого Фейгенбаумом [2, 3]. Выполняя исходное отображение $f_0(x)$ два раза, получаем отображение $f_0(f_0(x))$, имеющее характерную двугорбую форму (рис. 3,а). Далее выбираем для дальнейшего рассмотрения окрестность центрального экстремума и пересчитываем вблизи него масштаб в некоторое число раз $a < 0$. В результате получаем новую функцию $f_1(x) = af_0(f_0(x/a))$ – это результат ренормпреобразования исходного оператора эволюции $f_0(x)$. Далее процедуру многократно повторяем. Точно на пороге возникновения хаоса она приводит в итоге к неподвижной точке ренормпреобразования – универсальной функции $g(x)$, являющейся решением функционального уравнения $g(x) = ag(g(x/a))$.

Заметим, однако, что на каждом шаге есть две возможности - выбрать для дальнейшего рассмотрения либо центральный экстремум функции $f_n(f_n(x))$, либо правый максимум. (Левый максимум не годится, так как его окрестность не посещается траекторией в установившемся режиме.) При втором варианте замена переменной должна включать не только изменение масштаба, но и сдвиг начала отсчета в точку нового экстремума. Если обозначить первый выбор символом 1, а второй символом 0, то каждой двоичной последовательности будет соответствовать своя ренормализационная схема (см. пример на рис. 3,б). При таком построении можно обеспечить попадание любого элемента 2^n -цикла в выделяемую для рассмотрения область изменения переменной в n -кратно ренормированном отображении.



Р и с. 3. Традиционное ренормпреобразование Фейгенбаума (а) и обобщенная ренормализационная схема (б)

Для этого код ренормализационной схемы должен совпадать с кодом маршрута движения вверх по дереву Фейгенбаума к выбранному элементу.

Отсюда следует, что при учете всех возможных двоичных последовательностей обобщенная ренормализационная схема будет давать полную информацию о глобальных скейлинговых свойствах дерева Фейгенбаума, тогда как традиционный подход вскрывает скейлинговые свойства только одной ветви с кодом 1111111... Это пример простейшей ренормдинамики — неподвижная точка или ренормцикл периода 1. Другим периодическим кодирующим последовательностям будут соответствовать более сложные ренормциклы. Например, 010101... — цикл периода 2, 011011... — цикл периода 3 и т.д. Случайные двоичные последовательности ассоциируются с ренормхаосом.

2.2. Приближенное описание ренормдинамики

Сконцентрируем внимание на рассмотрении глобальных скейлинговых свойств аттрактора Фейгенбаума с позиций ренормдинамики и ренормхаоса. Для этого положим параметр A в отображении (1) равным критическому значению ($A_c = 1,401155...$). Тогда вблизи центрального экстремума отображения $f^{2^n}(x)$ при больших n его форма описывается функцией Фейгенбаума $g(x)$. Ключевым моментом является то, что функции, определяющие форму $f^{2^n}(x)$ около других экстремумов, получаются из функции $g(x)$ заменой переменных.

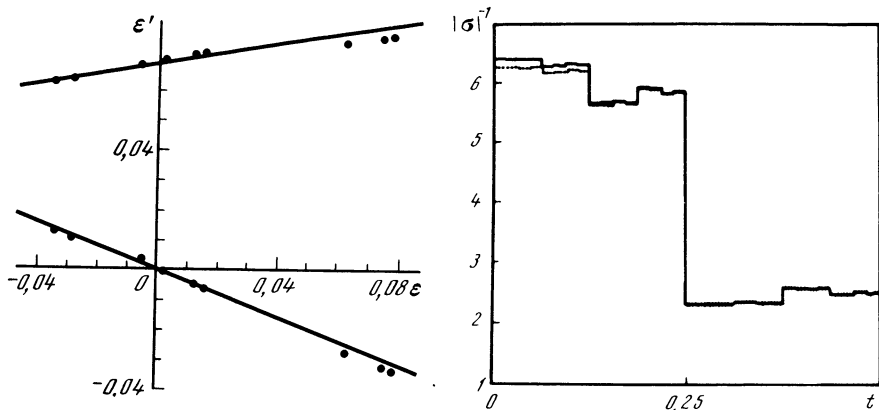
После переноса начала отсчета в точку экстремума и пересчета масштаба (так, чтобы в точке экстремума функция равнялась 1) замена должна быть близка к тождественной. Будем искать ее в виде

$$x \rightarrow (1 - \epsilon)x + \epsilon x^2, \quad (2)$$

где ϵ — параметр, разный для разных экстремумов. Он предполагается малым и будет учитываться всегда только в первом порядке. С точки зрения ренормдинамики ϵ выступает как динамическая переменная. Заменой (2) из отображения $x' = g(x)$ получаем

$$x' = g_\epsilon(x) \equiv g(x) + \epsilon [g'(x)x^2 - (g(x))^2] - \epsilon [g'(x)x - g(x)]. \quad (3)$$

Выполним один шаг ренормпреобразования: произведем отображение (3) дважды и заменой переменных преобразуем полученную функцию снова к виду (3), но уже с новым значением параметра ϵ . Это делается



Р и с. 4. Одномерное отображение, приближенно описывающее ренормдинамику параметра ϵ

Численные данные показаны точками

Р и с. 5. Масштабная функция Фейгенбаума σ

Штриховая соответствует численным данным; сплошная линия — нашему приближенному решению

по-разному в двух вариантах, когда рассматривается окрестность центрального (код 1) или бокового (код 0) экстремума функции $g_\epsilon (g_\epsilon(x))$. В результате получается рекуррентное соотношение для ϵ'

$$\epsilon' = \begin{cases} \epsilon/a & (\text{код } 1), \\ p + s\epsilon & (\text{код } 0) \end{cases} \quad (4)$$

и правила пересчета масштаба переменной x :

$$\Delta x' = \begin{cases} a(1 - \epsilon + \epsilon/a)\Delta x & (\text{код } 1), \\ (1 + \epsilon c)(1 - c)^{-1}\Delta x & (\text{код } 0), \end{cases} \quad (5)$$

где $a = -2,5029$, $p = 0,0659$, $s = 0,155$, $c = 0,8323^1$.

Задавшись произвольным кодом маршрута движения вверх по дереву (из n цифр), можно найти представление функции $f^{2^n}(x)$ в нормированных переменных в окрестности соответствующего экстремума. Для этого начиная с $\epsilon_0 = 0$ (для исходного отображения (1)) будем итерировать соотношение (4), выбирая верхнюю или нижнюю формулу в зависимости от того, какой символ стоит на очередной позиции кодирующей последовательности. Форма функции будет определяться выражением (3), в которое в качестве ϵ нужно подставить величину, найденную в результате итераций. Отношение масштабов исходной и ренормированной переменных выражается через произведение коэффициентов, фигурирующих в (5).

Таким образом, в нашем приближении ренормдинамика описывается одномерным рекуррентным отображением (4), представленным графиче-

¹Константы в (4), (5) определяются через функцию Фейгенбаума и ее производные. При вычислениях использована известная полиномиальная аппроксимация этой функции [2].

чески на рис. 4. Здесь же точками показаны численные данные, которые находятся в хорошем соответствии с (4)². Из графика видно, что $|\epsilon|$ не превышает 0,1, так что предположение о его малости оправдано.

Поскольку наклон обеих ветвей графика меньше единичного, то при многократных итерациях начальные возмущения ϵ затухают. Иначе говоря, величина ϵ , а значит, и форма функции $f^{2^n}(x)$ вблизи заданного экстремума определяются последними цифрами кодирующей последовательности. В этом выражается универсальность в ренормхаосе. Количественной характеристикой этого свойства служит отрицательный ляпуновский показатель отображения (4), который для случайной кодирующей последовательности в нашем приближении равен $\lambda_- = \frac{1}{2} \ln |s/a| \approx -1,39$.

2.3. Масштабная функция Фейгенбаума σ

Для описания глобальных скейлинговых свойств аттрактора на пороге возникновения хаоса Фейгенбаумом была предложена функция $\sigma(t)$, которая определяется через элементы циклов, существующих при критическом значении параметра A_c [3]:

$$\sigma(t) = \lim_{m, N \rightarrow \infty} \sigma\left(\frac{m}{2N}\right) = \lim \frac{x_m^{(2N)} - x_{m+N}^{(2N)}}{x_m^{(N)} - x_{m+N/2}^{(N)}}, \quad N = 2^n, \quad (6)$$

где верхние индексы обозначают период цикла, а нижние – номера элементов в порядке их следования во времени. Покажем, как вычисляется эта функция из анализа ренормдинамики.

Зададимся произвольным двоичным кодом спуска с дерева $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ и, читая его справа налево, найдем с помощью итераций (4) соответствующее значение ϵ . (Это имеет смысл как для конечных, так и для бесконечных кодов, поскольку главный вклад вносят несколько первых цифр кода $\alpha, \beta, \gamma, \dots$) Далее рассмотрим отображение (3) при найденном ϵ и определим расстояние между элементами его 2-цикла. В первом порядке по ϵ результат таков:

$$\Delta x(\epsilon) = 1,146(1 + 0,293\epsilon). \quad (7)$$

Дополним далее кодирующую последовательность символом 1 или 0 и найдем из (4) очередное значение ϵ' . Теперь, учитывая (7) и правило пересчета масштабов (5), можно вычислить фигурирующие в (6) отношения. Это будут значения функции $\sigma(t)$ соответственно в точках $t = 0,01\alpha\beta\gamma\dots$ и $t = 0,00\alpha\beta\gamma\dots$:

$$\sigma(0,01\alpha\beta\gamma\dots) = (1 + \epsilon - \epsilon/a) \frac{\Delta x(\epsilon')}{a\Delta x(\epsilon)} = \frac{1 + 0,989\epsilon}{a}, \quad (8a)$$

²Кратко поясним идею численных расчетов. Все интересующие экстремумы функции f^{2^n} можно занумеровать индексом m так, что они переводятся в основной экстремум заменой $y = f^m(x)$. Эту замену можно представить в виде разложения Тейлора, причем коэффициент при квадратичном члене определит параметр ϵ для данного экстремума. Коды экстремумов определяются двоичным представлением индекса m . прочитанным справа налево.

Проводя расчеты для n и $n + 1$, каждому ϵ сопоставляем две величины $\epsilon'(m)$ и $\epsilon'(m + 2^N)$.

$$\sigma(0,00\alpha\beta\gamma\dots) = (1-c)(1-\epsilon c) \frac{\Delta x(\epsilon')}{\Delta x(\epsilon)} = 0,171(1-1,080\epsilon). \quad (86)$$

На рис. 5 сравниваются результаты расчета функции σ по описанной схеме с численными данными Фейгенбаума [3]. Видно, что соответствие хорошее. Самое важное, что правильно передается мелкая (фрактальная) структура функции σ . Тем самым проясняется механизм ее формирования. Он связан с ренормдинамикой параметра ϵ , характеризующего искажение формы экстремумов функции f^{2^n} при последовательных шагах ренорм-преобразования. Наибольшие расхождения видны в левой части графика. Это объясняется тем, что именно здесь величина $|\epsilon|$ наибольшая, теория же развита в первом порядке по ϵ .

2.4. Спектр обобщенных размерностей и $f(\alpha)$ -спектр

Понятия, названные в заголовке этого раздела, введены недавно в работах [10, 11] для описания мультифракталов – сложных множеств, которые можно мыслить как совокупность фрактальных компонент, различающихся своими скейлинговыми свойствами. Аттрактор Фейгенбаума – это один из популярных примеров мультифрактала. Спектр размерностей и $f(\alpha)$ -спектр вычислены для него в работе [11]. Как и функция σ , они характеризуют глобальные скейлинговые свойства аттрактора, но изображаются гладкими зависимостями (ср. с рис. 5). Уже имеются сообщения об экспериментальном измерении этих характеристик в гидродинамических системах [12].

Алгоритм вычисления, использованный в [11], состоит в следующем. Начиная с точки экстремума $x_0 = 0$ итерируется исходное отображение (1), в результате чего получается последовательность x_1, x_2, x_3, \dots . Аттрактор Фейгенбаума может рассматриваться как предельный объект построения, показанного на рис. 6 и напоминающего процесс построения канторова множества, с той лишь разницей, что изменение масштабов интервалов на каждом новом уровне разрешения структуры подчиняется более сложной закономерности. На n -м уровне имеем 2^n интервалов с длинами l_i , причем вероятность посещения любого из них одна и та же: $P_i = 2^{-n}$. Построим сумму величин P_i^q / l_i^τ , где q и τ – параметры, и приравняем ее единице:

$$\sum_{i=1}^{2^n} P_i^q / l_i^\tau = 1. \quad (9)$$

При $n \rightarrow \infty$ отсюда получается соотношение между q и τ :

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \sum_{i=1}^{2^n} |x_i - x_{i+2^n}|^{-\tau}.$$

Через них определяются величины D_q , α и f :

$$D_q = \tau / (q - 1), \quad \alpha = d\tau / dq, \quad f = \alpha q - \tau. \quad (10)$$

Зависимость D_q от q называют спектром обобщенных размерностей, а f от $\alpha - f(\alpha)$ -спектром или скейлинг-спектром.

2 _____ 1

Р и с. 6. Построение аттрактора Фейгенбаума

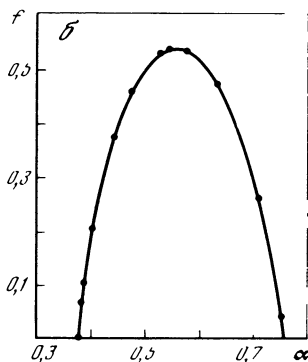
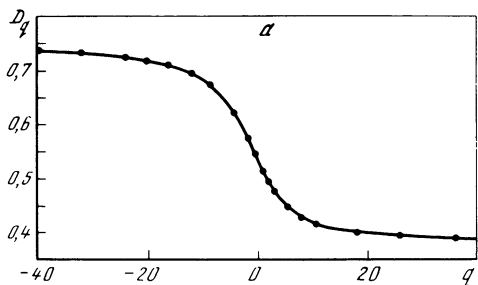
2 _____ 4 3 _____ 1

2 6 8 4 3 7 5 1

Р и с. 7. Спектр обобщенных размерностей D_q (а) и скейлинг-спектр $f(\alpha)$ (б)

Сплошная линия соответствует точному численному решению [11]; точки — нашему приближенному подходу

2 6 8 4 3 7 5 1
 $\overline{10} \overline{14}$ $\overline{16} \overline{12}$ $\overline{11} \overline{15}$ $\overline{13} \overline{9}$



Продемонстрируем вычисление этих характеристик аттрактора Фейгенбаума исходя из нашего приближенного описания ренормдинамики.

Зададимся некоторым уровнем разрешения структуры аттрактора n . Оказывается, что длины интервалов $l_i = |x_i - x_{i+2^n}|$ можно представить в виде

$$l_i = |f^{2^n}(\bar{x}_{i-1}) - f^{2^n}(f^{2^n}(\bar{x}_{i-1}))|, \quad (11)$$

где \bar{x}_{i-1} — точка экстремума функции f^{2^n} , для которой код спуска с дерева выражается двоичным представлением числа $i - 1$. Построим суммы

$$Z_n = \sum_{i=1}^{2^n} l_i^{-\tau}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{2^n} \epsilon_i l_i^{-\tau} \quad (12)$$

и зададимся вопросом, как они пересчитываются при увеличении n на единицу. При этом вместо каждого интервала l_i возникнут два, длины которых

$$l_i \beta (1 + \mu \epsilon_i), \quad \beta = |a|^{-1}, \quad \mu = 1 - a^{-2}, \quad (13a)$$

если дополнительная цифра в коде 1, и

$$l_i \gamma (1 + \nu \epsilon_i), \quad \gamma = (1 - p/a)(1 - c), \quad \nu = -c + (1 - s)/a, \quad (13б)$$

если дополнительная цифра 0.

Формулы (13) получаются с использованием представления функции $f^{2^n}(x)$ вблизи нужного экстремума в виде (3) и правил пересчета масштабов (5) в первом порядке по ϵ .

Сравнение точных и приближенных значений обобщенной размерности

Обозначение	Наименование размерности	Точное численно	Приближенное
D_0	Фрактальная	0.53804	0.5375
D_1	Информационная	0.51710	0.5161
D_2	Корреляционная	0.49780	0.4964
D_∞	Минимальная	0.37776	0.3727
$D_{-\infty}$	Максимальная	0.75551	0.7555

Подставляя (13) в (12) и пренебрегая квадратичными по ϵ членами, получаем выражение Z_{n+1} и S_{n+1} через Z_n и S_n .

$$\begin{pmatrix} Z \\ S \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} \beta^{-\tau} + \gamma^{-\tau} & -\tau(\mu\beta^{-\tau} + \nu\gamma^{-\tau}) \\ p\gamma^{-\tau} & (s - p\nu\tau)\gamma^{-\tau} + \beta^{-\tau}/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ S \end{pmatrix}_n. \quad (14)$$

При многократных итерациях (14) величины Z_n и S_n будут вести себя как $[\lambda(\tau)]^n$, где $\lambda(\tau)$ – наибольшее собственное число матрицы. Тогда из (9) следует, что $q(\tau) = \log_2 \lambda(\tau)$. Далее величины D_q , α и f находятся с помощью соотношений (10).

На рис. 7 показаны спектр обобщенных размерностей и скейлинг-спектр аттрактора Фейгенбаума. Сплошная линия на каждом рисунке соответствует численным данным по методике работы [11], точки – нашему приближенному решению. Некоторые частные значения обобщенной размерности сравниваются в таблице. Степень соответствия представляется очень хорошей. Это говорит о том, что предложенное приближенное описание ренормдинамики правильно передает принцип построения аттрактора Фейгенбаума как мультифрактала.

3. ДВА ПРИМЕРА РЕНОРМХАОСА

Чтобы составить несколько более широкое представление о сущности и свойствах ренормхаоса, обсудим по возможности кратко его проявления еще в двух задачах, связанных с системами, демонстрирующими последовательность бифуркаций удвоения периода.

3.1. Периодическое внешнее воздействие на систему

Добавим в отображение (1) дополнительный член, описывающий периодическое внешнее воздействие с амплитудой ϵ и нормированной частотой ω :

$$x_{n+1} = 1 - Ax_n^2 + \epsilon \cos 2\pi n\omega. \quad (15)$$

Численное исследование скейлинговых свойств модели (15) было предпринято в работе автора [13]; в последующей работе совместно с А.С. Пиковским [14] дано ренормгрупповое обоснование этих свойств³.

³ Попытка ренормгруппового анализа системы (15) была предпринята также в работе [15]. Однако в ней не принято во внимание принципиальное обстоятельство

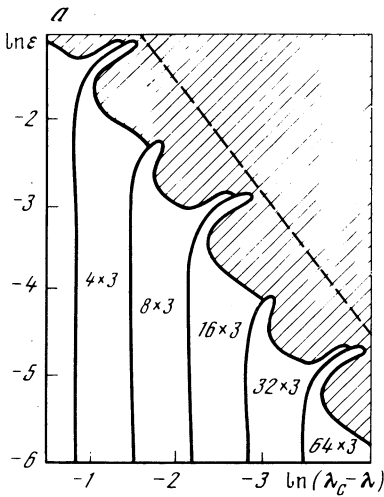
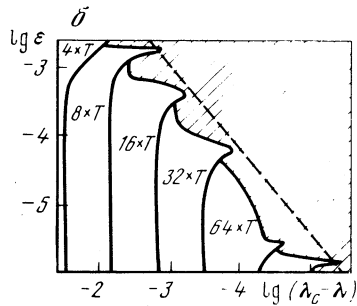


Рис. 8. Карты динамических режимов на плоскости (A, ϵ) в логарифмическом масштабе для системы под периодическим внешним воздействием с частотами ω
 $a - \omega = 1/3$; $b - \omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ [16]



Согласно [14] отображение, описывающее эволюцию системы за 2^m единиц дискретного времени при малой амплитуде воздействия, представляется в виде

$$x' = f_m(x) + \frac{1}{2} \epsilon [\varphi_m(x) e^{2\pi i n \omega_m} + \text{к.с.}], \quad (16)$$

где $f_m(x)$ характеризует эволюцию в отсутствие внешнего воздействия, а φ_m и ω_m удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$\varphi_{m+1}(x) = a [g'(g(x/a)) \varphi_m(x/a) + \varphi_m(g(x/a)) e^{2\pi i \omega_m}], \quad (17a)$$

$$\omega_{m+1} = \{2\omega_m\}. \quad (17b)$$

Порождаемая этими уравнениями ренормдинамика может быть периодической, если нормированная частота ω представляется рациональным числом, и хаотической, если ω — типичное иррациональное число. Вообще же скейлинговые свойства карты динамических режимов на плоскости параметров (A, ϵ) определяются структурой разложения нормированной частоты ω в двоичную дробь.

На рис. 8,а приведена карта динамических режимов системы (15) на плоскости параметров (A, ϵ) в двойном логарифмическом масштабе. Она относится к случаю $\omega = 1/3 = 0,010101...$ и соответствует ренормциклу периода 2. Светлым показаны области периодических режимов, штриховкой — хаос. Форма каждой второй области повторяется, константы скейлинга по осям A и ϵ равны соответственно 21,80 (квадрат константы Фейгенбаума δ) и 58,96 (найдена в [14] путем решения уравнений (17) при $\omega = 1/3$). Для других рациональных ω , представляющихся периодически двоичными дробями, повторение формы областей имеет место через M шагов, где M — период дроби.

Для типичных иррациональных величин ω реализуется ренормхаос и

пересчет ω на каждом шаге ренормализации, с чем как раз и связано наличие ренормхаоса в этой задаче.

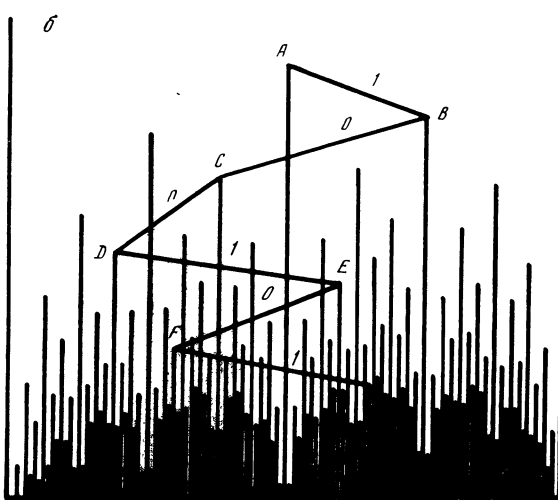
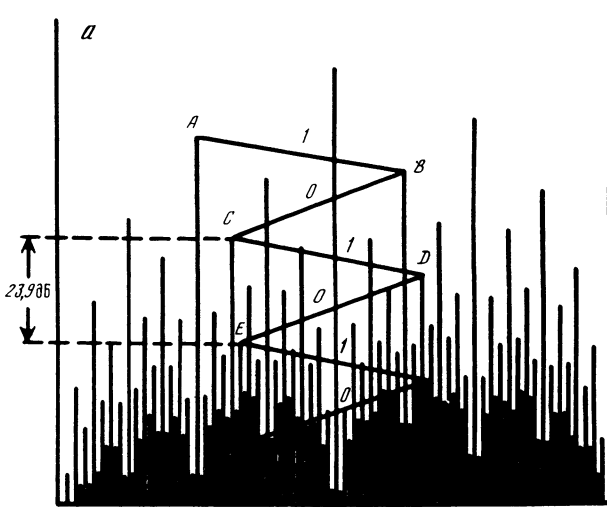


Рис. 9. Ренормцикл (а) и ренормхаос (б) в поведении спектральных амплитуд системы, демонстрирующей удвоение периода

Указанные последовательности спектральных линий получаются бинарными сдвигами частот $\omega = 0,0101010$ и $0,1010011$

точного повторения формы областей не происходит, что хорошо видно на рис. 8, б, взятом из работы [16]. Можно говорить, однако, о скейлинге в статистическом смысле. Он выражается через усредненный по "ренормтрактору" показатель $\langle \ln |\varphi_{n+1}/\varphi_n| \rangle \approx 1,83$. Повторение формы областей "в среднем" должно наблюдаться при выполнении соотношения

$$\epsilon \sim (\Delta A)^{-\chi}, \quad \chi = 1,83/\ln \delta \approx 1,19, \quad (18)$$

которое определяет в логарифмических координатах прямую линию, по-

казанную на рис. 8, б штриховой. Видно, что граница между квазипериодическими и хаотическими режимами располагается в среднем вдоль этой прямой. Используя скейлинговое соотношение (18), можно оценить то конечное число "бифуркаций удвоения торов" [16, 17], которые наблюдаются в системе на пути к хаосу при изменении управляющего параметра A : $n \sim -\chi^{-1} \log_8 \epsilon$.

3.2. Спектр системы Фейгенбаума и ренормхаос

Как было замечено А.С. Пиковским, сходное с (18) ренормгрупповое уравнение можно использовать для анализа спектральных закономерностей системы Фейгенбаума у порога возникновения хаоса. Для этого нужно рассмотреть систему отображений

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad C_{n+1} = C_n + \varphi(x_n) e^{2\pi i n \omega}, \quad (19)$$

где начальная (затравочная) функция $\varphi(x) \equiv 1$. Ясно, что при $n \rightarrow \infty$ величина C_n с точностью до нормировки будет давать фурье-амплитуду на частоте ω . Применяя к (19) фейгенбаумовскую процедуру удвоения, получаем рекуррентные уравнения ренормгруппы:

$$\varphi_{m+1}(x) = \frac{1}{2} [\varphi_m(x/a) + \varphi_m(g(x/a)) e^{2\pi i \omega_m}], \quad (20a)$$

$$\omega_{m+1} = \{2\omega_m\}. \quad (20b)$$

Анализ этих уравнений позволяет сделать заключение о соотношении амплитуд спектральных компонент. Оказывается, что эти соотношения определяются структурой представления ω в виде двоичной дроби.

Возьмем какую-нибудь двоичную дробь $\omega = 0,abcd\dots e$ и рассмотрим последовательность ω_m , получаемую двоичным сдвигом: $\omega_1 = 0,bcd\dots e$, $\omega_2 = 0,cd\dots e$, и т.д. Отношения спектральных амплитуд на этих частотах изменяются периодически, если код $abcd\dots e$ имеет периодическую структуру, и хаотически при случайной его структуре. Рис. 9 иллюстрирует обе эти ситуации. Для ренормцикла периода 2 (рис. 9,а) амплитуды спектральных компонент уменьшаются в 0,0638 раз, или на -23,9 дБ на период цикла. Эта же величина получена в [14] путем численного решения уравнений (20) для $\omega = 1/3$ как собственное число ренормпреобразования за цикл. Для случайных кодов (пример на рис. 9,б) можно определить средний масштабный фактор. В соответствии с вычислениями [14] он равен $\langle 20 \lg |\varphi_{m+1}/\varphi_m| \rangle \approx -13,9$ дБ.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Если возникновение ренормгруппового подхода было связано с задачами квантовой теории поля и статистической физики, то осознание возможности ренормхаоса, т.е. случайных флуктуаций структур при изменении масштаба их разрешения, является достижением нелинейной динамики. Можно надеяться, что эти представления найдут применение и в других областях физики, имеющих дело с ренормгрупповым подходом. Рассмотренные в настоящей работе иллюстрации хаотической ренормдинамики достаточно просты и, следовательно, могут быть полезными для лучшего понимания предмета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1. 405 с.
2. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1979. Vol. 21, N 6. P. 669–706.
3. *Feigenbaum M.J.* The transition to aperiodic behaviour in turbulent systems // *Commun. Math. Phys.* 1980. Vol. 77, N 1. P. 65–86.
4. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems // *Physica D.* 1982. Vol. 5, N 2/3. P. 370–386.
5. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.* Universal properties of the transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // *Physica D.* 1983. Vol. 8, N 3. P. 303–342.
6. *Chirikov B.V., Shepelyansky D.L.* Correlation properties of chaos in Hamiltonian systems // *Physica D.* 1984. Vol. 13, N 3. P. 395–410.
7. *Чуриков Б.В., Шепелянский Д.Л.* Граница хаоса и статистические аномалии // Совещ. "Ренормгруппа-86". Дубна: ОИЯИ, 1987. С. 184–202.
8. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // УМН. 1984. Т. 39, № 3. С. 3–37.
9. *Bensimon D., Jensen M.H., Kadanoff L.P.* Renormalization group analysis of the period doubling attractors // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 33, N 5. P. 3622–3524.
10. *Hentschel H., Procaccia I.* The infinite number of generalized dimensions of fractals // *Physica D.* 1983. Vol. 8, N 3. P. 435–444.
11. *Hasley T.S., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I.* Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 33, N 2. P. 1141–1151.
12. *Леву Б.Г.* Новый глобальный формализм описывает различные сценарии перехода к хаосу // *Физика за рубежом.* М.: Мир, 1987. С. 263–270.
13. *Кузнецов С.П.* О воздействии периодического внешнего возмущения на систему, демонстрирующую переход порядок–хаос через бифуркации удвоения периода // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 39, № 3. С. 113–116.
14. *Кузнецов С.П., Ликовский А.С.* Ренормализационная группа для спектра и восприимчивости системы Фейгенбаума: Препр. ИПФ АН СССР № 168. Горький, 1987. 18 с.
15. *Arneodo A.* Scaling for a periodic forcing of a period doubling system // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 53. P. 1240–1244.
16. *Kaneko K.* Oscillation and doubling of torus // *Progr. Theor. Phys.* 1984. Vol. 72, N 2. P. 202–215.
17. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* Эффекты синхронных и квазипериодических колебаний в неавтономном генераторе // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28, № 9. С. 1112–1125.

О РЕЗОНАНСАХ, МАЯТНИКОВЫХ УРАВНЕНИЯХ, ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ И ХАОСЕ

А.Д. МОРОЗОВ

Хорошо известна роль маятниковых уравнений в теории колебаний и волн [1, 2]. Однако до настоящего времени для неконсервативных маятниковых уравнений были получены лишь частные результаты. В данной статье формулируются общие утверждения о предельных циклах, на основе которых можно исследовать более широкий класс "автоколебательных" маятниковых уравнений. Показывается, что одним из возможных источников таких уравнений являются уравнения, описывающие топологию резонансных зон в неконсервативных системах, близких к двумерным гамильтоновым. Описывается сценарий возникновения квазиаттрактора с развитым хаосом при умеренных значениях амплитуды внешней силы, основанный на глобальных бифуркациях циклов – инвариантных замкнутых кривых отображения Пуанкаре.

1. РЕЗОНАНСЫ И МАЯТНИКОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = H_y(x, y) + \epsilon g(x, y, vt), \quad \dot{y} = -H_x(x, y) + \epsilon f(x, y, vt), \quad (1)$$

где H, g, f – достаточно гладкие по x и y в некоторой области $D (D \subset R^2$ либо $D \subset R^1 \times S^1)$, непрерывные и периодические по $\varphi = vt$ с периодом 2π функции, v – параметр, ϵ – малый параметр. При известных предположениях [3] систему (1) можно записать в переменных действие I – угол θ

$$\dot{I} = \epsilon F(I, \theta, \varphi), \quad \dot{\theta} = \omega(I) + \epsilon R(I, \theta, \varphi), \quad \dot{\varphi} = v, \quad (2)$$

где $F = f x'_\theta - g y'_\theta$, $R = -f x'_I + g y'_I$ – периодические по θ и φ с периодом 2π функции, $I \in \Delta = (I_{\min}, I_{\max})$, $\omega = H'_I$.

Наряду с (2) рассмотрим определенную в кольце $\Delta \times S^1$ автономную систему

$$\dot{I} = \epsilon B_0(I), \quad \dot{\theta} = \omega(I) + \epsilon Q(I), \quad B_0 = \langle F \rangle_{\theta, \varphi}, \quad Q = \langle R \rangle_{\theta, \varphi}.$$

Эту систему можно также получить из автономной системы

$$\dot{x} = H_y + \epsilon \bar{g}(x, y), \quad \dot{y} = -H_x + \epsilon \bar{f}(x, y) \quad (3)$$

после перехода к переменным I, θ и усреднения по θ . Здесь обозначено $\bar{g} = \langle g \rangle_\varphi$, $\bar{f} = \langle f \rangle_\varphi$. Как известно (см., например, [4]), в системе (3) существуют грубые предельные циклы, если порождающее уравнение Пуанкаре–Понтрягина $B_0(I) = 0$ имеет на интервале Δ простые корни. Обозначим $B_1(I) = B'_0(I)$.

При рассмотрении трехмерной системы (2) наибольший интерес представляют резонансы. Уровень $I = I_{pq}$ называется резонансным, если $\omega(I_{pq}) = \nu p / p$, $p, q \in N$. Резонансной зоной будем называть окрестность $\{(I, \theta) : I_{pq} - c\sqrt{\epsilon} < I < I_{pq} + c\sqrt{\epsilon}, 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Топология невырожденных резонансных зон ($b = \omega'(I_{pq}) \neq 0$) в неконсервативных системах вида (2)

определяется в "случае общего положения" маятниковым уравнением [3-5]

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} - bA_0(v, I_{pq}) = \mu\sigma(v, I_{pq}) \frac{dv}{d\tau}, \quad (4)$$

где $\mu = \sqrt{\epsilon}$, $\tau = \mu t$,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F(I_{pq}, v + q\varphi/p, \varphi) d\varphi,$$

$$\sigma = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} (f'_y + g'_x) \Big|_{\substack{x = x(I_{pq}, v + q\varphi/p) \\ y = y(I_{pq}, v + q\varphi/p)}} d\varphi.$$

Функции A_0 , σ периодические по v с наименьшим периодом $2\pi/p$ и представимы в виде $A_0 = A_*(v, I_{pq}) + B_0(I_{pq})$, $\sigma = \sigma_*(v, I_{pq}) + B_1(I_{pq})$. Отметим, что число гармоник в A_0 и σ определяется числом гармоник (по φ) в функциях f , g . Так как функции A_0 и σ в силу определения могут зависеть от разных параметров, то в них преобладающими могут являться гармоники с разными номерами.

Общая классификация резонансных зон для индивидуальных уровней $I = \text{const}$ проведена в [3]. Здесь мы уточним случай непроходимого резонансного уровня, когда $B_0 = 0$. В этом случае приходим к исследованию следующего модельного уравнения:

$$\ddot{x} + \sin x = \epsilon \dot{x} (\cos nx + a), \quad (5)$$

где a — параметр, $n = 0, 1, \dots$ и использованы для удобства исходные обозначения переменных и малого параметра ϵ . Наряду с (5) рассмотрим эталонное уравнение

$$\ddot{x} + \sin x = \epsilon \dot{x} \cos nx. \quad (6)$$

Уравнения вида (5), (6) возникают в ряде прикладных задач [6, 7], а также представляют и самостоятельный интерес для теории нелинейных колебаний, демонстрируя значительно больше возможностей, чем популярные уравнения Ван дер Поля и Дюффинга.

2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В МАЯТНИКОВЫХ УРАВНЕНИЯХ

Прежде всего рассмотрим уравнение (6). При $\epsilon = 0$ это уравнение имеет интеграл $\dot{x}^2/2 - \cos x = h$. Значениям $h \in (-1, 1)$ соответствует область колебательных движений маятника, а $h > 1$ — вращательных. Уравнение (6) представимо в виде (3) и для него можно выписать порождающую функцию $B_0(h(I))$. Обозначим $F_n^{(s)}(\rho) = B_0$, где $s = 1$ отвечает области колебательных движений, $\rho = (1 + h)/2$, а $s = 2$ — вращательных, $\rho = 2/(1 + h)$. Тогда в силу определения B_0 имеем

$$F_n^{(s)}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx^{(s)}) \dot{x}^{(s)}(x^{(s)})'_\theta d\theta, \quad (7)$$

где $x^{(s)}(\theta, \rho)$ — невозмущенное решение. Согласно [8] эллиптический

интеграл в (7) приводится к стандартной форме

$$F_n^{(s)}(\rho) = C_n^{(s)}(\rho)[P_n^{(s)}(\rho)K(\rho) + Q_n^{(s)}(\rho)E(\rho)], \quad (8)$$

где $C_n^{(1)} = 16/(2n+1)!!$, $C_n^{(2)} = 8/[(2n+1)!!\rho^{n+1/2}]$, $P_n^{(s)}$, $Q_n^{(s)}$ – многочлены степени n ($n \geq 1$), K , E – полные эллиптические интегралы, $k = \rho^{1/2}$ – их модуль. Введем для удобства функции $F_n^{(1)}/16 \Rightarrow F_n^{(1)}$, $F_n^{(2)}\rho^{1/2} \Rightarrow F_n^{(2)}$.

Таким образом задача о предельных циклах в уравнении (6) приводит к изучению двух классов специальных функций $\{F_n^{(s)}(\rho)\}$, $s = 1, 2$. Перечислим дополнительно к (7), (8) свойства функций $F_n^{(s)}(\rho)$.

Свойства функций $F_n^{(1)}(\rho)$ [9]

1. Функции $F_n^{(1)}$ удовлетворяют гипергеометрическому уравнению Гаусса

$$4\rho(1-\rho)(F_n^{(1)})'' + \lambda_n F_n^{(1)} = 0, \quad \lambda_n = 4n^2 - 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

2. Справедливо представление $F_n^{(1)}(\rho) = 4\pi\rho F(\frac{1}{2} - n, \frac{1}{2} + n, 2; \rho)$, где F – гипергеометрическая функция.

3. Функции $F_n^{(1)}$ допускают аналитическое продолжение на комплексную плоскость с разрезом вдоль действительной оси от $z = 1$ до $z = \infty$ (обозначим ее через \mathbb{C}^*).

4. На границе интервала $(0, 1)$ имеют место соотношения:

$$F_n^{(1)}(0) = 0, \quad F_n^{(1)}(1) = (-1)^{n+1}/\lambda_n,$$

$$(F_n^{(1)}(0))' = 4\pi, \quad \lim_{\rho \rightarrow 1} (F_n^{(1)}(\rho)) = (-1)^n \cdot \infty.$$

5. Справедливо рекуррентная формула

$$(3 + 2n)F_{n+1}^{(1)}(z) + 4n(2z - 1)F_n^{(1)}(z) + (2n - 3)F_{n-1}^{(1)}(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}^*,$$

$$F_0^{(1)}(z) = (z - 1)K(z) + E(z), \quad F_1^{(1)}(z) = [(1 - z)K(z) + (2z - 1)E(z)]/3.$$

6. Функции $F_n^{(1)}(z)$, $n \geq 1$, имеют на интервале $(0, 1)$ вещественной оси точно $n - 1$ простых нулей. Нули $F_{n+1}^{(1)}$ и $F_n^{(1)}$ перемежаются.

7. Функции $F_n^{(1)}(\rho)$ образуют систему Чебышева на $[0, 1]$.

Свойства функций $F_n^{(2)}(\rho)$ [10]

1. Функции $F_n^{(2)}(\rho)$ удовлетворяют уравнению

$$4\rho(1-\rho)(\rho(F_n^{(2)})')' + (\rho - \mu_n)F_n^{(2)} = 0, \quad \mu_n = 4n^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

2. Справедливо представление

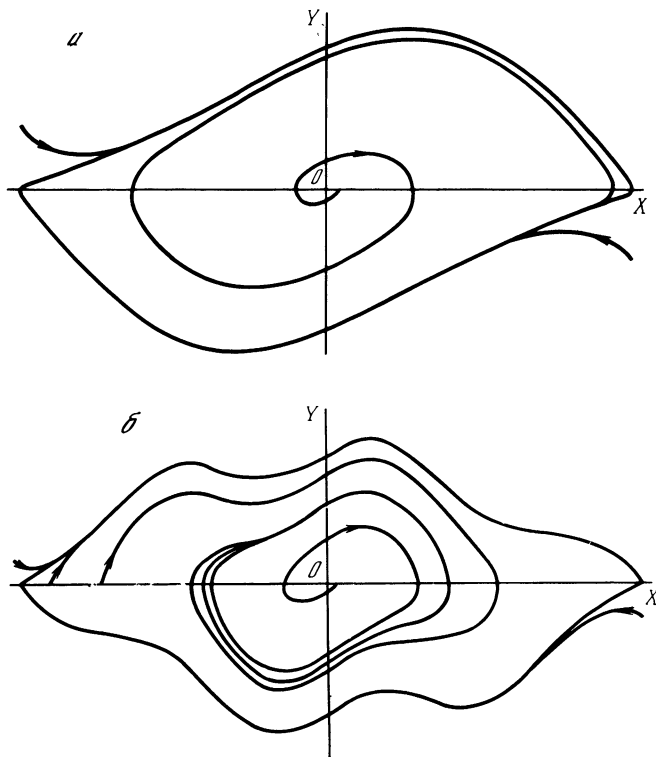
$$F_n^{(2)}(\rho) = C_n \rho^n F(-\frac{1}{2} + n, \frac{1}{2} + n, 1 + 2n; \rho), \quad C_n = \text{const.}$$

3. Справедлива рекуррентная формула

$$(2n + 3)zF_{n+1}^{(2)}(z) + 4n(2 - z)F_n^{(2)}(z) + (2n - 3)zF_{n-1}^{(2)}(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}^*,$$

$$F_0^{(2)}(z) = E(z), \quad F_1^{(2)}(z) = [2(z - 1)K(z) + (2 - z)E(z)]/3z.$$

4. Функции $F_n^{(2)}(z)$ не имеют нулей в \mathbb{C}^* , отличных от $z = 0$.



Р и с. 1. Фазовый портрет уравнения (5) при $\epsilon = 1$, $|x| \leq \pi$, $|y| \leq 3$
 $a - n = 1$, $a = a_* = -1/3$; $b - n = 3$, $a = a_* = -1/35$

5. Справедливы соотношения $F_n^{(2)}(0) = 0$, $F_n^{(2)}(1) = F_n^{(1)}(1)$.

Из свойства 6 функций $F_n^{(1)}$ и свойства 4 функций $F_n^{(2)}$ вытекает следующее

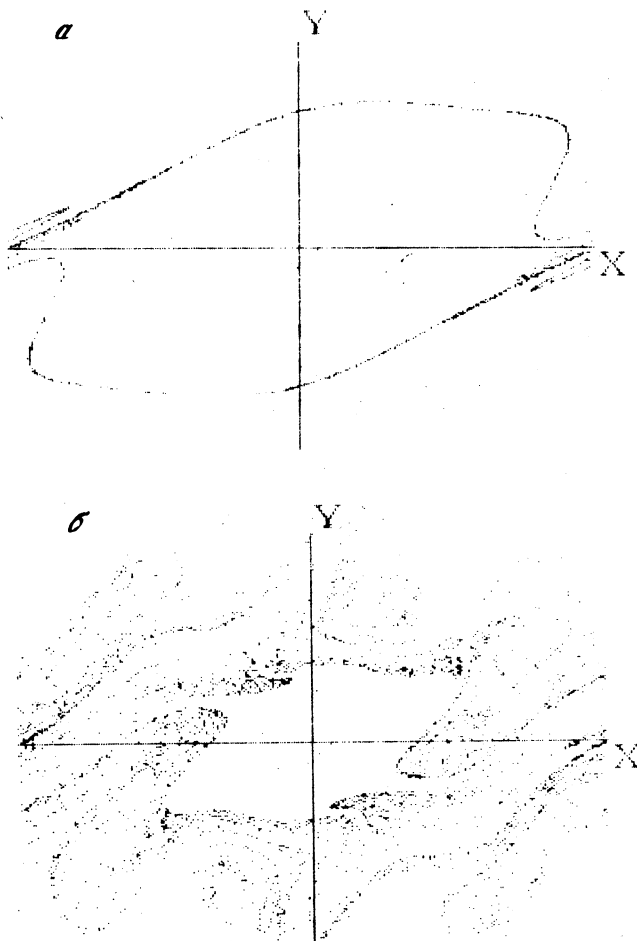
Утверждение 1. Существует такое достаточно малое $\epsilon_*(n) > 0$, что при любых $|\epsilon| \in (0, \epsilon_*)$ у уравнения (6) с $n \geq 1$ в области колебательных движений имеется точно $n - 1$ грубых предельных циклов (1-го рода). В области вращательных движений предельные циклы (2-го рода) отсутствуют.

Из перечисленных свойств функций $F_n^{(s)}(\rho)$, $s = 1, 2$, следует

Утверждение 2. Существуют такие значения параметра a и достаточно малые значения ϵ , при которых у уравнения (5) имеется точно n предельных циклов в области колебательных движений и отсутствуют циклы в области вращательных движений. Если $a = a_*(n) = (-1)^n / \lambda_n$, то один из n циклов седловой.

Замечание 1. В [7] рассматривалось уравнение (6) в колебательной области. При этом теоретические исследования проводились не для (6), а для квазилинейного уравнения ($\sin x \rightarrow x$).

Замечание 2. Конечность числа предельных циклов в (3), когда H, g, f – многочлены, следует из [11].



Р и с. 2. Картина отображения Пуанкаре для уравнения (9) при $\epsilon = 1, a = a_*, c = 1, \nu = 5$
 $a - n = 1; b - n = 3$

**3. РОЛЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ В ФОРМИРОВАНИИ
 КВАЗИАТТРАКТОРОВ С РАЗВИТЫМ ХАОСОМ**

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \sin x = \epsilon \dot{x} (\cos nx + a)(1 + c \sin \nu t), \tag{9}$$

которое, с одной стороны, учитывает неавтономные члены в системе, описывающей структуру резонансных зон, а с другой – представляет самостоятельный интерес, являясь частным случаем системы (1).

При $c = 0$ и малых $|\epsilon|$ утверждение 2 дает ответ на вопрос о качественном поведении решений уравнения (9). Численный счет на ЭВМ указывает на справедливость утверждений 1, 2 при немалых $|\epsilon|$ (рис. 1). Используя

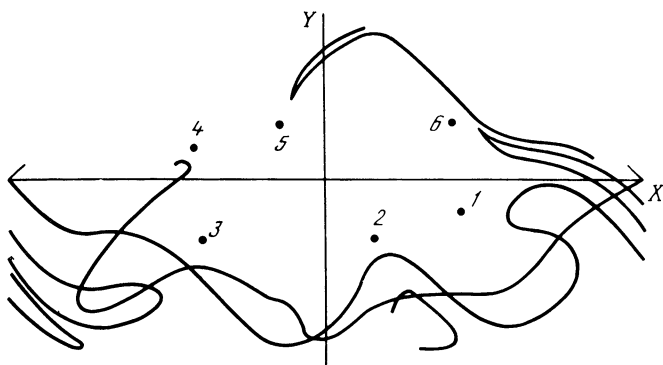


Рис. 3. Инвариантные множества отображения Пуанкаре для уравнения (9) при $n = 3$, $\epsilon = 1$, $a = a_*$, $c = 0,5$, $\nu = 5$

этот факт, опишем сценарий возникновения нетривиального притягивающего множества (квазиаттрактора-хаоса) в уравнении (9) при $c \neq 0^1$. Положим $\epsilon = 1$, $a = a_* = (-1)^n / (4n^2 - 1)$, $\nu = 5$ и будем изменять параметр c , наблюдая на экране графического дисплея ПЭВМ за траекториями отображения Пуанкаре (рис. 2, 3, где показана область: $|x| \leq \pi$, $|y| \leq 3$).

При $n = 1$ и увеличении c от 0 на месте устойчивого седлового предельного цикла возникает квазиаттрактор, который будем называть седловым (см. рис. 2, а). Далее рассмотрим случай $n = 3$. В этом случае при изменении c от 0 до $c_* \approx 0,025$ в уравнении (9) существует седловой квазиаттрактор. При $c \in (c_*, c_{**})$, где $c_{**} \approx 0,72$, седловой квазиаттрактор отсутствует, хотя при этом и существует гомоклиническая структура Пуанкаре, а у уравнения (5) – устойчивый седловой предельный цикл! (см. рис. 3, где $c = 0,5$ и притягивающим множеством является устойчивый резонансный режим периода $12\pi/5$ – точки 1–6). Этот факт объясняется существованием у уравнения (5) еще двух предельных циклов. С увеличением c растет ширина окрестности гомоклинического контура. При $c = c_*$ она поглощает неустойчивый цикл и становится неустойчивой изнутри. Далее при $c = c_{**}$ эта окрестность поглощает внутренний устойчивый цикл и снова становится устойчивой. В этом случае у уравнения (7) существует седловой квазиаттрактор с развитым хаосом (дробная часть ляпуновской размерности $\sim 0,67$ при $c = 1$, см. рис. 2, б). Значения c_* , c_{**} являются критическими бифуркационными значениями [12].

В заключение отметим, что проведенный нами численный анализ для родственных уравнений типа Дюффинга–Ван дер Поля указывает на регуляризацию решений в квазиаттракторе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Г.М., Чириков Б.В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний//УФН. 1971. Т. 105, № 1. С. 3–39.
2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука. 1988. 368 с.

¹ В квазиаттракторе могут существовать устойчивые точки.

3. Морозов А.Д., Шильников Л.П. О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым//ПММ. 1983. Т. 47, № 3. С. 385–394.
4. Морозов А.Д. Системы, близкие к нелинейным интегрируемым. Горький. Горьк. ун-т, 1983. 96 с.
5. Морозов А.Д. Уравнения маятникового типа и резонансы//Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. науч. тр. Горький. Горьк. ун-т, 1980. С. 3–16.
6. Баутин Н.Н. Об аппроксимациях и грубости пространства параметров динамических систем//ПММ. 1969. Т. 33, № 6. С. 969–988.
7. Leech C.M. Limit cycle stability of aerodynamically induced yaw oscillations//J. Mech Sci. 1979. Vol. 21, № 9. P. 517–525.
8. Морозов А.Д., Федоров Е.Л. О приведении порождающего уравнения к стандартной форме//Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. науч. тр. Горький: Горьк. ун-т, 1982. С. 20–34.
9. Морозов А.Д. К решению проблемы предельных циклов для маятниковых уравнений, близких к интегрируемым//Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. науч. тр. Горький: Горьк. ун-т, 1987. С. 113–127.
10. Морозов А.Д. О предельных циклах и хаосе в уравнениях маятникового типа//ПММ. 1989. Т. 53, № 5. С. 721–730.
11. Варченко А.Н. Оценка числа нулей абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы//Функцион. анализ и его прил. 1984. Т. 18, № 2. С. 14–25.
12. Афраймович В.С. Внутренние бифуркации и кризисы аттракторов//Нелинейные волны: Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 189–213.

УДК 517.958

СИНЕРГЕТИКА. НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

С.В. ЕРШОВ, С.П. КУРДЮМОВ, Г.Г. МАЛИНЕЦКИЙ,
А.Б. ПОТАПОВ

В начальный период развития синергетики было обнаружено, что поведение многих открытых нелинейных систем в физике, химии, биологии, гидродинамике обладает некоторыми общими чертами. Среди них возникновение диссипативных структур [1], эффективное уменьшение числа степеней свободы, описывающих процессы в нелинейных средах, – выделение параметров порядка [2], появление хаотических режимов вблизи порога неустойчивости (маломодовый хаос) [3] и ряд других.

Развитие этих представлений показало, что они обладают не только эвристической ценностью, но и помогают продвигаться в создании математического аппарата для анализа различных нелинейных уравнений. Кроме того, они способствовали появлению новых методов численного исследования нелинейных систем и обработки экспериментальных данных. Новые математические подходы в свою очередь привели к парадоксальному взгляду на несколько классических задач и к постановке некоторых ключевых вопросов, которые, вероятно, будут активно исследоваться в ближайшие годы.

В этой статье мы обратим внимание на три направления, которые привлекают все большее число исследователей. Первое – анализ внутренних свойств нелинейных сред и законов организации, по которым простейшие диссипативные структуры могут быть объединены в более сложные. Второе направление тесно связано со сравнением результатов эксперимента с теорией

тическими предсказаниями для систем с хаотическим поведением. От ее успешного решения во многом зависит эффективность использования идей синергетики при анализе конкретных систем. Третье направление — поиск новых базовых моделей нелинейных явлений. Мы обсудим некоторые результаты, полученные в рамках каждого из них.

1. В большинстве исследований по самоорганизации, начиная с классической работы А. Тьюринга о моделировании морфогенеза [4], традиционно возникает несколько вопросов. Какой полный набор структур, возможных в изучаемой нелинейной среде? Зависят ли они от краевых условий или определяются только внутренними свойствами системы? Как простейшие структуры в изучаемой среде связаны с более сложными? Эти вопросы особенно интересны в пространственно-многомерном случае. Однако для большинства моделей реакция-диффузия они остаются нерешенными. Тем не менее для двух нелинейных систем удалось получить важные результаты в этом направлении.

Первую систему часто называют моделью тепловых структур [5–7]. В простейшем случае она описывает горение нелинейной среды, коэффициент теплопроводности $k(T)$ в которой и нелинейный источник тепла $Q(T)$ степенным образом зависят от температуры

$$T_t = \operatorname{div}(k(T) \operatorname{grad} T) + Q(T), \quad T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}),$$

$$k(T) = k_0 T^\sigma, \quad Q(T) = q_0 T^\beta, \quad k_0, q_0, \beta, \sigma > 0, \quad \beta > \sigma + 1. \quad (1)$$

В такой среде могут возникать нестационарные диссипативные структуры, развивающиеся в режиме с обострением. Их амплитуда неограниченно возрастает за конечное время, называемое временем обострения t_f . В двумерном случае они описываются автомодельными решениями вида

$$T(\mathbf{r}, t) = g(t) y^\alpha(\xi), \quad \xi = \mathbf{r} \psi(t), \quad \alpha = (\sigma + 1)^{-1}.$$

Функция y , определяющая форму сложной структуры, удовлетворяет нелинейному эллиптическому уравнению

$$\alpha \Delta y - \frac{\beta - \sigma - 1}{2 t_f (\beta - 1)} (\xi, \nabla (y^\alpha)) + y^{\alpha\beta} - \frac{1}{t_f (\beta - 1)} y^\alpha = 0, \quad (2)$$

$$y(0) < \infty, \quad y \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad |\nabla y| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Чтобы построить конфигурации, описывающие сложные структуры (т.е. имеющие несколько максимумов), естественно воспользоваться численными методами. Однако это требует хорошего начального приближения, для получения которого в работах [8, 9] был предложен метод, использующий представление о параметрах порядка.

Характерный вид решений уравнения (2) показан на рис. 1. В области немонотонности решение представляет собой малые отклонения от плоского "плато", где $y(\xi)$ хорошо передается линеаризованным уравнением. Можно также выделить асимптотическую часть, где $y \rightarrow C(\varphi) \xi^{-p}$, $p = 2(\sigma + 1)/(\beta - \sigma - 1)$. При традиционном подходе следовало бы решать задачу со свободной границей для определения функции $C(\varphi)$. Предположение о симметрии автомодельных решений и наличии конечного числа параметров порядка позволяет рассматривать не непрерывную функцию

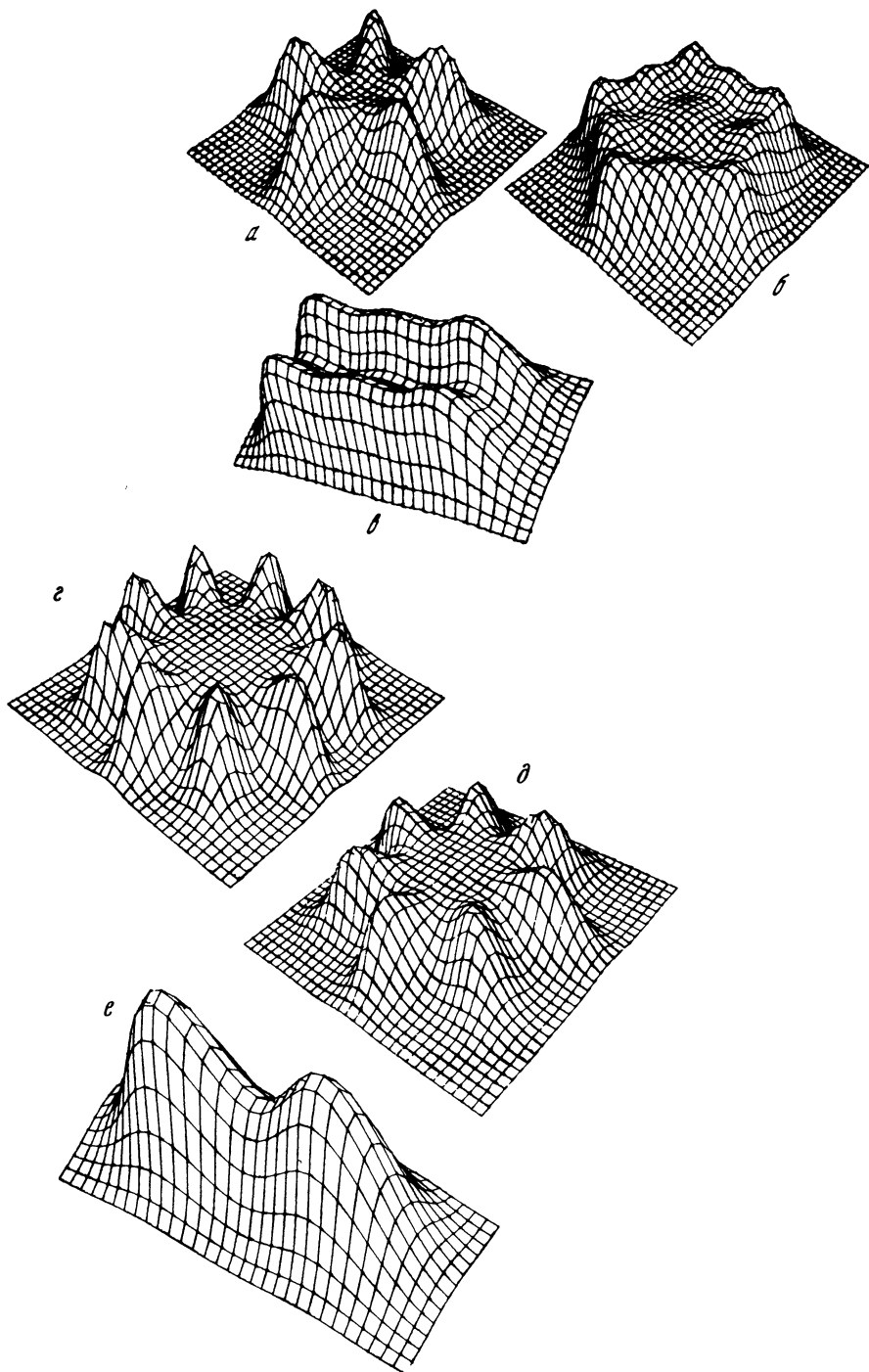


Рис. 1

$C(\varphi)$, а производить сшивание на нескольких лучах, что дает целую иерархию приближенных решений

$$\tilde{y}(\xi, \varphi_j) = \begin{cases} 1 + \sum_i \alpha_i R_m(\xi) \cos(im\varphi_j), & \xi < \xi_{0j}, \\ C_j \xi^{-p}, & \xi > \xi_{0j}, \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \quad (3)$$

где φ_j определяют направления k лучей, $\tilde{y}(\xi, \varphi_j)$ — значение приближенного решения на них, а вне лучей функция определяется в результате интерполяции. Это приближение дает представление о классе двумерных решений уравнения (2) и позволяет построить большое число таких решений численно [9]. Интересно, что увеличение числа гармоник k при $k \geq 2$ в отличие от рядов Фурье или обычных галеркинских приближений не только не ухудшает, но и ухудшает точность приближения [10].

Таким образом, в простейшей нелинейной среде может существовать сложная организация. В ней есть конечное число конфигураций, сохраняющих в процессе эволюции свою форму. Их можно интерпретировать как несколько простых структур с различными максимумами, объединенных в одну сложную. Законы такого объединения и определяют решения задачи (2). Создать более сложную упорядоченность в среде с данными значениями β и σ нельзя. Поскольку постановку начальных данных можно рассматривать как способ управления процессами в нелинейных средах, в некоторых задачах этот факт приобретает фундаментальное значение.

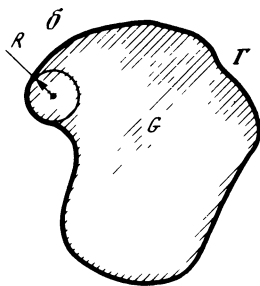
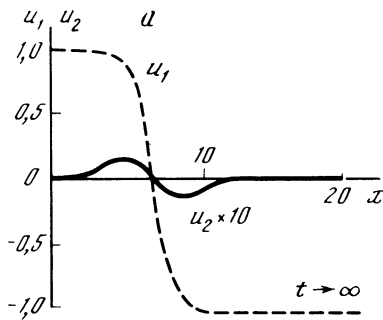
Обычно под автомоделными решениями в физических исследованиях понимают инвариантно-групповые решения, которые определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В пространственно-многомерном случае ситуация сложнее — приходится решать уравнения в частных производных (здесь — задачу (2)). Близкие проблемы возникают и при анализе автоколебательных сред [7]. По-видимому, исследование таких решений будет активно вестись в ближайшие годы. Отметим также, что представление о параметрах порядка оказалось применимым не только к эволюционным задачам, но и к эллиптическим уравнениям.

Законы организации диссипативных структур также удалось выяснить в пространственно-многомерном случае для класса триггерных сред, которые описываются системами реакция-диффузия:

$$u_t = \hat{D} \Delta u + F(u), \quad u(r, 0) = u_0(r), \quad (4)$$

где u — вектор с компонентами u_1, \dots, u_N , \hat{D} — диагональная матрица. Будем считать, что $F(u) = -F(u)$, а также что при $u_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, N$, система имеет два устойчивых решения (фона) \bar{u} и $-\bar{u}$ и одно неустойчивое $u = 0$.

Ранее изучалась одномерная задача и был построен набор стационарных структур [11]. Простейшая структура, называемая элементарной, представляет собой область перехода $u(x)$ с одного устойчивого фона на другой ($\bar{u} \rightarrow \pm \bar{u}$, $x \rightarrow \pm \infty$, см. рис. 2, а, где $N = 2$, $D_1 = 0,18$, $D_2 = 0,576$, $F_1 = u_1 - u_2 + (-u_1 + 4u_2)(u_1^2 + u_2^2)$, $F_2 = u_1 + u_2 + (-u_1 - 4u_2)(u_1^2 + u_2^2)$). Она возникает в результате эволюции начальных данных вида $u_0(x) = \bar{u} \operatorname{sgn}(x)$. Более сложные структуры качественно представляют собой набор элементарных структур, разделенных участками, где $u(x)$ близка к одному из устойчивых фонов.



Р и с. 2

Совершенно иной оказывается картина в многомерном случае. Пусть $u_0 = \bar{u}$ в области G и $-\bar{u}$ вне ее (рис. 2, б). Для краткости будем называть фон \bar{u} черным, а фон $-\bar{u}$ белым. Расчеты показывают, что характерные размеры области намного превышают G (рис. 2, а), вдоль контура Γ возникает переходная область. По нормали к контуру Γ она близка к элементарной структуре $\tilde{u}(r)$. Далее контур $\Gamma(t)$ (где $u_1(r, t) = 0$) сокращается и при $t > t'$ $u = -\bar{u}$ во всем пространстве. Пользуясь близостью переходной области к элементарной структуре, можно оценить время t' . Сокращение контура Γ связано с тем, что черный и белый фоны находятся в разных условиях и член $R^{-1} \partial u / \partial R$ в диффузионном операторе, записанном в локальной цилиндрической системе координат (где R — радиус кривизны контура, см. рис. 2, б) оказывается нескомпенсированным. Это позволяет получить приближенное уравнение для движения точек контура $\Gamma(t)$

$$\dot{r} = -nR^{-1}C, \quad r(t) \in \Gamma(t), \quad (5)$$

где C — константа, определяемая параметрами среды, n — внешняя нормаль к контуру.

Из формулы (5), в частности, следует, что время существования черного круга на белом фоне (при $R_0 \gg l$) будет зависеть от R_0 как R_0^2 . В трехмерном пространстве черный шар будет существовать в течение вдвое меньшего промежутка времени, что согласуется с результатами расчетов.

Однако в этой среде могут существовать и стационарные структуры. В самом деле, система (4) не меняет своего вида при преобразовании $\bar{u} \rightarrow -\bar{u}$ (черного на белое). Рассмотрим для простоты квадратную область и поставим черное и белое в одинаковые условия, например, так, как показано на рис. 3, а. Выход на черное или белое в этом случае означал бы нарушение симметрии, которой обладает уравнение (4). Эволюция таких начальных данных, как показывают расчеты, приводит к возникновению стационарной структуры "крест". Наряду с ней другие начальные данные, показанные на рис. 3, в и д, приводят к формированию структур "мельница" и "паркет" (рис. 3, г и е). При этом система забывает детали начальных данных, если они обладают нужной симметрией. Чтобы приближенно описать форму таких структур, можно линеаризовать уравнения вблизи фонов и провести сшивание решений на нескольких прямых, так же как в случае тепловых структур.

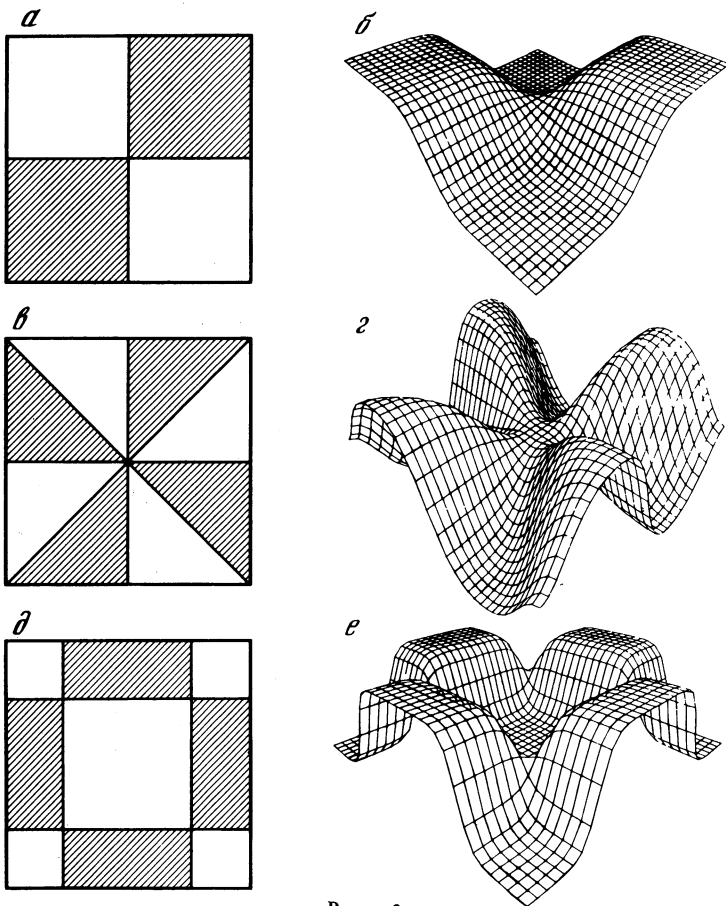


Рис. 3

Обратим внимание на конфигурацию "паркет". Она показывает, что в этой нелинейной среде можно строить сложные структуры. Несмотря на то что среда диссипативна, в ней можно записать информацию, задавая симметричные профили $u_0(x)$ различных типов. Единственным условием здесь является соответствие воздействия на среду ее внутренним свойствам.

Мы рассмотрели среду, для которой характерна простейшая цветная симметрия — относительно замены черного на белое. Интересны также среды с большим количеством цветов. Например, если источники имеют вид

$$F_1 = (u_1 - u_2)(3 - 2u_1^2 - u_2^2), \quad F_2 = (u_1 + u_2)(3 - 2u_2^2 - u_1^2),$$

то для ее описания нужно уже четыре цвета. Возникающие диссипативные структуры здесь оказываются более сложными.

Неожиданной оказывается сама возможность использовать методы цветной симметрии [12] при изучении диссипативных структур. Можно надеяться, что в ближайшее время будут найдены нелинейные среды, в

которых реализуются более сложные типы цветной симметрии. Интересной представляется возможность применить такой подход и для автоволновых процессов. Примеры простейших типов упорядоченности, которые можно найти при этом, дает работа [13].

2. Выше мы обсуждали сложную пространственную упорядоченность в нелинейных средах. Не меньший интерес представляет анализ временной упорядоченности и хаоса в диссипативных системах. Как мы увидим далее, эти задачи оказываются неожиданным образом связаны.

Хаотические режимы, как правило, обладают чувствительностью к начальным данным, две близкие траектории быстро удаляются друг от друга. Допустим, что тем же свойством обладает изучаемое явление и что мы имеем его идеальную модель. Тогда из-за чувствительности к начальным данным различие между теоретическими предсказаниями и экспериментом с течением времени также будет расти. И причина этого состоит не в недостатках модели, а в природе изучаемых явлений. Встает вопрос о том, как в этом случае сравнивать теорию с экспериментом.

Для описания таких явлений вводится ряд количественных характеристик. В простейших случаях о поведении системы позволяет судить спектр мощности. В более сложных случаях приходится вычислять фрактальные размерности аттракторов системы. При этом обычно применяют стандартную процедуру реконструкции аттрактора: строят по временному ряду $x(t)$ набор векторов $\zeta(t) = \{x(t), x(t + \Delta t), \dots, x(t + (n - 1)\Delta t)\}$ и ищут фрактальную размерность множества $\{\zeta\}$, которая определяется этими векторами при достаточно больших n [14].

Таким образом было обработано большое количество различных экспериментов. При этом обычно рассчитывался корреляционный показатель ν по формуле

$$C(\epsilon) = N^{-2} \sum_i \sum_j \theta(\epsilon - |\zeta_i - \zeta_j|), \quad C(\epsilon) \approx \epsilon^\nu \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0, \quad (6)$$

где θ — функция Хевисайда [15].

Для его вычисления можно построить ряд эффективных численных методов [16]. Однако в этой связи возникают сложные вопросы. Например, в работе [17] дается следующая оценка длины выборки, необходимой для того, чтобы определить значение корреляционного показателя с точностью 5%: $N \cong 42^M$, где M — целая часть размерности аттрактора d , т.е. при $d \cong 3$ требуется около 70 тысяч точек; если $d \cong 10$, что характерно для многих гидродинамических систем, то нужно около 10^{16} элементов. Размеры имеющихся выборок гораздо меньше. Например, в задачах метеорологии (проблема погодного и климатического аттрактора [18, 19]) или геофизики (определение размерности геодинамического аттрактора по данным о неравномерности вращения Земли [20]) число элементов не превышает нескольких сотен. Вопрос о том, какая информация и каким образом может быть извлечена из малых выборок, остается нерешенным. Кроме того, намного усложняет оценку размерности наличие даже небольшого шума [20].

Фрактальные размерности характеризуют геометрические свойства аттрактора, но не дают ясного представления о динамике системы. Фундаментальный вопрос — построение модели явления по данным эксперимен-

та и размерности аттрактора. Необходимы новые идеи и качественные представления о хаотических режимах в нелинейных системах.

Расчеты показывают, что в некоторых моделях реакция–диффузия и уравнениях с запаздыванием можно построить упрощенное описание системы. Например, ее можно разбить на несколько слабо взаимодействующих подсистем с хаотическим поведением. Здесь возникает та же проблема, что и при анализе пространственных структур, – выяснить, как сложный хаотический аттрактор можно “сшить”, зная динамику подсистем.

3. Большинство изученных к настоящему времени маломодовых систем получено как приближение к исходным бесконечномерным моделям. К тому же существуют модели, в принципе не допускающие удовлетворительного описания небольшим числом обыкновенных дифференциальных уравнений или отображений небольшой размерности. Поэтому важно выделить качественные отличия таких объектов от систем малой размерности. Возникают следующие вопросы. Существуют ли маломодовые системы, которые, не описывая динамику исходной модели, будут, тем не менее, верно передавать, например, ее статистические характеристики? Как происходит усложнение поведения в моделях, фрактальная размерность аттракторов которых неограниченно растет при изменении параметров? Можно ли выделить в этом случае некую относительно простую “упорядоченность”?

Для изучения этих вопросов было выбрано уравнение с запаздыванием [21]:

$$\epsilon \dot{u}(t) + u(t) = f(u(t-1)), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (7a)$$

которое эквивалентно бесконечномерному отображению

$$\epsilon \dot{u}_{n+1}(t) + u_{n+1}(t) = f(u_n(t)), \quad u_{n+1}(0) = u_n(1), \quad 0 \leq t < 1, \quad (7b)$$

где через u_n обозначено решение $u(t)$ на интервале $[n, n+1]$. Мы выбрали $f(x) = 1 - \alpha|x|$, $\alpha = 1,9$.

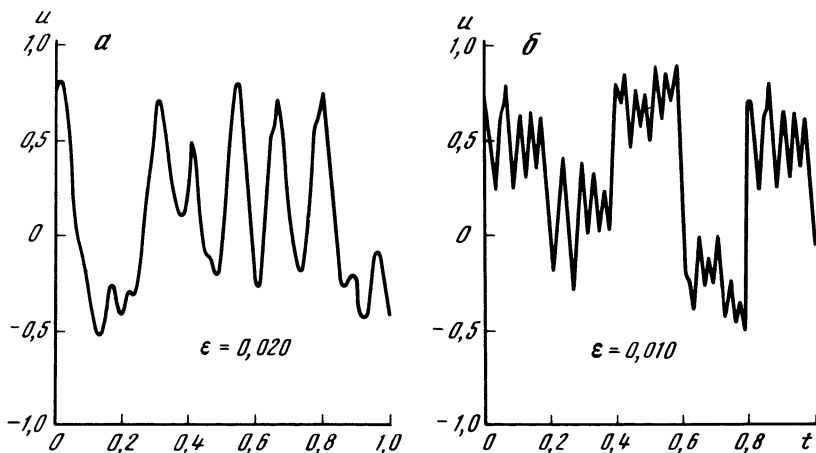
Такие уравнения возникают в нелинейной оптике, теории управления, экологии, медицине [22, 23]. Они легко интегрируются численно и в то же время демонстрируют сложное поведение, имеют большое число положительных ляпуновских показателей и фрактальную размерность, растущую как $O(1/\epsilon)$ [23].

Наряду с задачей (7б) представляет интерес и модель с внешним возбуждением

$$\epsilon \dot{u}_{n+1}(t) + u_{n+1}(t) = f(u_n(t)), \quad u_n(0) = z_n, \quad 0 \leq t < 1. \quad (8)$$

Такое название связано с тем, что при $z_n = \text{const}$ решение выходит на устойчивый стационар: $u_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u^*(t)$, а хаос существует лишь благодаря “внешней накачке”.

С уменьшением ϵ функции u_n становятся все более изрезанными (рис. 4), причем можно показать, что $\| \dot{u}_n \|_C = O(1/\epsilon)$. Однако, несмотря на рост размерности $D = O(1/\epsilon)$, многие статистические свойства в характерном временном масштабе $t' = t/\epsilon$ асимптотически не зависят от ϵ .



Р и с. 4

Например, если обозначить через $p_{k, \epsilon}(u(t_j), \dots, u(t_{j+k}))$ плотность инвариантного распределения k переменных $\{u_n(t_j), \dots, u_n(t_{j+k})\}$, то можно показать, что

$$\|p_{k, \epsilon} - p_{k, \epsilon'}\| = O(\exp\{-C/\max(\epsilon, \epsilon')\}), \quad (9)$$

если только все временные промежутки $\Delta t_i = t_j - t_{j+i}$ выбраны в масштабе ϵ : $\Delta t_m = \theta_m \epsilon$. На рис. 5, а показана $p(u(t))$, а на рис. 5, б — линии уровня $p(u(t), u(t+2\epsilon))$ для различных ϵ . Видно, что эти распределения практически не зависят от ϵ .

Такое поведение связано с тем, что с высокой точностью $u_{n+1}(t)$ может быть определено только по $u_n(t')$, например, при $t - 10\epsilon \leq t' \leq t$:

$$u_{n+1}(t) = \int_0^{10} \epsilon f(u_n(t - \epsilon \xi)) d\xi + O(\epsilon^{-1}), \quad (10)$$

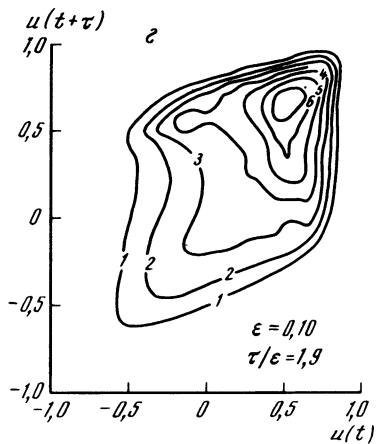
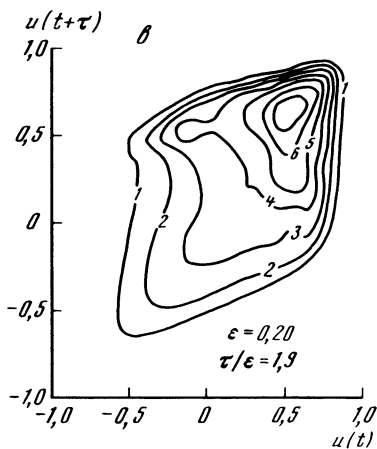
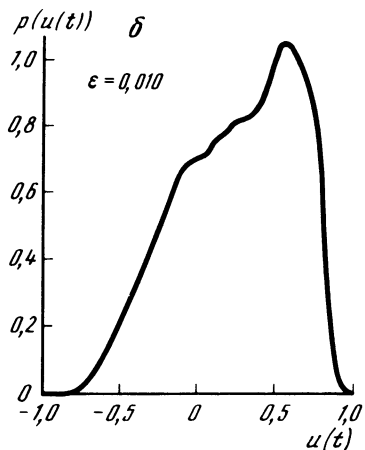
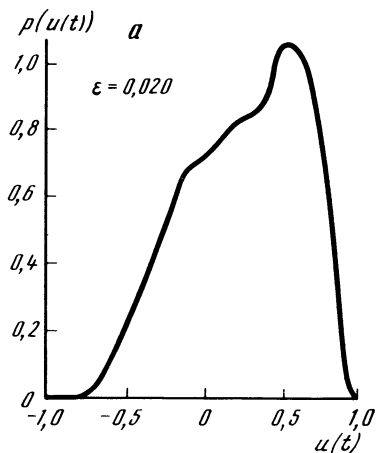
и если перейти к "растянутому" в $1/\epsilon$ раз времени, то ϵ вообще "выпадет" из этого соотношения. Поэтому при достаточно малом ϵ динамика $u_n(t)$ на удаленных друг от друга отрезках времени оказывается практически независимой и весь отрезок $0 \leq t \leq 1$ как-бы "распадается" на $O(1/\epsilon)$ доменов.

Для количественного описания такой доменной структуры разобьем отрезок $[0, 1]$ точками $t_i = ih$, $i = 0, \dots, N$, $h = \text{const}$, на интервалы длины h и рассмотрим два домена: $[t_{N-2k-j}, t_{N-k-j}]$ и $[t_{N-k}, t_N]$, отделенные промежутком $\Delta t = jh$. Обозначим через

$$p_k(u(t_{N-2k-j}), \dots, u(t_{N-k-j})) \text{ и } p_k(u(t_{N-k}), \dots, u(t_N))$$

плотности распределения по каждому из них (в силу равноправия доменов это одна и та же функция), а через

$$p_{j,k}(u(t_{N-2k-j}), \dots, u(t_{N-k-j}); u(t_{N-k}), \dots, u(t_N))$$



Р и с. 5

совместную плотность распределения. Тогда для невязки

$$s_{j,k}(\cdot) \equiv p_{j,k}(u(t_{N-2k-j}), \dots, u(t_{N-k-j}); u(t_{N-k}), \dots, u(t_N)) - p_k(u(t_{N-2k-j}), \dots, u(t_{N-k-j})) \times p_k(u(t_{N-k}), \dots, u(t_N))$$

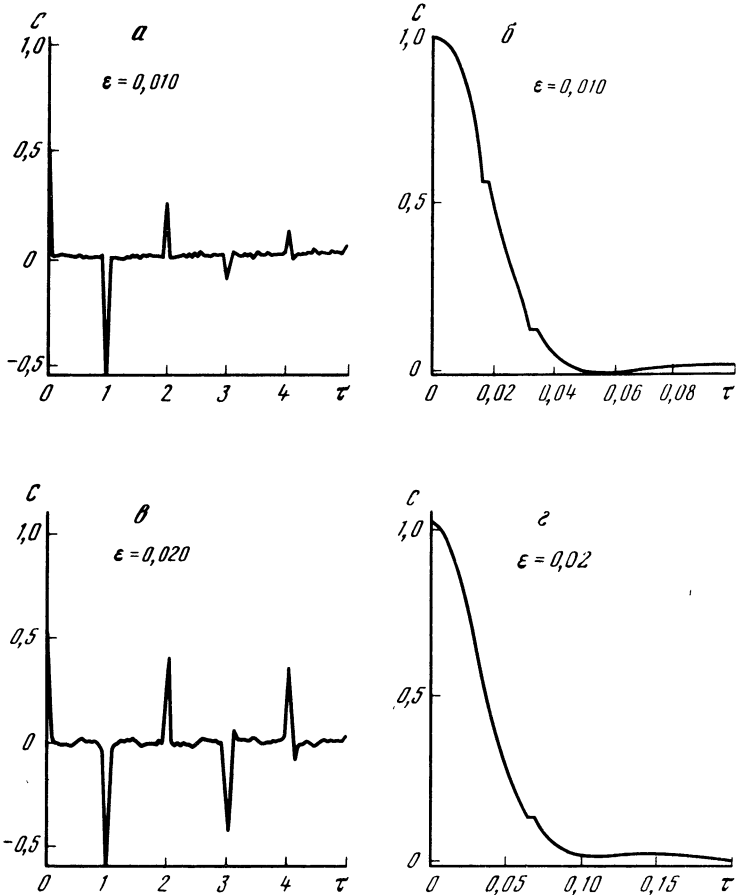
при $\epsilon \ll 1$ можно получить

$$\|s_{j,k}\| = O(\exp\{-C\Delta t/\epsilon\}), \quad (11)$$

что как раз и выражает эффективную независимость поведения решения на удаленных друг от друга доменах. Другим показателем такой независимости является автокорреляционная функция

$$C_\epsilon(\tau) = \frac{\langle u_n(t) u_n(t-\tau) \rangle - \langle u_n(t) \rangle^2}{\langle u_n(t)^2 \rangle - \langle u_n(t) \rangle^2},$$

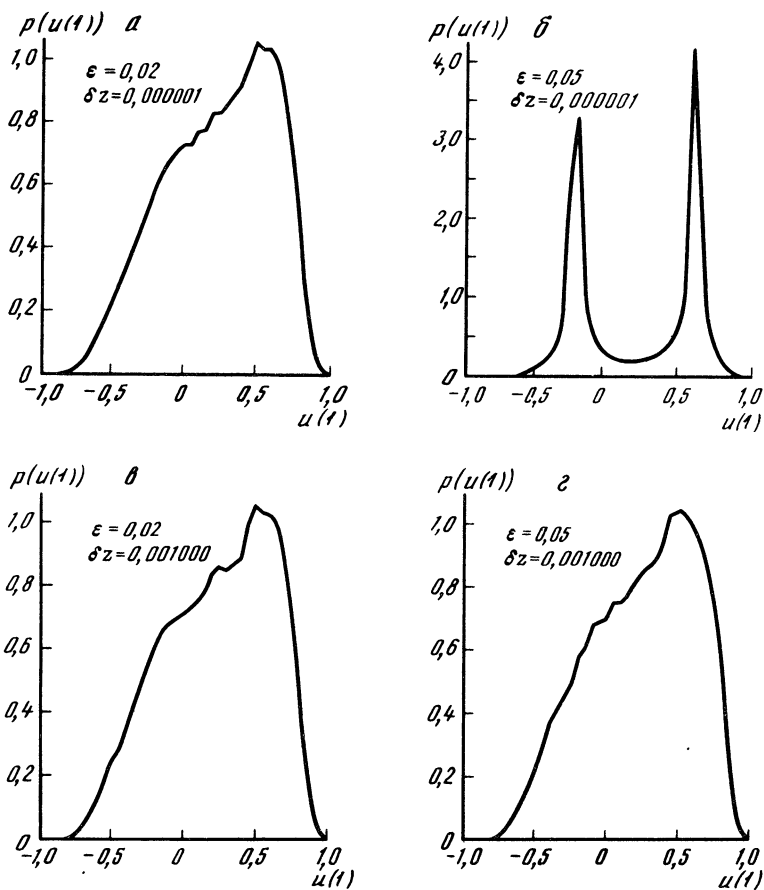
где $\langle \cdot \rangle$ означают усреднение по $0 \leq n \leq \infty$ и по $0 \leq t \leq 1$. Ее вид показан



Р и с. 6

на рис. 6, при $\tau \geq 10\epsilon$ она близка к нулю. Кроме того, $C_\epsilon(\tau) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} C^*(\tau/\epsilon)$. По-видимому, такое же поведение характерно и для ряда других статистических характеристик. Интересно и поведение ляпуновских показателей: при $\epsilon \rightarrow 0$, $\alpha = 1,9$ (α – параметр отображения f в (7)) и фиксированном i $\lambda_i \rightarrow \lambda^* \cong 0,3$; кроме того, быстро растет число близких показателей.

Теперь идею о доменной структуре можно сформулировать более четко. Именно если задаться некоторой точностью δ , то отрезок $0 \leq t \leq 1$ можно считать состоящим из $M = \text{const}/|\epsilon \ln \delta|$ (см. (11)) доменов, динамика на которых с заданной точностью независима, а аттрактор (в пределах заданной точности) – порожденным M одинаковыми и независимыми динамическими системами. Каждая из этих систем описывает поведение решения в пределах "своего" домена. Их статистические свойства асимптотически не зависят от ϵ (см. (9)). Поэтому для характеристик модели (7) при малом ϵ (и большой размерности $D = O(1/\epsilon)$) может быть получен из ее анализа при большем ϵ (и соответственно меньшей размерности



Р и с. 7

аттрактора). Это намного упрощает анализ таких режимов. Обратим внимание на то, что модели (7) и (8) отличаются лишь "начальными условиями", которые в соответствии с (10) "забываются" при $t \gg \epsilon$. Поэтому можно ожидать что статистические свойства $\{u_n(t)\}$ при $t \gg \epsilon$ в обеих системах будут близки. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что при $\epsilon \rightarrow 0$ вид возбуждения $\{z_n\}$ не играет существенной роли. В самом деле, уравнение (7) формально есть модель с внешним возбуждением при $z_n = u_{n-1}(1)$. Если при заданном возбуждении $\{z_n\}$ изменять ϵ , то

$$\|p_{k,\epsilon} - p_{k,\epsilon'}\| = O(\exp\{-C/\max(\epsilon, \epsilon')\}), \quad (12)$$

где через $p_{k,\epsilon}(u(t_{N-k}), \dots, u(t_N))$ мы обозначили плотность распределения $\{u_n(t_{N-k}), \dots, u_n(t_N)\}$. На рис. 7 показана типичная зависимость $p(u(1))$ от ϵ (в качестве возбуждения был взят случайный шум с равномерным распределением). Видно, что при фиксированной амплитуде возбуждения $\delta z = \max z_n - \min z_n$ показанное распределение почти не зависит от ϵ . В то же время если зафиксировать ϵ и уменьшать амплитуду возбуж-

дения, то распределение может стремиться к другому пределу, как это показано на рис. 7.

Подчеркнем, что модель (8) является не только преобразователем хаоса, превращающим "входной" (т.е. при $t = 0$) шум $\{z_n\}$ в "свой собственный" случайный процесс $\{u_n(t)\}$ на выходе (т.е. при $t \cong 1$), но и его усилителем. Действительно, амплитуда "выходных" колебаний может достигать величины порядка 1, в то время как амплитуда на "входе" $\delta z \ll 1$. При этом колебания усиливаются постепенно: чем больше t , тем больше их размах $(Du(t))^{1/2} = (\langle \{u_n(t) - \langle u_n(t) \rangle\}^2 \rangle)^{1/2}$ (до тех пор пока $Du(t) \ll 1$). Если t/ϵ мало, $(Du(t))^{1/2} \sim \delta z \exp(t/\epsilon)$. Когда же $Du(t) \cong 1$, происходит "насыщение". В этом режиме вид "выходных" колебаний зависит не столько от "входного" сигнала, сколько от внутренней структуры системы.

Можно ожидать, что похожие закономерности будут наблюдаться во многих пространственно-временных моделях с хаотическим поведением и быстрым затуханием пространственных корреляций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
2. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
3. Странные аттракторы: Сб. ст. М.: Мир, 1981. 256 с.
4. Turing A. The chemical basis of morphogenesis//Philos. Trans. Roy. Soc. London B. 1952. Vol. 237. P. 37–72.
5. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
6. Курдюмов С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации//Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982. С. 217–243.
7. Современные проблемы математики: Новейшие достижения. М.: ВИНТИ, 1987. 316 с. (Итоги науки и техники; Т. 28).
8. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А. Архитектура многомерных тепловых структур//ДАН СССР. 1984. Т. 274, № 5. С. 1071–1075.
9. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 8. С. 1189–1205.
10. Потапов А.Б. Построение двумерных собственных функций нелинейной среды: Препр. ИПМ АН СССР № 8. М., 1986. 26 с.
11. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Повещенко Ю.А. и др. Диссипативные структуры в тригерных средах//Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1875–1886.
12. Заморзев Л.М., Галарский Э.И., Палистрант А.Ф. Цветная симметрия, ее обобщения и приложения. Кишинев: Штиинца, 1978. 280 с.
13. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. О симметричных решениях уравнения Курамото–Сузуки//Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 7. С. 1281–1283.
14. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence//Dynamical systems and turbulence. B. etc.: Springer, 1981. P. 366–381.
15. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors//Physica D. 1983. Vol. 9, № 1/2. P. 189–208.
16. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. О вычислении размерностей странных аттракторов//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 7. С. 1021–1037.
17. Smith L.A. Intrinsic limits on dimension calculations//Phys. Lett. A. 1988. Vol. 133, № 6. P. 283–288.
18. Nicolis C., Nicolis G. Is there a climatic attractor?//Nature. 1984. Vol. 311. P. 529–532.

19. *Fraedrich K.* Estimating the dimension of weather and climatic attractors//*J. Atmosph. Sci.* 1986. Vol. 43, № 5. P. 419–432.
20. *Гиззатулина С.М., Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б. и др.* Размерность геодинимического аттрактора по данным о вариации длины суток: Препр. ИПМ АН СССР № 95. М., 1988. 25 с.
21. *Ершов С.В.* Статистические свойства хаоса в уравнении с запаздыванием: Приближение большой размерности: Препр. ИПМ АН СССР № 94. М., 1989. 31 с.
22. *Ikeda K., Matsumoto K.* High-dimensional chaotic behaviour in systems with time-delayed feedback//*Physica D.* 1987. Vol. 29, № 1/3. P. 223–235.
23. *Farmer J.D.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical systems//*Physica D.* 1982. Vol. 4, № 1/2. P. 366–393.

УДК 517.9

КЛЕТОЧНЫЕ АВТОМАТЫ КАК ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В.С. АФРАЙМОВИЧ, М.А. ШЕРЕШЕВСКИЙ

В последние годы интенсивно изучаются клеточные автоматы (КА), являющиеся простейшими математическими моделями неравновесных сред [1–3]. Исследуются (в основном численно) задачи о росте структур, их устойчивости, взаимодействии и пр. Но, как нам кажется, недостаточно используется то обстоятельство, что КА можно представлять себе (см. ниже) как динамические системы с дискретным временем, порождаемые отображениями нульмерного метрического пространства в себя. Между тем осознание этого факта сразу позволяет подключить весь мощный арсенал понятий и методов теории динамических систем к КА и получить о последних нетривиальную информацию. В работе речь будет идти в основном об "одномерных" КА, однако некоторые результаты без труда могут быть перенесены на более высокие размерности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛЕТОЧНОГО АВТОМАТА

Свяжем с каждой целочисленной точкой j на прямой величину x_j , которая может принимать p значений $\{0, 1, \dots, p-1\}$ таким образом, что значение $x_j(n+1)$ в момент времени $n+1$ однозначно определяется значениями $x_{j-r}(n), \dots, x_j(n), \dots, x_{j+r}(n)$ в предыдущий момент времени n , причем эта зависимость одна и та же для всех j :

$$x_j(n+1) = F(x_{j-r}(n), \dots, x_j(n), \dots, x_{j+r}(n)), \quad (1)$$

и будем называть функцию F правилом. Формула (1) определяет отображение T пространства X бесконечных в обе стороны и составленных из символов $\{0, 1, \dots, p-1\}$ последовательностей $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, снабженного расстоянием

$$\text{dist}(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |x_j - y_j| \cdot 2^{-|j|}.$$

Отображение T непрерывно, но, вообще говоря, необратимо. Динамическую систему $\{T^n\}_{0 \leq n < +\infty}$ (или $\{T^n\}_{-\infty < n < +\infty}$, если T обратимо)

на компакте X будем называть одномерным клеточным автоматом, соответствующим правилу F .

Аналогично с каждой точкой (i, j) целочисленной решетки на плоскости свяжем величину x_{ij} , принимающую p значений $\{0, 1, \dots, p-1\}$. На пространстве X бесконечных матриц $x = (x_{ij})_{-\infty < i, j < +\infty}$ введем расстояние

$$\text{dist}(x, y) = \sum_{i, j=-\infty}^{+\infty} |x_{ij} - y_{ij}| \cdot 2^{-|i|-|j|}$$

и на компакте X определим динамическую систему с помощью правила

$$x_{ij}(n+1) = F(x_{kl}(n), |k-i| \leq r_1, |l-j| \leq r_2). \quad (2)$$

Ее будем называть двумерным клеточным автоматом, соответствующим правилу F . Так же определяются и клеточные автоматы более высоких размерностей.

КЛЕТОЧНЫЙ АВТОМАТ – ШИРОКИЙ КЛАСС ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

На первый взгляд, кажется, что требование в (1), (2) конечности числа "соседей", от которых зависит значение x_j в момент времени $n+1$, слишком ограничительно и что можно представить себе ситуацию, когда значение в точке j зависит от состояния всей бесконечной дискретной "среды" в предыдущий момент времени. Однако для "непрерывных" правил, одинаково действующих во всех точках дискретного пространства, это не так. Именно справедлив следующий результат.

Пусть динамическая система на пространстве X задается непрерывным отображением T , "автономным" по пространственным координатам. (Как говорят математики, T коммутирует со сдвигами по пространственным координатам.) Скажем, в одномерном случае, когда пространственная координата всего одна и T задается соотношением

$$x_j(n+1) = F_j(\dots, x_j(n), x_{j+1}(n), \dots),$$

предположение об автономности означает, что

$$F_{j+1}(\dots, x_j, x_{j+1}, \dots) = F_j(\dots, y_j, y_{j+1}, \dots),$$

где $y_j = x_{j+1}$, $-\infty < j < +\infty$.

При этом предположении авторами установлено, что на самом деле F зависит лишь от конечного числа переменных, т.е. любая динамическая система, порожаемая непрерывным отображением соответствующего пространства X , коммутирующим со сдвигами по пространственным координатам, есть клеточный автомат. Этот результат – следствие непрерывности T и конечности множества значений каждой из переменных x_j .

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В КА

Говорят, что динамическая система $\{T^n\}$ на компактном метрическом пространстве X разделяет траектории (см., например, [4]), если существует положительная константа $\epsilon > 0$ такая, что для любых двух различных точек x, y из X найдется момент времени n такой, что траектории, выпущенные из этих точек, разойдутся на расстояние, большее ϵ : $\text{dist}(T^n x,$

$T^n y) > \epsilon$ (в случае обратимого T возможно $n < 0$). Число ϵ называется разделяющей константой.

Одним из общепринятых критериев стохастичности динамической системы является положительность энтропии Колмогорова–Синяя (см. [5]). В математической теории динамических систем используется и несколько иное понятие энтропии – так называемая топологическая энтропия [5]. В отличие от энтропии Колмогорова–Синяя эта величина не зависит от выбора конкретной инвариантной меры в фазовом пространстве. Известно, что топологическая энтропия динамической системы есть точная верхняя грань ее энтропий Колмогорова–Синяя, взятая по всем инвариантным мерам. Существуют примеры гладких динамических систем, разделяющих траектории, но имеющих нулевую топологическую энтропию. Для клеточных автоматов ситуация оказывается иной.

Теорема 1. *Любой одномерный КА $\{T^n\}$, разделяющий траектории, имеет положительную топологическую энтропию: $h_{\text{top}}(T) > 0$.*

Заметим, что из теоремы 1, в частности, следует существование у разделяющего траектории одномерного КА инвариантной меры, относительно которой он имеет положительную энтропию Колмогорова–Синяя.

Можно ли по правилу F установить – является КА разделяющим траектории или нет – мы не знаем, но можем указать достаточное условие, конструктивно проверяемое и охватывающее широкий класс одномерных КА. Справедливо следующее утверждение:

Пусть правило F в (1) удовлетворяет условиям:

а) для любых значений $(x_1, x_2, \dots, x_{3r})$ и $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{3r})$ таких, что $x_i = x'_i$ при $1 \leq i \leq 2r$ и $x_{2r+1} \neq x'_{2r+1}$, найдется j , $r+1 \leq j \leq 2r$, такое, что

$$F(x_{j-r}, \dots, x_j, \dots, x_{j+r}) \neq F(x'_{j-r}, \dots, x'_j, \dots, x'_{j+r});$$

б) для любых (x_{-3r}, \dots, x_{-1}) , $(x'_{-3r}, \dots, x'_{-1})$ таких, что $x_i = x'_i$ при $-2r \leq i \leq -1$ и $x_{-2r-1} \neq x'_{-2r-1}$, найдется j , $-2r \leq j \leq -r-1$, такое, что

$$F(x_{j-r}, \dots, x_j, \dots, x_{j+r}) \neq F(x'_{j-r}, \dots, x'_j, \dots, x'_{j+r}).$$

Тогда одномерный КА, порождаемый правилом F , разделяет траектории.

Легко видеть, что любое правило F , принадлежащее классу M (см. следующий раздел), удовлетворяет условиям а) и б).

КА И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

Нетрудно видеть, что "фазовое пространство" КА – это множество X , гомеоморфное канторову совершенному множеству, и T – непрерывное отображение X в себя. Имеется хорошо изученный класс динамических систем с подобными фазовым пространством и отображением – это топологические марковские цепи (ТМЦ) [6]. Естественно выделить ТМЦ среди КА и перенести известные результаты о ТМЦ на КА. Ограничимся КА и ТМЦ с максимальными (в некотором смысле) хаотическими свойствами.

Скажем, что правило F из (1) принадлежит классу M , если для любых (x_{-r}, \dots, x_{r-1}) и (x'_{-r+1}, \dots, x'_r) отображения $x \mapsto F(x_{-r}, \dots, x_{r-1}, x)$ и $y \mapsto F(y, x_{-r+1}, \dots, x_r)$ определяют некоторые перестановки на мно-

жестве $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Другими словами, если зафиксировать состояния всех соседних элементов к j -му, кроме крайнего правого ($j+r$)-го или же крайнего левого ($j-r$)-го, то изменение значений каждого из этих крайних элементов индуцирует максимально возможное изменение j -го элемента — j -й элемент принимает все значения $\{0, 1, \dots, p-1\}$.

Простейший пример КА, удовлетворяющего этим условиям, определяется формулой

$$x_j(n+1) = f(x_j(n)) + x_{j-1}(n) + x_{j+1}(n), \quad (3)$$

где f — произвольная функция, определенная на множестве $\{0, 1, \dots, p-1\}$ со значениями в нем же, а сложение понимается циклически (по модулю p).

Справедлива

Теорема 2. Если КА принадлежит классу M , то соответствующее отображение T топологически сопряжено со сдвигом некоторой ТМЦ с числом состояний, равным p^{2r+1} , и матрицей A допустимых переходов такой, что все элементы матрицы A^2 равны p^{2r-1} .

Доказательство теоремы состоит в построении марковского разбиения [7] на X . Таковым оказывается разбиение на всевозможные цилиндры $C(x_{-r}^*, \dots, x_r^*) = \{x \in X: x_j = x_j^*, |j| \leq r\}$. Из теоремы вытекают следующие полезные утверждения. Если КА принадлежит классу M , то

С л е д с т в и е 1. Отображение T топологически перемешивает.

С л е д с т в и е 2. Топологическая энтропия $h_{\text{top}}(T) = 2r \ln p$.

С л е д с т в и е 3. На X имеется единственная мера μ максимальной энтропии¹, причем

$$\mu \{x: x_i = x_i^* \text{ при } j \leq i < j+l\} = p^{-l},$$

для любых $(x_j^*, \dots, x_{j+l-1}^*)$.

В заключение этого раздела отметим, что КА из класса M обладают максимальными хаотическими свойствами в следующем смысле: можно показать, что для любого правила F из (1) топологическая энтропия соответствующего отображения T не превосходит $2r \ln p$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе [8] численно исследовались одномерные КА (названные автором симплектическими), полученные дискретизацией пространства и времени из гамильтоновой системы с дельта-импульсной внешней силой, действующей в целочисленные моменты времени. Рассматриваемые в [8] КА задаются правилами вида

$$F(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) = K(x_j) \pm (x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1})(\text{mod } 3),$$

где $x_j \in \{-1, 0, 1\}$ и $K: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ — произвольное отображение. Легко видеть, что такие КА принадлежат классу M (см. (3)) и, следовательно, результат последнего раздела применим в этом случае. Следует учитывать, однако, что индекс j в контексте [8] может принадлежать только конечному множеству $\{1, \dots, N\}$.

¹ Мера, для которой энтропия Колмогорова–Синяя совпадает с топологической энтропией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neumann J. von.* Theory of self-reproducing automata. Urbana: Univ. Ill., 1966. 184 p.
2. Theory and application of cellular automata / Ed. S. Wolfram. Singapore: World sci. publ., 1986. 388 p.
3. *Wolfram S.* Statistical mechanic of cellular automata // Rev. Mod. Phys. 1983. Vol. 55. P. 601–644.
4. *Nitecki Z.* Differentiable dynamics. Cambridge (Mass.): MIT press, 1971.
5. *Мартин Н., Ингленд Дж.* Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988. 350 с.
6. *Алексеев В.М.* Символическая динамика // Одиннадцатая математическая школа. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. Т. 4. С. 1.
7. *Синай Я.Г.* Построение марковских разбиений // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 2, № 3. С. 70–80.
8. *Kaneko K.* Symplectic cellular automata // Phys. Lett. A. 1988. Vol. 129, N 1. P. 9–16.

УДК 517.9:519.24

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ

А.Л. ЖЕЛЕЗНЯК

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, топологическая энтропия h_{top} является одной из количественных характеристик стохастичности динамических систем. Она была введена в работах [1, 2] и в отличие от метрической энтропии h_{ρ} (инвариант Колмогорова–Синай, см. [3]) характеризует сложность системы в смысле разнообразия возможных типов траекторий. Топологическая энтропия является топологическим инвариантом динамической системы и обладает рядом свойств, которые оказываются полезными при исследовании конкретных прикладных задач. Так, для широкого класса отображений топологическая энтропия непрерывно зависит от управляющих параметров [4, 5], в то время как сингулярность инвариантной меры может приводить к разрывному, нерегулярному поведению метрической энтропии при малых возмущениях системы. Согласно [1, 3] $h_{\text{top}}(f) = \sup_{\rho} \{h_{\rho}(f)\}$, где ρ – инвариантная относительно отображения нормированная борелевская мера, поэтому на основе сравнения топологической и метрической энтропий можно получить важную информацию о мере, порожденной данной динамической системой, о близости этой меры к мере с максимальной энтропией.

Несмотря на сказанное выше, топологическая энтропия редко используется в приложениях: лишь для систем модельного вида удастся найти h_{top} непосредственно на основе определения. Это связано с отсутствием эффективных алгоритмов даже для систем малой размерности. В данной работе излагается подход к вычислению топологической энтропии динамических систем, порождаемых кусочно-монотонными кусочно-непрерывными отображениями интервала, причем вид отображения может быть задан явно или восстановлен по одномерной реализации. Подход

основан на результатах теории нидингов, содержащихся в работах [4–7], и позволяет свести процесс вычислений к нахождению минимального положительного корня некоторого полинома — нидинг-детерминанта.

2. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ

Рассмотрим кусочно-монотонное кусочно-непрерывное отображение $f: I \rightarrow I$ интервала $I = [0, 1]$. Разобьем I на m подынтервалов точками множества $C = \{C_0 = 0, C_1, \dots, C_{m-1}, C_m = 1\}$ так, чтобы на каждом $I_j = (C_{j-1}, C_j)$, $1 \leq j \leq m$, отображение f было строго монотонным и непрерывным. Поставим в соответствие подынтервалам I_j некоторые фиксированные числа γ_j , тогда любой точке $x \in I \setminus D$, где $D = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(C)$,

будет соответствовать последовательность $\varphi(x) = \{\varphi_n(x) \mid \varphi_n(x) = \gamma_j$, если $f^n(x) \in I_j, n \geq 0\}$. Положим, что для любого $x \notin C$

$$\epsilon(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } f(x) \text{ возрастает в точке } x, \\ -1, & \text{если } f(x) \text{ убывает в точке } x, \end{cases}$$

и для $x \in I \setminus D$, следуя [6], определим нидинг-последовательность

$$K(x) = \{K_n(x) \mid K_n(x) = \epsilon_n(x) \varphi_n(x), \text{ где } \epsilon_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \epsilon(f^i(x)), \\ n \geq 1, \epsilon_0(x) \equiv 1\}.$$

Нетрудно видеть, что построенная таким образом нидинг-последовательность $K(x)$ задает отображение из $I \setminus D$ в одностороннюю схему Бернулли Ω_{2m}^+ из $2m$ символов $\pm\gamma_1, \dots, \pm\gamma_m$. Пусть

$$K^+(x) = \lim_{y \downarrow x} K(y), \quad x \neq 1; \quad K^-(x) = \lim_{y \uparrow x} K(y), \quad x \neq 0 \\ y \in I \setminus D \quad y \in I \setminus D$$

(эти пределы существуют для любой точки $x \in I$). Построим $2m$ различных нидинг-последовательностей $K^+(0), K^-(C_1), \dots, K^+(C_{m-1}), K^-(1)$ и на их основе определим формальные степенные ряды переменного t $\tilde{K}^+(0, t), \tilde{K}^-(C_1, t), \dots, \tilde{K}^+(C_{m-1}, t), \tilde{K}^-(1, t)$ согласно формуле

$$\tilde{K}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x) t^n, \text{ где } K(x) = \{K_n(x), n \geq 0\} \in \Omega_{2m}^+.$$

Если составить далее $m-1$ формальных рядов

$$A_i(t) = \tilde{K}^+(C_i, t) - \tilde{K}^-(C_i, t), \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

и представить каждый такой ряд в виде

$$A_i(t) = N_{i1}(t) \gamma_1 + N_{i2}(t) \gamma_2 + \dots + N_{im}(t) \gamma_m,$$

мы получим нидинг-матрицу $(N_{ij}(t))$ порядка $(m-1) \times m$ с элементами из кольца степенных рядов переменного t с целыми коэффициентами.

Пусть $M_i(t)$ — определитель матрицы порядка $(m-1) \times (m-1)$, полу-

ченной из нидинг-матрицы $(N_{ij}(t))$ исключением i -го столбца; тогда выражение

$$M_f(t) = (-1)^{i+1} M_i(t) / (1 - \epsilon(I_i) t)$$

не зависит от выбора i и является степенным рядом с ограниченными коэффициентами. Степенной ряд $M_f(t)$ называется нидинг-детерминантом отображения f .

Возможность вычисления топологической энтропии отображения f основывается на следующих двух утверждениях (см. [6, 7]), связывающих нидинг-детерминант $M_f(t)$ с дзета-функцией Артина-Мазура

$$\zeta_f(t) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n t^n}{n} \right)$$

(p_n — число неподвижных точек отображения f):

1) степенной ряд $M_f(t) \zeta_f(t)$ является голоморфной функцией комплексного переменного t в открытом единичном круге;

2) радиус сходимости $r(f)$ дзета-функции $\zeta_f(t)$ связан с топологической энтропией $h_{\text{top}}(f)$ соотношением

$$h_{\text{top}}(f) = -\ln r(f).$$

Таким образом, для вычисления топологической энтропии достаточно найти минимальный положительный корень t^* нидинг-детерминанта $M_f(t)$, коэффициенты которого определяются по изложенной выше методике; при этом $h_{\text{top}}(f) = -\ln t^*$.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

В этом разделе мы изложим результаты численного анализа двух динамических систем, проведенного на основе предложенного подхода. Наряду с топологической энтропией будем вычислять ляпуновский характеристический показатель λ , определяемый по формуле $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |T^n x|$,

где $T_x^n = \prod_{i=0}^{n-1} T(f^i(x))$, а оператор $T \equiv d/dx$. Поскольку согласно [8]

$h_\rho \leq \lambda$, где ρ — эргодическая мера с компактным носителем (а для физических мер часто имеет место строгое равенство — тождество Песина), то из сравнения топологической энтропии с ляпуновским показателем можно судить о том, насколько инвариантная мера, реализуемая для данной системы, отлична от меры с максимальной энтропией.

1. Рассмотрим одномерное отображение $f: x \rightarrow \bar{x}$ интервала I в себя, имеющее вид

$$(x^2 + r^2)^{1/2} - (((1 - \bar{x})^2/k)^2 + r^2)^{1/2} = 4rN, \quad (1)$$

где $N = [(x^2 + r^2)^{1/2} - r]/4r > 0$ — целое число, $I = [a, 1]$, $a = 1 - 2\sqrt{6rk}$; $r > 0$, $k > 0$ — управляющие параметры. К исследованию отображения (1) приводит изучение динамики электромеханических часов с ходом Гиппа [9]. Несложно показать, что число участков монотонности и непрерывности отображения (1) равно в точности N (рис. 1). Заметим,

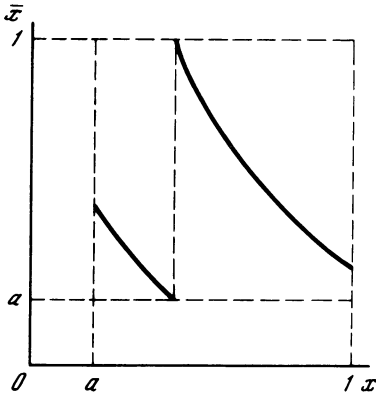


Рис. 1. Вид отображения (1) при $N = 2$

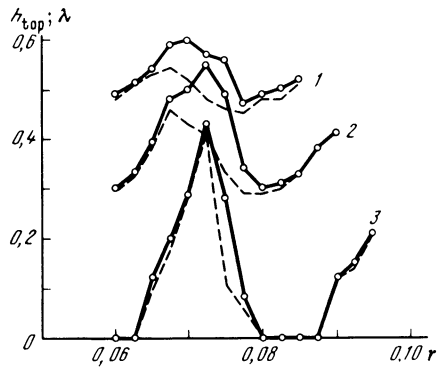


Рис. 2. Зависимости топологической энтропии h_{top} (сплошная линия) и ляпуновского показателя λ (разрывная линия) от параметра r

1-3: $k = 1,4$ (1); $1,2$ (2); $1,0$ (3)

что это обстоятельство удобно для проверки эффективности методики при различных N .

Система (1) может демонстрировать как регулярный, так и хаотический режимы, причем структура одномерных предельных множеств может быть различной. На рис. 2 представлены зависимости топологической энтропии h_{top} и ляпуновского показателя λ от параметра r при фиксированных k . Видно, что h_{top} и λ ведут себя качественно одинаково, но при каждом k имеется область значений параметра r , при которых различие достаточно существенно, и можно утверждать, что инвариантная мера динамической системы, порождаемой отображением (1), отличается от меры с максимальной энтропией.

Подробное исследование системы (1) и обсуждение вопросов, связанных с численной реализацией предложенного подхода, содержится в работе [10].

2. Существенный практический интерес связан с возможностью определения топологической энтропии динамических систем непосредственно по экспериментальной наблюдаемой. Предложенный подход позволяет вычислять топологическую энтропию систем, для которых удастся подобрать шаг дискретизации наблюдаемой $x(t)$ таким образом, что соответствующая функция последования $f: x(t_i) \rightarrow x(t_{i+1})$ оказывается одномерной. Класс таких физических систем достаточно широк (см., например, [11] и библиографию).

В качестве модельного примера рассмотрим динамическую систему, задаваемую дифференциальными уравнениями

$$\alpha \dot{V} = j_e(t) - j(T, V), \quad \beta \dot{T} = j(T, V) V - (T - T_0). \quad (2)$$

Здесь $j(T, V) = 2T^{1/2} e^{-1/T} \text{sh}(V/T)$; α, β, T_0 – положительные параметры. Система (2) описывает динамику нелинейного отклика многослойных селективно-легированных гетероструктур на внешний периодический СВЧ-сигнал $j_e(t) = \delta \cos \omega t$ [12].

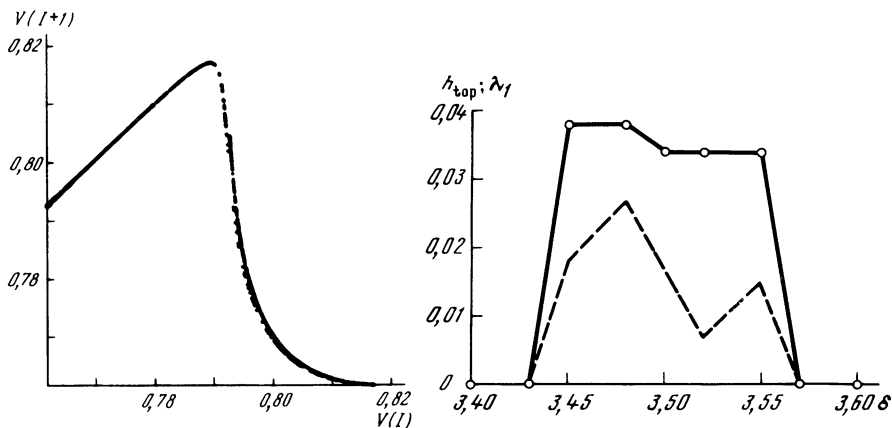


Рис. 3. Функция последования $f_{\Delta t}$, восстановленная по наблюдаемой $V(t)$ системы (2) при $\alpha = 20$; $\beta = 0,2$; $T_0 = 0,05$; $\omega = 0,5$; $\delta = 3,5$

Рис. 4. Зависимости топологической энтропии h_{top} (сплошная линия) и наибольшего ляпуновского показателя λ_1 (разрывная линия) системы (2) от параметра δ

Как показало численное моделирование, если шаг дискретизации Δt одномерной наблюдаемой, например, $V(t)$ совпадает с периодом внешнего сигнала, т.е. $\Delta t = 2\pi/\omega$, то построенная по $V(t)$ функция последования $f_{\Delta t}: V(t_i) \rightarrow V(t_{i+1})$, $1 \leq i \leq M$, оказывается практически одномерной (рис. 3). Если длина наблюдаемой достаточно велика ($M \approx 10^3 \div 10^4$), то с хорошей точностью можно определить координаты критических точек построенной функции последования $f_{\Delta t}$ и на основе предложенного подхода оценить топологическую энтропию $h_{\text{top}}(f_{\Delta t})$. При этом топологическая энтропия исходной системы h_{top} связана с вычисленной величиной соотношением

$$h_{\text{top}} = (\Delta t)^{-1} h_{\text{top}}(f_{\Delta t}).$$

Необходимо подчеркнуть, что топологическая энтропия кусочно-монотонного кусочно-непрерывного отображения f непрерывно зависит от возмущений в C^0 -топологии [5], поэтому малые погрешности в определении вида f приводят к малым ошибкам в вычислении энтропии.

На рис. 4 приведены результаты вычислений топологической энтропии h_{top} и наибольшего ляпуновского показателя λ_1 (см. [13]) при различных значениях δ . Существенное отличие h_{top} от λ_1 свидетельствует о том, что инвариантная мера системы (2), реализуемая при численном моделировании, далека от меры с максимальной энтропией.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты численного моделирования подтверждают простоту и достаточную эффективность изложенного в данной работе подхода. Мы надеемся, что с его помощью удастся не только включить топологическую энтропию в ряд реально вычисляемых характеристик стохастичности динами-

ческих систем, но и приблизиться к пониманию свойств инвариантной меры конкретных физических систем.

Автор выражает искреннюю благодарность В.С. Афраймовичу, И.Л. Железняк, М.И. Малкину за плодотворное сотрудничество и М.И. Рабиновичу за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Adler R.L., Konheim A.G., McAndrew M.H.* Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 114, N 2. P. 309–319.
2. *Боуэн Р.* Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.
3. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 207 с.
4. *Guckenheimer J.* The growth of topological entropy for one dimensional maps // Lect. Notes Math. 1980. Vol. 819. P. 216–223.
5. *Малкин М.И.* О непрерывности энтропии разрывных отображений интервала // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Горьк. ун-т. 1982. С. 35–38.
6. *Milnor J., Thurston W.* On iterated maps of interval: Prepr. Princeton Univ. 1977. 81 p.
7. *Малкин М.И.* Методы символической динамики в теории одномерных разрывных отображений: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Горький. 1985.
8. *Ruelle D.* An inequality for the entropy of differentiable maps // Bol. Soc. brasil. math. 1978. Vol. 9. P. 83–87.
9. *Комраз Л.А.* Динамические модели маятникового регулятора Гиппа // ПММ. 1971. Т. 35, № 1. С. 148–162.
10. *Железняк А.Л., Железняк И.Л., Малкин М.И.* Вычислительные аспекты энтропийной теории одномерных динамических систем: Препр. ИПФ АН СССР № 222. Горький, 1988. 15 с.
11. *Swinney H.L.* Observations of order and chaos in nonlinear systems // Physica D. 1983. Vol. 7, N 1/3. P. 3–15.
12. *Belyantsev A.M., Zheleznyak A.L., Ignatov A.A. et al.* Dynamics of avalanche-like electron heating oscillations and chaotic response in multilayer heterostructures // III~Conf. on phys. and technol. of GaAs and other III–V semiconductors: Abstracts. Praha, 1988. P. 51.
13. *Shimada I., Nagashima T.* A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems // Progr. Theor. Phys. 1979. Vol. 61, N 6. P. 1605–1616.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЯ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

В.А. АНТОНЕЦ, М.А. АНТОНЕЦ, И.А. ШЕРЕШЕВСКИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение структурообразования в неравновесных средах является одной из актуальных тем различных наук – физики, химии и биологии. Существующее континуальное описание некоторых из таких сред, тесно связанное с уравнением нелинейной диффузии, позволило выявить глубокую аналогию между генерацией пространственно-временных структур и динамикой нелинейного осциллятора [1]. В частности, этот подход позволяет описать с помощью предельного перехода структуры, образующиеся в дискретных системах (типа решетчатых) из большого числа частиц.

Однако при этом он не охватывает чрезвычайно обширный класс древовидных структур, часто возникающих в процессе агрегации частиц, т.е. в процессе живого и неживого роста [2]. Чаще всего такие структуры рассматривались при изучении процессов полимеризации (см. обзор [3]) – агрегации мономеров, приводящей к образованию разветвленных структур. Однако полимеры являются не самым распространенным объектом такого рода. Древовидная форма характерна для большого числа разнообразных объектов, в частности для таких, как деревья, коммуникационные системы сложных живых организмов, обеспечивающие их жизнь и целостность. Именно такую форму имеет сосудистая сеть кровеносной и лимфатической системы [4, 5], сеть периферических нервов и др. Древовидная форма характерна для саморазвивающихся транспортных систем, прокладывающих свой путь в сплошной среде, например для сети протоков, образующихся при фильтрации жидкости через пористую среду. В предлагаемой статье рассмотрены динамические модели роста древовидных систем и установлена связь параметров стационарных состояний этих систем с параметрами, характеризующими их динамику. Вначале в качестве примера мы рассмотрим одну из задач, решавшуюся нами при изучении кровотока в сети мелких сосудов [6], а затем покажем, как динамические уравнения, специфические на первый взгляд для древовидных систем, могут быть использованы для задания динамики разнообразных дискретных систем, конфигурации которых при эволюции останутся неразрывными в некотором точно определенном (хотя и не всегда заранее очевидном) смысле. Существенность принципа сохранения неразрывности конфигураций демонстрируется на примере критических явлений, обязанных своим существованием именно запрещению разрывных конфигураций.

2. МОДЕЛЬ КРОВОТОКА В СЕТИ МЕЛКИХ СОСУДОВ

Будем считать, что сеть сосудов имеет древовидную структуру (рис. 1), образующуюся путем разветвления каждого сосуда на два [4], и, следовательно, этой сети можно поставить в соответствие граф в виде дихотомической ветвящегося дерева. Будем считать, что каждый из сосудов ветвящейся сети может находиться в одном из двух состояний – открытом для протекания крови или закрытом. Будем описывать состояния сосудов сети случайными логическими переменными, зависящими от дискретного времени t . Пусть состояние сосуда a в момент времени описывается переменной $x(a, t)$. Если сосуд a открыт, то $x(a, t)$ истинна, а если он закрыт, то $x(a, t)$ ложна.

При формулировании уравнений динамики поведения сосудов мы будем исходить из того, что благодаря наличию мышечной стенки и изменению параметров потока в сосудистой сети каждый из ее сосудов проявляет активные свойства – может открываться и закрываться. Эти активные свойства будем описывать случайными логическими переменными $\eta(a, t)$, $\xi(a, t)$. Переменная $\xi(a, t)$ означает открывание сосуда, и, следовательно, $x(a, t + 1)$ истинна, если только это не противоречит каким-либо другим условиям, которые, как мы увидим, могут иметь место. Переменная $\eta(a, t)$ означает закрывание сосуда a , и, следовательно, $x(a, t + 1)$ ложна, если это также не противоречит каким-либо иным условиям. Взаимодействие соседних сосудов друг с другом так же, как и в предыдущих работах [7–9], будем понимать как зависимость активности и состояния сосуда a от состояния соседних сосудов, а также от характеристик потока в них. При этом будем считать, что взаимодействие происходит только с ближайшими соседями – предком \hat{a} , двумя потомками a_0, a_1 и сосудом той же генерации a' (рис. 2).

Будем также предполагать, что события, происходящие в сети сосудов, не противоречат условию неразрывности потока в ней. Это условие будем понимать в том естественном смысле, что если переменная $x(a, t)$ истинна, то истинна и $x(\hat{a}, t)$.

Динамика переменных $x(a, t)$ в согласии со сформулированными выше условиями описывается рекуррентными соотношениями с помощью обычных логических операций:

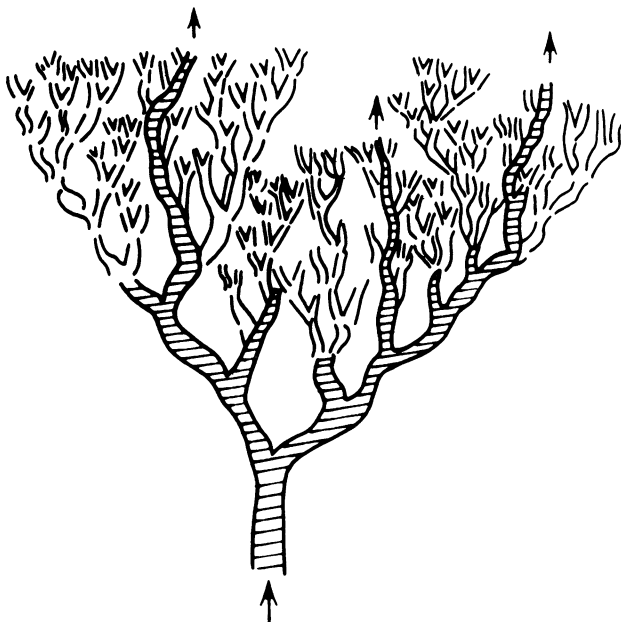
$$x(a, t + 1) = [x(a, t) \wedge \bar{\eta}(a, t)] \vee [\xi(a, t) \wedge x(\hat{a}, t) \wedge \bar{x}(a, t)] \vee [x(a_0, t) \vee x(a, t)], \quad (1)$$

где знак \vee обозначает "или", \wedge – "и", черточка сверху – "не".

Можно показать, что для того, чтобы соотношения (1) не противоречили условию неразрывности потока в сети, достаточно, чтобы

$$\xi(a, t) \Rightarrow \eta(\hat{a}, t). \quad (2)$$

Из условия неразрывности следует, что в каждый момент времени открытые сосуды образуют пятно, т.е. вместе с каждым открытым сосудом открыты и все сосуды на единственном пути, соединяющем его с корневым сосудом – "артой", который мы считаем всегда открытым. Поэтому все вероятностные характеристики сети сосудов в момент времени t полностью определяются вероятностями $G(J, t)$ истинности выс-



Р и с. 1. Схема кровеносной сети в виде дихотомически ветвящегося дерева
 Дерево сходящихся венозных сосудов не показано. Заштрихованы связанные цепочки открытых сосудов

казываний $\bigwedge_{a \in J} x(a, t)$, где J – произвольное конечное пятно на дереве.

Из динамических уравнений (1) могут быть выведены эволюционные уравнения для $G(J, t)$. Распределения вероятностей на совокупности пятен на дереве, отвечающие не зависящим от времени решениям этих уравнений, являются стационарными состояниями сети сосудов. Можно показать, что стационарное решение уравнения (1) имеет вид

$$G_{\text{стац}}(J) = \nu_1^{|J|-1}, \quad (3)$$

где ν_1 – минимальный положительный корень уравнения

$$(1 + \nu)(\nu^2 - \nu + \beta) = 0, \quad (4)$$

где $\beta = r/p$, r – вероятность события $\xi(a, t)$, p – вероятность события $\eta(a, t)$.

Из условия неразрывности следует, что

$$p \leq (1 - r)^2. \quad (5)$$

При $\beta > 1/4$ система (4) имеет только решение $\nu = 1$, которому отвечает состояние сети с полностью открытыми сосудами. При $\beta < 1/4$ появляется два положительных корня уравнения (4), меньший из которых $\nu = 1/2 - (\beta - 1/4)^{1/2} \leq 1/2$ и дает решение (3). При этом $G_{\text{стац}} \rightarrow 0$ при $|J| \rightarrow \infty$. Таким образом, стационарным состоянием уравнения (1), предполагающего, что состояние сосуда a меняется лишь благодаря его собственной активности, а взаимодействие с соседними сосудами сводится к соблю-

деню условия неразрывности, является либо целиком заполненная сеть, либо сеть, содержащая только конечные заполненные кластеры. Стационарные состояния при более сложном взаимодействии, не описываемом уравнением (1), могут быть рассмотрены следующим образом. Введем распределение вероятностей тройников сосудов a , a_0 , a_1 при условии, что сосуд a открыт. Это распределение может быть задано условными вероятностями:

π_{11} — вероятность того, что открыты оба потомка a_0 и a_1 открытого сосуда a :

π_{10} — вероятность того, что открыт только потомок a_0 ;

π_{01} — вероятность того, что открыт только потомок a_1 ;

π_{00} — вероятность быть закрытыми обоим потомкам.

Естественно выполняется нормировочное соотношение

$$\pi_{11} + \pi_{10} + \pi_{01} + \pi_{00} = 1. \quad (6)$$

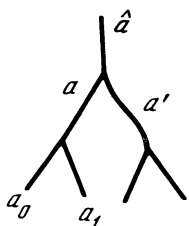


Рис. 2. Схема к описанию взаимодействия сосудов

Рассмотрим далее последовательность случайных величин $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$, где n_k — число открытых сосудов в k -м поколении потомков сосуда a , соединенных с ним цепочкой открытых сосудов. Эта последовательность случайных величин образует ветвящийся процесс [14], если предположить, что состояние пары потомков определяется состоянием их предка. Производящая функция $F(s)$ этого процесса, т.е. производящая функция распределения числа открытых потомков ближайшего поколения, имеет вид

$$F(s) = \pi_{00} + (\pi_{01} + \pi_{10})s + \pi_{11}s^2, \quad (7)$$

где s — аргумент.

Согласно известной теореме [15] вероятность вырождения θ такого процесса, т.е. в нашем случае вероятность того, что любая цепочка открытых сосудов, начинающаяся сосудом a , состоит из конечного числа звеньев, равна наименьшему из положительных корней характеристического уравнения $F(s) = s$:

$$\pi_{11}\theta^2 + (\pi_{01} + \pi_{10})\theta + \pi_{00} = 0. \quad (8)$$

Отсюда $\theta = \{\min 1, \pi_{00}/\pi_{11}\}$.

Тогда при $\pi_{00}/\pi_{11} > 1$ процесс вырождается с вероятностью 1. Если $\pi_{00}/\pi_{11} < 1$, то вероятность вырождения, т.е. образования конечного кластера, равна π_{00}/π_{11} , а вероятность невырождения, т.е. образования бесконечного кластера, равна

$$P = 1 - \pi_{00}/\pi_{11}. \quad (9)$$

Так как среднее число A_1 заполненных ближайших потомков открытого сосуда равно

$$A_1 = 1 \cdot \pi_{01} + 1 \cdot \pi_{10} + 2\pi_{11} = 1 + (\pi_{11} - \pi_{00}), \quad (10)$$

то

$$P = (A_1 - 1)/\pi_{11}, \quad (11)$$

т.е. P имеет пороговый характер по отношению к A_1 . Величина A_1 должна быть больше 1, чтобы стала отличной от нуля вероятность образования бесконечного кластера.

Для конечного кластера может быть найдено среднее число открытых сосудов, из которых он состоит:

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} A_1^k = \frac{1}{1 - A_1} = \frac{1}{\pi_{00} - \pi_{11}}, \quad (12)$$

поскольку среднее число открытых потомков открытого сосуда в положении k равно A_1^k .

В случае отсутствия взаимодействия сосудов между собой

$$\pi_{11} = p^2, \quad \pi_{10} = \pi_{01} = p(1 - p), \quad \pi_{00} = (1 - p)^2, \quad (13)$$

где p – вероятность для данного сосуда быть открытым. Тогда

$$A_1 = 2, \quad (14)$$

$$P = (2p - 1)/2p \quad (15)$$

Соотношения (14) и (15) показывают, что в случае невзаимодействующих сосудов для реализации сквозного протекания необходимо, чтобы вероятность того, что сосуд открыт (т.е. относительная концентрация открытых сосудов), превысила пороговую величину $p_n = 1/2$. Это точно соответствует выводам перколяционной теории [5]. Переписав (15) в виде $P = 2(p - p_n)/p^2$, для малых $(p - p_n)$ получим

$$P \cong 8(p - p_n). \quad (16)$$

Таким образом, при $\pi_{00}/\pi_{11} > 1$ можно говорить только о конечных кластерах, а при $\pi_{00}/\pi_{11} < 1$ – о смеси конечных и бесконечных кластеров.

3. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ РЕЖИМОВ КРОВООБРАЩЕНИЯ

Развитые выше представления позволяют выделить два качественно различных режима кровообращения.

Первый режим имеет место при сквозном протекании крови по сети в случае $A_1 > 1$, т.е. когда процессы закрывания (или схлопывания) сосудов не слишком интенсивны. По-видимому, такой режим кровотока реализуется в здоровой мышце сердца – миокарде, поскольку известно, что коронарная сеть сосудов, питающая его, представляет собой дихотомически ветвящееся дерево [4]. Его особенностью является крутая зависимость вероятности протекания от превышения над порогом среднего числа открытых потомков открытого сосуда. Для слабого взаимодействия сосудов это эквивалентно крутой зависимости вероятности протекания от вероятности произвольного сосуда быть открытым, т.е. от относительной концентрации открытых сосудов. Так, согласно соотношению (11) при отсутствии взаи-

модействия вероятность протекания P меняется от 0 до 80% при росте концентрации открытых сосудов над критической всего на 20%, т.е. от $p = 0,5$ до $p = 0,6$. Это означает, что может осуществляться эффективное регулирование кровотока за счет изменения активности сосудов, определяющих концентрацию открытых сосудов.

Второй режим кровотока может осуществляться в том случае, если ограниченные пятна ($\pi_{00} > \pi_{11}$) контактируют друг с другом, сливаясь таким образом в непрерывную цепь. При этом каждое пятно зарождается в результате подведения к дереву сосудов, так называемых сосудов-коллатералей [11]. Именно благодаря таким сосудам вероятности того, что потомки незаполненных сосудов могут оказаться заполненными, отличны от нуля. Если размер пятен ограничен, то частота подведения коллатералей к дереву сосудов, т.е. их концентрация в пространстве, должна быть достаточно большой, чтобы могло произойти смыкание пятен.

Будем теперь рассматривать совокупность смыкающихся пятен как новый древовидный граф, размещенный на первичном дереве. Порядок его ветвления можно оценивать числом B сосудов, входящих в границу пятна. Это число равно

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{00} A_k = \frac{\pi_{00}}{1 - A_1} = \pi_{00} N, \quad (17)$$

где, как указано выше в (12), N – среднее число сосудов в пятне.

Так как для реализации протекания по дереву критическая вероятность p_n (концентрация) неразрывных связей должна быть не менее величины $1/n$, где n – кратность ветвления дерева [5], то, отождествляя p_n с концентрацией коллатералей $C_{кр}^{кол}$ n с b , получим

$$C_{кр}^{кол} B = \pi_{00} N C_{кр}^{кол} = 1. \quad (18)$$

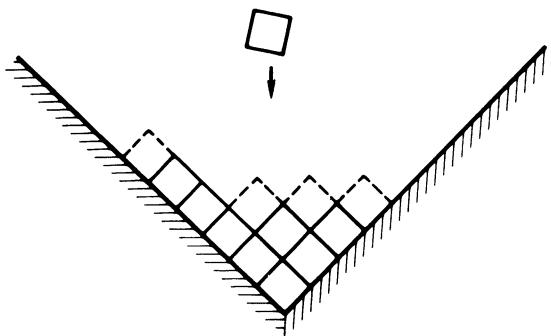
Поскольку $N = 1/(\pi_{00} - \pi_{11})$, то окончательно имеем

$$C_{кр}^{кол} \pi_{00}/(\pi_{00} - \pi_{11}) = 1. \quad (19)$$

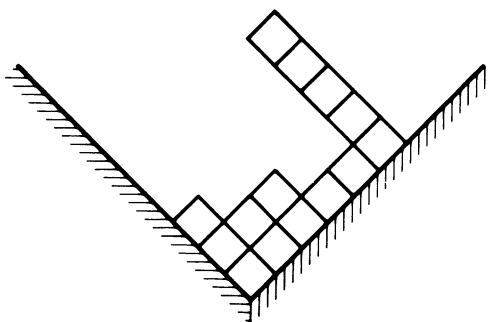
Это соотношение устанавливает связь между структурными характеристиками кровеносной сети и локальными характеристиками взаимодействия сосудов между собой, гарантирующую протекание крови по всему дереву. Эта связь может оказаться важной для анализа механизмов развития и прорастания кровеносной сети в тканях при обеспечении процессов адаптации кровоснабжения органов при нагрузках – ишемиях, гипертрофиях – и поражениях – инфарктах и опухолях.

4. ДИНАМИКА СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЯ В УПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМАХ

В процессе роста дерева с одним корнем в каждый момент времени конфигурация растущей системы должна быть связной, поскольку материалы, необходимые для роста новых ветвей, доставляются по уже имеющейся части дерева. Однако некоторые другие примеры показывают, что строение конфигураций растущей системы подвержено существенно более сильным ограничениям, чем требование связности. Рассмотрим,



Р и с. 3. Эволюция конфигураций в системе "падающие квадратики"



Р и с. 4. Связная односвязная конфигурация, не являющаяся неразрывной

например, процесс заполнения прямого угла с твердыми стенками одинаковыми тяжелыми квадратами (рис. 3).

На этом рисунке пунктиром обведены места возможного размещения очередного квадрата, выделенные требованием устойчивости конфигурации относительно малых толчков. В данном случае устойчивые конфигурации образуют лишь узкий подкласс множества всех связных (и даже односвязных) конфигураций, а именно множество всех диаграмм Юнга.

Этот процесс так же, как и упомянутый выше процесс роста деревьев, является примером широкого класса процессов роста, для которых геометрические ограничения на строение и эволюцию конфигураций могут быть аксиоматизированы на основе структуры частичного порядка.

Предположим, что конфигурации, образующиеся в процессе роста системы, являются частями некоторой максимальной конфигурации Γ , скажем правильного дерева или заполнения некоторой части пространства правильными многогранниками. Пусть элементы максимальной конфигурации Γ связаны некоторым отношением порядка, т.е. для некоторых элементов a и b известно, что $a < b$, т.е. a предшествует b в том смысле, что b не может присутствовать в конфигурации в процессе роста, если элемент a в ней отсутствует. Очевидно, что если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ и, таким образом, Γ является частично упорядоченным множеством в обычном смысле. Процесс

роста мы будем называть процессом упорядоченного роста, если все возникающие конфигурации неразрывны, т.е. вместе с каждым своим элементом содержат все предшествующие ему элементы из максимальной конфигурации Γ . Требование неразрывности является сильным ограничением. Например, конфигурация на рис. 4 является связной и односвязной и не является неразрывной.

В работах [6, 12] и в предшествующей части данной работы рассмотрены модели роста древовидных систем, эволюция которых задается уравнениями Ланжевена для случайных логических переменных $x(a, t)$, принимающих значение "истина", если элемент a входит в конфигурацию системы в момент времени t , и значение "ложь" в противном случае. В эти уравнения входят заданные "внешние" случайные поля логических переменных $\xi(a, t)$, $\eta(a, t)$, характеризующие индивидуальную активность элементов системы. В случае общих упорядоченных систем аналогичные уравнения имеют вид

$$x(a, t+1) = \left[\bigvee_{b \in C(a)} x(b, t) \right] \vee [\bar{\eta}(a, t) \wedge x(a, t)] \vee$$

$$\bigvee_{d \in B(a)} (\bar{x}(a, t) \wedge x(d, t) \wedge \xi(a, t)),$$

где $C(a)$ — множество элементов, непосредственно следующих за элементом a , и $B(a)$ — множество элементов, непосредственно предшествующих элементу a .

Для того чтобы эти уравнения определяли процесс упорядоченного роста, необходимо и достаточно, чтобы для всех a и t истинность $\xi(a, t)$ влекла истинность $\bigwedge_{b \in B(a)} \bar{\eta}(b, t)$. Эти условия не определяют однозначно процесс роста и, как показывают результаты работ [6, 12], допускают известное разнообразие в поведении упорядоченно растущих систем.

5. КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ РОСТА, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ УПОРЯДОЧЕННОСТЬЮ

Предельное состояние процесса упорядоченного роста правильного дерева при определенных ограничениях на ξ , η является так называемой геометрической мерой на множестве неразрывных конфигураций дерева [12, 13]. Такие состояния могут быть определены и в случае произвольных частично упорядоченных систем [13]. Для этого рассмотрим однородное поле случайных независимых логических переменных $\zeta(a)$ на Γ . Распределение вероятностей этого поля есть гиббсово распределение для системы одинаковых невзаимодействующих частиц на Γ . Определим поле θ соотношением

$$\theta(a) = \bigwedge_{b \leq a} \zeta(b).$$

Очевидно, реализации поля $\theta(a)$ неразрывны, и поэтому его распределение вероятностей есть мера на множестве неразрывных конфигураций в Γ . По построению эта мера получается в результате наложения геометрических связей, обусловленных отношением порядка на Γ на гиббсову меру системы свободных частиц на Γ . В случае, когда Γ есть множество натуральных чисел, распределение вероятностей поля θ есть обычное геометрическое распределение вероятностей.

Геометрическое распределение вероятностей зависит от единственного параметра ν , равного вероятности того, что $\xi(a)$ истинно. Оказывается, что свойства геометрического распределения могут существенно зависеть от значения ν . Пусть $m_{\Gamma}(\nu)$ – вероятность совокупности всех конечных неразрывных конфигураций в Γ . Можно показать [13], что существует число ν_{Γ}^* такое, что при $\nu > \nu_{\Gamma}^*$ вероятность $m_{\Gamma}(\nu)$ меньше единицы, т.е. становятся возможными бесконечные неразрывные конфигурации. Критическое значение ν_{Γ}^* определяется геометрией максимальной конфигурации Γ . В частности, для деревьев с кратностью ветвления $N > 1$

$$\nu_{\Gamma}^* = 1/N \quad \text{для всех правильных конечномерных решеток } \nu_{\Gamma}^* = 1.$$

Таким образом, мы получаем возможность объяснить распространенность древовидных структур чисто геометрическими причинами, а не спецификой взаимодействия элементов растущей системы.

Заметим, что параметр β предельного распределения процесса упорядоченного роста дерева, описываемого уравнениями (1), определяется отношением вероятностей быть истинными для внешних полей ξ и η , которые могут интерпретироваться как вероятности рождения и гибели элементов системы. Неравенство $\nu > \nu_{\Gamma}^*$ в этом случае выполняется, когда отношение β превышает значение $(N - 1)^{N-1}/N^N$ (N – кратность ветвления дерева), т.е. неограниченный рост возможен даже при условии, что вероятность рождения существенно меньше вероятности гибели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Нелинейная физика, стохастичность и структуры: Препр. ИПФ АН СССР № 87. Горький, 1983. 60 с.
2. Сандлер Л.М. Фрактальный рост // В мире науки. 1987. № 3. С. 62–69.
3. Обухов С.П. Скейлинговые модели в задачах физики полимеров: Препр. НИВЦ Пушино, 1985. 12 с
4. Архитектоника кровеносного русла / Отв. ред. В.А. Матюхин. Новосибирск. Наука, 1982. 133 с.
5. Bassingthwaite J.B., Van Beek J.H.G.M. Lightning and the heart: Fractal behaviour in cardiac function // IEEE Trans. Bio-Med. Eng. 1989. Vol. BME-76, N 6. P. 693–699.
6. Антонец В.А., Антонец М.А., Шерешевский И.А. Микроскопическая динамика структурообразования в активных средах // Коллективная динамика возмущений и структурообразование в биологических тканях. Горький: ИПФ АН СССР, 1988. С. 165–177.
7. Антонец В.А., Антонец М.А., Шерешевский И.А. Стохастическая динамика кровотока в сети мелких сосудов // Медицинская биомеханика. Рига, 1986, Т. 4. С. 37–47.
8. Антонец В.А., Антонец М.А., Куоряшов А.В. О влиянии коллективных эффектов на течение крови в сети мелких сосудов // Взаимодействующие марковские процессы и их применение к математическому моделированию биологических систем. Пушино: НИВЦ, 1982. С. 108–118.
9. Антонец В.А., Антонец М.А. О взаимодействии мелких сосудов и структуре кровотока в их сети: Препр. ИПФ АН СССР № 177. Горький, 1987. 14 с.
10. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 340 с
11. Харрис Т.Е. Теории ветвящихся случайных процессов: Пер. с англ. М.: Мир, 1966. 356 с.
12. Essam J.W. Percolation theory // Rep. Progr. Phys. 1980. Vol. 43. P. 833–912.
13. Горалин Р. Болезни коронарных артерий. М.: Медицина, 1980. 68 с.
14. Антонец М.А., Шерешевский И.А. Анализ стохастической модели роста деревьев: Препр. ИПФ АН СССР № 231. Горький, 1989. 47 с
15. Антонец М.А., Шерешевский И.А. О критическом явлении в одной модели случайного роста: Препр. ИПФ АН СССР № 229. Горький, 1989. 21 с.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИКИ

А.А. ПЕТРОВ

Термином "системный анализ экономики" мы обозначаем направление исследований, которое развивается уже более 15 лет в Вычислительном центре Академии наук.

Наш подход к анализу экономических систем основан на следующих общих соображениях.

1. Экономика подобна целостному развивающемуся организму. Тип экономики определяется системой производственных отношений, которые проявляются в действии экономических механизмов регулирования процесса общественного воспроизводства. Через экономические механизмы регулирования в экономике действуют обратные связи. Следовательно, модель экономической системы включает в себя описания процессов, образующих общественное воспроизводство, и описания механизмов экономического регулирования этих процессов. Государство воздействует на экономику, изменяя структуру и параметры механизмов экономического регулирования. Выделение фрагмента экономической системы для изучения производится из описания системы как целого.

2. Экономическая система соткана из многочисленных элементов, которые между собой взаимодействуют. В элементарных экономических процессах участвуют многочисленные люди, выпускающие многочисленные продукты. Состав элементов, продуктов, людей, конфигурация связей постоянно изменяются. Однако агрегированные параметры, которые характеризуют состояние экономики в целом, изменяются плавно и состав их не меняется. Связи между ними относительно стабильны. В терминах макропоказателей записываются математические модели экономических систем. Значит, макромоделю экономики надо стараться выводить из исходных микроописаний строгими процедурами агрегирования. В таком случае макропараметры и связи между ними будут недвусмысленно определенными. Кроме того, можно будет точно указать условия адекватности модели и строить системы моделей.

3. Результаты исследования моделей надо сравнивать с данными о развитии реальных экономических систем, добываясь в рамках единой теории, основанной на возможно меньшем числе гипотез, адекватного отражения всей совокупности качественных особенностей эволюции систем.

Далее будет показано, как эти общие соображения реализуются в конкретных моделях экономических систем. Кратко будут описаны модели процессов, составляющих расширенное воспроизводство, и механизмов экономического регулирования в рыночной экономике и в централизованной плановой экономике с кооперативным сектором.

Представление о состоянии системного анализа экономики можно получить из работы [1], где содержится к тому же достаточно полная библиография.

1. МОДЕЛЬ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ. ГОСУДАРСТВЕННОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИКИ

Будем считать, что хозяйство агрегировано в одну отрасль, в которой множество мелких фирм выпускают однородный продукт – национальный доход, частью расходуемый на расширение производства, а частью – на потребление. При этом они затрачивают единственный ресурс – однородные трудовые ресурсы. Технологии, которые используют фирмы, различаются только нормами затрат труда λ на единицу выпускаемого продукта, а сами фирмы – величиной мощности в момент времени t . Таким образом, структура хозяйства характеризуется распределением мощностей $m(\lambda, t)$ по технологиям (или фирм, если считать, что каждая фирма использует единственную технологию). После агрегирования исходного описания [2] выпуск продукта в единицу времени $Y(t)$ задается производственной функцией

$$Y(t) = M(t)f(x), \quad x(t) = R^L(t)/M(t), \quad (1.1)$$

где $R^L(t)$ – количество используемых трудовых ресурсов. Функция $f(x)$ обладает всеми свойствами неоклассических производственных функций.

Мощность хозяйства (суммарная мощность фирм) $M(t)$ изменяется в силу уравнения

$$dM/dt = I - \mu M, \quad (1.2)$$

в котором μ – постоянный темп выбытия мощностей, а I – скорость создания новых мощностей. Скорость I требует затрат в единицу времени

$$X^I = bI \quad (1.3)$$

фондообразующего продукта. Здесь через b обозначена норма приростной фондоемкости.

Краткосрочное управление производством состоит в выборе величины $R^L(t)$, а долгосрочное управление – в определении величины $I(t)$. Они будут выражены через параметры механизмов экономического регулирования.

Будем считать, что общество разделено на две социальные группы: трудящихся и собственников. Трудящиеся получают доход в виде заработной платы по ставке s и после уплаты подоходного налога часть дохода Φ^L тратят на потребление, а часть держат в виде наличности. Очевидно, что изменение наличности N^L –

$$\frac{dN^L}{dt} = (1 - n^L)sR^L - \Phi^L. \quad (1.4)$$

Численность группы трудящихся P^L растет с заданным постоянным темпом ν^L ; с тем же темпом растет и численность трудоспособных P^A :

$$dP^L/dt = \nu^L P^L, \quad dP^A/dt = \nu^L P^A. \quad (1.5)$$

Предложение труда трудящимися $\tilde{R}^L(t)$ пропорционально количеству трудоспособных $P^A(t)$ и зависит от уровня жизни трудящихся ω , который оценивается как потребление на душу в группе:

$$\omega = \Phi^L/pP^L, \quad (1.6)$$

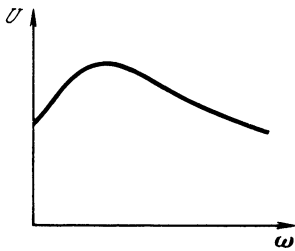


Рис. 1

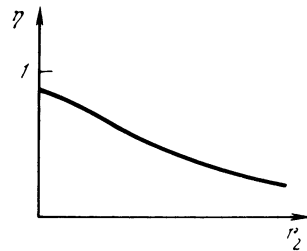


Рис. 2

p – цена продукта. Итак,

$$\tilde{R}^L(t) = P^A(t) U(\omega(t)). \quad (1.7)$$

Вид функции $U(\omega)$ показан на рис. 1 (см. [2]).

Численностью группы собственников для простоты пренебрегаем. Собственники получают доход в виде дивидендов от фирм d и от банка d^B и после уплаты подоходного налога по ставке n^0 часть дохода Φ^0 тратят на потребление, часть дохода B сберегают, а оставшуюся часть держат в наличности N^0 . Очевидно,

$$dN^0/dt = (1 - n^0)(d + d^B) - B - \Phi^0. \quad (1.8)$$

Потребительские расходы собственников оцениваем [2] как

$$\Phi^0 = \eta(r_2) p Y. \quad (1.9)$$

Склонность собственников к потреблению $\eta(r_2)$ зависит от нормы процента по вкладам r_2 . Вид функции $\eta(r_2)$ показан на рис. 2.

Теперь опишем механизмы экономического регулирования. Краткосрочное управление производством R^L находится из условия максимума текущей прибыли:

$$df/dx = s/p, \text{ если } p \geq \lambda_m s; \quad x = 0, \text{ если } p < \lambda_m s. \quad (1.10)$$

Здесь через λ_m обозначена минимальная возможная в хозяйстве норма затрат труда [2]. Условие (1.10) вместе с (1.1) задают спрос на трудовые ресурсы $\hat{R}^L(t)$ и предложение продукта в зависимости от параметров механизмов экономического регулирования p и s .

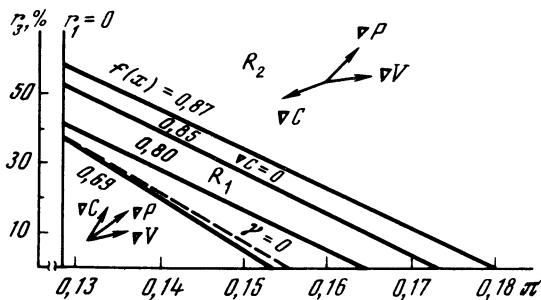
Рынок трудовых ресурсов [2]. Если $\hat{R}^L(t) < \tilde{R}^L(t)$, то ставка заработной платы s остается постоянной и $R^L(t) = \hat{R}^L(t)$. Если $\hat{R}^L(t) > \tilde{R}^L(t)$, то ставка заработной платы быстро растет, балансируя спрос и предложение: $R^L(t) = \tilde{R}^L(t)$. Эти условия выражаются уравнением

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\Delta} \max \left\{ 0, p \frac{df}{dx} \Big|_{x=\tilde{x}} - s \right\}, \quad \tilde{x} = \frac{\tilde{R}^L}{M}, \quad (1.11)$$

в котором Δ – постоянная времени.

Рынок продукта [2]. Поток платежей на рынке

$$\Phi = \Phi^I + \Phi^L + \Phi^0 + \Phi^G, \quad (1.12)$$



Р и с. 3

где

$$\Phi^I = pbI \quad (1.13)$$

– поток инвестиций фирм, а Φ^G – поток государственных расходов.

Избыточный запас продукта Q на рынке подчиняется уравнению

$$dQ/dt = Y - \Phi/p. \quad (1.14)$$

Цена продукта изменяется в силу уравнения

$$dp/dt = -\alpha(Q/M)p. \quad (1.15)$$

Чтобы определить инвестиции Φ^I , рассмотрим финансово-кредитную систему [3]. Дело в том, что фирмы для инвестиций используют заемные средства в виде долгосрочных ссуд в банковской системе. Обозначим через Φ^k поток кредитов, а через H поток возврата кредитов. Тогда изменение текущего счета фирм в банковской системе N^F подчиняется уравнению

$$dN^F/dt = (1 - n^F)\Phi(t - \theta) + \Phi^k - \Phi^I - sR^L - H(t) - d, \quad (1.16)$$

в котором n^F – ставка налога с оборота, а θ – характеристика времени обращения платежных средств в системе.

Активами фирм являются и балансовая стоимость K их основных фондов, которые изменяются в силу уравнения

$$dK/dt = \Phi^I - \beta K. \quad (1.17)$$

Через β обозначена норма амортизации основных фондов.

Банковская система [3]. Кроме фирм, заемщиками капитала является государство: оно нуждается в средствах для финансирования своих расходов. Источником кредитных средств служат сбережения собственников. Банковская система аккумулирует свободные денежные средства и выдает кредиты, покупает ценные государственные бумаги и осуществляет эмиссию платежных средств. По вкладам банк платит процент r_2 , а кредит выдает под процент r_1 .

Сумма вкладов образует пассив банка. Очевидно,

$$dD/dt = B + r_2 D. \quad (1.18)$$

Задолженность фирм L изменяется в силу уравнения

$$dL/dt = \Phi^k - H + r_1 L \quad (1.19)$$

и является часть активов банка. Другую часть активов составляет наличность в кассе банка N^B , которая подчиняется уравнению

$$dN^B/dt = B + H + H^G - \Phi^k - Z - d^B + E. \quad (1.20)$$

В правую часть уравнения входят прием вкладов B , платежей по ссудам H , платежей H^G по государственным займам, выдача кредитов Φ^k , покупки облигаций государственных займов Z , эмиссия платежных средств E , т.е. все текущие операции банка.

Остальная часть активов банка находится в резерве. Величина резерва R связана с суммой вкладов D :

$$R = \xi D. \quad (1.21)$$

Норма резервирования ξ устанавливается законодательно. Банк обязан иметь в качестве резервов активы, которые сам он не может создавать и которые обладают повышенной ликвидностью. Облигации государственных займов относятся к числу таких активов. Поэтому считаем, что резервом банковской системы служит государственный долг: сумма стоимостей облигаций государственных займов L^G . Очевидно, что

$$dL^G/dt = Z - H^G + r_3 L^G. \quad (1.22)$$

Через r_3 обозначен процент по облигациям.

В каждый момент времени сумма банковских активов равна сумме пассивов:

$$L + N^B + L^G = D. \quad (1.23)$$

Наконец, запас платежных средств в государственных фондах N^G изменится в силу уравнения

$$dN^G/dt = n^F \Phi(t - \theta) + n^0(d + d^B) + n^L s R^L + Z - \Phi^G - H^G. \quad (1.24)$$

Этим завершается описание финансово-кредитной системы.

Чтобы замкнуть систему уравнений (1.1)–(1.24), положим [3]

$$\Phi^I = \Phi^k, \quad K = L, \quad d/L = d^B/L^G = ar_2, \quad (1.25)$$

где a – постоянная,

$$N^B = 0, \quad dN^F/dt = 0, \quad dN^L/dt = 0, \quad dN^0/dt = 0, \quad dN^G/dt = 0. \quad (1.26)$$

Система (1.1)–(1.26) замкнута. Если задать начальные данные и параметры государственного регулирования $r_3, \pi = \Phi^G/pY, n^L, n^0, n^F, \xi, \dots$, то можно вычислить изменение всех показателей во времени.

Если $\hat{R}^L(t) < \tilde{R}^L(t)$, то система (1.1)–(1.26) допускает частное решение – режим сбалансированного роста. В этом режиме

$$M(t) = M_0 e^{\gamma t}, \quad Y(t) = Y_0 e^{\gamma t}, \quad R^L(t) = R_0 e^{\gamma t}, \quad \Phi(t) = \Phi_0 e^{\gamma t}, \quad L(t) = L_0 e^{\gamma t}, \\ p(t) = p_0, \quad s(t) = s_0, \quad r_1(t) = r_1^0, \quad r_2(t) = r_2^0, \quad x(t) = x_0,$$

$M_0, Y_0, R_0, \Phi_0, L_0, p_0, s_0, r_1^0, r_2^0, x_0$ постоянны. Все характеристики режима сбалансированного роста зависят от параметров государственного регулирования r_3, π, \dots . Показано, что режим сбалансированного роста устойчив в относительных переменных [3].

Проанализируем влияние процента по государственным займам r_3 и доли государственных расходов π в национальном доходе на характер экономического развития. Параметры r_3 и π изменяются редко и несильно. Так как режимы сбалансированного роста устойчивы, то система успевает перейти в новый режим сбалансированного роста прежде, чем произойдет следующая смена параметров r_3 и π . Поэтому можно исследовать зависимость режимов сбалансированного роста от параметров r_3 и π .

Будем оценивать состояние экономики тремя показателями. Средние реальные доходы трудящихся

$$C = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{sR^L}{p} dt \quad (1.27)$$

отражают их интересы. Интересы государства отражает показатель

$$V = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \pi Y dt \quad (1.28)$$

средних государственных расходов. Средний прирост национального дохода

$$P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} Y dt \quad (1.29)$$

характеризует общее состояние экономики. Период усреднения T характеризует время, на котором социальные группы общества осознают экономические перемены. В силу соотношений сбалансированного роста [3], показатели C, V, P (1.27)–(1.29) зависят от параметров государственного регулирования r_3 и π .

Удобно вычислить градиенты

$$\nabla C = \left(\frac{\partial C}{\partial r_3}, \frac{\partial C}{\partial \pi} \right), \quad \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial r_3}, \frac{\partial V}{\partial \pi} \right), \quad \nabla P = \left(\frac{\partial P}{\partial r_3}, \frac{\partial P}{\partial \pi} \right).$$

Анализ модели показал, что при небольших T область допустимых значений параметров r_3, π , которая ограничена условиями неотрицательности параметров r_3, π, r_1 , разделяется на две части: R_1 и R_2 . Разграничивает эти области прямая, на которой $\nabla C = 0$. На этой же прямой постоянна функция $f(x)$, которая характеризует загрузку мощности (рис. 3). В области R_1 градиенты $\nabla C, \nabla V, \nabla P$ смотрят в одну сторону, так что существуют приращения $\Delta r_3, \Delta \pi$, при которых все три показателя (1.27)–(1.29) увеличиваются. Значит, у государства есть экономическая основа выработать экономическую политику, которая получит поддержку основных социальных групп. В области R_2 градиент ∇C направлен в другую сторону, нежели градиенты ∇V и ∇P . Значит, нет приращений Δr_3 и $\Delta \pi$, которые приводили бы к одновременному росту всех показателей (1.27)–(1.29). Значит, государство не имеет экономической основы для поддержки своей экономической политики всеми социальными группами и должно искать компромисс между их интересами.

Состояния экономики, соответствующие области R_1 , характеризуются низким темпом роста γ , большой недогрузкой мощностей $1 - f(x)$, следовательно, высокой безработицей. Такие состояния хозяйства можно

назвать застойными. Экономическая политика государства, которая приводит к увеличению показателей (1.27)–(1.29), состоит в увеличении процента по государственным бумагам r_3 и в увеличении доли государственных расходов π . Ускорение экономического развития, которое выражается ростом показателя P , происходит в основном за счет увеличения загрузки мощностей.

Состояния экономики, соответствующие области R_2 , характеризуются высоким темпом роста γ , большой загрузкой мощностей, значит, низкой безработицей. Ускорение экономического развития – роста показателя P – в этой области происходит за счет уменьшения реальных доходов трудящихся. (Здесь следует отметить существенное обстоятельство – в модели не описан научно-технический прогресс.)

Рис. 3 построен по результатам расчетов на модели, параметры которой, такие как λ , b , μ , ξ , n^L , n^0 , n^F , β , соответствовали статистическим данным об экономике США периода 1979–1984 гг. Характерные для США того периода значения r_3 и π попали в область R_1 . Им соответствовали значения загрузки мощностей $f(x) = 0,7 \div 0,85$ и темпа роста $\gamma = -0,01 \div 0,05$, указанные статистикой США 1979–1984 гг. [3].

2. МОДЕЛЬ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ПЛАНОВОЙ ЭКОНОМИКИ

Рассмотрим модель централизованной плановой экономики с элементами товарно-денежных отношений. И эта модель основана на изложенных выше общих положениях системного анализа. Посмотрим, как они воплощаются в данном конкретном случае.

Специфику производственных отношений опишем следующим образом. Все средства производства принадлежат государству, однако с государственным сектором сосуществует кооперативный сектор. Плановые органы планируют производство и распределение продуктов в государственном секторе. Хозяйственные органы управляют производством в государственном секторе; интерес их в том, чтобы выполнить государственный план. Вся прибыль государственного сектора централизуется в государственном бюджете и является единственным источником финансирования капитальных вложений и государственных расходов. Государственный план обязателен для исполнения, но, будучи составленным по неточной, неполной информации о состоянии хозяйства и неточным прогнозам общественных процессов, может оказаться невыполнимым.

Соответственно если темп роста запланирован больше, чем темп роста трудовых ресурсов, то запланированный темп можно выдержать достаточно долго лишь ценой искусственного снижения норм затрат труда, вследствие чего качество части выпущенного продукта снижается. Вследствие этого растет фондоемкость продукта и снижается потребительский спрос.

Розничная торговля в соответствии с государственным планом снабжает трудящихся продуктами потребления. Трудящиеся предлагают хозяйствам трудовые ресурсы, доходы они получают в виде заработной платы. Происходит миграция трудящихся из государственного в кооперативный сектор и обратно. Свои доходы трудящиеся частью держат наличными, а частью тратят на потребление, Остаток вносят на сберегательный счет государственного банка.

Трудящиеся, мигрировавшие в кооперативный сектор, предлагают кооперативам весь свой труд. Кооперативы арендуют в государственном секторе незагруженные мощности и покупают в нем сырье по коммерческим ценам. Производят кооператоры продукты потребления и реализуют их на кооперативном рынке по свободно складывающимся в зависимости от спроса и предложения ценам.

Выпуск некачественного продукта, предложение трудовых ресурсов хозяйству и потребительский спрос не поддаются контролю плановых органов и вносят возмущения в экономическую систему. Эти возмущения необходимо описать, так как существенная особенность централизованной плановой экономики в том, что плановые органы имеют неполную и неточную информацию о них.

Рассмотрим простейшую модель экономической системы. Будем считать, что хозяйство технологически однородно и выпускает единственный продукт – валовый национальный продукт. Выпуск продукта в единицу времени Y распределяется на текущие производственные затраты V , затраты на создание новых мощностей (фондообразующие затраты) X , на государственное потребление Z и потребление трудящихся C . Технологическая структура хозяйства описывается нормами затрат труда λ , материальных затрат a на единицу продукта и характерным временем цикла воспроизводства τ . Последнее связано с технологическим запасом продукта Q , так что

$$Y = \min \{ M, Q/a\tau, L/\lambda \}. \quad (2.1)$$

Здесь через M обозначена суммарная мощность хозяйства, а через L – количество используемого труда. Изменение мощности M и технологического запаса происходит в силу уравнений

$$dM/dt = I - \mu M, \quad bI = X. \quad (2.2)$$

$$dQ/dt = V - a Y, \quad (2.3)$$

где b – коэффициент приростной фондоемкости, связывающий скорость создания новых мощностей I с фондообразующими затратами X , а μ – темп деградации мощности вследствие износа и выбытия. Величины L и V выражают краткосрочные управления – как использовать имеющуюся мощность M , а величина I (или X) выражает долгосрочное управление – как наращивать мощность M . Эти величины будут выражены явным образом, когда мы будем описывать механизм планирования.

Теперь опишем механизм краткосрочного управления хозяйством. Хозяйственные органы обязаны выполнить государственный план, однако вследствие возмущений план может оказаться несогласованным с производственными возможностями хозяйства. Если не хватает мощности или материальных затрат, то план окажется невыполненным, но если не хватает трудовых ресурсов, то план может быть выполнен за счет снижения норм затрат труда, т.е. выпуска некачественного продукта. В соответствии с этим технологическую производственную функцию (2.1) заменим производственной функцией

$$Y = \min \{ M, Q/a\tau, \hat{Y} \}, \quad \hat{Y} - \text{план}, \quad (2.4)$$

при этом доля некачественного продукта β оценивается как

$$\beta = \max \left\{ 0, \frac{1}{1-a} \left(1 - \frac{L}{\lambda Y} \right) \right\}. \quad (2.5)$$

Соответственно фиктивная трудоемкость продукта становится меньше технологически обоснованной:

$$\Lambda = \min \{ \lambda, L/Y \}. \quad (2.6)$$

(Подробности читатель найдет в [4].) Некачественный продукт, как правило, не используется при создании новой мощности, поэтому эффективная фондоемкость становится больше нормативной. Соответственно (2.2) заменяется на

$$dM/dt = I - \mu M, \quad X = [b/(1-\beta)]I. \quad (2.7)$$

Так как государственный сектор снабжает материалами кооператоров, то (2.3) заменяется уравнением

$$dQ/dt = V - aY - V_K, \quad (2.8)$$

где V_K – поток производственных материальных затрат кооператоров

Государственный сектор отдает в аренду кооператорам незагруженные мощности, следовательно, мощность кооперативного сектора M_K ограничена величиной

$$\bar{M}_K = \max \{ 0, M - \hat{Y} \}. \quad (2.9)$$

Так как кооперативный сектор много меньше государственного и не столь централизован, то естественно считать, что мощность его сбалансирована с предложением труда L_K , так что

$$\kappa L_K = (1 + a\beta)\lambda M_K. \quad (2.10)$$

Коэффициент κ задает рост интенсивности труда кооператоров по сравнению с интенсивностью труда в государственном секторе. Кроме того, кооператоры полностью загружают арендуемую мощность и не держат лишнего технического запаса Q_K . Поэтому

$$Y_K = M_K, \quad Q_K = a\tau M_K, \quad V_K = a \left(1 + \frac{\tau}{M_K} \frac{dM_K}{dt} \right). \quad (2.11)$$

Фактический выпуск продукта государственного сектора Y , распределяется пропорционально плановым заданиям $\hat{Y}, \hat{V}, \hat{X}, \hat{Z}, \hat{C}$, так что

$$V = \frac{\hat{V}}{\hat{Y}} Y, \quad X = \frac{\hat{X}}{\hat{Y}} Y, \quad Z = \frac{\hat{Z}}{\hat{Y}} Y, \quad C = \frac{\hat{C}}{\hat{Y}} Y. \quad (2.12)$$

Поток потребительского продукта C увеличивает запас Q_T розничной торговли, убывает он с потоком потребительского спроса занятых в государственном секторе W (будем для краткости называть их рабочими) и кооператоров W_K . Следовательно,

$$dQ_T/dt = C - W - W_K. \quad (2.13)$$

Теперь перейдем к описанию социального поведения трудящихся. Для

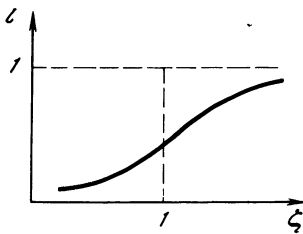


Рис. 4

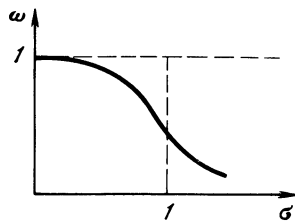


Рис. 5

простоты положим, что предложение труда растет с заданным постоянным темпом ν , так что

$$\tilde{L}(t) = L_0 e^{\nu t}. \quad (2.14)$$

Трудящиеся мигрируют между государственным и кооперативным секторами. Предполагаем, что стимулом к переходу в кооператоры служит относительная величина оплаты единицы рабочего времени. Если обозначить Φ_k и Φ соответственно фонд заработной платы кооператоров и рабочих, то эту величину можно оценить как

$$\zeta = \frac{\Phi_k}{(1 + a\beta)\lambda M_k} : \frac{\Phi}{(1 - \beta + a\beta)\lambda Y}. \quad (2.15)$$

Чем больше величина ζ , тем интенсивнее миграция из государственного в кооперативный сектор. Мы будем выражать это следующим образом:

$$\kappa L_k = \max \{ 0, (1 + a\beta)\lambda (M - \hat{Y}) l(\zeta) \}. \quad (2.16)$$

Вид функции $l(\zeta)$ показан на рис. 4. Соответственно предложение труда государственному сектору

$$L = \tilde{L} - L_k \quad (2.17)$$

и весь труд используется в хозяйстве.

Пусть Ψ и Ψ_k будут потребительские расходы, планируемые рабочими и кооператорами. Потребители имеют выбор: купить качественный продукт $(1 - \beta)C$ или некачественный βC в розничной торговле по цене p_1 или купить качественный продукт M_k на кооперативном рынке по цене p_{1k} . Если качественный продукт дефицитен, то, очевидно, цена p_1 значительно меньше цены p_{1k} . Поэтому потребители предпочитают покупать качественный продукт в розничной торговле. При этом кооператоры, чьи доходы относительно высоки, некачественным продуктом пренебрегают, а рабочие соглашаются и на некачественный продукт, если нет дешевого качественного. Оцениваем распределение между покупателями-рабочими и покупателями-кооператорами качественного продукта, реализованного розничной торговлей, как пропорциональное их потребительским расходам. Тогда доля, доставшаяся покупателям-рабочим,

$$\rho = \Psi / (\Psi + \Psi_k). \quad (2.18)$$

Все эти соображения выражены функциями потребительского спроса рабочих:

$$W = \min \{ \beta C + \rho(1 - \beta)C, \Psi/p_1 + (1 - \pi)[\rho(1 - \beta)C - \Psi/p_1] \} \quad (2.19)$$

и кооператоров

$$W_{\kappa} = \min \{ (1 - \rho)(1 - \beta)C, \Psi_{\kappa}/p_1 \} . \quad (2.20)$$

Подробности можно найти в [4], здесь отметим только, что параметр ρ в функции (2.19) задает степень предпочтения рабочими качественного продукта некачественному.

Теперь платежеспособный спрос на кооперативном рынке можно оценить как

$$\Psi_m = \max \{ 0, \Psi - p_1 W \} + (\Psi_{\kappa} - p_1 W_{\kappa}) . \quad (2.21)$$

Потребитель стоит перед альтернативой: немедленно купить качественный продукт по высокой цене $p_{1\kappa}$ или отложить покупку на некоторое время, надеясь сделать ее в розничной торговле по низкой цене p_1 . Оценим время ожидания как

$$T/T_0 = \Phi/p_1\rho(1 - \beta)C , \quad (2.22)$$

где T_0 – заданная постоянная. Склонность потребителей не откладывать спрос мы выражаем функцией $\omega(\sigma)$, показанной на рис. 5. Она зависит от величины

$$\sigma = (p_{1\kappa}/p_1)\exp - \delta(T - T_0) , \quad (2.23)$$

которая соизмеряет полезность немедленной и отложенной покупки. Здесь δ – коэффициент дисконтирования. Итак, функция спроса на кооперативном рынке выражается как

$$W_m = \Psi_m \omega(\sigma) . \quad (2.24)$$

Он распределяется между рабочими и кооператорами пропорционально их потребительским расходам, так что, например, рабочим достается доля

$$\rho_1 = \Psi_m^{-1} \max \{ 0, \Psi - p_1 W \} . \quad (2.25)$$

Предположим, что трудящиеся обращают в наличность долю χ своих расходов и планируют истратить, кроме полученной зарплаты, долю δ своих сбережений. Тогда планируемые расходы рабочих

$$\Psi = \Phi - \chi d\Phi/dt + \delta D , \quad (2.26)$$

а кооператоров

$$\Psi_{\kappa} = \Phi_{\kappa} - \chi d\Phi_{\kappa}/dt + \delta D_{\kappa} . \quad (2.27)$$

Через D и D_{κ} обозначены соответственно сбережения рабочих и кооператоров. Рабочие и кооператоры имеют наличные деньги

$$N^L = \chi\Phi, \quad N^{\kappa} = \chi\Phi^{\kappa}, \quad (2.28)$$

так что вторые слагаемые в (2.26) и (2.27) выражают приросты наличности.

Чтобы замкнуть описание социального поведения трудящихся, опишем формирование их доходов. Фонд заработной платы занятых в государственном секторе планируется по нормативу η заработной платы в единице продукта:

$$\Phi = \eta p Y, \quad (2.29)$$

p – оптовая цена единицы продукта. Таким образом, заработная плата в государственном секторе выплачивается одинаково и за качественный и за некачественный продукт. Фонд заработной платы кооператоров формируется как остаток их выручки после вычета всех платежей за аренду мощности и материальных затрат:

$$\Phi_{\kappa} = [p_{1\kappa} - a(1 + \frac{\tau}{M_{\kappa}} \frac{dM_{\kappa}}{dt})p_{\kappa} - q]M_{\kappa}. \quad (2.30)$$

Здесь p_{κ} – цена, по которой кооператоры покупают материалы в государственном секторе, q – ставка арендной платы.

Теперь опишем механизм ценообразования. Оптовую цену p назначает плановый орган и поддерживает ее постоянной. Розничная цена p_1 определяется из условий баланса доходов и расходов рабочих (кооперативный сектор плановые органы не принимают во внимание):

$$p_1 C = \Phi. \quad (2.31)$$

Цена $p_{1\kappa}$ на кооперативном рынке уравнивает спрос на продукт и предложение продукта:

$$p_{1\kappa} M_{\kappa} = W_m. \quad (2.32)$$

Перейдем к описанию кредитно-финансовой системы и денежного обращения. Во-первых, количество наличных денег у рабочих и кооператоров изменяется в силу уравнений

$$\frac{dN^L}{dt} = \Phi - p_1 W - \rho_1 p_{1\kappa} M_{\kappa} + \delta D - u, \quad (2.33)$$

$$\frac{dN^{\kappa}}{dt} = \Phi_{\kappa} - p_1 W_{\kappa} - (1 - \rho_1) p_{1\kappa} M_{\kappa} + \delta D_{\kappa} - u_{\kappa}. \quad (2.34)$$

Вместе с соотношениями (2.29) эти уравнения определяют вклады рабочих u и кооператоров u_{κ} на сберегательный счет государственного банка. Величина сбережений подчиняется уравнениям

$$dD/dt = u - \delta D + r_2 D, \quad dD_{\kappa}/dt = u_{\kappa} - \delta D_{\kappa} + r_2 D_{\kappa}, \quad (2.35)$$

в которых через r_2 обозначен процент по вкладам.

Кроме трудящихся и кооператоров, в государственном банке находятся счета задолженности государственного сектора N и розничной торговли N^T , счет остатка государственного бюджета N^G , счет выпущенной в обращение денежной массы Ω и собственный резервный счет государственного банка R . Уравнения изменения задолженности государственного сектора и розничной торговли

$$\frac{dN}{dt} = -pY - p_{\kappa} a(1 + \frac{\tau}{M_{\kappa}} \frac{dM_{\kappa}}{dt})M_{\kappa} - qM_{\kappa} + pV + \Phi + G + r_1 N, \quad (2.36)$$

$$\frac{dN^T}{dt} = -p_1(W + W_{\kappa}) + pC + G^T + r_1 N^T \quad (2.37)$$

содержат, кроме уже описанных, потоки централизованной в государствен-

ном бюджете прибыли государственного сектора G и розничной торговли G^T и потоки начислений процента на задолженность по ставке r_1 .

Государственный банк выдает государственному сектору и розничной торговле краткосрочные кредиты под оборотные фонды. В модели оборотные фонды представлены технологическим запасом Q и запасом розничной торговли Q_T . Можно считать, что

$$N = \xi p Q, \quad N^T = \xi p_1 Q_T, \quad (2.38)$$

где ξ – планируемая государственным банком норма кредитования. Условия кредитования (2.38) дают возможность из уравнений (2.36), (2.37) найти отчисления в государственный бюджет G и G^T .

Уравнение изменения остатка государственного бюджета записывается очевидным образом:

$$dN^G/dt = G + G^T + G^B - pX - pZ, \quad (2.39)$$

если учесть, что через G^B обозначена централизуемая прибыль банка.

Уравнение счета выпущенной в обращение денежной массы

$$d\Omega/dt = E \quad (2.40)$$

в правой части содержит поток эмиссии денег.

Уравнение изменения банковского резерва задает изменение собственных средств банка

$$dR/dt = r_1(N + N^T) - r_2(D + D_K) - G^B. \quad (2.41)$$

Кроме того, в кассе банка содержится часть наличных денег K . Эта величина изменяется вследствие всех текущих операций банка с наличностью:

$$\frac{dK}{dt} = p_1(W + W_K) + u + u_K + \left[q + p_K a \left(1 + \frac{\tau}{M_K} \frac{dM_K}{dt} \right) \right] M_K + E - \delta(D + D_K). \quad (2.42)$$

Наконец, полагаем, что в каждый момент времени должен быть выполнен баланс пассивов и активов государственного банка:

$$D + D_K + N^G + \Omega + R = N + N^T + K. \quad (2.43)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений (2.4)–(2.43), надо описать процедуры планирования. Предположим для простоты, что плановые органы имеют точную информацию о текущем состоянии хозяйства¹, однако они не знают точно ни β , ни W , W_K , L_K . Высшие директивные органы устанавливают плановый темп роста $\hat{\gamma} = \hat{Y}^{-1} d\hat{Y}/dt$ и долю государственного потребления $\hat{g} = \hat{Z}/\hat{Y}$. Имея текущую оценку \tilde{b} эффективной нормы фондоемкости $b/(1 - \beta)$ и информацию о текущей величине мощности и прогноз $\tilde{\nu}$ темпа роста ν трудовых ресурсов, плановые органы устанавливают план производства \hat{Y} и, следовательно, долю $k = \hat{Y}/M$ загруженных мощностей в государственном секторе. Затем они планируют распределе-

¹Подробнее этот вопрос обсуждается в [4].

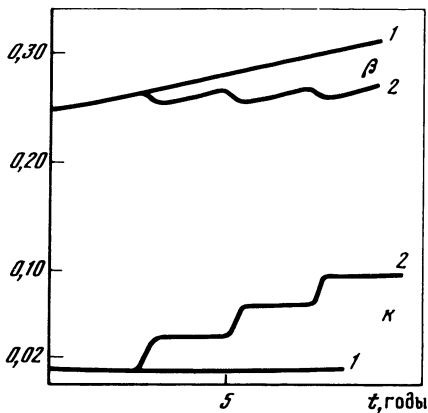


Рис. 6

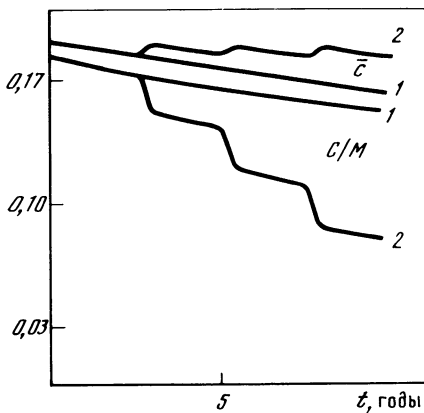


Рис. 7

ние выпущенного продукта:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= a(1 + \tau\hat{\gamma})M, & \hat{X} &= (\hat{\gamma} + \mu)\tilde{b}M, & \hat{Z} &= \hat{g}M, \\ \hat{C} &= \hat{Y} - \hat{g}M - a(1 + \tau\hat{\gamma})M - (\hat{\gamma} + \mu)\tilde{b}M. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Очевидно, что $k > \hat{g} + a(1 + \tau\hat{\gamma}) + (\hat{\gamma} + \mu)\tilde{b}$.

Розничная цена планируется из баланса доходов и расходов:

$$p_1 \hat{C} = \eta p \hat{Y}.$$

Норма кредитования планируется как

$$\xi = \frac{D + D_k + N^G + \Omega + K}{pQ + p_1 Q_T}$$

по известным и оцененным текущим значениям величин в правой части

Система уравнений (2.4)–(2.44) замкнута: если задать начальное состояние экономики, то можно с помощью этих уравнений рассчитать изменение состояния экономики во времени. На рис. 6–11 приведены результаты двух вычислительных экспериментов. Кривые, соответствующие первому эксперименту, помечены цифрой 1, второму – цифрой 2. И в том, и в другом эксперименте предполагалось, что плановые органы не имели точного прогноза $\tilde{\nu}$ темпа роста трудовых ресурсов ν . Было принято, что темп роста трудовых ресурсов $\nu = 0,035\%$, а директивные органы установили плановый темп роста $\hat{\gamma} = 0,04$. Такой темп роста можно устойчиво поддерживать только за счет снижения качества продукта, что и видно на рис. 6 (доля β растет).

В первом эксперименте было принято, что доля загруженных мощностей в хозяйстве запланирована постоянной: $k = 0,99$. В этом случае реальный темп роста был близок к запланированному, но при этом в экономике возникали большие диспропорции. В результате роста β росли затраты фондообразующего продукта и падала доля потребления трудящихся C/M (рис. 7). Вследствие этого росла розничная цена p_1 (рис. 8)

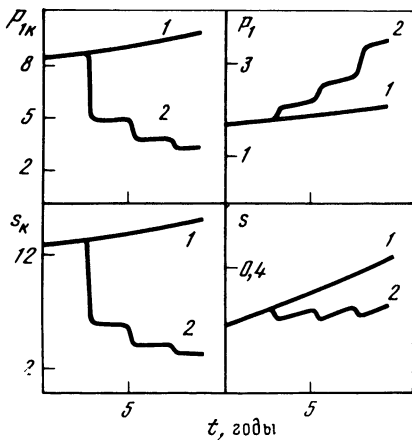


Рис. 8

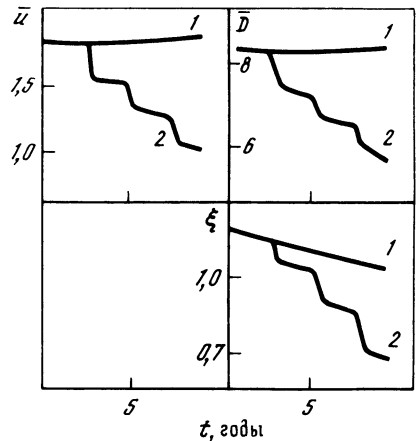


Рис. 9

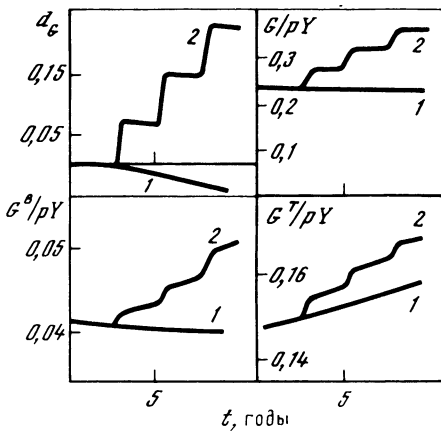


Рис. 10

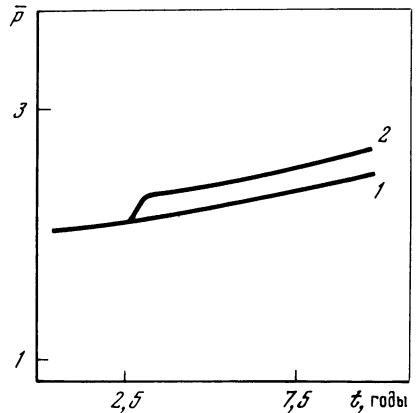


Рис. 11

Одновременно росли ставки заработной платы рабочих s и кооператоров s_k , из-за чего росли относительные вклады $\bar{u} = (u + u_k) / (\Phi + \Phi_k)$ и относительные сбережения $\bar{D} = (D + D_k) / (\Phi + \Phi_k)$ трудящихся (рис. 9). Рост фонда заработной платы Φ и сбережений $D + D_k$ приводили к уменьшению относительных прибылей G/pY и G^B/pY , что в свою очередь вызывало рост дефицита государственного бюджета $d_G = [G + G^T + G^B - p(X + Z)] / p(X + Z)$.

Во втором эксперименте величина k планировалась уменьшающейся, так что: $k = 0,99$ при $t < 2,5$; $k = 0,96$ при $2,5 \leq t < 5$; $k = 0,93$ при $5 \leq t < 7,5$; $k = 0,90$ при $t \geq 7,5$. Это значит, что мощность, предоставляемая кооперативному сектору, скачкообразно увеличилась. И действительно, выпуск кооперативного сектора скачкообразно увеличивался (см. рис. 6). Соответственно товарно-денежная сбалансированность эконо-

номики несколько улучшилась, потому что замедлялся рост доли некачественного продукта β . Соответственно росли относительная прибыль G/pY и G^B/pY , исчезал дефицит государственного бюджета, уменьшились относительные вклады и сбережения трудящихся, возрос индекс потребления $\bar{c} = (C + M_k)/(Y + M_k)$ (рис. 7–10). Однако инфляция усилилась. Индекс потребительских цен $\bar{p} = (\Phi + \Phi_k)/(Y + M_k)$ возрос (рис. 11), хотя цена на кооперативном рынке p_{1k} (в отличие от первого эксперимента) падала (рис. 8). Следует заметить, что заработные платы s и s_k сближались. Это указывало на то, что миграция в кооперативный сектор замедлялась. Государственный и кооперативный секторы приближались к равновесию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986. С. 7–197.
2. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анализ развивающейся экономики. 1–4 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 2. С. 18–27; № 3. С. 26–28; № 4. С. 11–28; № 5. С. 13–24.
3. Крутов А.П., Романко А.В. Влияние государственных расходов на характер развития рыночной экономики // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986. С. 19–46.
4. Крутов А.П., Петров А.А., Поспелов И.Г. Математическая модель расширенного воспроизводства в централизованной плановой экономике с товарно-денежными отношениями: Сообщ. по прикл. математике ВЦ АН СССР. М., 1989. 43 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
<i>Баренблатт Г.И.</i> Яков Борисович Зельдович, каким я его знал	5

ВСЕЛЕННАЯ, ЧАСТИЦЫ, ПОЛЯ

<i>Фридман А.М.</i> Проблемы классической гравифизики	15
<i>Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.</i> Магнитная перемежаемость . .	47
<i>Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Шандарин С.Ф.</i> Крупномасштабная структура Вселенной. Уравнение Бюргера и ячеистые структуры	53
<i>Долотин В.В., Фридман А.М.</i> Генерация наблюдаемого спектра турбулентности и уединенных дипольных вихрей во вращающихся гравитирующих системах	67
<i>Арансон И.С., Горшков К.А., Ломов А.С., Рабинович М.И.</i> Нелинейная динамика локализованных состояний многомерных полей	88
<i>Трахтенгерц В.Ю.</i> Турбулентный альвеновский погранслои	102
<i>Гильденбург В.Б., Ким А.В., Крупнов В.А., Семенов В.Е.</i> Автопреобразование частоты и безотражательное распространение мощного электромагнитного импульса в ионизирующей среде	107
<i>Гордин В.А., Петвиашвили В.И.</i> Нелинейная устойчивость идеальной плазмы	112
<i>Гильденбург В.Б., Гуцин И.С., Двинин С.А., Ким А.В.</i> Динамика высоко-частотного стримера	118
<i>Матусов П.А., Цимринг Л.Ш.</i> Распространение фронта параметрически возбуждаемой капиллярной ряби	125
<i>Островский Л.А., Степаняц Ю.А.</i> Нелинейные волны во вращающейся жидкости	132
<i>Реутов В.П.</i> О механизме резонансной нелинейной неустойчивости в пограничных слоях	153
<i>Должанский Ф.В., Манин Д.Ю.</i> Устойчивость квазидвумерных сдвиговых и струйных течений вращающейся жидкости	156
<i>Еремеев А.Г., Семенов В.Е.</i> Об одном решении нелинейной задачи электродинамики	162
<i>Кац А.В., Конторович В.М.</i> Обобщенные уравнения Смолуховского и распределение галактик по массам и моментам вращения	167

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА. ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

<i>Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В.</i> Феноменологическая квантовая электродинамика активных сред и сверхизлучение	176
<i>Кочаровская О.А., Ханин Я.И.</i> Усиление света в трехуровневой среде без инверсии населенностей	194
<i>Максимов И.Л.</i> О нелинейной динамике критического состояния в сверхпроводниках второго рода	200
<i>Демиховский В.Я.</i> Нелинейная динамика электронов в металлах	213
<i>Зубарев И.Г., Пасманик Г.А., Сидорович В.Г., Шкловский Е.И.</i> Перспективы твердотельных лазеров на лазерном рынке	222
<i>Барелко В.В., Жуков С.А.</i> Детонационные волны в физике кипения	241

<i>Барелко В.В., Баркалов И.М., Гольданский В.И., Занин А.М., Кирюхин Д.П.</i>	
Автоволновые механизмы в низкотемпературной химии твердого тела	248
<i>Бондарев С.П.</i> Когерентное усиление слабых сигналов	261
<i>Львов В.С.</i> Нелинейная динамика и кинетика магнонов	265
<i>Фалькович Г.Е.</i> Судьба гипотезы универсальности в теории развитой волновой турбулентности	280

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС И САМООРГАНИЗАЦИЯ

<i>Кузнецов С.П.</i> Ренормхаос в системах, демонстрирующих удвоения периода	286
<i>Морозов А.Д.</i> О резонансах, маятниковых уравнениях, предельных циклах и хаосе	300
<i>Ершов С.В., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.</i> Синергетика	
Новые направления	306
<i>Афраймович В.С., Шерешевский М.А.</i> Клеточные автоматы как динамические системы	319
<i>Железняк А.Л.</i> Об одном подходе к вычислению топологической энтропии . .	323
<i>Антонец В.А., Антонец М.А., Шерешевский И.А.</i> Стохастическая динамика структурообразования в дискретных системах	329
<i>Петров А.А.</i> Системный анализ развивающейся экономики	338

CONTENTS

Preface	3
<i>Barenblatt G.I.</i> Yakov Borisovich Zel'dovich as I knew him	5
THE UNIVERSE, PARTICLES, FIELDS	
<i>Fridman A.M.</i> Problems of classical gravitational physics	15
<i>Molchanov S.A., Ruzmaikin A.A., Sokolov D.D.</i> Magnetic intermittency	47
<i>Gurbatov S.N., Saichev A.I., Shandarin S.F.</i> The largescale structure of the Universe. Burgers equation and cellular structures	53
<i>Dolotin V.V., Fridman A.M.</i> Generation of an observable spectrum of turbulence and solitary dipole vortices in rotating gravitating systems	67
<i>Aranson I.S., Gorshkov K.A., Lomov A.S., Rabinovich M.I.</i> Nonlinear dynamics of the localized states of multidimensional fields	88
<i>Trakhtengerts V.Yu.</i> A turbulent Alfvén boundary layer	102
<i>Gil'denburg V.B., Kim A.V., Krupnov V.A., Semyonov V.E.</i> Frequency autoconversion and reflectionless propagation of a powerful electromagnetic pulse in ionized medium	107
<i>Petviashvili V.I., Gordin V.A.</i> Nonlinear stability of ideal plasma	112
<i>Gil'denburg V.B., Gushchin I.S., Dvinin S.A., Kim A.V.</i> Dynamics of a high-frequency streamer	118
<i>Matusov P.A., Tsymring L.Sh.</i> Propagation of the front of parametrically excited capillary ripple	125
<i>Stepanyants Yu.A., Ostrovsky L.A.</i> Nonlinear waves in a rotating fluid	132
<i>Reutov V.P.</i> On the mechanism of resonant nonlinear instability in boundary layers	153
<i>Dolzhangsky F.V., Manin D.Yu.</i> Stability of quasi-two-dimensional shear and jet streams of rotating fluid	156
<i>Eremeev A.G., Semyonov V.E.</i> On one solution of the nonlinear problem of electro-dynamics	162
<i>Kats A.V., Kontorovich V.M.</i> Smolukhovsky generalized equations and the mass and angular momentum distribution of galaxies	167
QUANTUM PHYSICS. SOLID STATE PHYSICS	
<i>Kocharovskiy V.V., Kocharovskiy V.I.</i> Phenomenological quantum electrodynamics of active media and superradiance	176
<i>Kocharovskaya O.A., Khanin Ya.I.</i> Light amplification in a three-level medium with population inversion	194
<i>Maksimov I.L.</i> On the nonlinear dynamics of the critical state in type II superconductors	200
<i>Demikhovskiy V.Ya.</i> Nonlinear dynamics of electrons in metals	213
<i>Zubarev I.G., Pasmanik G.A., Sidorovich V.G., Shklovskiy E.I.</i> Perspectives of solid state lasers on a laser market	222
<i>Barelko V.V., Zhukov S.A.</i> Denotation waves in boiling physics	241
<i>Barelko V.V., Barkalov I.M., Gol'dansky V.I., Zanin A.M., Kiryukhin D.P.</i> Auto-wave mechanisms in low-temperature solid state chemistry	248
<i>Bondarev S.P.</i> Coherent amplification of weak signals	261
<i>L'vov V.S.</i> Nonlinear dynamics and kinetics of magnons	265

<i>Fal'kovich G.E.</i> The fate of the universality hypothesis in the theory of developed wave turbulence	280
---	-----

DYNAMIC CHAOS AND SELF-ORGANIZATION

<i>Kuznetsov S.P.</i> Renormchaos in systems demonstrating period doubling	286
<i>Morozov A.D.</i> On resonances, pendulum equations, limiting cycles and chaos	300
<i>Ershov S.V., Kurdyumov S.P., Malinetsky G.G., Potapov A.B.</i> Synergetics. New fields	306
<i>Afraimovich V.S., Shereshevsky M.A.</i> Cellular automatas as dynamic systems	319
<i>Zheleznyak A.L.</i> On one approach to the calculation of topological entropy	323
<i>Antonets V.A., Antonets M.A., Shereshevsky I.A.</i> Stochastic dynamics of structure formation in discrete systems	329
<i>Petrov A.A.</i> A system analysis of developing economy	338

**АДРЕСА КНИГОТОРГОВЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ
РОССИЙСКОЙ ТОРГОВОЙ ФИРМЫ "АКАДЕМКНИГА"**

Магазины "Книга-почтой"

117393 *Москва*, ул. Академика Пилюгина, 14, корп. 2; 197345 *Санкт-Петербург*, ул. Петрозаводская, 7

Магазины "Академкнига" с указанием отделов "Книга-почтой":

690088 *Владивосток*, Океанский пр-т, 140 ("Книга-почтой"); 620151 *Екатеринбург*, ул. Мамина-Сибиряка, 137 ("Книга-почтой"); 664003 *Иркутск*, ул. Лермонтова, 289 ("Книга-почтой"); 660049 *Красноярск*, пр-т Мира, 84; 103009 *Москва*, ул. Тверская, 19-а; 117312 *Москва*, ул. Вавилова, 55/7; 117383 *Москва*, Мичуринский проспект, 12; 630076 *Новосибирск*, Красный пр-т, 51; 630090 *Новосибирск*, Морской пр-т, 22 ("Книга-почтой"); 142284 *Протвино* Московской обл., ул. Победы, 8; 142292 *Пушино* Московской обл., МР "В", 1 ("Книга-почтой"); 443002 *Самара*, пр-т Ленина, 2 ("Книга-почтой"); 191104 *Санкт-Петербург*, Литейный пр-т, 57; 199164 *Санкт-Петербург*, Таможенный пер., 2; 194064 *Санкт-Петербург*, Тихорецкий пр-т, 4; 634050 *Томск*, наб. реки Ушайки, 18; 450059 *Уфа*, ул. Р. Зорге, 10 ("Книга-почтой"); 450025 *Уфа*, ул. Коммунистическая, 49

Магазин "Академкнига" в Татарстане:

420043 *Казань*, ул. Достоевского, 53

Научное издание

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ:
Физика и астрофизика**

Сборник научных трудов

*Утверждено к печати
Институтом прикладной физики РАН*

Редактор издательства *Н.Н. Лезнова*
Художник *А.Г. Кобрин*
Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*
Технический редактор *Н.А. Посканная*
Корректор *Т.И. Шеповалова*

ИБ № 1156

Л.Р. № 020297 от 27 ноября 1991 г.

Набор выполнен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

Подписано к печати 16.01.92. Формат 60×90¹/₁₆
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 22,5. Усл.кр.-отт. 22,8. Уч.-изд.л. 27,6
Тираж 360 экз. Тип. зак. 464

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
117864 ГСП-7, Москва В-485
Профсоюзная ул., 90

Санкт-Петербургская типография № 1
ВО "Наука"
199034, Санкт-Петербург В-34
9-я линия, 12

ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА"

Готовятся к печати книги:

Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец. – 16 л.

В монографии представлено описание планетных колец Сатурна, Урана, Юпитера, Нептуна и их структуры. Теоретически рассмотрены неупругие столкновения частиц при их дифференциальном вращении вокруг гравитирующего центра (планеты). Изложена теория переноса и коллективных процессов в плоской дифференциально-вращающейся системе из неупруго сталкивающихся частиц – модели околопланетного диска. Проведен анализ системы колец Урана, который позволил авторам правильно предсказать новые спутники Урана.

Для астрофизиков, механиков и математиков.

Гурзадян Г.А. Космическая астрофизика. – 35 л.

Монография посвящена новой отрасли науки – внеатмосферной, или космической, астрофизике. Приводятся результаты внеатмосферных наблюдений звезд, проведенных с помощью ракетных и орбитальных обсерваторий, состав и структура ультрафиолетовых спектров звезд всех типов; ставится проблема межзвездного поглощения света в ультрафиолете; рассматриваются особенности галактики, квазаров и газовых туманностей в ультрафиолете.

Для астрофизиков и физиков, а также аспирантов, студентов старших курсов университетов.