



Е. Н. Пелиновский

ГИДРОДИНАМИКА ВОЛН ЦУНАМИ

Нижегород
1996

Издано по решению Редакционно-издательского совета
Института прикладной физики РАН

УДК 551.46

Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами / ИПФ РАН. Нижний Новгород, 1996. 276 с.

Книга посвящена изложению теории гидродинамики волн цунами на всех ее стадиях: от зоны зарождения до выхода на берег. Рассмотрены различные механизмы генерации волн цунами подвижками дна (поршневыми, мембранными и бегущими), сейсмическими процессами, извержениями подводных вулканов, движущимися атмосферными возмущениями. Распространение волн цунами изучается главным образом с позиций лучевой теории, включая эффекты захвата волн неровностями дна и нелинейные эффекты. На стадии трансформации волн цунами в прибрежной зоне и их выхода на берег нелинейные эффекты становятся определяющими и различные приближенные теории описаны в книге. Данные теоретических моделей применяются для анализа и интерпретации имеющихся данных о волнах цунами. Особое внимание уделено цунами последних лет, в частности, Окусирскому цунами 1993 г., Шикотанскому цунами 1994 г. и цунами на о. Сулавеси (Индонезия) 1996 г., в экспедиционных исследованиях которых принимал участие автор. Обсуждаются также проблемы дистанционной диагностики цунами и транспорта наносов в волнах цунами.

Книга предназначена для специалистов по геофизике и океанологии, а также для студентов соответствующих специальностей.

Ил. 57, табл. 13, список использованной литературы 361 назв.

Рецензенты

доктор физико-математических наук Б. В. Левин,
доктор физико-математических наук В. Е. Фридман

Введение

Последнее десятилетие XX века, 1991–2000 гг., объявлено Организацией Объединенных Наций международным десятилетием по изучению, предупреждению и смягчению последствий стихийных бедствий. Созданы банки данных стихийных бедствий (доступные всем благодаря Интернету), организовываются международные экспедиции по экспертизе прошедших стихийных бедствий, начата работа по созданию популярных и учебных пособий для населения, разворачивается политика страхования в районах потенциальных стихийных бедствий, расширяются научные исследования по прогнозу стихийных бедствий. По числу жертв за последние полвека цунами занимает пятое место. Как известно, дословный перевод слова "цунами" с японского означает "большая волна в гавани". Сейчас под волнами цунами принято понимать поверхностные гравитационные волны, возникающие в море вследствие крупномасштабных непродолжительных возмущений (подводные землетрясения, извержения подводных вулканов, подводные оползни, падение в воду обломков скал, взрывы в воде, резкое изменение метеорологических условий и т. п.). Характерная длительность цунами составляет 5–100 мин, длина 1–1000 км, скорость распространения 1–200 м/с, высота может достигать десятков метров. Разнообразные сведения о цунами можно найти, например, в [Мурти, 1981; Пелиновский, 1982], данные о тихоокеанских цунами – в [Соловьев и др., 1974, 1975, 1986], данные о цунами в России – в [Щетников, 1990; Заякин, 1995].

В этом столетии произошло уже более 250 цунами, из которых около 100 носило разрушительный характер. В последнее время частота появления цунами увеличилась и только за период 1992–1996 гг. уже отмечено 28 случаев (табл. 1).

подавляющее большинство свидетельств о цунами за всю историю зарегистрировано в Тихом океане (примерно 1000), в Атлантическом и Индийском океанах не более 100 раз. Большая часть цунами (около 85 %) вызвана подводными землетрясениями, поэтому иногда волны цунами называют сейсмическими морскими волнами. В среднем один раз в 10 лет землетрясение вызывает в Тихом океане цунами со средней высотой 8 м (в отдельных пунктах до 20–30 м). Цунами высотой 4–8 м возникает раз в три года, цунами высотой 2–4 м – ежегодно. Для других бассейнов вероятность

возникновения цунами существенно меньше, так, например, в Черном море слабые цунами (с высотой не более 20 см) в этом столетии наблюдались только четыре раза, а в Каспийском море только один раз.

Таблица 1

Цунами (1992–1996)

№	Дата	Район	Высота волн, м	Число жертв
1	25.04.92	США	1	
2	18.07.92	Япония	0,5	
3	02.09.92	Никарагуа	10	170
4	12.12.92	Индонезия	26	1000
5	08.06.93	Камчатка	0,1	
6	12.07.93	Япония	30	200
7	08.08.93	о. Гуам	1	
8	21.01.94	о. Халмаера	2	90
9	08.04.94	Япония	0,2	
10	02.06.94	Индонезия	14	220
11	01.09.94	США	0,1	
12	04.10.94	Южные Курилы	10	
13	08.10.94	Индонезия	3	1
14	09.10.94	Южные Курилы	0,2	
15	14.10.94	Филиппины	7	70
16	02.12.94	Аляска	11	1
17	28.12.94	Япония	1	
18	07.04.95	о. Тонга	0,3	
19	21.04.95	Филиппины	0,1	
20	14.05.95	Индонезия	4	
21	16.05.95	о. Луайоте	0,4	
22	27.05.95	Сахалин	0,2	
23	29.07.95	Чили		
24	09.10.95	Мексика	5	
25	18.10.95	Япония	2,6	
26	01.01.96	Индонезия	3,4	9
27	17.02.96	Индонезия	7,7	75
28	24.02.96	Перу	5	12

Географическое распределение цунами также неравномерно. Зонами, подверженными цунами, являются: Япония, Россия, Аляска, Гавайи, США, Канада, Новая Зеландия, Австралия, Французская Полинезия, Пуэрто-Рико, Доминиканская республика, Коста-Рика, Азорские острова, Португалия, Италия, Сицилия, берега Эгейского, Адриатического и Ионического морей, Греция, африкан-

ский берег Средиземноморья, Индонезия, Филиппины. Отличительной характеристикой цунами является способность распространяться на большие расстояния и приносить ущерб на большой территории. Так, цунами, возникшее на побережье Чили 22 мая 1960 г., через сутки достигло побережья Японии и России, приводя в некоторых пунктах к заплеску на высоту 7 м.

Другой причиной образования цунами являются взрывы вулканических островов и извержения подводных вулканов. Как известно, на поверхности Земли имеется 522 действующих вулкана, из которых две трети сосредоточено на берегах и островах Тихого океана. Взрыв вулкана Кракатау 26 августа 1883 г. в Индонезии привел к образованию волн цунами высотой до 45 м (погибло 36 тыс. человек). Волны распространились по всему океану, в частности, в проливе Ла-Манш амплитуда волны достигла 15 см. Энергетика этой катастрофы оценивается в 250–500 тыс. атомных бомб типа хиросимской (энергия одной бомбы составляет $8 \cdot 10^{20}$ эрг). Предполагается, что 35 веков назад взрыв вулканического острова Тир в Эгейском море и возникшее при этом цунами послужили причиной гибели мифической Атлантиды.

Отметим также обвалы и оползни как источник волн цунами. Так, сход лавины, содержащей около 300 млн. м³ породы со склонов горы Фейрузер (Аляска, 10 июля 1958 г.) в бухту Литуя привел к образованию цунами высотой 60 м, при этом максимальный всплеск в самой бухте достиг рекордной цифры в 524 м. В Италии 9 октября 1963 г. сброс скальной породы с высоты 160 м возбудил волну, приведшую к гибели 3000 человек. Крупные цунами могут быть обусловлены также подводными оползнями. Такие цунами отмечались у берегов Канады и в Средиземном море. Один из недавних примеров – цунами высотой 3 м, обрушившееся на Лазурный берег Средиземного моря в районе французского города Ниццы 15 октября 1979 г.; оно возникло при проведении донноуглубительных работ (шесть человек погибло).

Стоит отметить возможность образования цунами при взрывах атомных и водородных бомб. Например, во время американских испытаний вблизи атолла Бикини (ядерный взрыв "Бейкер") высота волны на расстоянии 300 м от эпицентра достигла 28 м.

Такова краткая сводка цунами и вызывающих их причин.

Сейчас проблема цунами становится еще более важной, и не только для стран Тихого океана. По мере возрастания мировой потребности в нефти и истощения прежних месторождений добыча нефти сместилась в прибрежные районы и на шельф. Построены многочисленные порты для погрузки и разгрузки нефти с супертанкеров на незащищенных побережьях, часть нефти передается по подводным трубопроводам. Построены атомные электростанции в зоне приливов, которые могут быть подвержены разрушениям от удара волн цунами, наводнения, осушки каналов, подводящих воду для охлаждения станции во время отхода волны. Десятки тысяч

туристов посещают прибрежные города, большинство из них не знакомы с цунами и поэтому особенно подвержены опасности. В связи с освоением прибрежной зоны необходимо решать задачи долгосрочного прогноза цунами, т. е. предсказывать усредненные характеристики цунами на достаточно долгий период в десятки и сотни лет (а для атомных станций — на еще больший срок). Эффективность такой оценки ограничена недостаточным объемом данных о предыдущих цунами и погрешностями прогноза цунами для зон, где наблюдения за цунами вообще не велись.

Для решения задач оперативного и долгосрочного прогноза цунами нужны комплексные исследования, направленные на выяснение механизмов возбуждения волн цунами подводными землетрясениями и другими источниками, построение адекватной физико-математической модели распространения волн цунами в океане с переменной глубиной, изучение механизмов взаимодействия волн цунами с различного рода конструкциями в прибрежной зоне. Эти исследования охватывают широкий круг проблем сейсмологии, геофизики, океанологии, гидротехники.

Настоящая книга посвящена изложению только гидродинамической части проблемы цунами: построению физико-математических моделей возбуждения, распространения и набега на берег волн цунами. Существующие в настоящее время практические методы расчета волн цунами основаны на теории мелкой воды. Один из важнейших результатов линейного варианта этой теории (скорость распространения головной волны цунами определяется только локальной глубиной океана: $c = (gh)^{1/2}$, где c — скорость движения волны, g — ускорение свободного падения, $h(x, y)$ — локальная глубина океана) используется в практической работе службы цунами: для многих пунктов Тихоокеанского побережья построены номограммы с указанием времени добегания волны цунами от очага, произвольно расположенного в океане. Линейная теория мелкой воды реализована и численно: с использованием суперкомпьютеров и рабочих станций сейчас получены прекрасные картины моделирования распространения цунами в Японском и Черном морях, а также для ограниченных океанских акваторий (моделирование последних цунами — см. [Choi et al., 1993]). И все же расчет амплитудных характеристик волн цунами представляет собой очень трудную задачу как из-за неопределенности формы волны в очаге, так и многочисленности факторов, влияющих на распространение волн (нелинейность, дисперсия, диссипация, стратификация вод океана и т. п.), особенно на стадии выхода волны на берег. Общая теория волн на воде разработана достаточно хорошо, она изложена в ряде книг (см., например, [Стокер, 1959; Сретенский, 1977; Ле Блон, Майсек, 1981; Меи, 1989; Ивченко и др., 1992]). Однако волны цунами обладают своими особенностями, требующими специального приспособления и развития теории. Перечислим класс гидродинамических задач, которые необходимо решать в связи с проблемой цунами.

1. Возбуждение волн цунами: связь параметров цунами в очаге с полем смещений и скоростей океанического дна или с сейсмическими характеристиками землетрясений; роль горизонтальных подвижек дна, оползневых и мутьевых потоков, формирование диаграммы направленности волн цунами. Решение обратных задач, позволяющих восстановить очаг цунами по береговым данным.

2. Генерация волн цунами взрывными извержениями вулканов, сходом в воду лавин, падением в воду обломков скал или метеоритов. Оценка параметров волн цунами при проведении возможных взрывов в воде, в том числе и ядерных.

3. Выяснение основных факторов, влияющих на распространение волн цунами в открытом океане на большие расстояния; учет сферичности Земли и силы Кориолиса, взаимодействие с воздушным потоком и неровностями океанического дна.

4. Возбуждение краевых и шельфовых волн, обеспечивающих вдольбереговое движение энергии цунами; оценка волноводных свойств подводных хребтов в океане.

5. Трансформация и набегание волн цунами на берег; изучение влияния особенностей рельефа дна, влияющих на усиление волн цунами, исследование процессов обрушения волн цунами; воздействие волн на берега и сооружения.

6. Изучение сопутствующих явлений: возбуждение акустико-гравитационных волн в воде и в воздухе, исследование вариаций электромагнитного поля Земли.

7. Разработка адекватных численных моделей и алгоритмов, проведение специализированных вычислительных экспериментов; лабораторное моделирование гидродинамических процессов, связанных с волнами цунами.

8. Применение гидрофизических моделей для целей оперативного и долгосрочного прогноза цунами.

Гидродинамическая теория волн цунами и составляет предмет настоящей книги. Главное внимание уделяется построению соответствующих физико-математических моделей возбуждения, распространения и набегания волн цунами на берег, в стороне остаются вопросы, связанные с разработкой методов и алгоритмов численного моделирования волн цунами (последние изложены частично в книгах [Lewis et al., 1983; Mader, 1988; Марчук и др., 1983; Шокин и др., 1989; Вольцингер и др., 1989]. Особое место в книге занимают нелинейные задачи теории цунами; такие задачи, несомненно, доставляют удовольствие теоретикам и вызывают обычно скептическую усмешку у практиков, считающих нелинейность каким-то экзотическим явлением. Автор еще в 1982 г. собрал коллекцию проявлений нелинейности в волнах цунами [Пелиновский, 1982]. Наиболее яркие из них связаны с существованием разных типов наката волн цунами на берег. Так, если цунамигенное землетрясение 26 февраля 1902 г. в Гватемале привело к накату волны на берег в виде "черной стены", то землетрясение в Чили 10 ноября 1922 г.

сопровождалось "очень спокойными движениями воды", хотя высота волны в обоих случаях была примерно одинаковой — около 10 м [Мазова и др., 1982]. Во время цунами в Японии 26 мая 1983 г., происшедшего в полдень, когда многие жители гуляли на побережье, были сделаны многочисленные снимки волн цунами, показывающие большое разнообразие в характере наката для разных пунктов побережья. На рис. 1 воспроизведена взятая из работы [Shuto, 1985] картина распределения форм волны вдоль побережья. Отчетливо видны как разрушающиеся волны (с разными типами разрушения), так и группы волн, напоминающие процесс распада волны на солитоны. Уже из этого примера ясна необходимость разработки нелинейных моделей для описания динамики волн цунами. Здесь эти модели будут рассматриваться для всех стадий эволюции цунами: от зарождения до выхода на берег. Автор надеется показать не только теоретическую красоту нелинейных моделей, но и их практическую важность для решения вопросов защиты и предупреждения цунами.

В процессе работы автор активно пользовался возможностями, появившимися в России после перестройки, и смог обсудить многие затронутые в книге вопросы с ведущими специалистами по нелинейной теории волн, геофизике и инженерной океанологии. Мне приятно назвать здесь С. Carrier, В. Choi, Н. Choi, М. Dingenmas, М. El-Sabh, F. Gonzalez, R. Grimshaw, F. Imamura, A. Jeffrey, R. Johnson, К. Kajiwara, E. Kit, Z. Kowalik, S. Massel, С. Mei, Т. Murty, D. Peregrine, N. Shuto, М. Stiassnie, С. Synolakis, I. Svendsen, S. Tinti, Т. Wu, А. Yalchiner, Н. Yeh. Беседы с ними помогли мне лучше уяснить взаимосвязь и взаимопонимание между математикой и геофизикой. Мне удалось также принять участие в трех международных экспедициях по обследованию прошедших в последние годы цунами, такой опыт является бесценным. Продолжающееся сотрудничество в рамках Российской комиссии по цунами и общение с В. Гусяковым, А. Иващенко, В. Кайстренко, Е. Куликовым, С. Лаппо, Б. Левиным, А. Милитеевым, А. Некрасовым, Н. Петрухиным, А. Поплавским, А. Рабинэвичем, Л. Чубаровым, Ю. Шокиным помогало в понимании многих проблем цунами. Особенно мне хотелось бы отметить влияние Сергея Леонидовича Соловьева: ему я обязан тем, что цунами стало одним из главных дел моей жизни.

В течение многих лет проведение этих исследований финансировалось Государственным комитетом по науке и технике СССР, а затем Министерством науки и технической политики России. С 1993 г. автор имел поддержку на разработку отдельных вопросов от Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 93-05-8073, 95-07-19335, 96-05-16728, 96-05-64111), от Комитета по высшей школе (программа "Технические университеты России"), Международного научного фонда (NOS000), от Фонда Сороса через Американское физическое общество (1993).

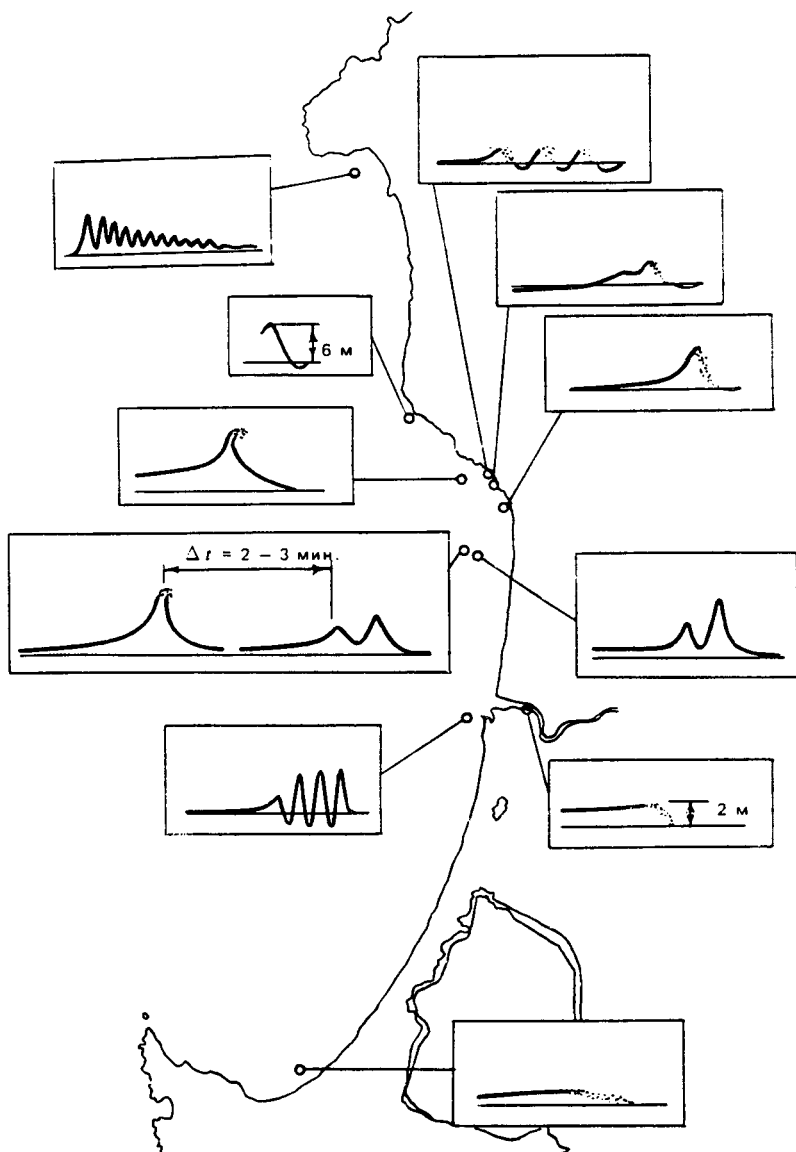


Рис. 1. Формы набегающей волны в различных пунктах побережья Японии во время цунами 26 мая 1983 г.

Мне приятно также назвать здесь соавторов моих статей, материалы которых использованы в книге: Н. Вольцингер, В. Галкин, Ч. Го, В. Голинко, Б. Гуревич, И. Долина, А. Дорфман, А. Дятлов, М. Железняк, В. Кайстренко, К. Клеванный, О. Козырев, И. Кочергин, С. Козлов, Р. Мазова, В. Малыженкова, Н. Мирчина, Н. Осипенко, Л. Островский, К. Симонов, С. Соловьев, Ю. Степанянц, Т. Талипова, Е. Трошина, В. Фридман, С. Шаврацкий, В. Choi, Н. Choi; R. Grimshaw, A. Jeffrey, E. Kit, H. Yeh; наша совместная работа позволила лучше реализовать возникающие идеи. И я, конечно же, благодарен своей семье — жене Вале и детям Дмитрию и Наташе, каждый из которых в меру своих сил старался помочь мне, чтобы эта книга вышла в свет.

Часть 1

МОДЕЛИ ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ЦУНАМИ

В этой части приведем математические модели, применяемые для описания механизмов возбуждения волн цунами различными источниками (подвижками дна, сейсмическими источниками, извержениями подводных вулканов, оползнями, атмосферными возмущениями), и обсудим основные физические и геофизические следствия, вытекающие из них. При этом, где возможно, мы используем эмпирические данные для иллюстрации или подтверждения теоретических выводов.

1.1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЦУНАМИ ПОДВИЖКАМИ ДНА

1.1.1. Основные уравнения модели

При землетрясении очаг цунами имеет размеры порядка 10 – 100 км, что позволяет пренебречь кривизной Земли. Опуская также анализ диссипативных процессов, происходящих в очаге цунами (этот вопрос будет рассмотрен отдельно), исходная гидродинамическая модель возбуждения волн цунами подвижками дна опирается на известные уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + 2 [\mathbf{f} \times \mathbf{u}] + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) w + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

с соответствующими граничными условиями на дне и океанической поверхности:

на дне ($z = -h(x, y, t)$) – условие непротекания жидкости через дно)

$$w - (\mathbf{u} \nabla) h = W_n(x, y, t), \quad (1.4)$$

на свободной поверхности ($z = \eta(x, y, t)$):
кинематическое условие

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \eta, \quad (1.5)$$

динамическое условие

$$p = p_a. \quad (1.6)$$

Здесь η — смещение водной поверхности; \mathbf{u} и w — горизонтальная ($\mathbf{u} = \{u, v\}$) и вертикальная компоненты поля скоростей; x, y — координаты в горизонтальной плоскости; ось z направлена вертикально вверх; ρ — плотность воды; p — давление; p_a — атмосферное давление, принимаемое постоянным в задачах этого рода; g — ускорение свободного падения; f — параметр Кориолиса, зависящий от широты места (используем так называемое традиционное приближение, когда считается, что вектор угловой скорости Земли направлен перпендикулярно плоскости (x, y)); $h(x, y, t)$ — невозмущенная глубина океана, изменяющаяся во время землетрясения, W_n — нормальная компонента скорости перемещения дна (при вертикальном перемещении W совпадает с $-dh/dt$). Дифференциальные операторы ∇ и div действуют в горизонтальной плоскости. Описание вывода данной системы уравнений с граничными условиями (1.1)–(1.6) в геофизической гидродинамике можно найти во многих книгах, см., например [Ле Блон, Майсек, 1981; Педлоски, 1984].

Как показывают наблюдаемые данные, волны цунами являются длинными (по сравнению с глубиной океана). Естественно поэтому рассмотреть сначала длинноволновую (или мелководную) аппроксимацию модели генерации волн цунами подвижками дна, а потом оценить условия ее применимости. Теория длинных волн основывается на предположении малости вертикальных скоростей по сравнению с горизонтальными и может быть получена из исходной системы с помощью асимптотической процедуры, использующей в качестве малого параметра отношение вертикальной скорости к горизонтальной или глубины океана к длине волны, приведем эту процедуру далее. Здесь же используем более простой алгоритм, заключающийся в пренебрежении в уравнении (1.2) вертикальным ускорением dw/dt . В этом случае (1.2) интегрируется и с учетом динамического граничного условия (1.6) определяет гидростатичность давления:

$$p = p_a + \rho g (\eta - z). \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в уравнение (1.1) и пренебрегая снова вертикальной скоростью, получим первое уравнение теории длинных волн:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + 2 [f \times \mathbf{u}] + g \nabla \eta = 0. \quad (1.8)$$

Второе уравнение находим интегрированием уравнения (1.3) по глубине от дна ($z = -h(x, y, t)$) до поверхности ($z = \eta(x, y, t)$) с учетом

граничных условий (1.4)–(1.5) и вытекающего из (1.8) факта, что горизонтальная скорость u не зависит от вертикальной координаты z :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div} [(h + \eta) u] = W_n. \quad (1.9)$$

Система уравнений (1.8)–(1.9) замкнута относительно функций η и u . Она нелинейна (так называемая нелинейная теория мелкой воды), неоднородна (правая часть отлична от нуля) и содержит переменную в пространстве и во времени заданную функцию $h(x, t)$.

Наибольшее распространение в проблеме цунами получил линейный вариант теории мелкой воды. В этом случае изменения глубины и величина скорости движения дна предполагаются малыми, что позволяет считать линейными волновые поля в эпицентре. Кроме того, пренебрежем силой Кориолиса и неоднородностью глубины бассейна в очаге цунами. В результате получим линейную систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \nabla \eta = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div} [h u] = W_n, \quad (1.11)$$

с заданной правой частью $W_n(x, y, t)$. Удобно исключить u и перейти к волновому уравнению для смещения водной поверхности:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \eta = \frac{\partial W_n}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) является основным в теории генерации волн цунами вертикальными подвижками дна. Его необходимо дополнить начальными условиями. Естественно считать, что в начальный момент океан покоится, т. е.

$$\eta = 0, \quad u = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (1.13)$$

хотя в силу линейности (1.12) легко рассмотреть и более общий случай.

С точки зрения математической физики уравнение типа (1.12) очень хорошо изучено, чтобы останавливаться на деталях его решения. Отметим лишь, что поскольку функция $\partial W_n / \partial t$ "включается" в момент времени $t = 0$, то мы здесь ставим задачу Коши для волнового уравнения в обобщенном смысле, т. е. включаем в рассмотрение обобщенные функции и не требуем дважды дифференцируемости уровня и скорости течения.

Представленные здесь полная и длинноволновая системы уравнений являются основными в гидродинамических моделях генерации волн цунами подвижками дна.

Иногда удобнее работать с потенциальной формой уравнений гидродинамики, если вращение Земли не учитывается. Как известно, если движение начинается с состояния покоя, то оно является потенциальным. В этом случае удобно ввести потенциал течений по формулам

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.14)$$

и перейти от системы (1.1)–(1.6) к уравнениям Лапласа и Лагранжа – Коши:

$$\Delta \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + gz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p = 0, \quad (1.16)$$

с граничными условиями на дне ($z = -h(x, y, t)$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \nabla \varphi \nabla h = W_n(x, y, t); \quad (1.17)$$

на свободной поверхности ($z = \eta(x, y, t)$):

кинематическое условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \varphi \nabla \eta, \quad (1.18)$$

динамическое условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + g\eta = 0. \quad (1.19)$$

В частности, в линейном варианте потенциальной теории меняются только граничные условия на свободной поверхности ($z = 0$):

кинематическое условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (1.20)$$

динамическое условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad (1.21)$$

позволяющие исключить уровень η и рассматривать только потенциал φ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.22)$$

Если в очаге глубина практически однородна, то граничное условие на дне (1.17) также можно упростить:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = W_n(x, y, t). \quad (1.23)$$

Уравнение Лапласа (1.15) вместе с граничными условиями (1.22) и (1.23) полностью определяют краевую задачу для функции φ в линейной теории. Уравнения потенциальной теории также используются ниже при рассмотрении механизмов генерации волн цунами.

1.1.2. Поршневая модель генерации волн цунами

Рассмотрим сначала простую модель импульсного возмущения, когда дно мгновенно смещается на конечную величину (землетрясение в этом случае играет роль поршня):

$$h(x, y, t) = h_0 [1 - \eta_0(x, y) \theta(t)], \quad (1.24)$$

где $\theta(t)$ — единичная функция Хэвисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

$\eta_0(x, y)$ описывает форму остаточного поднятия (опускания) дна в очаге. Скорость смещения дна, учитывая, что $W_n = -dh/dt$, представляет собой обобщенную функцию Дирака: $W_n = \eta_0 \delta(t)$. В этом случае легко показать, что обобщенная задача Коши для неоднородного волнового уравнения эквивалентна обычной задаче Коши для однородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \Delta \eta = 0 \quad (1.25)$$

(здесь и далее не делаем различий между h и h_0 и, соответственно, между c и c_0) с начальными условиями

$$\eta(x, y, t=0) = \eta_0(x, y), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t=0) = 0. \quad (1.26)$$

Как видим, при мгновенной поршневой подвижке поверхность океана приподнимается на величину смещения дна, что очевидно в силу несжимаемости жидкости и гидростатичности давления. Эта наиболее простая и наглядная в физическом отношении модель возбуждения волн нашла очень широкое применение в проблеме цунами.

Прежде чем переходить к описанию решаемых задач в рамках поршневой модели, обсудим крайне трудный для геофизики вопрос о том, где брать данные о смещении дна океана во время землетрясения. В настоящее время прямые измерения смещений дна в очаге отсутствуют, хотя этот путь получения информации об очаге цунами представляется наиболее перспективным. Некоторое представление о величинах смещения дна океана дают результаты замеров дна

до и после цунамигенного землетрясения, выполненных, например, для Ниигатского цунами 16 июня 1964 г. Так, поднятия дна моря составили 5–6 м, а опускания — 4 м. Аналогичные величины известны для перемещений участков суши во время сухопутных землетрясений.

Другая возможность оценить параметры волн цунами в очаге связана с использованием теоретических методов. Перспективным представляется совместное решение уравнений гидродинамики и теории упругости с целью связать параметры волн цунами в очаге с измеряемыми характеристиками сейсмического процесса. Такие расчеты уже выполняются, и мы будем обсуждать их в разд. 1.2. К сожалению, они еще весьма немногочисленны, чтобы уверенно делать общие выводы о роли поршневой модели генерации волн цунами. Для проведения грубых оценок представляется заманчивым использовать данные по уже прошедшим цунами с целью нахождения волнового поля в очаге. Имеющиеся здесь трудности — решение обратной задачи (часто не вполне корректной с математической точки зрения) с учетом малочисленности береговых данных и несовершенства гидродинамических методов — не позволяют надежно и достаточно точно установить параметры очага цунами. Тем не менее этот путь является единственным для получения массовой информации об очагах исторических цунами, и он нашел широкое применение на практике. Очаг цунами восстанавливают с помощью обратных рефракционных диаграмм (мы еще будем обсуждать такие методы), а смещение в нем находят из подсчета энергии волн цунами на мареографных записях с учетом цилиндрической расходимости. В сущности, получается некоторый эквивалентный очаг цунами, который был бы, если бы генерация цунами происходила в рамках поршневого механизма. Такие подсчеты сделаны практически для всех цунами этого столетия, для которых имелись мареографные данные или достаточно полные описания проявления цунами на берегу. Оказалось, что грубо форму эквивалентного очага можно аппроксимировать эллипсом (обычно очаг цунами имеет те же размеры, что и очаг землетрясения). Характеристики очагов ряда крупных цунами XX века (магнитуда землетрясения — M , глубина воды в эпицентре — h_e , амплитуда смещения — H_e , эффективный радиус очага — R_e , размеры полуосей эллипса — a, b), полученные таким способом, сведены в табл. 1.1 (результаты расчетов взяты из [Iida, 1963; Hatori, 1966; Mirchina et al., 1982; Furumoto, 1991]).

Эти данные использованы для нахождения связи параметров волн цунами в очаге с характеристиками землетрясения, в частности с наиболее важной из них — магнитудой землетрясения. Так, амплитуда смещения H_e и средний радиус очага R_e связаны с магнитудой землетрясения M регрессионными зависимостями [Iida, 1963; Пелиновский, 1982]:

$$\log H_e = 0,8M - 5,6, \quad \log R_e = 0,5M - 2,2, \quad (1.27)$$

Таблица 1.1

Параметры волн цунами в очаге

Дата	Район	M	h_e , км	H_e , м	R_e , км	a , км	b , км
02.03.33	Санрику	8,3	5,5	7,5	135	250	73
04.11.52	Камчатка	8,2	3,5	10,7	138	300	63
22.05.60	Чили	8,5	4,0	8,0	209	400	109
27.04.64	Аляска	8,4	0,2	20,0	182	350	95
16.06.64	Нингата	7,5	0,3	3,9	29	45	19
26.05.83	Япония	7,7	1,0	1,1	94	160	55

где H_e — в метрах и R_e — в километрах (коэффициенты регрессии несколько отличаются у разных авторов для разных акваторий). Однако надо иметь в виду низкую точность формул (1.27), так как возбуждение цунами зависит не только от магнитуды, но и от глубины очага землетрясения. Тем не менее они полезны для проведения грубых оценок возможных параметров волн цунами в очаге. В частности, они показывают, что интенсивность цунами возрастает с ростом магнитуды (энергии) землетрясения; например, относительно слабое землетрясение с магнитудой $M = 6$ приводит в среднем к смещениям в 1,6 м в очаге цунами, имеющем характерный радиус 6 км, а катастрофическое землетрясение с магнитудой 8 приводит к смещениям водной поверхности в 6 м в очаге с эффективным радиусом 60 км. Однако известны и обратные случаи, когда слабое землетрясение вызывает сильное цунами, а сильное землетрясение не сопровождается цунами вообще. Отметим, что волны цунами высотой даже 10 м в открытом океане практически не ощущаются из-за их большой длины, с этим частично связаны трудности их измерения. Приводимые здесь эмпирические формулы (1.27) и фактические данные об исторических цунами будут использованы в дальнейшем для выбора адекватных физико-математических моделей.

Обсудим теперь основные задачи, решаемые в рамках задачи Коши для волнового уравнения. В первую очередь, это определение направленности излучения волн цунами из очага, учитывая, что очаг цунами имеет эллиптическую форму.

Формирование диаграммы направленности. Задача Коши (1.25), (1.26), как известно, наиболее просто решается в одномерном случае

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} [\eta_0(x - ct) + \eta_0(x + ct)] \quad (1.28)$$

и описывает развал начального возмущения на две волны одинаковой формы, движущиеся в противоположные стороны, при этом

амплитуда волны уменьшается вдвое по сравнению с амплитудой первоначального смещения в очаге цунами.

Для двумерного случая решение задачи Коши описывается формулой Пуассона:

$$\eta(r, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\eta_0(r') dp}{(c^2 t^2 - |r - r'|^2)^{1/2}}, \quad (1.29)$$

где r и r' — двумерные вектора в плоскости (x, y) и интегрирование производится по области круга:

$$|r - r'|^2 < c^2 t^2. \quad (1.30)$$

Этот интеграл в общем случае не вычисляется. Наиболее простая асимптотика получается для волнового поля в очаге на больших временах ($t \gg r/c$):

$$\eta(r, t) = -V/2\pi c^2 t^2, \quad (1.31)$$

где V — объем вытесненной воды в очаге:

$$V = \int \eta_0(r) dr. \quad (1.32)$$

Эта асимптотика справедлива при $V \neq 0$, в противном случае затухание волнового поля в очаге происходит еще сильнее. Таким образом, в отличие от одномерного случая, когда волна полностью выходит из очага, в двумерном случае в очаге остается однородное смещение, быстро затухающее со временем.

Более подробно рассмотрим круговой источник. В этом случае удобно воспользоваться спектральной формой решения, получаемой с помощью преобразований Лапласа и Ханкеля

$$\eta(r, t) = \int_0^{\infty} k \eta(k) J_0(kr) \cos(ckt) dk, \quad (1.33)$$

где $\eta(k)$ — преобразование Ханкеля от начального возмущения:

$$\eta(k) = \int_0^{\infty} r \eta_0(r) J_0(kr) dr, \quad (1.34)$$

и J_0 — функция Бесселя первого рода. Интеграл в (1.33) вычисляется в явном виде для следующего начального смещения уровня воды в очаге [Доценко и др., 1982]:

$$\eta(r, t) = H_e L^3 / (r^2 + L^2)^{3/2}, \quad (1.35)$$

где H_e — высота начального смещения и L — характерный радиус очага; оно имеет вид

$$\eta(r, t) = H_e L^2 \frac{L \cos(3\phi/2) + ct \sin(3\phi/2)}{(K^2 + N^2)^{3/4}}, \quad (1.36)$$

здесь $K = r^2 + L^2 - c^2 t^2$; $N = 2Lct$ и φ — решение системы уравнений:

$$\sin \varphi = N / (K^2 + N^2)^{1/2}, \quad \cos \varphi = K / (K^2 + N^2)^{1/2}.$$

Данное решение описывает эволюцию начального возмущения: выход волны из очага за время порядка L/c ; формирование стационарного профиля в волне возвышения с амплитудой, уменьшающейся как $r^{-1/2}$; быстрый "провал" уровня в очаге и его затухание в соответствии с (1.31). Подчеркнем, что длина головной волны в цилиндрической задаче не совпадает строго с размером начального возмущения, в частности, по уровню 0,5 от максимального значения эффективный радиус очага $R_e = 0,78L$, а длина волны оказывается равной $\lambda = 1,5R_e$. Качественная картина формирования цилиндрической волны, выходящей из очага, остается справедливой для любых видов начального осесимметричного возмущения; количественные характеристики: связь между λ и R_e , время установления стационарной формы головной волны и т. п. зависят от деталей формы начального возмущения. В частности, если подвижка в очаге была однородна, то отрицательная фаза волны содержит выброс с логарифмической расходимостью [Kajiura, 1970; Galkin et al., 1986]. Особо подчеркнем, что если начальное возмущение финитно (η_0 задано только в круге радиуса R_e), то фронт волны приходит в заданную точку r спустя время $(r - R_e)/c$, т. е. он распространяется со скоростью длинных волн $c = (gh)^{1/2}$. Этот вывод, не зависящий от геометрии задачи, естественно, вытекает из гиперболичности системы мелкой воды и имеет важное значение для предсказания времени появления волны цунами после случившегося землетрясения.

Для эллиптических очагов аналитических результатов в рамках (1.29) удастся получить немного. Наиболее важный из них — формула для амплитуды волны на ее фронте в случае однородной в очаге подвижки:

$$H = \frac{1}{2} H_e \left(\frac{R}{d} \right)^{1/2}, \quad (1.37)$$

где R — радиус кривизны эллипса в точке, ближайшей к точке наблюдения; d — расстояние от точки наблюдения до центра круга кривизны R^{-1} [Galkin et al., 1986]. Эта формула верна для любого расстояния от очага. В случае $r \gg R_e$ ее удобно переписать в виде [Kajiura, 1970; Galkin et al., 1986]

$$H(r, \alpha) = \frac{1}{2} H_e \left(\frac{R(\alpha)}{r} \right)^{1/2}, \quad (1.38)$$

где α — угол, отсчитываемый от направления большой оси эллипса. Отсюда следует, что амплитуда волны по-прежнему затухает как $r^{-1/2}$, однако ее величина зависит от ориентации очага относительно точки наблюдения. Характеристикой направленности излучения

может служить отношение амплитуды волны, излученной в направлении большой оси, H_a к амплитуде волны, излученной в направлении малой оси, H_b , для этого отношения из (1.38) следует простая формула:

$$H_a/H_b = (b/a)^{3/2}. \quad (1.39)$$

Итак, эллиптический очаг формирует неоднородное в пространстве излучение, наиболее сильное излучение идет по направлению малой оси эллипса, и такое положение очага относительно точки наблюдения является наиболее опасным с точки зрения возникновения сильных волн цунами. Большинство очагов исторических цунами вытянуто вдоль ближайшего побережья и, следовательно, при прочих равных условиях приводит к волнам большей амплитуды. Детали формирования излучения эллиптическими очагами при различных формах начального возмущения, полученные с помощью компьютера, приведены в [Kajiura, 1970; Доценко и др., 1982; Galkin et al., 1986]. Расчеты показали, что на расстояниях порядка нескольких длин большой оси форма головной волны становится стационарной и при соответствующем изменении горизонтального и вертикального масштабов (длин и амплитуд волн) описывается универсальным выражением, зависящим только от формы начального возмущения. На малых расстояниях при большой вытянутости очага форма головной волны близка к форме начального возмущения, как это и должно быть в одномерной задаче.

Знакопеременные подвижки. Предположение о знакопостоянстве смещения в очаге цунами является слишком грубым. Мы уже приводили данные о смещениях дна в очаге Ниигатского цунами 16 июня 1964 г., когда одновременно присутствовали как поднятия (5–6 м), так и опускания (до 4 м) дна. Знакопеременные смещения уровня воды в очаге можно интерпретировать как реакцию уровня океана на быстрый сдвиг вдоль плоскости вертикального разлома в очаге подводного землетрясения. Учет подвижек разного знака в рамках (1.29) в принципе не представляет труда, перечислим некоторые основные следствия проведенных компьютерных расчетов [Кайстренко, 1980; Доценко и др., 1986]:

- знак головной волны определяется знаком ближайшего смещения в очаге;
- разнополярность подвижек ведет к уменьшению длины волны, выходящей из очага;
- при определенном соотношении между расположением "элементарных" подвижек и их знаками можно добиться сверхнаправленности излучения, когда излучение волн цунами идет главным образом вдоль некоторых направлений;
- поскольку волна, генерируемая каждой элементарной подвижкой, имеет остаточное смещение, то возможны случаи аномального усиления высоты волны цунами почти в два раза по сравнению

с однородной подвижкой, когда, например, волна от положительной (по знаку) подвижки накладывается на остаточное (положительное) смещение в волне от отрицательной подвижки;

— если объем вытесненной воды в очаге равен нулю, то поле в очаге затухает как t^{-4} , оставаясь неоднородным, изолинии уровня параллельны направлению разлома.

Учет нелинейных эффектов. Оценим роль нелинейных эффектов при эволюции начального возмущения в рамках поршневого механизма. Для этого ограничимся одномерным случаем и снова пренебрежем влиянием вращения Земли. Исходная нелинейная система уравнений получается из (1.8) и (1.9):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta) u] = 0. \quad (1.41)$$

Для ее решения используем инварианты Римана

$$I_{\pm} = u \pm 2 \{ [g (h + \eta)]^{1/2} - (gh)^{1/2} \}, \quad (1.42)$$

которые, очевидно, сохраняются на характеристиках

$$c_{\pm} = \pm (gh)^{1/2} + \frac{3}{4} I_{\pm} + \frac{1}{4} I_{\mp}. \quad (1.43)$$

В начальный момент времени, поскольку $u = 0$, любой из инвариантов, например I_{+} , равен $I_{+} = 2 \{ [g (h + \eta_0)]^{1/2} - (gh)^{1/2} \}$. После выхода из очага волны, распространяющейся вправо, значения инвариантов становятся следующими: $I_{-} = 0$, $I_{+} = 4 \{ [g (h + \eta)]^{1/2} - (gh)^{1/2} \}$. Учитывая непрерывность I_{+} , находим искомую связь между амплитудой волны H и максимальным значением смещения в очаге H_e [Пелиновский, 1982]:

$$H = \frac{1}{4} H_e + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{H_e}{h} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (1.44)$$

В случае малых амплитуд отсюда вытекает известная формула $H = 0,5 H_e$. Однако даже при больших амплитудах ($H_e = h$) отличие от этой формулы ($H = 0,457h$ вместо $0,5 h$) будет относительно слабым. Поэтому нелинейными эффектами на стадии развала начального возмущения в рамках поршневого механизма генерации волн цунами можно пренебречь.

Влияние вращения Земли. Учтем теперь влияние вращения Земли в рамках линейной поршневой модели генерации цунами. Соответствующие уравнения вытекают из (1.8) и (1.9):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2fv + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2fu + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.47)$$

а начальные условия имеют вид

$$\eta(r, t=0) = \eta_0(r), \quad u(r, t=0) = v(r, t=0) = 0. \quad (1.48)$$

Решение данной системы находится методами интегральных преобразований, приведем здесь окончательное интегральное выражение для уровня океана:

$$\begin{aligned} \eta(r, t) &= \eta_g(r) + gh \int |k|^2 A(k, t) \exp(ikr) dk, \\ A(k, t) &= \eta_0(k) \cos(\omega t / \omega^2), \quad \eta_0(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int \eta_0(r) \exp(-ikr) dr, \\ \omega(k) &= (4f^2 + gh|k|^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Первое слагаемое здесь отвечает стационарному геострофическому вихрю:

$$\begin{aligned} \eta_g(r) &= \frac{2f^2}{\pi gh} \int \eta_0(r') K_0 \left[\frac{2\Omega}{(gh)^{1/2}} |r-r'| \right] dr', \\ u_g &= -\frac{g}{2f} \frac{\partial \eta_g}{\partial y}, \quad v_g = \frac{g}{2f} \frac{\partial \eta_g}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

где K_0 — функция Макдональда, а второе — волне, выходящей из очага. Как видим, учет вращения приводит к образованию остаточного долгоживущего вихря в очаге, вращающегося по часовой стрелке (в антициклоническом направлении), причем за пределами очага возмущение экспоненциально спадает. По порядку величины относительная амплитуда смещения в вихре определяется параметром

$$\frac{\eta_g}{\eta_0} \sim \frac{f^2 R_c^2}{gh} \quad (1.51)$$

и для типичных океанических условий не превышает 10 %. Скорости течения в геострофических вихрях могут достигать нескольких сантиметров в секунду. Такие смещения и скорости течений наблюдаемы с помощью дистанционных средств, установленных на летательных аппаратах, в том числе космических, что дает возможность получения дополнительной информации об очаге цунами.

Поскольку энергия геострофического вихря мала, то, следовательно, энергия волновых движений практически не зависит от вращения Земли; этот вывод подтверждается соответствующими

расчетами. Форма волны вблизи очага также слабо модифицируется из-за вращения, однако вдали от очага волна деформируется значительно — рассмотрим этот процесс в разд. 2.2.

Обоснование длинноволновой модели. В рамках поршневой модели мгновенная подвижка дна вызывает такое же смещение водной поверхности. Однако при этом вертикальная скорость движения дна не может быть малой и, следовательно, нарушается предположение о гидростатичности давления. В этом случае необходимо вернуться к исходной системе уравнений (1.1)–(1.6). Поскольку движение начинается из состояния покоя, то его можно считать потенциальным. В этом случае удобно использовать линейные уравнения потенциальной теории (1.15), (1.22), (1.23). Решение этой краевой задачи может быть осуществлено с помощью функции Грина — $G(r', z_0, \tau | r, z, t)$, зависящей от времени [Стокер, 1959; Kajiura, 1963]. Последняя должна быть гармонической функцией переменных (r, z) с особенностью типа источника в точке (r', z_0) , вводимой в момент времени τ и сохраняющейся в последующее время. Функция Грина является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta G + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -4\pi \delta(r - r') \theta(t - \tau), \quad (-h < z < 0), \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + g \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad (z = 0), \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad (z = -h), \quad (1.54)$$

$$G = \frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad (t = \tau, z = 0). \quad (1.55)$$

Отсюда видно, что при $|r'| \rightarrow \infty$ функции G , $\frac{\partial G}{\partial t}$, ∇G равномерно ограничены при любом значении t , ограничена также разность $G - 1/\left[|r - r'|^2 + (z - z_0)^2\right]^{1/2}$. Перечисленные условия определяют функцию G однозначно, и ее аналитическое выражение имеет вид [Стокер, 1959; Kajiura, 1963]

$$G(r', z_0, \tau | r, z, t) = \frac{1}{h} \int_0^\infty \frac{J_0(m|r - r'|/h)}{\cosh m} \left\{ \sinh m \left[1 - \frac{|z - z_0|}{h} \right] - \right. \\ \left. - \sinh m \left[1 + \frac{z + z_0}{h} \right] + \frac{2}{\gamma^2} \left[1 - \cos \gamma \left(\frac{g}{h} \right)^{1/2} (t - \tau) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{m}{\cosh m} \cosh [m(1 + z/h)] \cosh [m(1 + z_0/h)] \right\} dm. \quad (1.56)$$

Применяя теперь формулу Грина к функциям G и $\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}$ и учитывая затухание G вдали от особенности, можно найти значение потенциала $\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}$ в любой точке по граничным значениям потенциала и функции Грина на свободной поверхности и дне бассейна

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \frac{1}{4\pi} \iint dr' \left[\left(G \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau \partial z_0} - \eta \frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2} \right)_{z_0=0} - \left(G \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau \partial z_0} \right)_{z_0=-h} \right]. \quad (1.57)$$

Интегрируя (1.57) по времени от 0 до t и используя начальные условия для функции Грина и потенциала, а также (1.54), получаем окончательное выражение для потенциала:

$$\Phi(r, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \iint dr' \int_0^t d\tau G(r', -h, \tau | r, z, t) \frac{\partial W}{\partial\tau}(r', \tau). \quad (1.58)$$

С помощью (1.21) легко найти смещение водной поверхности:

$$\eta = \frac{1}{4\pi g} \iint dr' \int_0^t d\tau W(r', \tau) \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial \tau}(r', -h, \tau | r, 0, t). \quad (1.59)$$

Входящая здесь функция Грина G , как следует из (1.56), равна

$$G(r', -h, \tau | r, 0, t) = \frac{2}{h} \int_0^\infty dm \frac{m J_0(m | r - r' | / h)}{\gamma^2 \cosh m} \times \\ \times \left\{ 1 - \cos \left[\gamma \left(\frac{g}{h} \right)^{1/2} (t - \tau) \right] \right\}. \quad (1.60)$$

Формулы (1.59) и (1.60) позволяют исследовать возбуждение волн цунами произвольными вертикальными подвижками дна в рамках потенциальной модели [Kajiura, 1963; Braddock et al., 1973]. Применим эти формулы для оценки справедливости теории мелкой воды при описании поршневого механизма генерации цунами. В рамках поршневой модели

$$W(r, t) = \eta_b(r) \delta(t), \quad (1.61)$$

где η_b описывает остаточное смещение дна. Подстановка (1.61) в (1.59) дает окончательное выражение для смещения уровня воды в любой момент времени:

$$\eta(r, t) = \frac{1}{2\pi h^2} \iint \eta_b(r') dr' \times \\ \times \int_0^\infty \frac{m J_0(m | r - r' | / h)}{\cosh m} \cos \left[\gamma \left(\frac{g}{h} \right)^{1/2} t \right] dm. \quad (1.62)$$

При $t = 0$ отсюда находится смещение уровня воды, вызванное поршневым движением дна бассейна, именно последнее и использовано в качестве начального при решении волнового уравнения:

$$\eta_0(r) = \frac{1}{2\pi h^2} \iint \eta_b(r') dr' \int_0^\infty \frac{m J_0(m|r-r'|/h)}{\cosh m} dm. \quad (1.63)$$

Как видим, начальное смещение уровня воды, вообще говоря, не повторяет смещение дна. Конкретные расчеты по формуле (1.63) выполнены в [Kajiura, 1963]. В частности, для однородной подвижки в круге радиуса R_e с высотой H_e смещение воды непосредственно над центром очага повторяет смещение дна при $R_e \gg (2-4)h$, т. е. в рамках обычных предположений теории мелкой воды. Вдали от центра смещение уровня воды является более гладким, чем смещение дна, однако этот эффект не является принципиальным, так как в рамках теории мелкой воды изменения функций на масштабах порядка глубины океана вполне могут быть заменены на разрывные. Если размеры очага малы, то смещение воды оказывается очень малым, порядка $H_e R_e^2 / h^2$.

Таким образом, для цунами, генерируемых поршневыми движениями протяженных участков дна, линейная теория мелкой воды адекватно описывает процесс формирования волны, выходящей из очага.

1.1.3. Генерация волн цунами вертикальными подвижками дна

Во время землетрясения обычно наблюдаются длительные колебания грунта, так что приближение поршневой подвижки, когда дно мгновенно перемещается на заданную величину, требует обоснования. Для расчетов волн цунами в случае длительных подвижек может быть также предложена иерархия моделей, которые обсуждаются ниже.

Линейная модель с внешним воздействием. Рассмотрим сначала процесс генерации волн цунами в рамках линейной теории мелкой воды. Исходным является неоднородное волновое уравнение (1.12) с нулевыми начальными условиями (1.13). Наиболее простая ситуация реализуется в случае линейного закона движения участка дна:

$$h(r, t) = h_0 [1 - W(r) t \theta(t)]. \quad (1.64)$$

При этом легко показать, что обобщенная задача Коши для неоднородного волнового уравнения (1.12) снова эквивалентна обычной задаче Коши для однородного волнового уравнения (1.26) с начальными условиями

$$\eta(r, t=0) = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}(r, t=0) = W(r). \quad (1.65)$$

Таким образом, как и в задачах с поршневой (мгновенной) подвижкой (см. разд 1.1.2), перейдем к задаче об эволюции начального возмущения в очаге цунами, точнее начального импульса. Приведем здесь соответствующее решение сначала для одномерной задачи:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} W(\rho) d\rho. \quad (1.66)$$

Оно описывает подъем (опускание) уровня воды в очаге на конечную величину:

$$H_e = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx, \quad (1.67)$$

а из очага выходят две волны "переключения" (меняющие уровень с $\eta = 0$ на $\eta = H_e$). Эти, тривиальные в математической физике решения, приводят к интересным следствиям в проблеме цунами: формированию незатухающей волны цунами и увеличению ее длины со временем. Таким образом, даже относительно малые очаги способны генерировать длинные волны (что невозможно в рамках поршневого механизма). Разумеется, на больших временах движение участка дна с постоянной скоростью "разрушит" линейность задачи, тем не менее эффект увеличения длины волны может быть заметным в реальных условиях. Если же $H_e = 0$, то волны полностью уходят из очага и качественно картина здесь похожа на рассмотренную в разд. 1.2.

Аналогичное решение легко написать для двумерного случая (формула Пуассона):

$$\eta(r, t) = \frac{1}{2\pi c} \iint \frac{W(r') dr'}{(c^2 t^2 - |r - r'|^2)^{1/2}}, \quad (1.68)$$

где r и r' — двумерные вектора в плоскости (x, y) и интегрирование производится по области круга:

$$|r - r'|^2 < c^2 t^2. \quad (1.69)$$

Легко показать, что теперь волновое поле в очаге затухает со временем, на больших временах ($t \gg r/c$) справедлива асимптотическая формула:

$$\eta(r, t) = \frac{1}{2\pi c^2 t} \iint W(r') dr'. \quad (1.70)$$

Убывает также амплитуда волны, уходящей из очага, на больших расстояниях от очага как $r^{-1/2}$. В частном случае осесимметричного движения, когда

$$W(r) = W_0 L^4 \frac{r}{(L^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (1.71)$$

удаётся найти точное решение [Черкесов, 1980]:

$$\eta(r, t) = \left(\frac{L}{g}\right)^{1/2} W_0 L^3 \frac{N \cos(5\varphi/2) + (3r^2 - 2K) \sin(5\varphi/2)}{(K^2 + N^2)^{5/4}}, \quad (1.72)$$

где обозначения K , N и φ такие же, как и в формуле (1.36). Детали волнового поля при воздействии начальных импульсов различной формы приведены в [Kajiura, 1963; Черкесов, 1980].

Рассмотрим теперь временные движения участков дна по произвольному закону. Решение неоднородного волнового уравнения (1.12) с нулевыми начальными условиями (1.13), как известно, имеет вид (одномерная задача)

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \frac{\partial W}{\partial \tau}(y, \tau) dy. \quad (1.73)$$

В качестве примера рассмотрим движение знакопеременной подвижки со скоростью

$$W(x, t) = -\frac{2H_e}{L} \left(\frac{e}{2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{L^2}\right) f(t), \quad (1.74)$$

где e — основание натурального логарифма (тогда H_e имеет смысл высоты волны — разницы между максимальным и минимальным смещением дна) и f — произвольная финитная функция. Аналитическое выражение для волны, распространяющейся вправо, на временах $t \gg T$ (когда действие подвижки закончилось) имеет вид [Пелиновский, Трошина, 1991]

$$\eta(\xi) = -\left(\frac{e}{2}\right)^{1/2} \frac{H_e L}{2c} \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \tau}(\tau) \exp\left[-\left(\xi + \frac{c\tau}{L}\right)^2\right] d\tau, \quad (1.75)$$

где $\xi = (x - ct)/L$. В частном случае, когда $f = 1$ в некотором интервале ($0 < t < T$) и $f = 0$ вне его, интеграл в (1.75) легко вычисляется:

$$\eta(\xi) = -H_e \left(\frac{e}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{\delta} \{\exp(-\xi^2) - \exp[-(\xi + \delta)^2]\}. \quad (1.76)$$

Здесь $\delta = cT/L$. Волна начинается с понижения уровня, сменяющегося его поднятием. Высота волны максимальна при $\delta = 0$ (поршневая подвижка) и монотонно убывает с увеличением длительности подвижки, при больших δ высота волны пропорциональна $(2e)^{1/2} H_e / \delta$. Характерная длина волны, определяемая, например, по расстоянию между экстремумами или между экстремумом и ближайшим нулевым значением поля, является также функцией δ , при малых δ длина волны λ пропорциональна L (как это и должно быть при поршневой подвижке), а при больших δ $\lambda \sim cT$ (как при равно-

мерно движущемся дне — см. начало раздела). Параметром, разделяющим эти предельные случаи, является $T \sim L/c$, т. е. время, за которое волна выходит из очага. Таким образом, учет конечности времени поднятия дна приводит к уменьшению амплитуды волны, выходящей из очага, и увеличению ее длительности.

Анализ волн цунами, вызванных пространственными подвижками дна, выполняется снова в рамках неоднородного волнового уравнения (1.12) с нулевыми начальными условиями (1.13), соответствующее решение имеет вид

$$\eta(r, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^t dt \iint \frac{\frac{\partial W(r')}{\partial t} dr'}{[c^2(t-\tau)^2 - |r-r'|^2]^{1/2}}, \quad (1.77)$$

где интегрирование по r' снова производится по кругу (1.69). Качественные результаты (уменьшение высоты волны и увеличение ее длины с ростом времени подвижки) сохраняются и в этом случае, кроме того, волна, выходящая из очага, убывает с расстоянием как $r^{-1/2}$. Результаты компьютерных расчетов для разных форм очагов и подвижек приведены в [Kajiura, 1963, 1970; Марчук и др., 1983; Доценко и др., 1987]. Отметим также, что легко можно рассмотреть возбуждение волн цунами произвольными движениями дна в рамках более точной теории без использования длинноволнового приближения по формуле (1.59), однако если очаг достаточно протяженный ($R \gg h$), то результаты не изменятся, в этом нас убеждает расчет для наиболее неблагоприятной с точки зрения теории ситуации с мгновенной подвижкой (см. разд. 1.1.2).

Имеются косвенные данные [Mirchiza, Pelinovsky, 1981] о большом коэффициенте пропорциональности между длиной волны и размером очага (около 2,8 вместо 1,5–2, как при поршневой подвижке), которые в принципе могут быть связаны с обсуждаемым здесь эффектом. Однако более убедительным представляется анализ 28 цунамигенных землетрясений Курило-Камчатского и Японского регионов, выполненный в [Буримская и др., 1981]. Он показал, что средняя длительность вспарывания разрыва составляет примерно 23 с. Для типичных океанических условий параметр δ , характеризующий длительность подвижки, мал (не более 0,1) и приближение мгновенной подвижки оправдано. Однако общая длительность движений в очаге велика (несколько минут) и в этом случае учет конечности движения подвижки может оказаться заметным. Рассмотрим, например, периодическое движение участка (полосы, чтобы ограничиться одномерной задачей) дна с частотой ω , т. е. будем считать, что

$$h = h_0 [1 - H_e F(x) \exp(i\omega t)], \quad (1.78)$$

где F — произвольная функция. Применяя к уравнению (1.12) преобразование Фурье по пространственной переменной и решая

полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, выражение для уровня воды запишем в интегральной форме:

$$\eta(x, t) = \int \sum_{n=1}^{n=3} \eta_n(k, t) \exp(ikx) dk,$$

$$\eta_{1,2}(k, t) = -\frac{\omega^2}{2ck(\omega \mp ck)} F(k) \exp(\pm ickt),$$

$$\eta_3(k, t) = \frac{\omega^2}{\omega^2 - c^2k^2} F(k) \exp(i\omega t), \quad (1.79)$$

и $F(k)$ — спектр функции $F(x)$. Интеграл (1.79) типичен в задачах возбуждения волн, он рассматривался, например, в [Стокер, 1959; Черкесов, 1980]. Функция $\eta(k)$ является аналитической функцией в плоскости комплексного переменного k , имеющей полюса на действительной оси. Обходя полюса при деформировании контура интегрирования так, чтобы выполнялось условие излучения (волны уходили из очага), можно показать, что первые два интеграла определяют ближнее поле и спадают с расстоянием быстрее, чем $r^{-1/2}$, а последний интеграл в силу теоремы Коши определяется значением его в точке вычета. Ответ выражает установившуюся волну в области $x > 0$ в виде

$$\eta(x - ct) = (\omega/2c) F(\omega/c) \exp[i\omega(t - x/c)]. \quad (1.80)$$

Как видим, амплитуда волны определяется значением только одной спектральной компоненты пространственного распределения возмущений на дне. Величину $\omega F(\omega/c)$ можно рассматривать как "передаточную" функцию между колебаниями дна и поверхности, она мала на низких частотах (медленные движения дна почти не вызывают цунами, так как волна быстро уходит из очага, не успев набрать энергии) и на высоких частотах, если спектр возмущений дна быстро спадает (быстрее, чем ω^{-1}). С другой стороны, на высоких частотах необходимо отказаться от приближения гидростатики и решать задачу в рамках потенциальной модели (1.59), это приводит к появлению в знаменателе (1.80) фактора $\cosh(\omega h/c)$, "обрезающего" высокие частоты. Таким образом, наиболее эффективно возбуждают волны подвижки дна с характерным масштабом $L \sim c/\omega$, когда волна за период колебаний успеваает пройти очаговую область, при этом амплитуда колебаний поверхности может достигать амплитуды колебаний дна.

Для реальных океанических условий приближение строгой монохроматичности колебаний дна во время землетрясения является достаточно грубым, более адекватным должен быть учет хаотических подвижек дна. Поскольку решение неоднородного волнового уравнения выражается в явном виде, то вычисление моментов волнового поля в принципиальном плане не составляет труда. Такие

оценки выполнены в рамках пространственных подвижек типа (1.74), изменяющихся во времени случайным образом [Пелиновский, Трошина, 1991]. Они показали, что максимальное возбуждение цунами происходит в случае, если время корреляции (предполагалась стационарность процесса f) оказывается пропорциональным L/c , как и в случае динамической подвижки, а средняя амплитуда волн будет большей при малых временах корреляции, чем если движение дна происходит по динамическому закону. Аналогичные оценки выполнены в работе [Макеев, Павлов, 1991] для фоновых колебаний уровня моря, реагирующих на постоянно присутствующий сейсмический фон в океане.

Наконец, остановимся на важном вопросе величины колебаний уровня воды в очаге непосредственно над эпицентральной областью подводного землетрясения (ранее мы рассматривали волны, уже вышедшие из очага) в связи с проблемой объяснения моретрясения — мощных волн обычно небольшой длины. Моретрясения сопровождаются сильными гидроакустическими и кавитационными эффектами и опасны для мореплавания в открытом океане (в отличие от волн цунами, которые заметны только в прибрежной зоне). Амплитуды сейсмических колебаний морского дна практически ограничены диапазоном 10^{-6} – 10^{-3} м, их частоты 0,1–100 Гц, колебательная скорость 10^{-3} –0,1 м/с, ускорение 0,1–10 м/с² [Аки, Ричардс, 1983; Александров и др., 1986]. По сообщениям очевидцев, при этом на поверхности моря возникает сетка волн с длинами 10–20 м и частотами 1 Гц продолжительностью 10–60 с [Соловьев, Го, 1974]. Простейшая модель моретрясения снова может быть рассмотрена в рамках неоднородного волнового уравнения (1.12). Если считать, что подвижка представляет собой однородное поднятие в полосе $|x| < L/2$, колеблющееся во времени по закону $\cos(\omega t)$, то из (1.73) нетрудно найти поле непосредственно над эпицентром подводного землетрясения:

$$\eta(t) = -\frac{2H_e}{\pi} \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right), & 0 < t < \frac{L}{2c}, \\ \sin\left(\frac{\omega L}{4c}\right) \sin\left[\omega\left(t - \frac{L}{4c}\right)\right], & t > \frac{L}{2c}, \end{cases} \quad (1.81)$$

откуда вытекает, что на частотах $\omega L/4c = \pi/2 + \pi n$ ($n = 0, 1, \dots$) амплитуда колебаний уровня воды практически совпадает с амплитудой смещения дна.

Условие резонанса может быть записано в более привычном виде

$$\delta = \frac{cT}{L} = \frac{1}{2n+1} \quad (1.82)$$

и хорошо выполняется для типичных условий моретрясений.

Параметрическая модель. Выше мы учитывали колебания дна только как правую часть в линейном волновом уравнении (1.12). Однако изменения глубины влияют также на коэффициенты волнового уравнения и при некоторых условиях, характерных для условий моретрясений, это влияние может быть существенным. Совместный учет переменности коэффициентов и внешней силы является довольно трудным делом. Упростим поэтому задачу, положив подвигу дна однородной в пространстве ($h = h(t)$) и перейдем в систему отсчета, связанную с колеблющимся дном, тогда в исходной модели изменяются только уравнения (1.2) и (1.4):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) w + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g + \frac{d^2 z_b}{dt^2}, \quad (1.83)$$

$$w = 0 \quad (z = -h = \text{const}), \quad (1.84)$$

где z_b — ордината смещения дна. Таким образом, все изменения проявляются в перенормировке ускорения свободного падения, что физически естественно. Линеаризуя полученную систему и разлагая волновое поле в пространственный интеграл Фурье, например смещение уровня воды и потенциал скоростей:

$$\eta(\mathbf{r}, t) = \int \eta(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k},$$

$$\varphi(\mathbf{r}, z, t) = \int \frac{\partial \eta(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}, \quad (1.85)$$

легко найти обыкновенное дифференциальное уравнение для $\eta(\mathbf{k}, t)$ [Benjamin, Ursell, 1954]:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \left(g - \frac{d^2 z_b}{dt^2} \right) k \tanh(kh) Q = 0, \quad (1.86)$$

где $Q = \frac{\partial \eta(\mathbf{k}, t)}{\partial t}$. В частном случае периодического движения дна $z_b(t) = H_e \cos(\omega t)$ из (1.86) получаем известное уравнение Матье:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + gk \tanh(kh) \left[1 + \frac{\omega^2 H_e}{g} \cos(\omega t) \right] Q = 0. \quad (1.87)$$

Его общее решение выражается через функции Матье (см., например, [Рабинович, Трубецков, 1989]). При определенных условиях между коэффициентами уравнения решение нарастает экспоненциально, наступает параметрический резонанс. Он возможен при следующих условиях:

$$[gk \tanh(kh)]^{1/2} = \frac{n\omega}{2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.88)$$

и определяет по заданной частоте колебаний дна волновые числа нарастающих волн. В силу горизонтальной изотропии задачи полу-

чаются стоячие волны (структуры), которые будут экспоненциально нарастать. При малой высоте подвижки инкремент колебаний на основной частоте $n = 1$ легко находится в явном виде с помощью метода усреднения:

$$\gamma = \frac{\omega^3 H_e}{2g}. \quad (1.89)$$

Соответствующее общее решение:

$$\eta = A_1 \exp(\gamma t) \cos\left(\frac{\omega t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + A_2 \exp(-\gamma t) \cos\left(\frac{\omega t}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (1.90)$$

где A_1 и A_2 — произвольные константы, определяемые начальными условиями. Из полученных выражений ясно, что в области длинных волн ($\omega \rightarrow 0$) величина ν не очень-то большая. Интересно отметить, что величина инкремента вообще не зависит от глубины и параметрическое усиление колебаний уровня воды проявляется для волн любой длины, особенно сильно для коротких волн. Характерное время роста амплитуды колебаний при частоте 0,1 Гц и смещении дна 1 м составляет примерно 50 с, что находится в хорошем согласии с наблюдаемыми данными. Длины волн на частотах 0,1–1 Гц равны 2–200 м, что также хорошо совпадает с наблюдаемыми волнами при моретрясении.

И еще один вывод: в рамках (1.89) параметрическая неустойчивость должна наблюдаться при любой величине амплитуды колебаний дна. Учет вязкости воды приводит к тому, что неустойчивость имеет место, когда инкремент γ превысит вязкий декремент $\delta = 2\nu k^2$, где ν — кинематический коэффициент вязкости; тем самым получаем пороговое значение амплитуды колебаний морского дна:

$$H_e > 4\nu \omega / g, \quad (1.91)$$

при которой возможно моретрясение. Амплитуда колебаний уровня воды в рамках линейной теории не находится; для этого необходимо обратиться к исходной нелинейной системе. Отметим, что задача об однородных колебаниях жидкости в вибрирующем сосуде хорошо известна еще со времен Фарадея, наблюдавшего капиллярную рябь на поверхности сосуда. Ее структура зависит от величины "надкритичности" $(\gamma - \delta)/\omega$ и меняется от регулярной (квадратной сетки) до неупорядоченной (турбулентной), она неоднократно измерялась в эксперименте; строились также соответствующие теоретические модели (отметим лишь последние работы [Александров и др., 1986; Левин, Трубников, 1986; Гапонов-Грехов, Рабинович, 1992]). Для применимости этих результатов в проблеме моретрясений необходимо, во-первых, рассмотреть гравитационные, а не капиллярные волны, а во-вторых, учесть неоднородность подвижки в пространстве. Выше в рамках линейной теории как раз и рассматривались гравитационные волны. Поскольку длины параметрически возбуж-

денных волн малы (по сравнению с глубиной океана), а размеры очага подводного землетрясения велики, то на масштабах порядка несколько длин волн подвижку можно считать однородной. Тем самым формулу (1.89) можно считать справедливой при любой форме подвижки $H_g(x, y)$.

1.1.4. Генерация волн цунами горизонтальными подвижками дна

Выше мы считали, что возмущение дна океана во время подводного землетрясения происходит сразу во всей активной области. В действительности же подвижка дна распространяется по этой области с определенной скоростью, которая может быть как больше, так и меньше скорости распространения волн цунами, что, очевидно, должно радикальным образом влиять на структуру и энергию излученных волн. Так, по данным [Бурымская и др., 1981] скорость вспарывания разлома составляет 2,6 км/с для цунамигенных и 4,4 км/с для не цунамигенных землетрясений Курило-Камчатского и Японского регионов. Эти скорости превышают максимальную скорость волн цунами (0,2 км/с), однако вектор скорости ориентирован вдоль направления разлома и его проекция на горизонтальную плоскость может быть существенно меньше. Приведем здесь ряд моделей для описания процесса генерации волн цунами горизонтальными подвижками дна.

Линейная модель мелкой воды. Простейшей моделью здесь является использование линейной волнового уравнения теории длинных волн (1.12) с заданной правой частью $W_n(x, y, t)$, причем, как и ранее, можно отождествлять W_n с вертикальной скоростью движения подвижки (dz_b/dt). В качестве источника рассмотрим сначала простейшую подвижку в виде безграничной полосы вдоль оси y , распространяющуюся вдоль оси x с постоянной скоростью V . Фактически в этом случае получаем одномерную задачу, решение которой, удовлетворяющее нулевым начальным условиям (1.13), легко находится в явном виде:

$$\eta(x, t) = \frac{V^2}{V^2 - c^2} z_b(x - Vt) - \frac{V^2}{2c(V - c)} z_b(x - ct) + \frac{V^2}{2c(V + c)} z_b(x + ct), \quad (1.92)$$

где, как и ранее, $c = (gh)^{1/2}$. Это решение представляет собой суперпозицию трех волн: одной вынужденной и двух свободных, которые с течением времени разделяются в пространстве: первая остается в зоне очага (в этой постановке очаг перемещается в пространстве), а две другие выходят из очага. Обсудим сначала поле в очаге на достаточно больших временах, когда волны разделились

в пространстве; оно описывается первым членом в (1.92). Как видим, в случае мгновенной подвижки ($V \rightarrow \infty$) смещение уровня повторяет смещение дна ($\eta \sim z_b$), при медленном движении ввиду малости вертикального ускорения ($\frac{\partial^2 z_b}{\partial t^2}$) волна практически не возбуждается ($\eta \sim V^2 z_b / c^2$). Особый интерес вызывает случай синхронизма между перемещением подвижки и возбуждаемой волной, когда даже малые подвижки дна вызывают сильное смещение уровня воды (формально в рамках данной модели — бесконечные). Такое усиление имеет волна, движущаяся в ту же сторону, что и подвижка (знак ее смещения противоположен знаку смещения в очаге). Волна, уходящая из очага в противоположную сторону, ограничена по амплитуде при любых скоростях, что связано с большой разницей в скоростях движения; эта волна не является резонансной. Разумеется, эти выводы справедливы для относительно протяженных очагов, иначе необходимо учитывать торможение подвижки, возбуждающее нестационарный процесс. Рассмотрим более реалистичскую модель, когда подвижка пробегает конечное расстояние L , так что скорость движения дна отлична от нуля только в области $(0 - L)$:

$$\mathcal{W} = H_b \delta(t - x/V), \quad 0 < x < L. \quad (1.93)$$

Решение (1.12) по-прежнему легко находится с помощью формулы (1.73). Вне очаговой области смещение волна представляет собой два прямоугольных импульса, распространяющихся в противоположных направлениях. Амплитуда и длительность импульса, движущегося в сторону $x > 0$, равны

$$H = \frac{H_b}{2} \frac{V}{|V - c|}, \quad T = \frac{L}{c} \frac{|V - c|}{V}, \quad (1.94)$$

а в противоположную сторону

$$H = \frac{H_b}{2} \frac{V}{|V + c|}, \quad T = \frac{L}{c} \frac{|V + c|}{V}. \quad (1.95)$$

Как видим, и здесь имеет место явление резонанса. С приближением скорости движения подвижки V к скорости распространения волн c амплитуда резонансной волны уходит в бесконечность, длительность импульса при этом становится очень малой. Для таких коротких импульсов нарушается применимость теории длинных волн и резонанс необходимо рассматривать в рамках более точных моделей.

Аналогичные вычисления удастся проделать и для плановой задачи, когда подвижка бежит внутри прямоугольной активной области. Подробные вычисления для этого случая проведены в [Новикова, Островский, 1978], а затем подтверждались в рамках численного моделирования плановых задач [Марчук и др., 1983].

Важно подчеркнуть, что явление резонанса сохраняется и в плановых задачах. Теперь уже резонансными будут все подвижки со скоростями, большими c , и максимальное излучение происходит вдоль направлений:

$$\theta = \arccos(c/V), \quad (1.96)$$

определяемых через так называемый черенковский угол, соотношения такого типа хорошо известны в теории излучения электромагнитных волн. Амплитуда волн при $c \neq V$ остается конечной, она пропорциональна фактору $(1 - c^2/V^2)^{-1/2}$ для черенковского направления.

Таким образом, горизонтальное движение подвижки вызывает интенсификацию излучаемых волн, "катастрофическим" в рамках линейной теории мелкой воды является случай полного резонанса: $c = V$, при этом амплитуда волны формально становится неограниченной.

Обоснование длинноволновой модели. В рамках линейной теории мелкой воды неоднократно использовались дельта-функции для описания изменения скорости подвижки (см., например, формулу (1.93)). Кроме того, в случае резонанса мы получили очень малые длительности генерируемых волн. Все это указывает на необходимость обоснования длинноволновой модели. Если, как и ранее, принять движение потенциальным, то согласно (1.59) смещение поверхности может быть записано в интегральной форме:

$$\eta(r, t) = \frac{1}{2\pi h^2} \iint dr' \int_0^t d\tau W(r', \tau) \int_0^\infty \frac{m J_0 m |r - r'|/h}{\cosh m} \times \\ \times \cos \left[\gamma (g/h)^{1/2} (t - \tau) \right] dm, \quad (1.97)$$

где $\gamma = m \tanh m$. Для простоты рассмотрим здесь подвижку дна вида

$$W = z_b(r) \delta(t - x/V), \quad (1.98)$$

так что подвижка является мгновенной за фронтом разлома ($x - Vt$). В этом случае один из интегралов в (1.97) вычисляется:

$$\eta(r, t) = \frac{1}{2\pi h^2} \iint z_b(r') dr' \int_0^\infty \frac{m J_0 (m |r - r'|/h)}{\cosh m} \times \\ \times \cos \left[\gamma (g/h)^{1/2} (t - \rho_x/V) \right] dm. \quad (1.99)$$

При $V \rightarrow \infty$ формула (1.99), естественно, переходит в (1.62). Легко видеть, что наличие множителя $\cosh m$ приводит к сходимости интеграла по m и, следовательно, к конечности волнового поля. Таким образом, отказ от длинноволновости является принципиальным и

позволяет устранить неограниченность волнового поля при резонансе в рамках линейной теории. Грубо амплитуду волны при резонансе можно оценить следующим образом. Теория мелкой воды справедлива при длинах волн $\lambda \gg h$ или длительности волны $T \gg h/c$. Если формулу (1.94) преобразовать к следующему виду:

$$H = \frac{H_b}{2} \frac{L}{cT}, \quad (1.100)$$

то, учитывая ограничения на длительность волны в рамках теории мелкой воды, получим верхнюю границу на амплитуду волны при резонансе

$$H \leq (H_b/2) (L/h) \quad (1.101)$$

и для достаточно протяженных очагов ($L \gg h$) усиление волны может быть весьма заметным.

Нелинейная теория мелкой воды. Для оценки точности линейной модели рассмотрим задачу генерации цунами движущейся подвижкой дна в нелинейной постановке. Ограничимся здесь одномерным вариантом нелинейной теории мелкой воды в рамках системы уравнений (1.8) и (1.9):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1.102)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h - z_b + \eta)u] = \frac{\partial z_b}{\partial t}, \quad (1.103)$$

где h — постоянная средняя глубина. Считая подвижку функцией только бегущей координаты $x - Vt$, попытаемся отыскать решения данной системы в том же виде, т. е. зависящими от одной координаты $x - Vt$. Тогда из системы уравнений (1.102) и (1.103) вытекают нелинейные алгебраические соотношения:

$$(h - z_b + \eta)u = V(\eta - z_b), \quad (1.104)$$

$$g\eta = Vu - u^2/2, \quad (1.105)$$

где принято, что в области, где $z_b = 0$, возмущения уровня и скорости отсутствуют. Если смещения дна малы и $V \neq c$, из данной алгебраической системы вытекают линейные соотношения типа (1.92). Однако неограниченное возрастание амплитуды при резонансе $V = c$ отсутствует и при малых z_b справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\eta = V(2z_b/3g)^{1/2}, \quad u = (2gz_b/3)^{1/2}. \quad (1.106)$$

Итак, достаточно малая движущая подвижка дна возбуждает волну того же порядка, если $V \neq c$; в окрестности резонанса $V \sim c$

амплитуда волны существенно выше, она пропорциональна $(z_b)^{1/2}$. Зависимость амплитуды от разности скоростей $V - c$ напоминает известные резонансные кривые нелинейного осциллятора.

Нелинейно-дисперсионная модель. Из приведенных выше формул и оценок вытекает, что вне резонанса $V = c$ волновое поле хорошо описывается в рамках линейной теории мелкой воды. В случае же резонанса и одномерности распространения отказ от длинноволновости и учет нелинейности являются решающими для объяснения конечности энергии волнового поля. Рассмотрим здесь упрощенную модель резонансной генерации волн цунами подвижками дна. Для этого обратимся к потенциальной форме уравнений гидродинамики (1.15)–(1.19), причем в граничном условии на дне выделим в явном виде колебания дна, отсчитываемые от невозмущенной поверхности дна z_b :

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \nabla \varphi \nabla z_b = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (z = -h + z_b). \quad (1.107)$$

Поскольку потенциал течения является гармонической функцией, она дифференцируема по всем своим аргументам и может быть представлена рядом Тейлора по вертикальной координате:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z + h - z_b)^n, \quad (1.108)$$

причем q_n и z_b зависят от горизонтальных координат и времени. Подстановка (1.108) в уравнение Лапласа (1.15) приводит к рекуррентным соотношениям на неизвестные функции q_n :

$$(n+2)(n+1)q_{n+2} + \Delta q_n - 2(n+1)\nabla q_{n+1} \nabla z_b - (n+1)q_{n+1} \Delta z_b + (n+2)(n+1)q_{n+2} (\nabla z_b)^2 = 0, \quad (1.109)$$

так что только две из них (а именно q_0 и q_1) являются независимыми. В частности,

$$q_2 = \frac{\Delta q_0 - 2 \nabla q_1 \nabla z_b - q_1 \Delta z_b}{2 [1 + (\nabla z_b)^2]}. \quad (1.110)$$

Подставляя теперь ряд (1.108) в граничное условие на дне (1.107), находим связь между q_1 и q_0 :

$$q_1 = \frac{\frac{\partial z_b}{\partial t} + \nabla q_0 \nabla z_b}{[1 + (\nabla z_b)^2]}. \quad (1.111)$$

Таким образом, ряд (1.108) полностью определен через одну функцию $q_0(r, t)$. Граничные условия на свободной поверхности (1.18) и

(1.19) определяют искомые уравнения для η и q_0 . Удобно переписать их в терминах поверхностных значений скорости течений:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \eta = w, \quad (1.112)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + g \nabla \eta = 0, \quad (1.113)$$

где

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\nabla q_n - (n+1) q_{n+1} \nabla z_b \right] (h + \eta - z_b)^n, \quad (1.114)$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q_{n+1} (h + \eta - z_b)^2, \quad (1.115)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left[\nabla q_{n+1} - (n+2) q_{n+2} \nabla z_b \right] (h + \eta - z_b)^n. \quad (1.116)$$

Уравнения (1.112) и (1.113) вместе с формулами (1.114)–(1.116) и соотношениями (1.109) и (1.111) полностью эквивалентны исходной краевой задаче для потенциала. Дальнейшее упрощение связано с использованием ряда приближений:

– медленность изменения дна в пространстве и времени (медленность по сравнению с размером очага L и с характерным временем L/c);

– размер очага значительно превышает глубину бассейна ($L \gg h$);

– малость амплитуды колебаний дна (по сравнению с глубиной), обеспечивающая малость нелинейных эффектов.

Первые два приближения позволяют ограничиться только тремя членами в ряде (1.108), третье – оставить только первый член этого ряда во всех нелинейных членах. Опуская технические детали использования данных приближений (мы еще вернемся к этой системе уравнений), приведем окончательный вид упрощенных уравнений (1.112) и (1.113) (см., например, [Дорфман, 1977]):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div} \left[(h - z_b + \eta) \mathbf{u} \right] = \frac{\partial z_b}{\partial t}, \quad (1.117)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta = -\frac{1}{2} h \nabla \frac{\partial^2 z_b}{\partial t^2} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{u}. \quad (1.118)$$

Упрощенные уравнения (в литературе их принято называть системами буссинесковского типа) отличаются от уравнений мелкой воды наличием правой части в (1.118), первое слагаемое в ней определяет поправку к ускорению свободного падения из-за коле-

баний водного слоя, а второе учитывает выход за длинноволновость теории мелкой воды (обсудим эти эффекты во второй части книги). Полученная система позволяет рассмотреть процесс генерации волн цунами неоднородными и нестационарными подвижками дна. Учитывая, что наибольшая эффективность возбуждения достигается в резонансном случае, когда подвижка распространяется со скоростью, близкой к $c = (gh)^{1/2}$, можно еще упростить задачу, рассматривая ее как одномерную. Кроме того, целесообразно оставить смещение дна только в правой части уравнения (1.117) и пренебречь им в других местах (их влияние, как можно показать, существенно меньше). В результате получаем следующую систему:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta) u] = \frac{\partial z_b}{\partial t}, \quad (1.119)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}. \quad (1.120)$$

Рассмотрим здесь частный случай, когда подвижка дна движется с постоянной скоростью V , и попытаемся отыскать решения данной системы в виде функций одного аргумента $x - Vt$. Тогда система (1.119) и (1.120) сводится к одному уравнению нелинейного осциллятора с внешней силой, которое при условии $u \ll V$ имеет вид

$$\frac{Vh^2}{3} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{c^2 - V^2}{V} u + \left(\frac{c^2}{V^2} + \frac{1}{2} \right) u^2 = -gz_b. \quad (1.121)$$

Отсюда в приближении мелкой воды (формально надо положить $h \rightarrow 0$) следуют известные результаты нелинейной теории (см. формулу (1.106) для резонансного случая $V = c$). Отказ от приближения мелкой воды ведет к дополнительной ограниченности волнового поля вблизи резонанса, причем разные режимы реализуются в зависимости от знака $V - c$. Интересные исследования волновой динамики в рамках (1.119)–(1.121), а также в рамках близкой модели (так называемого вынужденного уравнения Кортевега – де Вриза) описаны в [Akylas, 1984; Cole, 1985; Mei, 1986; Katsis, Akylas, 1987; Wu, 1987]. Однако неограниченное движение подвижки дна с постоянной скоростью да еще в одномерной постановке представляется маловероятным, так что от более подробного приведения здесь результатов этих исследований мы вынуждены отказаться. Однако подчеркнем, что резонансное возбуждение волн цунами бегущей подвижкой дна даже на ограниченных временных интервалах может быть весьма значительным, так что необходимы специальные исследования в рамках буссинесковских моделей для реалистических подвижек дна типа (1.93), это пока не сделано.

И последнее замечание. Выше мы рассматривали по отдельности вертикальные и горизонтальные подвижки. На практике они

присутствуют вместе и, как правило, на наклонном дне в очаге. В этом случае можно говорить об обвальном-оползневом механизме генерации волн цунами. Оползень не только вызывает цунами (мы привели ряд примеров во введении), но и испытывает обратное воздействие волн цунами. Здесь необходимо решать совместную систему уравнений для волн и оползня. Последний в простейшей модели описывается уравнением Ньютона [Мамрадзе и др., 1991]

$$M \frac{d^2 r}{dt^2} = F_g + F_{fr} + F_{hyd}, \quad (1.122)$$

где M — масса оползня, F_g — сила тяжести, F_{fr} — сила сопротивления и F_{hyd} — реакция излучения, вычисляемая по волновому давлению. Нам не известны какие-либо аналитические решения, описывающие обвальном-оползневый механизм генерации волн цунами, и соответствующие решения находятся численно (см., например, [Мамрадзе и др., 1991]).

1.1.5. Восстановление очага цунами по мареографным данным

Выше мы изучали характеристики волн цунами, возбуждаемых различными движениями дна, т. е. решали прямую гидродинамическую задачу. Однако очаг цунами инструментально не исследован, а имеющиеся данные о цунами относятся к прибрежной зоне и лишь в последнее время получены единичные записи волн цунами в открытом океане. В этом случае восстановление очага цунами по мареографным данным должно проводиться на основе решения обратной гидродинамической задачи. Обратные задачи, как правило, не являются корректными задачами математической физики, поэтому проблеме восстановления очага цунами необходимо уделить специальное внимание. Здесь ограничимся анализом этой проблемы в рамках линейной теории мелкой воды на невращающейся земле. В этом случае система уравнений (1.10)–(1.11) сводится к неоднородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g \operatorname{div} (h \nabla \eta) = \frac{\partial^2 z_b}{\partial t^2}, \quad (1.123)$$

где h предполагается функцией только координат x, y , а подвижка дна z_b является функцией x, y, t . Начальные условия для уравнения (1.123) принимаются нулевыми

$$\eta(r, 0) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(r, 0) = 0, \quad (1.124)$$

для простоты такие требования наложим также на функцию z_b в начальный момент времени

$$z_b(r, 0) = \frac{\partial z_b}{\partial t}(r, 0) = 0, \quad (1.125)$$

так что до начала землетрясения дно океана и его свободная поверхность находились в невозмущенном состоянии. Граничные условия для уравнения (1.123) в некоторой области океана Ω должны быть заданы на какой-нибудь прибрежной изобате, где волновое поле измеряется; обозначим эту границу через Γ . Будем считать для простоты, что z_b сосредоточено внутри области Ω и не затрагивает границу. На границе задана функция η (уровень воды) и скорость частиц u (или градиент уровня $\nabla \eta$) из мареографных или наблюдаемых данных:

$$\eta(r, t)|_{\Gamma} = A_1(t), \quad \nabla \eta(r, t)|_{\Gamma} = A_2(t). \quad (1.126)$$

Очевидно, что наблюдаемые колебания уровня на границе Γ представляют собой сложную интерференционную картину из-за суперпозиции подходящих к берегу и отраженных от него волн.

Решение уравнения (1.123) при условиях (1.124)–(1.126) существует, однако, как легко видеть, оно не является единственным, так как любой дважды дифференцируемой функции η с одними и теми же граничными условиями соответствует свое решение z_b . Отсюда следует, что в принципе возможны такие подвижки дна океана, которые не вызовут на берегу никакого цунами, т. е. источник будет "ненаблюдаемым". Простейшим примером такой ситуации в одномерной задаче при постоянной глубине будут волновые поля [Кайстренко, 1972]

$$\eta = \begin{cases} (12t^2 - 8bt^3 + b^2t^4) \exp(-bt) \sin^2(\pi x/L), & 0 < x < L, \\ 0, & x < 0, x > L, \end{cases} \quad (1.127)$$

возбуждаемые подвижками вида

$$z_b = \begin{cases} \left[(12t^2 - 8bt^3 + b^2t^4) \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{2\pi^2 t^4}{L^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right] e^{-bt}, & 0 < x < L, \\ 0, & x < 0, x > L \end{cases} \quad (1.128)$$

с произвольными значениями L и b . Очевидно, что вне интервала $0 < x < L$ волны цунами отсутствуют и, следовательно, очаг цунами в этом случае не наблюдаем.

Таким образом, для выяснения характера подвижек дна в очаге недостаточно одной только информации о проявлении цунами на берегу, необходимы дополнительные данные о функции z_b в области Ω . Одним из таких предположений может быть предположение о поршневой подвижке вида

$$z_b(r, t) = z_b(r) \theta(t). \quad (1.129)$$

В этом случае неоднородное волновое уравнение (1.123) сводится к однородному с ненулевыми начальными условиями. Такая задача, рассмотренная нами в разд. 1.2, однозначно определяет параметры волн цунами по смещениям в очаге. Обратная задача, как показано в [Кайстренко, 1972], имеет единственное решение (доказательство основано на применении Фурье-преобразования и теореме единственности задачи Коши для получающегося из (1.123) эллиптического уравнения). Отсюда следует, что по данным регистрации уровня океана $\eta(\Gamma)$ и его градиента $\nabla \eta(\Gamma)$ на границе можно единственным образом восстановить волновое поле в очаге. Этот же результат, как можно показать, сохраняется и при учете вращения Земли и в рамках исходных трехмерных потенциальных моделей.

На практике, однако, волновое поле задано не на всей границе, а только на отдельных ее участках или в отдельных точках, а поле скоростей вообще не измерялось. Поэтому здесь возникает сложная задача о приближенной реконструкции подвижек дна в очаговой области по минимуму информации о волнах цунами. Используемые сейчас методы восстановления очага цунами основаны на законе сохранения энергии волновых движений: вычисляется энергия волн в прибрежной зоне, она и отождествляется с потенциальной энергией смещения уровня воды в очаге в рамках поршневой модели. Разумеется, это весьма грубая процедура и без использования дополнительной информации, в первую очередь сейсмической, вряд ли можно ожидать расширения наших знаний об очаге цунами.

1.2. СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ЦУНАМИ ПРИ ПОДВОДНЫХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯХ

В предыдущей главе мы рассматривали генерацию волн цунами заданными подвижками дна. На практике они, однако, не являются заданными, а должны определяться через характеристики подводного землетрясения, гипоцентр которого зачастую располагается на глубинах в десятки и сотни километров. С другой стороны, при резких подвижках скорости вспарывания сравнимы со скоростями звука в воде и акустические эффекты должны быть приняты во внимание. Все это порождает необходимость модификации гидродинамической модели генерации волн цунами.

1.2.1. Сейсмическая модель генерации волн цунами при землетрясениях

Для простоты рассмотрим сначала процессы в упругом полупространстве, находящемся в поле силы тяжести, для моделирования возникающих при деформациях смещений земной поверхности.

Предполагаем, что океанический слой отсутствует, а параметры упругого полупространства неизменны. Уравнение Ляме для поля динамического смещения $U(r, t)$ частиц среды относительно некоторого начального состояния статического равновесия в гравитационном поле имеет вид (ось z направлена в глубину земли, z_0 — ее орт) [Аки, Ричардс, 1983]

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} U + \mu \Delta U - \rho_* g z_0 \operatorname{div} U = \rho_* \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1.130)$$

с граничными условиями на свободной поверхности ($z = 0$)

$$\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = 0, \quad (1.131)$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} = 0, \quad (1.132)$$

$$\lambda \operatorname{div} U + 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} - \rho_* g U_z = 0. \quad (1.133)$$

Здесь λ и μ — параметры Ляме, ρ_* — плотность упругой среды.

Прежде всего напомним основные типы волн, которые могут распространяться в изотропной безграничной упругой среде без учета силы тяжести. Решение уравнения (1.130) в этом случае отыскивается в виде

$$U = \exp i(\omega t - kr), \quad (1.134)$$

тогда уравнение (1.130) распадается на два независимых:

$$(\lambda + 2\mu) k^2 u_l = \rho_* \omega^2 u_l, \quad (1.135)$$

$$\mu k^2 u_t = \rho_* \omega^2 u_t, \quad (1.136)$$

где u_l и u_t — продольная и поперечная компоненты смещения относительно направления волнового вектора. Как видим, продольные и поперечные движения разделяются, они определяют два типа сейсмических волн: продольные (P -волны) с дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = c_l^2 k^2, \quad c_l^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_*. \quad (1.137)$$

и поперечные (S -волны) с дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = c_t^2 k^2, \quad c_t^2 = \mu/\rho_*. \quad (1.138)$$

причем $c_l > \sqrt{2} c_t$. Обозначения P - и S -волн в силу $c_l > c_t$ возникли из-за того, что продольные волны приходят первыми (*primary*), а поперечные — вторыми (*secondary*). Скорости сейсмических волн в земной коре велики (несколько километров в секунду), поэтому при землетрясениях упругие волны приходят на побережье быстрее, чем

волны цунами; это свойство используется в работе системы предупреждения о волнах цунами.

Наличие свободной поверхности приводит к возникновению нового типа волн — поверхностных волн или волн Рэлея, распространяющихся вдоль поверхности и затухающих в глубь земли. Из (1.130) находится вертикальная структура волнового движения:

$$U = U_1 + U_2,$$

$$U_1 \sim \exp i(\omega t - kr) \exp \left[- \left(k^2 - \omega^2/c_T^2 \right)^{1/2} z \right],$$

$$U_2 \sim \exp i(\omega t - kr) \exp \left[- \left(k^2 - \omega^2/c_T^2 \right)^{1/2} z \right], \quad (1.139)$$

где k и r — двумерные вектора в горизонтальной плоскости. Подстановка (1.139) в (1.131)–(1.133) без учета гравитации приводит к связи между продольными и поперечными колебаниями в поверхностной волне и ее дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = c_R^2 k^2, \quad (1.140)$$

где скорость рэлеевской волны определяется из трансцендентного алгебраического уравнения

$$(c_R/c_i)^6 - 8(c_R/c_i)^4 + 8(c_R/c_i)^2 [3 - 2(c_R/c_i)^2] - 16[1 - (c_i/c_i)^2] = 0. \quad (1.141)$$

Отсюда вытекает, что c_R/c_i является функцией только c_i/c_i и для типичных условий $c_R < c_i$. Типы и характеристики сейсмических волн обсуждаются, например, в книге [Аки, Ричардс, 1980].

Таким образом, в простейшей модели однородного и изотропного полупространства существует три типа сейсмических волн: продольные, поперечные и поверхностные. Учет неоднородности земных пород (вертикальной стратификации) приводит к возрастанию числа сейсмических волн, "привязанных" к каждой границе раздела. Наличие характерных масштабов приводит к дисперсии сейсмических волн, их фазовые и групповые скорости становятся зависящими от частоты. Подробные расчеты дисперсионных характеристик нормальных волн в стандартной модели РЕМ-0 (в этой модели учитывается 11 слоев с увеличением скорости продольных волн от 1,48 до 14 км/с) строения Земли под океаническим ложем [Жарков, 1983] выполнены в [Антонец, Шерстнева, 1988]. Они показали, что групповая скорость может быть значительно меньше фазовой и достигать 150–370 м/с. Эти значения близки к скоростям распространения волн цунами, следовательно, учет гравитации и наличия водного слоя является принципиальным (такая задача, однако, еще не решена). В принципе, даже в рамках однородного упругого полупространства простые оценки гравитационных слагаемых в (1.130) и (1.133) показывают, что гравитационные силы становятся сравнимыми с упругими при размерах деформаций в сотни и тысячи километров. Поскольку это вполне сопоставимо с характер-

ными длинами волн цунами, то отбрасывание гравитационных членов в задачах возбуждения волн цунами требует обоснования.

Рассмотрим снова однородное изотропное полупространство в рамках модели (1.130)–(1.133) с учетом силы тяжести. Решение уравнения (1.130) опять отыскиваем в виде поверхностных волн (1.139), а из граничных условий находим дисперсионное соотношение

$$(s^2 + k^2) \left(\frac{c_f^2}{c_t^2} p - \frac{g}{c_t^2} \right) - k^2 \left(2s - \frac{g}{c_t^2} \right) - k^2 \left(\frac{c_f^2}{c_t^2} - 1 \right) \left[\frac{g}{c_t^2} + \frac{2(k^2 - ps)}{p + s} \right] = 0,$$

$$s = - \left(k^2 - \omega^2 / c_t^2 \right)^{1/2}, \quad p = \frac{g}{2c_f^2} - \left[\left(g / 2c_f^2 \right)^2 + \left(k^2 - \omega^2 / c_t^2 \right) \right]^{1/2}. \quad (1.142)$$

Анализ этого уравнения, выполненный [Белоконь и др., 1986], показал, однако, что учет силы тяжести приводит лишь к слабой дисперсии классических волн Рэлея, по крайней мере в диапазоне частот $\omega > 10^3 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, волны Рэлея в упругом полупространстве даже в поле тяжести являются достаточно быстрыми (по сравнению с волнами цунами). Последнее обстоятельство указывает на возможность использования малого параметра c/c_R в задачах возбуждения волн цунами сейсмическими источниками, на первом этапе находя поле смещений земной поверхности, например поле остаточных смещений, а затем используя формулы первой главы для нахождения характеристик волн цунами по заданным смещениям дна. Для этого рассмотрим точную постановку задачи с учетом водного слоя над упругим полупространством. Наличие водного слоя видоизменяет только граничное условие (1.133), обеспечивающее непрерывность напряжения на дне океана ($z = 0$):

$$\left(\lambda \operatorname{div} \mathbf{U} + 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} - \rho_s g U_z \right) \Big|_{(\text{земная кора})} = \rho \left(c_s^2 \operatorname{div} \mathbf{U} - g w \right) \Big|_{(\text{вода})}, \quad (1.143)$$

и добавляет новое, обеспечивающее непрерывность смещения на дне:

$$U_z \Big|_{(\text{земная кора})} = w \Big|_{(\text{вода})}. \quad (1.144)$$

Здесь c_s — скорость звука в воде и w — скорость частиц воды. В принципе, мы должны написать также соответствующие уравнения для волновых движений в воде с учетом ее сжимаемости (поскольку скорость звука в воде 5 км/с сравнима со скоростями сейсмических волн), однако нашей задачей является исследование волн цунами, а не звуковых волн, поэтому оставим гидродинамические уравнения в старой форме (разд. 1.1.1). В этом случае с точностью до $\rho c_s^2 / \rho_s c_t^2$ правой частью в (1.143) можно пренебречь, так что задача расчета упругих колебаний снова становится независимой от наличия водного слоя. В то же время благодаря (1.144) получаем скорость движения дна $w(r, t)$, которая и входит во все модели генерации волн цунами заданными подвижками жесткого дна. По существу,

эти выводы сделаны в работе [Подъяпольский, 1978] и подтверждены асимптотическим анализом решения точной задачи.

Основная трудность при описании сейсмического механизма генерации волн цунами лежит в описании процессов, происходящих в очаге землетрясения. Большинство сильных тектонических землетрясений связано с взаимным перемещением горных масс вдоль некоторой поверхности разлома, возникающего в теле Земли в результате того, что сдвиговое напряжение, накапливающееся при медленных тектонических процессах, в какой-то момент превосходит предел прочности. В результате землетрясения напряжение полностью снимается с поверхности разлома, а освободившаяся при этом потенциальная энергия деформации и является непосредственным источником энергии самого землетрясения. В простейшем случае на разломе задается разрыв смещения, направленный по касательной к площадке разрыва. Вводя систему координат, связанную с разрывом ($\zeta = 0$ — плоскость разрыва, ξ — координата вдоль разлома), получим следующие граничные условия для смещения:

$$U_{\xi}^+ - U_{\xi}^- = F(\xi, \eta, t), \quad U_{\eta}^+ - U_{\eta}^- = 0, \quad U_{\zeta}^+ - U_{\zeta}^- = 0, \quad (1.145)$$

и напряжений:

$$\left. \left(\frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \xi} \right) \right|_{\zeta=+0} = \left. \left(\frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \xi} \right) \right|_{\zeta=-0},$$

$$\left. \left(\frac{\partial U_{\eta}}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \eta} \right) \right|_{\zeta=+0} = \left. \left(\frac{\partial U_{\eta}}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \eta} \right) \right|_{\zeta=-0}, \quad (1.146)$$

$$\left. \left(\lambda \operatorname{div} \mathbf{U} + 2\mu \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \zeta} \right) \right|_{\zeta=+0} = \left. \left(\lambda \operatorname{div} \mathbf{U} + 2\mu \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \zeta} \right) \right|_{\zeta=-0}. \quad (1.147)$$

Система координат $\zeta \eta \xi$ может быть произвольно ориентирована относительно старой системы $x y z$, что моделирует произвольное направление разлома. Функция F моделирует заданный разрыв ξ -компоненты перемещения на плоскости $\zeta = 0$. Формально решение упругой задачи может быть получено при произвольном задании F . Из физических соображений ясно, что разрыв должен начаться в некоторой точке внутри очага, затем двигаться по некоторой траектории со скоростью, близкой к скорости рэлеевской волны c_R в течение конечного интервала времени. Так как длина разлома имеет порядок сотен километров, то характерное время составляет 100 с — эта величина велика по сравнению с периодами волн, регистрируемыми в сейсмологии, но мала по сравнению с периодами волн цунами (лишний аргумент в пользу поршневого механизма возбуждения волн цунами). Ясно, что в конце процесса вспарывания F стремится к конечному предельному значению $F_{\infty}(\xi, \eta)$, которое определяет результирующую подвижку, устанавливающуюся в ре-

зультате землетрясения. Простейшей моделью землетрясения является точечный источник вида

$$F(\xi, \eta, t) = F_{\infty} \delta(\xi) \delta(\eta) \theta(t), \quad (1.148)$$

однако в литературе рассматриваются и другие источники дипольного и квадрупольного вида.

Итак, в рамках линейной теории упругости постановка задачи является полной. Ее решение находится с помощью метода интегральных преобразований (Лапласа — по времени, Фурье — по горизонтальным координатам) и состоит из квазистатической части (остаточного смещения) и волновой, представляющей совокупность продольных, поперечных и поверхностных волн. Далее по величине остаточного смещения в рамках гидродинамической модели или сразу в рамках сейсмогидродинамической модели (1.130)–(1.132), (1.143), (1.144) можно вычислить параметры волн цунами. Результаты выполненных достаточно громоздких расчетов [Подъяпольский, 1978; Гусяков, 1978; Марчук и др., 1983] показали:

- землетрясения приводят к значительным по величине и пространственно обширным остаточным деформациям дна океана. Так, вертикальные смещения достигают нескольких метров при глубинах эпицентра в десятки километров;

- величина смещения дна, а следовательно, параметры волн цунами, зависят от ориентации подвижки и глубины эпицентра. Как правило, с возрастанием глубины эпицентра амплитуда волны убывает, однако в рамках модели источника (1.148) оптимальное возбуждение приходится на глубины эпицентра в 10–40 км;

- в энергию цунами преобразуется не более нескольких процентов энергии землетрясения, что согласуется с нерезонансным характером взаимодействия между волнами цунами и сейсмическими волнами.

Конечно, эти результаты определяются выбранной моделью описания процессов, происходящих в очаге землетрясения, в которой энергия реализуется в виде взрыва (импульса). Сейчас на основе наблюдаемых данных развиваются альтернативные модели землетрясений, в которых землетрясение представляет собой квазиколебательный длительный процесс [Иванов, Гардер, 1985]. В этом случае волна цунами в открытом океане есть цуг волн, а не одиночная волна, как это следует из поршневой модели. Вообще, развиваемые сейчас теории сеймотектонического процесса активно используют методы нелинейной динамики [Керчман, Лобковский, 1986; Rabinovich, Rulkov, 1991], и автор очень сожалеет, что изложение этих теорий выходит за рамки данной книги.

И наконец, последнее замечание. Выше уже указывалось, что учет слоистости земных пород приводит к уменьшению скорости распространения поверхностных волн. Правда, их фазовая скорость всегда больше скорости волн цунами, так что прямое возбуждение волн цунами не является эффективным. Однако групповая скорость

медленных рэлеевских волн может быть сравнима со скоростью волн цунами, что открывает возможности для нового механизма генерации цунами, связанного с нелинейностью упругой среды. Изложенная выше линейная теория основана на разложении упругой энергии в ряд по степеням тензора деформации, причем оставляются члены до второго порядка включительно. В следующем порядке в уравнении (1.130) появляются квадратичные члены. Такие же слагаемые возникают и в граничных условиях (1.131)–(1.133). Кроме того, аналогичные члены появляются при снесении граничных условий с поверхности $z = z_b$ на невозмущенную поверхность $z = 0$. В результате, в уравнениях (1.130)–(1.133) возникают члены типа $U \times U$. Если исходная рэлеевская волна представляет собой квазимонохроматический цуг, т. е.

$$U = A(t - x/c_{гp}) \cos \omega(t - x/c_R), \quad (1.149)$$

где $c_{гp} = \frac{d\omega}{dk}$ — групповая скорость рэлеевской волны и A — огибающая волнового цуга, то подстановка (1.149) в члены типа $U \times U$ приводит к появлению двух типов слагаемых: первые из них представляют собой высокочастотные колебания на удвоенной частоте $A^2 \cos 2\omega(t - x/c_R)$, а вторые — низкочастотные колебания вида $A^2(t - x/c_{гp})$. В силу (1.144) вертикальная скорость движения дна также будет содержать нелинейную компоненту:

$$w \sim A^2(t - x/c_{гp}). \quad (1.150)$$

Рассматривая теперь генерацию волн цунами движущей подвижкой дна, отвечающей нелинейной компоненте (1.150), получим в случае $c_{гp} = c$ резонанс, и амплитуда волны цунами может значительно увеличиться (см. разд. 1.1.4). Эта идея, высказанная *Е. Н. Пелиновским* и *В. Е. Фридманом* еще в 1982 г., пока по существу не реализована из-за трудности анализа нелинейных эффектов в сложной упругой среде.

Таким образом, сейсмический механизм генерации волн цунами позволяет прояснить физику передачи энергии от очага подводного землетрясения волнам цунами. Кроме того, он показывает, что возбуждение цунами в случае, если разлом непосредственно не выходит на поверхность, связано с волнами Рэлея и, следовательно, изучение свойств последних важно для оценки цунамиопасности подводных землетрясений. В частности, экспериментальные данные подтверждают, что цунамигенные землетрясения сопровождаются более низкочастотными волнами Рэлея, чем не цунамигенные — это свойство начинает использоваться в практике оперативного прогноза цунами.

1.2.2. Акустические механизмы образования волн цунами

Если процесс подъема дна в очаге достаточно быстрый, то наряду с поверхностными волнами образуются и акустические волны значительной энергии. Эти волны обязаны своим существованием свойству сжимаемости воды. Обычно при изучении явления цунами сжимаемостью воды пренебрегают, поскольку скорость звука в воде 1500 м/с значительно больше скорости волны цунами. Это подтверждает и прямой расчет влияния сжимаемости воды на дисперсионные характеристики волн цунами. Однако непосредственно над очагами землетрясений сжимаемость воды может существенно повлиять на сам процесс зарождения волн цунами. Так, в [Бурымская и др., 1981] на основе натуральных данных получен критерий цунамигенности подводных землетрясений, в который входит скорость звука в воде. В рамках линейной теории можно показать, что вертикальная подвижка в сжимаемой жидкости приводит к большим смещениям уровня океана в очаге, чем в несжимаемой жидкости (примерно на 10 %), причем этот эффект заметнее проявляется с увеличением глубины. Попытаемся выяснить роль акустических механизмов в процессе генерации волн цунами.

Линейная модель колебания уровня над очагом цунами. Как известно, волны цунами уходят из очага за время порядка $L/c \sim 10$ мин. Звуковые волны, образовавшиеся от той же подвижки дна, за это время многократно отразятся от дна и поверхности океана. Поэтому на небольших временах задачу об отклонении уровня в очаге можно рассматривать как одномерную, учитывая зависимость только от вертикальной координаты. В линейном приближении звук описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = 0, \quad (1.151)$$

где ζ — смещение частиц воды с уровня z ; для простоты пренебрежем зависимостью скорости звука от глубины и силой тяжести. Граничные условия на поверхности воды вытекают из условия постоянства давления

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} (z = 0) = 0, \quad (1.152)$$

а на дне бассейна придонные частицы движутся вместе с дном:

$$\zeta(z = -h) = z_b(t). \quad (1.153)$$

Начальные условия естественно поставить нулевыми:

$$\zeta(z, 0) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} (z, 0) = z_b(0) = \frac{dz_b}{dt} (0) = 0. \quad (1.154)$$

Решение уравнения (1.152) находится стандартными методами и смещение водной поверхности $\eta(t) = \zeta(0, t)$ описывается формулой [Жмур, 1987]

$$\eta(t) = z_b(t) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2n} \times \left[z_b(t) - \omega_n \int_0^t z_b(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \right],$$

$$\omega_n = (\pi c_s/h)(1/2 + n). \quad (1.155)$$

В частном случае $z_b = H_b(t/T)^2$ при $0 < t < T$ и $z_b = H_e$ при $t > T$ (когда землетрясение закончилось), уровень воды изменяется по закону

$$\eta(t) = H_e - (8H_e/\pi) \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n)^{-1} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{T} \frac{\sin \omega_n(t-T)}{\omega_n} - \frac{1}{T^2} \frac{\cos \omega_n(t-T)}{\omega_n^2} + \frac{1}{T^2} \frac{\cos \omega_n t}{\omega_n^2} \right], \quad (1.156)$$

Как видим, жидкость вместе с дном поднялась на высоту H_e (на величину подвижки дна) и начала колебаться вокруг нового положения равновесия. Колебания связаны с сжимаемостью воды, и при $c_s \rightarrow \infty$ они исчезают. Максимальное смещение наблюдается при поршневой подвижке ($T \rightarrow 0$) и спадает с увеличением длительности подвижки. Амплитуда колебаний также быстро спадает с ростом номера моды (как n^{-2}) и для оценок можно ограничиться только первым членом в сумме (1.156). Численные оценки, выполненные по этой схеме [Жмур, 1987], показывают, что сжимаемость приводит к изменению амплитуды смещений водной поверхности примерно на 10 % для типичных условий цунами. Разумеется, эти колебания поверхности высокочастотны и скорее соответствуют моретрясению (другие модели моретрясения уже рассматривались в разд. 1.1.3), а не длинным волнам цунами. Поэтому в рамках линейной теории сжимаемость воды не может влиять на генерацию значительных волн цунами.

Нелинейная модель генерации цунами акустическими возмущениями. За счет нелинейности акустические колебания должны детектироваться в воде, порождая усредненные движения — акустические потоки, которые и могут вызывать цунами. Рассмотрим соответствующую задачу, исходя из уравнений идеальной сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad p = p(\rho). \quad (1.157)$$

Представим возмущения скорости \mathbf{u} , давления p и плотности ρ в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_a, \quad \rho = \rho_0 + \rho_t + \rho_a, \quad p = p_0(z) + p_t + p_a, \quad (1.158)$$

где индекс t обозначает волну цунами, a — акустические возмущения. Будем считать величины, относящиеся к акустическим возмущениям, быстроосциллирующими по сравнению с "поверхностными". Подставляя (1.158) в (1.157), можно произвести усреднение по времени; в результате получим уравнения для медленно изменяющихся величин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} + (\mathbf{u}_t \nabla \mathbf{u}_t) + \frac{\nabla p_t}{\rho_0} &= -g - \langle (\mathbf{u}_a \nabla) \mathbf{u}_a \rangle - \left\langle \frac{\nabla p_a}{\rho_0^2} \rho_a \right\rangle = F_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_t &= -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \langle \mathbf{u}_a \rho_a \rangle = F_2, \end{aligned} \quad (1.159)$$

где $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по характерному периоду осцилляций.

Система (1.159) описывает волны цунами с учетом усредненных сил, порождаемых акустическим возмущением в толще воды [Новикова, Островский, 1982]. Считая волны цунами линейными, а давление гидростатическим, из (1.159) легко получить неоднородное волновое уравнение (выкладки при этом аналогичны сделанным в разд. 1.1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \Delta \eta &= \frac{\partial^2 z_b}{\partial t^2} - c^2 Q, \\ c^2 Q &= \left\langle \int_{-h+z_b}^{\eta} dz_1 \int_z^{\eta} dz_1 \Delta_{\perp} F_{1z} \right\rangle + \left\langle \int_{-h+z_b}^{\eta} \operatorname{div}_{\perp} F_{1\perp} dz \right\rangle - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \int_{-h+z_b}^{\eta} F_2 dz \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.160)$$

Входящая сюда внешняя сила легко может быть вычислена исходя из линейного решения уравнения (1.151) для звука. В частности, если звук представляет собой стоячую волну с фиксированной по глубине амплитудой

$$\mathbf{u}_a = \frac{dz_b}{dt} \left[\theta(x) - \theta(x - L_x) \right] \left[\theta(y + L_y/2) - \theta(y - L_y/2) \right] \quad (1.161)$$

и генерируется площадкой с размерами L_x, L_y , то правая часть в (1.160), отвечающая только акустической силе, равна [Новикова, Островский, 1982]

$$\begin{aligned} Q &= \frac{h}{2g} \left\langle \left(\frac{dz_b}{dt} \right)^2 \right\rangle \left\{ \left[\delta'(x) - \delta'(x - L_x) \right] \left[\theta(y + L_y/2) - \theta(y - L_y/2) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\theta(x) - \theta(x - L_x) \right] \left[\delta'(y + L_y/2) - \delta'(y - L_y/2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.162)$$

Дальнейшие вычисления полностью аналогичны обсуждаемым ранее в разд. 1.1.1. Так, волновое поле в дальней зоне ($r \gg L_x, L_y$) в

случае "мгновенного" включения акустического поля определяется формулой [Новикова, Островский, 1982]

$$\eta = \frac{3 \langle (dz_b/dt)^2 \rangle}{8g\pi(2r)^{1/2} \sin 2\theta} \frac{1}{R^{1/2}} \left| \begin{array}{l} x_0 = L_y, y_0 = L_y/2 \\ x_0 = 0, y_0 = -L_y/2. \end{array} \right. \quad (1.163)$$

где $R = ct - r + x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta$. Отсюда видно, что вклад в поверхностную волну дают лишь края области однородно возбужденного звука. Имеющаяся здесь неопределенность при $\theta = 0$ и $\pi/2$ устраняется, как и ранее, учетом конечности длительности нарастания звуковой волны.

Оценка эффективности данного механизма следует из сравнения энергии волны вида (1.163) — E_a и без учета сжимаемости — E_0 .

$$\frac{E_a}{E_0} \sim \left[c_s^2 \left(\frac{dz_b}{dt} \right)^2 \right] / c^4. \quad (1.164)$$

Поскольку $c_s > c$, то акустический механизм может давать определяющий вклад в энергию цунами даже при дозвуковых скоростях подвижки дна. Этот механизм, предложенный в [Новикова, Островский, 1982], представляется очень интересным и важным, и остается сожалеть, что этот механизм по-настоящему еще не изучался геофизиками.

Кавитационные эффекты при генерации волн цунами. При резких подвижках дна скорости движения частиц велики и могут сравниться со скоростью звука. Тогда возможны сильно нелинейные эффекты, приводящие к кавитационным явлениям в воде. Уже в рамках линейной теории легко получить связь между вариациями давления и скоростью частиц в бегущей звуковой волне:

$$\delta p = c_s \rho_0 \omega, \quad (1.165)$$

откуда видно, что подъем дна ($\omega > 0$) приводит к сжатию воды, а сброс (опускание) — к ее разрежению. На поверхности воды волновое давление должно быть равным нулю, поэтому отраженная от поверхности волна имеет противоположную полярность. Для определенности будем считать, что волна, идущая от дна к поверхности, является волной сжатия ($\delta p_{in} > 0$), а отраженная от поверхности — волной разрежения ($\delta p_{in} < 0$). Результирующее давление на произвольной глубине z есть

$$p = p_{atm} + \rho g(\eta - z) + \delta p_{in} + \delta p_{ref}. \quad (1.166)$$

Может случиться так, что на данной глубине p будет достаточно малым, меньшим P_{cav} , при котором нарушается сплошность воды и образуется кавитация. Подобные ситуации возникают при подводных взрывах и хорошо изучены. Для чистой воды p_{cav} меняется от

4–5 атм при температуре 4°C до 280 атм при температуре 20–25°C [Коул, 1950]. Грубые оценки с помощью (1.165) и (1.166) показывают, что скорости подвижек в 1м/с могут приводить к кавитационным явлениям и вода в зоне моретрясения будет вскипать [Жмур, 1987]. Если движение подвижек приводит к формированию ударных акустических волн, то кавитирующий верхний слой должен взлететь в воздух, что является следствием спутного течения жидкости за ударной волной (султаны воды в теории подводного взрыва). Стоит все же отметить, что математические модели для генерации волн цунами под действием ударных волн с учетом кавитации фактически отсутствуют, как и примеры анализа конкретных ситуаций.

1.3. ГЕНЕРАЦИЯ ЦУНАМИ ПРИ ИЗВЕРЖЕНИЯХ ПОДВОДНЫХ ВУЛКАНОВ

Доля таких цунами относительно невелика (примерно 5 %). Из всех действующих вулканов около 120, или 20 %, расположены под водой, правда, эти цифры относятся примерно к одной трети земной поверхности и по-настоящему о морском вулканизме мы еще знаем мало. Вулканические извержения могут являться причиной сильных цунами, как это имело место, например, при катастрофическом извержении вулкана Кракатау 1983 г., описанного во введении. Сводки цунами вулканического происхождения приведены в [Мурти, 1977; Соловьев, Го, 1974]. Они свидетельствуют, что извержения вулканов вызывают волны цунами с различными характеристиками: с периодами от нескольких минут до часов, с высотами волн от единиц до десятков метров; извержения происходят на различных глубинах, в том числе и на очень больших. Это означает, что для описания волн на воде, вызванных извержениями вулканов, необходимо привлечение теории как длинных, так и коротких волн.

Известно, что при извержениях вулканов происходят твердые, жидкие и газообразные выбросы. Процессы, происходящие в очаге, могут быть весьма разнообразными: от эксплозивного извержения до медленного истечения лавы. В первом случае речь идет фактически о взрыве в воде (сильно нелинейный процесс), во втором — скорее всего, будет справедлива линейная теория. В соответствии с этим возможна иерархия моделей генерации волн цунами при вулканических извержениях, рассматриваемая ниже.

1.3.1. Гидродинамическая модель генерации волн цунами

Рассмотрим сначала случай относительно медленного извержения подводного вулкана, когда можно ожидать справедливости линейной теории. С точки зрения гидродинамики, в безграничной

жидкости выбросам из жерла вулкана можно сопоставить источники массы в уравнении неразрывности (1.3). Считая, что это приближение годится и при наличии свободной поверхности, а также рассматривая потенциальные движения, приведем здесь основную краевую задачу, моделирующую возбуждение волн цунами:

$$\Delta \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi q(t) \delta(r) \delta(z - z_0), \quad (1.167)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0), \quad (1.168)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h). \quad (1.169)$$

Гидродинамический источник в (1.167) представляет собой модель очага точечного извержения; это предположение можно считать оправданным, так как длины волн цунами значительно превосходят размеры кратера. Правда, здесь имеется одна тонкость, связанная с наличием подводной горы под вулканическим отверстием, что приводит к заданию (1.169) на неровной поверхности, однако этот фактор пока не учитывается. Главная цель предлагаемой приближенной модели — выявление параметров, определяющих генерацию цунами, и оценка зависимости интенсивности цунами от этих параметров. Смысл $q(t)$ легко видеть в случае безграничной жидкости, когда, окружив источник сферой радиуса R_0 и применив теорему Гаусса, получим

$$-\iint_{S_{R_0}} \frac{\partial \varphi}{\partial T} dS = 4\pi q(t). \quad (1.170)$$

Это означает, что с точностью 4π величина q определяет объем жидкости, вытекающий из кратера за единицу времени (расход жидкости).

Начальные условия, как и всюду в задачах генерации, полагаем нулевыми:

$$\varphi(r, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(r, z, 0) = 0; \quad (1.171)$$

такие же условия накладываем на q :

$$q(0) = \frac{dq}{dt}(0) = 0. \quad (1.172)$$

Постановка задачи полностью определена, и она может быть решена, например, с помощью аппарата функции Грина. Для этого необходимо искать решение в виде суммы потенциала источника, помещенного в безграничную жидкость, потенциала его отражения от дна и некоторого добавочного потенциала Ψ :

$$\varphi(r, z, t) = \frac{q(t)}{\left[r^2 + (z - z_0)^2\right]^{1/2}} + \frac{q(t)}{\left[r^2 + (z + z_0)^2\right]^{1/2}} + \Psi(r, z, t), \quad (1.173)$$

что позволяет правую часть из (1.167) "перегнать" в правую часть граничного условия (1.168):

$$\Delta \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \quad (1.174)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h), \quad (1.175)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Psi}{\partial z} = - \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \quad (z = 0), \quad (1.176)$$

где $\varphi_1 = \varphi - \Psi$. Требование ограниченности решения при всех значениях аргументов выделяет из всех решений уравнения (1.174) в цилиндрической системе координат только решения вида

$$\Psi(r, z, t) = \int_0^{\infty} C(\lambda, t) J_0(\lambda r) \cosh[\lambda(z + h)] d\lambda, \quad (1.177)$$

удовлетворяющие граничному условию (1.175). Подстановка (1.177) в (1.176) позволяет получить обыкновенное дифференциальное уравнение для $C(t)$ и с учетом нулевых начальных условий записать окончательное решение [Егоров, 1990]:

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, t) = & \frac{q(t)}{\left[r^2 + (z - z_0)^2\right]^{1/2}} + \frac{q(t)}{\left[r^2 + (z + z_0)^2\right]^{1/2}} + \\ & + 2 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\omega} \int_0^t d\tau e^{-\lambda h} \frac{\cosh \lambda(h - z_0)}{\cosh \lambda h} \left[g \lambda q(\tau) - \frac{d^2 q}{d\tau^2}(\tau) \right] \times \\ & \times \sin \omega(t - \tau) \cosh \lambda(z + h) I_0(\lambda r), \end{aligned} \quad (1.178)$$

где $\omega = (g\lambda \tanh \lambda h)^{1/2}$.

Процессы, происходящие при извержениях, изучены еще слабо, поэтому функция $q(t)$ нам не задана, обычно известна продолжительность извержения T и, более грубо, объем извергнутого вещества W . Параметризация формулы (1.178) выполнена в [Егоров, 1990], где принято

$$q(t) = \frac{W}{2\pi T} \sin^2 \frac{\pi t}{T} \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.179)$$

Тогда смещение водной поверхности

$$\eta(r, T) = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (z = 0) \quad (1.180)$$

после окончания извержения определяется интегральным выражением

$$\eta(r, T) = \frac{2\pi W}{gT^3} \int_0^{\infty} d\lambda I_0(\lambda r) \cosh[\lambda(h + z_0)] \exp(-\lambda h) \frac{\sin \omega T}{\omega}. \quad (1.181)$$

По существу, мы получили эквивалентный очаг цунами, эволюция которого приводит к формированию волн цунами. В частности, при $T \rightarrow 0$ и непосредственно над кратером ($r = 0$) смещение поверхности определяется формулой

$$\eta_e = \frac{2\pi W}{gT^2} \frac{h}{|z_0| (|z_0| + 2h)}. \quad (1.182)$$

Итак, смещение воды в эпицентре быстро падает с увеличением длительности извержения и заглублением кратера (особенности при $T \rightarrow 0$ и $z_0 \rightarrow 0$ устраняются отказом от бесконечности скорости — точнее, ускорения частиц лавы при извержении и от точечности кратера). Принимая для оценок $|z_0| \sim h \sim 1$ м, $W = 10^6$ м³ и $T = 10$ с, из (1.182) получаем смещение в очаге около 2 м. Приведенные параметры извержения не являются экзотическими. Так, выброс вулкана Безымянного (Камчатка, 1956 г.) в несколько миллионов тонн произошел за время в несколько десятков секунд. Таким образом, предлагаемый механизм в принципе позволяет объяснить наблюдаемый порядок высот волн цунами.

1.3.2. Эксплозивная модель генерации волн цунами

Извержение подводного вулкана при определенных условиях может сопровождаться формированием султана — вертикального выброса жидкости в атмосферу. Один из возможных механизмов образования султана состоит в следующем. Высокотемпературные продукты извержения при взаимодействии с водой формируют газовый пузырь, содержащий пары воды и газообразные продукты извержения при высоком давлении. Расширение газового пузыря приводит к образованию султана. Отметим, что аналогом рассматриваемого процесса является султан подводного взрыва. Последний изучался во многих работах, где приведены эмпирические зависимости, предназначенные для определения параметров султана в случае $z_0/\rho_a < 1$ ($\rho_a = 10,3$ м). Однако для вулканов этот параметр больше единицы и его необходимо рассмотреть отдельно.

Пусть в результате эксплозивного извержения подводного вулкана формируется цилиндрический или сферический газовый пузырь радиусом R_* , содержащий газообразные продукты извержения и пары воды. Сферический пузырь возникает при извержении центрального вулкана, цилиндрический моделирует пузырь от извержения вулкана трещинного типа. Первоначальное давление p_* внутри пузыря значительно превосходит гидростатическое давление

на глубине расположения пузыря. При расширении газового пузыря потенциальная энергия

$$E = \frac{\nu + 2\rho_*}{3\gamma - 1} \pi R \nu^{+1}, \quad (1.183)$$

запасенная в пузыре в начальный момент времени, переходит в кинетическую энергию движущейся жидкости. В выражении для энергии параметр ν принимает значения 1 и 2 для случаев плоской симметрии процесса (цилиндрический пузырь) и осевой симметрии (сферический пузырь) соответственно; γ представляет собой эффективный показатель адиабаты газообразных продуктов, содержащихся в пузыре. Для определения основных параметров султана используем в первом приближении снова потенциальную теорию (1.167)–(1.169) и для простоты пренебрежем влиянием дна океана и свободной поверхности на характеристики газового пузыря, а также нелинейными эффектами. Кроме того, оценки слагаемых в (1.168) показывают, что первое является превалирующим (большие числа Фруда). В этом случае граничное условие (1.168) модифицируется [Басов и др., 1981]:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (z = 0). \quad (1.184)$$

Источник массы в этом случае определяется производной от объема пузыря. В результате задача для потенциала становится статической и легко решается с помощью метода зеркального отображения относительно свободной поверхности. Далее с помощью (1.184) отыскивается смещение водной поверхности. В частности, потенциал определяется следующим выражением [Басов и др., 1981]:

$$\varphi = \frac{1}{\nu + 1} \frac{d}{dt} R^{\nu+1} \begin{cases} \ln \left[\frac{r^2 + (z + |z_0|)^2}{r^2 + (z - |z_0|)^2} \right]^{1/2}, & \nu = 1, \\ \frac{1}{\left[r^2 + (z - |z_0|)^2 \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[r^2 + (z + |z_0|)^2 \right]^{1/2}}, & \nu = 2. \end{cases} \quad (1.185)$$

Вычисляя затем смещение водной поверхности в момент, когда газовый пузырь максимально расширится, получим формулу султана

$$\eta_0 = \frac{4 - \nu}{3} R_{\max}^{\nu+1} \frac{|z_0|}{(r^2 + z_0^2)^{(\nu+1)/2}}, \quad (1.186)$$

из которой вытекает расчетная формула для его высоты:

$$\eta_0 = \frac{4 - \nu}{3} R_{\max}^{\nu+1} |z_0|^\nu. \quad (1.187)$$

Подробный анализ этих зависимостей с учетом данных о R_{\max} сделан в работе [Басов и др., 1981]. Расчет, выполненный для извержения подводного вулкана с энергией 10^{17} Дж на глубине 640 м, показал,

что радиус возникающего при этом султана составляет примерно 9 км. Соответствующее возмущение свободной поверхности океана на площади в 250 км² может надежно регистрироваться со спутников. Получение такой информации представляет интерес при определении очагов вулканической активности, расположенных в океане.

Эволюция султана в дальнейшем приводит к генерации волн на воде. Эти процессы, однако, еще не изучены применительно к вулканическим цунами. Можно предполагать, что многие протекающие здесь процессы аналогичны процессам волнообразования при взрывах, в том числе ядерных, в воде. К сожалению, долгое время эта тематика была во всех странах секретной, и мы до сих пор не располагаем всеми сведениями о проведенных взрывах в воде. В наиболее концентрированном виде теория генерации волн на воде при взрывах приведена в [Le Mehaute, 1971]. Здесь мы используем ее для грубой оценки очага вулканических цунами, при этом мы всюду вес эквивалентного заряда, использованный в этой работе, заменим на энергию извержения в джоулях (при взрыве 1 кг ТНТ высвобождается энергия $4,2 \cdot 10^6$ Дж).

Описание самого механизма волнообразования при взрыве — чрезвычайно трудная задача, поэтому основное внимание уделено подбору эквивалентного очага, позволяющего в рамках линейной теории рассчитывать волновое поле на больших расстояниях от эпицентра. Наилучшее согласие данных экспериментов по подводным взрывам небольших энергий ($2 \cdot 10^6$ – $3 \cdot 10^{10}$ Дж) с выводами линейной теории достигается при следующей форме эквивалентного очага:

$$\eta_e(r) = \begin{cases} H_e [2(r/R)^2 - 1], & r \leq R, \\ 0, & r \geq R, \end{cases}$$

$$u_e(r) = 0, \quad (1.188)$$

где H_e и R связаны с энергией извержения формулами

$$H_e = 2,4 \cdot 10^{-2} E^{0,24}, \quad (1.189)$$

$$R = 3,8 \cdot 10^{-2} E^{0,3}. \quad (1.190)$$

Сделаем важное замечание. Хотя в [Le Mehaute, 1971] теория развивается для произвольного соотношения длины волны к глубине, однако подчеркивается, что наибольшее число данных имеется только для относительно слабых взрывов в глубоком море. Для мелководных взрывов или взрывов большой мощности в литературе приводятся скудные данные. Так, отмечается, что при $h > 2,5 \cdot 10^{-2} E^{0,3}$ влияние дна не сказывается на генерации волн, а при $h \sim 0,4 \cdot 10^{-2} E^{0,3}$ высота волны уменьшается вдвое. Имеются также единичные примеры применения линейной теории к взрывам большой мощности. И хотя надежность таких данных невелика, все же будем использовать формулы (1.188)–(1.190) для любой энергии извержения и произвольной глубины океана,

считая, что в этом случае рассчитанные параметры волн окажутся оценками сверху реальных характеристик. В частности, в [Mirchina, Pelinovsky, 1988] различными способами сделана попытка оценки энергии извержений вулкана Миедзин (вблизи Японии) в 1952–1953 гг. Она оказалась равной 10^{15} – 10^{16} Дж, что не противоречит имеющимся данным об извержениях наземных вулканов. Для этого случая параметры эквивалентного очага оказались равными $R = 6$ км, $H_e = 6$ м. Интересно отметить, что наблюдавшийся размер возмущенной поверхности воды над вулканом $R \sim 2$ км [Соловьев, Го, 1974] оказался близок к полученному расчетному значению. По сравнению с очагами цунами, вызванных подводными землетрясениями, очаги вулканических цунами меньших размеров. Тем не менее при катастрофических извержениях, как, например, при извержении вулкана Кракатау в 1883 г., размеры очага, согласно формуле (1.190), составляют десятки километров, так что для описания подобных цунами вполне справедлива теория мелкой воды [Nakamura, 1984]. Длинные волны возбуждались также при извержении вулкана Св. Августина на Аляске в 1883 г. [Kientle et al., 1987]. Подробные расчеты волн цунами, генерированных этим извержением, выполнены в [Troshina, 1996].

1.4. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦУНАМИ АТМОСФЕРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Атмосферные возмущения являются мощным фактором изменения уровня моря, приводя к наводнениям в различных районах мира (наиболее известны катастрофические наводнения в Бангладеш в 1970, 1987 и 1988 гг.). Относительно краткосрочные (до 1 ч) наводнения часто носят колебательный характер (наводнение сменяется осушением, а затем снова наводнением). Свойства таких наводнений во многом схожи со свойствами волн цунами, возникающих при подводных землетрясениях, поэтому их называют метеоцунами. Следует заметить, что их идентификация на практике часто затруднена, поскольку об изменении метеоусловий над океаном информации мало, поэтому чаще всего к метеоцунами относят цунами с неясной природой их возникновения. Кроме того, атмосферные возмущения создают длинноволновый шум в океане, на фоне которого необходимо выделить слабые цунами от сейсмических источников. В этой главе изложим основные механизмы воздействия атмосферы на волны в океане в диапазоне длин волн цунами.

1.4.1. Генерация цунами флуктуациями атмосферного давления

Рассмотрим снова известные уравнения гидродинамики океана, приведенные в разд. 1.1.1. Уравнения Эйлера (1.1)–(1.3), естествен-

но, остаются справедливыми при любом механизме волнообразования, однако граничные условия зависят от конкретного механизма. Пренебрежем здесь изменением рельефа дна в очаге цунами. Тогда граничное условие (1.4) на дне бассейна сводится к

$$w = 0 \quad (z = -h). \quad (1.191)$$

На свободной поверхности ($z = \eta(x, y, t)$) выполняются кинематическое

$$w = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \eta \quad (1.192)$$

и динамическое

$$p = p_a(x, y, t) \quad (1.193)$$

условия. Возбуждение цунами описывается функцией $p_a(x, y, t)$ в правой части (1.193), в случае ее постоянства генерации цунами не происходит.

Так как волны цунами являются, как правило, длинными, то пренебрежем снова вертикальным ускорением dw/dt в уравнении (1.2), которое интегрируется и с учетом (1.193) принимает вид

$$p = p_a(x, y, t) + \rho g(\eta - z). \quad (1.194)$$

Подставляя снова (1.194) в уравнение (1.1) и пренебрегая опять вертикальной скоростью, получаем первое уравнение теории длинных волн

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}] + g \nabla \eta = - \frac{\nabla p_a}{\rho}. \quad (1.195)$$

Второе уравнение находится интегрированием уравнения (1.3) по глубине от дна до свободной поверхности с учетом (1.191) и (1.192) и вытекающего из (1.195) факта, что горизонтальная скорость не зависит от вертикальной координаты:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}[(h + \eta) \mathbf{u}] = 0. \quad (1.196)$$

Полученная система уравнений длинных волн, возбуждаемых метеофакторами, проще, чем аналогичная система для волн цунами, возбуждаемых подвижками дна, так как последняя содержала не только правую часть, но и переменные коэффициенты.

Линейная модель. В этом приближении система (1.195)–(1.196) сводится к неоднородному волновому уравнению (как и ранее, пренебрежем силой Кориолиса в очаге цунами):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \Delta \eta = \frac{h}{\rho} \Delta p_a. \quad (1.197)$$

Заменой переменной

$$\zeta_a = [h/(\rho c^2)] p_a, \quad \eta = \zeta - \zeta_a, \quad (1.198)$$

уравнение (1.197) сводится к

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2 \Delta \zeta = \frac{\partial^2 \zeta_a}{\partial t^2}. \quad (1.199)$$

В этих переменных задача генерации волн цунами атмосферными возмущениями полностью свелась к аналогичной задаче в случае возбуждения цунами подвижками дна. Поэтому все результаты линейной теории мелкой воды, содержащиеся в первой главе, остаются справедливыми и в данной задаче. Отметим ряд отличий. Во-первых, в случае статического возмущения решение (1.199) становится тривиальным, а уровень воды будет равен:

$$\eta = -\zeta_a = -[h/(\rho c^2)] p_a. \quad (1.200)$$

Это соотношение получило название закона обратного барометра (разумеется, в формуле (1.200) может быть добавлена константа, характеризующая средний уровень моря при неизменном среднем атмосферном давлении). Статическое "отслеживание" атмосферных возмущений характерно для данного типа задач и позволяет по изменению уровня моря, например из космоса, судить о величинах атмосферных возмущений.

Во-вторых, наиболее характерная для цунами от сейсмических источников поршневая модель здесь не является основной, она соответствует краю атмосферного возмущения, например, перепаду давления с одной стороны тайфуна. Если же рассматривать атмосферное возмущение локализованным во времени, то оно соответствует подвижке дна, возвращающейся в первоначальное состояние, при этом, естественно, амплитуда возбуждаемых волн будет меньше, чем при поршневой подвижке. Таким образом, при прочих равных условиях метеоцунами наиболее сильно, когда быстро образуется область пониженного (повышенного) давления (циклоническая или антициклоническая область). Если эта область неподвижна или медленно смещается, то здесь имеется полная аналогия с соответствующими результатами для поршневой подвижки и нет необходимости рассматривать отдельно обобщение линейной модели длинных волн (функция Грина для этой задачи в рамках линейной потенциальной теории содержится в [Kajiura, 1963]).

Однако, если тайфун движется, то возможен резонанс между скоростью тайфуна и скоростью волн цунами. Мы уже рассматривали похожий случай с горизонтально движущейся подвижкой дна и получили, что здесь отказ от длинноволновости модели и учет нелинейности является принципиальным. Но если подвижка дна при землетрясении может двигаться в пределах относительно небольшой зоны очага, то тайфун перемещается на большие расстояния и учет резонансных эффектов становится более важным. Эта проблема рассматривается в [Akylas, 1984]. Получим здесь основные уравне-

ния модели генерации метеоцунами движущейся циклонической области с учетом перечисленных эффектов.

Нелинейно-дисперсионная модель. Обратимся снова к потенциальной форме уравнений гидродинамики (1.15)–(1.19), в которой необходимо изменить граничное условие на дне (1.17) и динамическое условие на свободной поверхности (1.19):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h), \quad (1.201)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + g\eta + \frac{p_a}{\rho} = 0 \quad (z = \eta). \quad (1.202)$$

Поскольку потенциал течения является гармонической функцией, она дифференцируема по всем своим аргументам и может быть представлена рядом Тейлора по вертикальной координате:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z+h)^n, \quad (1.203)$$

причем q_n зависят от горизонтальных координат и времени. Подстановка (1.203) в уравнение Лапласа приводит к рекуррентным соотношениям на неизвестные функции q_n :

$$(n+2)(n+1)q_{n+2} + \Delta q_n = 0, \quad (1.204)$$

так что только две из них (а именно q_0 и q_1) являются независимыми. В частности,

$$q_2 = (\Delta q_0)/2. \quad (1.205)$$

Подставляя ряд (1.203) в граничное условие на дне (1.201), находим q_1 :

$$q_1 = 0, \quad (1.206)$$

так что ряд (1.203) содержит только четные степени глубины и полностью определен через одну функцию $q_0(r, t)$. Кинематическое и динамическое граничные условия на свободной поверхности определяют искомые уравнения для η и q_0 . Удобно переписать их в терминах поверхностных значений скорости течений:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \eta = w, \quad (1.207)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + g \nabla \eta = - \frac{\nabla p_a}{\rho}, \quad (1.208)$$

где $\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \nabla q_n(h+\eta)^n, \quad (1.209)$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q_{n+1} (h+\eta)^n, \quad (1.210)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \nabla q_{n+1} (h+\eta)^n. \quad (1.211)$$

Уравнения (1.207) и (1.208) вместе с формулами (1.209)–(1.211) и соотношениями (1.204) и (1.206) полностью эквивалентны исходной краевой задаче для потенциала. Дальнейшее упрощение связано с использованием ряда некоторых приближений:

– медленность изменения атмосферных возмущений в пространстве и времени (медленность по сравнению с глубиной бассейна h и с характерным временем h/c), обеспечивающая длинноволновость поля;

– малая энергетика возмущений ($\zeta_a \ll h$), обеспечивающая малость нелинейных эффектов.

Первое приближение позволяет ограничиться только двумя членами в ряде (1.203), второе – оставить только первый член этого ряда во всех нелинейных членах. Опуская технические детали использования данных приближений (мы еще не раз будем возвращаться к этой системе уравнений), приведем окончательный вид упрощенных уравнений (1.207) и (1.208):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}[(h+\eta) u] = 0, \quad (1.212)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u + g \nabla \eta = \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial t} \Delta u - \frac{\nabla p_a}{\rho}. \quad (1.213)$$

Упрощенные уравнения, они также буссинесковского типа, как и в разд. 1.1.4, отличаются от уравнений мелкой воды наличием правой части в (1.213). Полученная система позволяет рассмотреть процесс генерации волн цунами движущимися циклоническими образованиями. Учитывая, что наибольшая эффективность возбуждения достигается в резонансном случае, когда циклон движется со скоростью, близкой к $c = (gh)^{1/2}$, можно еще упростить задачу, рассматривая ее как одномерную. В результате получим следующую систему:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h+\eta) u] = 0, \quad (1.214)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x}. \quad (1.215)$$

Дальнейший анализ мало отличается от проведенного в разд. 1.1.4 и здесь опускается. Можно показать, что возбуждаемые

метеоцунами в рамках данной модели имеют конечную амплитуду. Исследования волновой динамики в рамках данной модели проведены, например, в [Akylas, 1984; Katsis, Akylas, 1987; Wu, 1987; Pelinovsky, Choi, 1993]. Поскольку возникающие здесь эффекты накапливаются на больших расстояниях, то их целесообразно будет рассмотреть во второй части книги.

1.4.2. Генерация цунами касательными напряжениями поля ветра

До сих пор мы рассматривали генерацию волн цунами в идеальной жидкости. Диссипация волн цунами из-за вязкости воды обычно мала, и к этому вопросу мы еще вернемся. Однако наличие пограничного слоя вблизи свободной поверхности, над которой дует ветер, приводит к принципиально новому механизму передачи энергии от атмосферы к океану благодаря касательным напряжениям поля ветра.

Для описания данного механизма необходимо использовать уравнения Рейнольдса, например для горизонтальной компоненты скорости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\nabla)u + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2[f \times u] + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta u + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \operatorname{div} \Pi + \frac{\partial}{\partial z} \Pi, \quad (1.216)$$

где ν — коэффициент молекулярной вязкости, $\rho \Pi$ — тензор напряжений Рейнольдса:

$$\rho \Pi_x = (-\overline{u^2}, -\overline{u'v'} - \overline{u'w'}), \quad \rho \Pi_y = (-\overline{u'v'}, -\overline{v^2} - \overline{v'w'}), \quad (1.217)$$

u', v', w' — пульсационные (турбулентные) компоненты поля скоростей. Вывод уравнений Рейнольдса из уравнений Навье — Стокса содержится во многих книгах, см., например, [Монин, Яглом, 1965; Ле Блон, Майсек, 1981; Педлоски, 1984]. Основные проблемы здесь состоят в замыкании уравнений типа (1.216), т. е. в представлении турбулентных потоков — компонент тензора напряжений через средние поля. В простейших моделях вслед за Буссинеском замыкание осуществляется с помощью тензора турбулентной вязкости [Монин, Яглом, 1965]:

$$\rho \Pi = \left(K_x \frac{\partial}{\partial x}, K_y \frac{\partial}{\partial y}, K_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u; \quad (1.218)$$

эти компоненты тензора, вообще говоря, являются функциями глубины. Поскольку вязкостные эффекты предполагаются малыми, а волны длинными, то уравнение для вертикальной скорости (здесь не выписанное) сводится к условию гидростатики:

$$p = p_a + \rho g(\eta - z), \quad (1.219)$$

а вертикальные градиенты полей превышают горизонтальные. Это позволяет упростить уравнение (1.216):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + 2[\mathbf{f} \times \mathbf{u}] + \omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + g \nabla \eta = \frac{\partial}{\partial z} \left[(\nu + K_z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right], \quad (1.220)$$

где опущен член $\nabla p_a / \rho$ (его влияние рассмотрено в разд. 1.4.1).

В дальнейшем будем использовать обобщенное выражение для коэффициентов турбулентной вязкости:

$$\nu_t = \nu + K_z. \quad (1.221)$$

Как видно из (1.220), горизонтальная скорость зависит от вертикальной координаты (наиболее сильно в пределах пограничных слоев у дна и свободной поверхности), так что мы еще не свели задачу к двумерной. Второе уравнение находится интегрированием уравнения неразрывности (1.3) с учетом кинематических условий на дне и на свободной поверхности (они не меняются при учете вязкости):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}[(h + \eta) \mathbf{U}] = 0, \quad (1.222)$$

где \mathbf{U} — среднее по глубине значение скорости потока

$$\mathbf{U}(x, y, t) = (h + \eta)^{-1} \int_{-h}^{\eta} \mathbf{u}(x, y, z, t) dz. \quad (1.223)$$

В дополнение к обычным граничным условиям на дне и свободной поверхности для вязкой жидкости необходимо использовать условия непрерывности тангенциальных напряжений [Монин, Яглом, 1965]:

$$\rho \nu_t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{T}_s \quad (z = \eta), \quad \rho \nu_t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{T}_b \quad (z = -h). \quad (1.224)$$

Поверхностное напряжение \mathbf{T}_s создается полем ветра, а придонное \mathbf{T}_b обеспечивает диссипацию энергии волн цунами. Система (1.220), (1.222) остается незамкнутой, она содержит вертикальную скорость ω и неизвестную структуру горизонтальной скорости \mathbf{u} . Ее замыкание производится с учетом уравнения неразрывности (1.3). Данная модель, получившая название длинноволновой модели с вертикальным разрешением, используется для решения многих задач динамики прибрежной зоны (см., например, [Вольцингер и др., 1989]). В простейшем случае линейных волн уравнение (1.220) можно проинтегрировать по глубине, и с учетом (1.224) оно принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + 2[\mathbf{f} \times \mathbf{U}] + g \nabla \eta = \frac{\mathbf{T}_s}{\rho h}, \quad (1.225)$$

причем \mathbf{T}_b в линейной задаче опускается, поскольку обычно аппроксимируется слагаемым типа $\mathbf{u} |\mathbf{u}|$. Запишем также линейную версию уравнения (1.222)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \operatorname{div} U = 0, \quad (1.226)$$

и система (1.225)–(1.226) совпадает с классической двумерной системой уравнений мелкой воды; в частности, при пренебрежении вращением Земли снова получим неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \Delta \eta = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} T_s, \quad (1.227)$$

Поверхностное напряжение обычно параметризуют формулой

$$T_s / \rho = c_* W |W|, \quad (1.228)$$

где W – скорость ветра, а c_* – постоянный коэффициент пропорциональности. Отсюда следует, что цунами генерируется неоднородностями поля ветра, причем с усилением скорости ветра генерация цунами усиливается.

Таким образом, прохождение тайфунов всегда сопровождается колебаниями уровня океана (длинноволновой шум) и такая корреляция неоднократно подчеркивалась при анализе наблюдаемых данных [Ефимов и др., 1985; Рабинович, 1994]. В отдельных случаях резонансного движения тайфуна, когда его скорость близка к скорости длинных волн в океане, генерация метеоцунами может быть особенно эффективной.

Часть 2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ЦУНАМИ В ОТКРЫТОМ ОКЕАНЕ

Изменение высоты волны цунами вдоль побережья во многом обусловлено рефракционными явлениями, связанными с крупномасштабными неоднородностями рельефа дна. Если учесть огромные расстояния, проходимые волной в открытом океане (так, волна цунами, возникшая при Чилийском землетрясении 22 мая 1960 г., пересекла за сутки просторы Тихого океана и привела к разрушениям в Японии и России), непосредственное использование исходных уравнений (даже в приближении мелкой воды) представляется весьма проблематичным, так как для проведения соответствующих расчетов необходимо применять суперкомпьютеры. В то же время изменение глубины океана в открытой части происходит достаточно плавно. Так, в Тихом океане около 90 % площади дна занято холмами с высотой 100–300 м и уклонами порядка 0,01. Наличие малого параметра (уклона дна) позволяет в первом приближении пренебречь отражением волны от неоднородностей дна, что может существенно упростить задачу. В этих случаях, как и в аналогичных задачах физики, эффективным является лучевой метод, хорошо известный как метод геометрической оптики. В данной части книги большинство задач распространения волн цунами в открытом океане рассмотрено именно с позиций лучевого метода.

2.1. ЛУЧЕВЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ ВОЛН ЦУНАМИ В ОКЕАНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

В первой части мы показали, что в области очага практически всегда можно пользоваться относительно простой линейной теорией мелкой воды. Исключение составляют задачи генерации волн цунами резонансно движущимися достаточно протяженными источниками, фактически в этом случае происходит распространение (а не возбуждение) волны цунами. Однако, как будет показано ниже, и свободные волны на больших трассах накапливают нелинейные и дисперсионные искажения, так что область применимости линейной теории мелкой воды ограничена. Поэтому учет нелинейности и дисперсии для волн цунами является принципиальным и необходимо развитие соответствующих методов учета этих эффектов.

2.1.1. Уравнения нелинейно-дисперсионной теории волн цунами

Очевидно, что решение дифференциальных уравнений во многом проще, чем краевых задач. Это было показано на примере многих задач возбуждения волн цунами. Такая же ситуация характерна и для стадии распространения волн цунами, особенно если учесть неровность дна океана. Выведем упрощенные дифференциальные уравнения нелинейно-дисперсионной модели для волн цунами в бассейне переменной глубины. Исходной для нас является краевая задача для потенциала φ (см. формулы (1.15)–(1.19)), в формуле (1.17) опустим правую часть, отвечающую возбуждению волны подвижками дна. Учитывая, что волна цунами является длинной и в первом приближении структура поля течения не зависит от глубины, естественно искать решение в виде степенного ряда по глубине бассейна:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z+h)^n, \quad (2.1)$$

причем q_n зависят от горизонтальных координат и времени. Подстановка (2.1) в уравнение Лапласа приводит к рекуррентным соотношениям на неизвестные функции q_n :

$$(n+2)(n+1)q_{n+2} + \Delta q_n + 2(n+1)\nabla q_{n+1}\nabla h + (n+1)q_{n+1}\Delta h + (n+2)(n+1)q_{n+2}(\nabla h)^2 = 0, \quad (2.2)$$

так что только две из них являются независимыми. В частности,

$$q_2 = \frac{\Delta q_0 + 2\nabla q_1\nabla h - q_1\Delta h}{2[1 + (\nabla h)^2]}. \quad (2.3)$$

Подставляя теперь ряд (2.1) в граничное условие на дне (1.17) с $W_n = 0$, находим

$$q_1 = -\frac{\nabla q_0\nabla h}{1 + (\nabla h)^2}, \quad (2.4)$$

так что ряд (2.1) становится полностью определенным через одну функцию $q_0(r, t)$. Эту процедуру мы уже неоднократно повторяли, но поскольку исторически она была предложена для "распространительских" задач, то теперь обсудим основные тонкости такого разложения. В частном случае откоса постоянного уклона $h = \alpha x$ первые два члена ряда есть

$$q_1 = -\frac{\alpha u_0}{1 + \alpha^2}, \quad q_2 = \frac{(1 - \alpha^2)\operatorname{div} u_0}{2(1 + \alpha^2)^2}, \quad (2.5)$$

где $u_0 = \nabla q_0$. В этом случае скорость течения воды на свободной

поверхности равна (одномерная задача)

$$u(z = \eta) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z = \eta) = u_0 - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \left[(h + \eta) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) u_0 \right] - \frac{1 - \alpha^2}{2(1 + \alpha^2)^2} (h + \eta) \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} (h + \eta) + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] + \dots \quad (2.6)$$

Как видим, отношение второго слагаемого к первому мало, если мал уклон дна: $|\alpha| \ll 1$ (фактически параметром здесь является α^2). Таким образом, длинноволновое приближение имеет смысл лишь при малых уклонах дна. Этот вывод физически очевиден (на крутых откосах велика вертикальная скорость) и должен учитываться при решении конкретных задач с реальным рельефом дна.

Третье слагаемое в (2.6) при малых α характеризуется параметром (по отношению к первому)

$$\varepsilon = h^2 / \lambda^2, \quad (2.7)$$

малость которого определяет длинную волну (длина волны значительно больше глубины бассейна). Итак, необходимыми условиями применимости длинноволновых моделей являются условия малости двух параметров: $\varepsilon = h^2 / \lambda^2$ и $\alpha = |\nabla h|$; при этом на высоту волны никаких условий не накладывается. Для дальнейшего необходимо конкретизировать соотношение между α и ε . Предположим, что $\alpha^2 \sim \varepsilon$, тогда второе и третье слагаемые в (2.6) будут одного порядка, хотя их отношение может в реальных условиях меняться в очень широких пределах.

С учетом принятого соотношения параметров выпишем ряд (2.1), в котором пренебрежем слагаемыми $O(\varepsilon^3)$ [Железняк, Пелиновский, 1985]:

$$\begin{aligned} \varphi = & q_0 - \nabla q_0 \nabla h [1 - (\nabla h)^2] (z + h) + \\ & + \left[-\frac{\Delta q_0}{2} + \nabla q_0 \nabla h \Delta h + \nabla h \nabla (\nabla q_0 \nabla h) + \frac{1}{2} \Delta q_0 (\nabla h)^2 \right] (z + h)^2 + \\ & + \left[\frac{1}{2} \Delta h \Delta q_0 + \nabla h \nabla \Delta q_0 + \Delta (\nabla q_0 \nabla h) \right] \frac{(z + h)^3}{3} + \\ & + \frac{1}{24} \Delta \Delta q_0 (z + h)^4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставив (2.8) в кинематическое и динамическое граничные условия на свободной поверхности, получим систему дифференциальных уравнений для уровня η и ∇q_0 . Использование этих уравнений осложняется отсутствием физически четкой трактовки величины ∇q_0 , поскольку она не определяет ни средней по глубине скорости течения, ни поверхностной скорости. Выбор соответствующей вели-

чины, имеющей размерность скорости, приводит к разнице в моделях нелинейно-дисперсионной теории, применяемых разными авторами. Мы возьмем среднюю по глубине скорость течения:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} \nabla \varphi \, dz. \quad (2.9)$$

Тогда, используя (2.8), можно приближенно вычислить ∇q_0 с точностью до ϵ^3 :

$$\nabla q_0 \approx \mathbf{u} + \frac{h + \eta}{2} \mathbf{u} \Delta h + (h + \eta) (\nabla h \nabla) \mathbf{u} + (\nabla h)^2 \mathbf{u} + \frac{1}{6} (h + \eta)^2 \Delta \mathbf{u}. \quad (2.10)$$

В результате ряд (2.8) определяется через среднюю скорость потока, после его подстановки в формулы (1.18) и (1.19) получаем окончательные уравнения нелинейно-дисперсионной модели:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}[(h + \eta) \mathbf{u}] = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta = \mathbf{D}, \quad (2.12)$$

$$\text{где } \mathbf{D} = \frac{1}{h + \eta} \nabla \left(\frac{(h + \eta)^3}{3} R + \frac{(h + \eta)^2}{2} Q \right) - \nabla h \left(\frac{(h + \eta)}{2} R + Q \right),$$

$$R = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} - (\operatorname{div} \mathbf{u})^2,$$

$$Q = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \nabla h + (\mathbf{u} \nabla) (\mathbf{u} \nabla h). \quad (2.13)$$

Отличие этих уравнений от системы уравнений теории мелкой воды заключается в добавочном слагаемом \mathbf{D} , которое, как будет видно ниже, учитывает дисперсию волн. Подчеркнем, что нелинейность здесь остается произвольной (не обязательно малой). Нетрудно показать также, что уравнение (2.11) является естественным точным следствием проинтегрированного по глубине уравнения неразрывности (1.3) с учетом точных граничных условий на дне и свободной поверхности. Таким образом, вывод этого уравнения с помощью ряда (2.8) является одновременно контролем точности самого разложения (2.8). В случае постоянной глубины бассейна данная система была получена в работе [Su, Gardner, 1969], и приводимый здесь вывод может рассматриваться как естественное обобщение на случай бассейна с плавно меняющейся глубиной.

Приведем здесь также выражение для давления в рамках нелинейной дисперсионной теории, вытекающее из уравнения (1.2):

$$p = p_a + \rho g(\eta - z) + \frac{1}{2} \rho [z^2 + 2h(z - \eta) - \eta^2] R - \rho(\eta - z) Q. \quad (2.14)$$

Если нелинейность мала, то в дисперсионном слагаемом D естественно оставить только линейные по полю члены:

$$D = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \operatorname{div}(uh) - \frac{h}{3} \nabla \operatorname{div} u \right]. \quad (2.15)$$

Система (2.11)–(2.12) с дисперсионным слагаемым вида (2.15) известна как система Перегринна [Peregrine, 1967, 1972], она широко использовалась при численном моделировании трансформации морских (ветровых) волн в прибрежной зоне, соответствующие ссылки могут быть найдены в книге [Mei, 1989] и статьях [Freilich, Guza, 1984; Elgar et al., 1993]. Для цунами в открытом океане характерна малая амплитуда, поэтому в этой части всюду будем использовать нелинейно-дисперсионную модель в форме Перегринна. Отметим, что в теоретической и математической физике системы типа описанных выше стали называться системами буссинесковского типа и мы не будем здесь различать их терминологически.

Обратим внимание, что можно написать ряд эквивалентных систем буссинесковского типа. Действительно, ввиду малости D в нем можно заменять временные производные на пространственные (и наоборот) в соответствии со связями, вытекающими из уравнений мелкой воды. Рассмотрим, например, линейную одномерную задачу для волн в жидкости постоянной глубины, когда система (2.11), (2.12), (2.15) сводится к следующей:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = D = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}. \quad (2.17)$$

С принятой степенью точности для D можно написать ряд эквивалентных выражений:

$$D_1 = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \quad D_2 = -\frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}, \quad D_3 = -\frac{h}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial x}, \quad D_4 = \frac{h}{3g} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}. \quad (2.18)$$

Ввиду линейности этих уравнений их решение может быть представлено фурье-суперпозицией элементарных решений вида

$$\eta, u \sim \exp i(\omega t - kx), \quad (2.19)$$

где частота ω и волновое число k связаны с дисперсионным соотношением, которое при разных аппроксимациях D имеет вид

$$\omega^2 = \frac{ghk^2}{1 + \frac{h^2 k^2}{3}} \quad (\text{для } D_1 \text{ и } D_3),$$

$$\omega^2 = ghk^2 \left[1 - \frac{h^2 k^2}{3} \right] \quad (\text{для } D_2),$$

$$ghk^2 = \omega^2 + \frac{h}{3g} \omega^4 \quad (\text{для } D_4). \quad (2.20)$$

Как видим, дисперсионное соотношение в различных моделях оказывается разным, общим у них является длинноволновой предел, получаемый разложением в ряд Тейлора при $kh \ll 1$ (фактически, $\epsilon \ll 1$), — он совпадает с формулой для D_2 , а в слагаемых $O(\epsilon^2)$ имеются расхождения. Последнее легко объяснимо, так как и исходные уравнения выписаны с точностью до $O(\epsilon^2)$. Указанный произвол в моделях целесообразно использовать, например, при численном моделировании, при котором приближенная модель рассматривается как исходная. Так, модель с D_2 обладает неустойчивостью на малых масштабах ($\omega^2 < 0$), модели с D_1 и D_3 имеют верхнюю граничную частоту. Наиболее хорошая аппроксимация точного дисперсионного соотношения для волн на воде осуществляется моделью с D_4 , но и в этой модели имеется неустойчивость на коротких волнах. Вообще, проблема описания волн на воде (не только длинных) с помощью систем буссинесковского типа является очень интересной, здесь накоплен определенный задел [Fujita et al., 1985; Пелиновский, 1987; Козлов, Пелиновский, 1989; Madsen et al., 1991], частично будем обсуждать эту проблему в разд. 3.3.4 в связи с накатом дисперсионных волн на берег. Однако в длинноволновом пределе все эти модели должны давать одинаковые результаты и критерий малости дисперсии должен проверяться при интерпретации результатов расчета по разным моделям.

Итак, для описания волн цунами в открытом океане предложена иерархия нелинейно-дисперсионных моделей, отличающихся видом дисперсионного слагаемого. Эти различия важны для численного моделирования и иногда будут влиять на возможности аналитических методов (например, на интегрируемость уравнений), однако на количественных и качественных характеристиках процесса с указанной выше точностью они не должны сказываться, и в дальнейшем мы выберем любую из них, например систему Перегринна, в качестве базовой для последующего рассмотрения.

2.1.2. Лучевой метод с учетом нелинейности и дисперсии

Хотя уравнения нелинейно-дисперсионной модели существенно проще, чем исходная краевая задача (исключена вертикальная координата), тем не менее она еще трудна для анализа в случае расчета волнового поля на очень больших акваториях. Между тем, малость уклонов дна означает, что в большинстве случаев (исключения будут описаны ниже) можно пренебречь отражением от откосов и рассматривать только распространяющуюся волну. Такое приближение носит название лучевого и хорошо известно для многих

волновых задач. Для нелинейных слабодиспергирующих волн лучевые методы развиты в [Shen, Keller, 1973; Островский, Пелиновский, 1975; Пелиновский, 1982; Engelbrecht et al., 1988]. Здесь приведем наиболее простую формулировку метода, подходящую для волн цунами.

Перекрестным дифференцированием сведем систему Перегринна к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \operatorname{div}(c^2 \nabla \eta) = \Pi\{\mathbf{u}, \eta\}, \quad \Pi = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\eta \mathbf{u}) - \operatorname{div}[h\mathbf{D} - h(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}], \quad (2.21)$$

где в линейной (левой) части исключена скорость частиц \mathbf{u} , как и ранее, $c = (gh)^{1/2}$. Функция Π содержит нелинейные и дисперсионные слагаемые и, следовательно, является малой (пропорциональной ϵ). Введем вместо времени t переменную

$$s = \tau(\mathbf{r}) - t, \quad (2.22)$$

где функцию τ определим позднее. В новых переменных уравнение (2.22) принимает вид

$$[1 - c^2(\nabla \tau)^2] \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s} [2c^2 \nabla \tau \nabla \eta + \eta \operatorname{div}(c^2 \nabla \tau)] - \operatorname{div}(c^2 \nabla \eta) = \Pi. \quad (2.23)$$

Для однозначного определения входящих сюда функций необходимо использование физических предположений. Будем считать, что радиус кривизны фронта волны велик (квазиплоская волна) и уклон дна мал (об этом предположении уже говорилось). Тогда естественно предположить, что решение зависит главным образом от одной переменной s , а зависимость от \mathbf{r} является более медленной. По существу, это означает, что $\eta = \eta(s, \epsilon \mathbf{r})$, тогда слагаемое $\operatorname{div}(c^2 \nabla \eta)$ в (2.23) пропорционально ϵ^2 и может быть опущено. В нелинейно-дисперсионном слагаемом Π , пропорциональном ϵ , с точностью до ϵ можно использовать связи между η и \mathbf{u} , вытекающие в нулевом приближении (в рамках линейной теории мелкой воды):

$$\mathbf{u} = g \nabla \tau \eta. \quad (2.24)$$

В результате уравнение (2.23) распадается на два независимых уравнения для определения двух неизвестных функций η и τ :

$$(\nabla \tau)^2 = c^{-2}(\mathbf{r}) = (gh)^{-1}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (2c^2 \nabla \tau \nabla \eta + \eta c^2 \Delta \tau + \eta \nabla \tau \nabla c^2) + \Pi\{\eta\} = 0. \quad (2.26)$$

Уравнение эйконала. Первое уравнение не содержит волновых переменных, оно включает в себя только локальную глубину океана. Уравнение такого типа в лучевых теориях известно как уравнение эйконала, оно позволяет рассчитать пути распространения волны цунами. Поскольку (2.25) – это уравнение в частных производных

первого порядка, то ему соответствует характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dr}{dt} = cl, \quad (2.27)$$

$$\frac{d(l/c)}{dt} = -\frac{\nabla c}{c}, \quad (2.28)$$

где

$$l = c \nabla \tau. \quad (2.29)$$

Эта нелинейная система второго порядка должна быть дополнена начальными условиями

$$r(t=0) = r_0, \quad l(t=0) = l_0, \quad (2.30)$$

и полностью определять положение в пространстве луча, выходящего из точки r_0 по направлению l_0 ($|l| = 1$) в параметрической форме. Если траектория луча определена, то фаза (эйконал), или время движения волны вдоль луча, легко находится из уравнения (2.29) в виде криволинейного интеграла вдоль траектории луча:

$$\tau = \int dl/c(l). \quad (2.31)$$

Линии $\tau = \text{const}$ соответствуют положениям фронтов и называются изохронами.

Уравнения (2.27) и (2.28) могут быть найдены также из вариационного принципа Ферми, согласно которому интеграл (2.31) вдоль траектории луча должен иметь минимальное значение, описание этой классической задачи содержится во всех учебниках по вариационному исчислению.

Обратим внимание, что задаче расчета лучей можно придать гамильтонову формулировку, вводя волновой вектор k ($l = k/k$) и частоту $\omega = ck$ (поскольку уравнение эйконала записывается в рамках линейной теории мелкой воды, то в этом же приближении записывается и дисперсионное соотношение), тогда гамильтонианом является частота ω и уравнения для лучей имеют вид уравнений Гамильтона:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial r}. \quad (2.32)$$

Методы гамильтоновой механики для описания динамики лучей в неоднородных средах позволяют более просто сделать общие заключения о возможности существования захваченных волн (приведем лишь одну работу *Доброхотова* (1986), где дан пример расчета волн, захваченных подводными мелями, хребтами и островными шельфами, с этих позиций). Недавно с помощью этих методов обнаружено явление стохастической динамики лучей в волноводных системах [*Abdulaev*, 1991], к этому вопросу мы еще вернемся.

Наиболее простой вид лучевые уравнения принимают в случае параллельных изобат, когда h , а следовательно и c , зависит только от одной координаты, например x . Тогда y -компонента уравнения (2.28) сразу интегрируется:

$$\cos \theta(x)/c(x) = \text{const}, \quad (2.33)$$

где θ — угол направления луча, отсчитываемый от изобат. Фактически мы получили здесь закон Снелла для рефракции волновых лучей, и расчеты по формуле (2.33) являются наиболее легкими. В частности, в зоне с уменьшающейся глубиной $\theta \rightarrow \pi/2$ и изобаты становятся параллельными линии берега. Такое выравнивание волновых фронтов вблизи берега хорошо известно и не специалисту.

Итак, математическая задача нахождения лучей становится полностью определенной. Для этого необходимо иметь карту глубин данного участка акватории и положение фронта волны в очаге. Второе обычно для цунами неизвестно. Поэтому наиболее активно лучевые методы используются при решении обратных задач восстановления положения очага (его оконтуривания) по береговым данным. Решение такой задачи корректно (в рамках приближения лучевых методов), так как положение луча не зависит от того, с какой стороны луча находится источник, а с какой — приемник, их можно менять местами (этот принцип в физике получил название принципа взаимности). В результате лучи "выпускаются" из береговых пунктов, а "оканчиваются" в океане, причем длина луча выбирается из условия, что время движения вдоль луча равно разнице времени прихода волны цунами и времени начала землетрясения. Таким способом рассчитано положение очагов практически всех цунами этого столетия. Точность такого метода, конечно же, не очень высока [Murty et al., 1987].

Другим применением лучевых методов является расчет времен добегания волн цунами до заданного пункта от возможного цунами в любой точке океана. При этом лучи выпускаются только из данного пункта и строятся карты изохрон, которые важны для оперативного прогноза цунами: после возникновения землетрясения, положение которого известно, из подобных карт ясен запас времени, каким располагает служба предупреждения цунами для объявления тревоги цунами. По заказу ЮНЕСКО карта добегания волн цунами в бассейне Тихого океана разработана в [Шокин и др., 1989].

Эволюционное уравнение. Рассмотрим теперь уравнение (2.26) для волнового поля. Используя рассчитанные выше лучи в качестве опорных, можно упростить уравнение (2.26), определяющее эволюцию волн с учетом нелинейности и дисперсии. В частности, в слагаемом $\Pi\{\eta\}$ используем связи между u и η в соответствии с (2.24), кроме того, во всех производных будем учитывать зависимость только от s и пренебрегать производными по медленным координатам. Это, разумеется, возможно, только при малой нелинейности и

дисперсии, что мы и предполагали в начале разд. 2.1.2. В результате главный член в функции Π имеет вид

$$\Pi = \frac{3}{2h} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \eta^2 + \frac{h}{3g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial s^4}. \quad (2.34)$$

В результате уравнение (2.26) один раз интегрируется:

$$2c^2 \nabla \tau \nabla \eta + \eta c^2 \Delta \tau + \eta \nabla \tau \nabla c^2 + \frac{3\eta}{h} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{h}{3g} \frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} = 0. \quad (2.35)$$

Учтем, что $\nabla \tau \nabla \eta = c^{-1} \frac{\partial \eta}{\partial l}$, и вычислим $\Delta \tau$ в криволинейной ортогональной системе лучевых координат (одна координата — вдоль луча, а другая — вдоль линии фронта; см., например, [Бабич, Булдырев, 1972]):

$$\Delta \tau = \frac{1}{b} \frac{d}{dl} \left(\frac{b}{c} \right). \quad (2.36)$$

Здесь b — якобиан перехода от декартовых координат к лучевым, он определяет расходимость лучей и обычно его называют расстоянием между лучами (точнее, это дифференциальное расстояние — производная от изменения расстояния между бесконечно близкими лучами, другое название: фактор фокусировки). Тогда уравнение (2.35) переписывается в окончательной форме:

$$(gh)^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial l} + \frac{3\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} + \frac{(gh)^{1/2}}{4hb^2} \frac{d(hb^2)}{dl} \eta = 0. \quad (2.37)$$

Полученное уравнение определяет искомое эволюционное уравнение для волны цунами, распространяющейся вдоль лучей. Заменой переменной

$$\eta = \xi \left(\frac{h_0}{h} \right)^{1/4} \left(\frac{b_0}{b} \right)^{1/2}, \quad (2.38)$$

где h_0 и b_0 — начальные значения глубины и расстояния между лучами, уравнение (2.37) сводится к уравнению Кортевега — де Вриза с переменными коэффициентами:

$$(gh)^{1/2} \frac{\partial \xi}{\partial l} + \frac{3\xi}{2h} \left(\frac{h_0}{h} \right)^{1/4} \left(\frac{b_0}{b} \right)^{1/2} \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} = 0. \quad (2.39)$$

В случае плоской волны в океане постоянной глубины (отсутствует последнее слагаемое в (2.37), либо коэффициенты в (2.39) постоянны) оно сводится к известному уравнению Кортевега — де Вриза:

$$(gh)^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial l} + \frac{3\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} = 0, \quad (2.40)$$

которое часто записывается в другой, эквивалентной форме:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{ch^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (2.41)$$

История вывода уравнения Кортевега — де Вриза и его приложений содержится во многих книгах и обзорах (см., например, [Miles, 1980, 1981; Drazin, Johnson, 1989]), поэтому не будем на ней останавливаться. Уравнение типа (2.37) или (2.39) назовем обобщенным уравнением Кортевега — де Вриза. Его вывод при различных упрощающих предположениях содержится в работах [Островский, Пелиновский, 1970, 1975; Johnson, 1973; Kawahara, 1975; Shen, Keller, 1973; Shen, 1975].

В заключение несколько слов о пределах применимости полученных уравнений. Ряд из них очевиден и вытекают из известных ограничений лучевого метода в линейной теории. Так, в окрестности уреза ($h \rightarrow 0$), несмотря на гладкость изменения глубины (величина ∇h мала, но конечна), последнее слагаемое в (2.37) становится неограниченным, свидетельствуя о неприменимости лучевого метода. Физически это совершенно понятно, так как в прибрежной зоне энергия падающей волны переходит в энергию отраженной волны (или волна разрушается). Другое ограничение метода связано с наличием областей, где лучи пересекаются ($b \rightarrow 0$), такие области называются каустическими. Здесь определяющей становится дифракция волнового поля. Наконец, возможны случаи, когда лучи почти параллельны, так что нелинейность может сказаться уже на динамике самих лучей, приводя к эффектам так называемой самодифракции. Все эти случаи требуют выхода за рамки приближения Кортевега — де Вриза и будут рассматриваться ниже. Для большей же части океана лучевые методы корректны, и мы внимательно рассмотрим основные следствия теории применительно к волнам цунами.

2.1.3. Трансформация волны цунами на каустике

Приведенные выше формулы, как уже указывалось, несправедливы вблизи каустики, где расстояние между лучами обращается в нуль. Трансформация линейной монохроматической волны на каустике хорошо известна и теоретически, и экспериментально (см., например, [Mei, 1989]). Для анализа этой ситуации необходимо выйти за пределы лучевой теории и рассмотреть исходное волновое уравнение в окрестности каустики. Поскольку нелинейность и дисперсия предполагаются малыми, и размеры каустической области малы, то в первом приближении пренебрежем нелинейностью и дисперсией и рассмотрим процесс трансформации волны цунами на каустике в рамках линейного волнового уравнения, вытекающего из системы (2.11), (2.12):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g \operatorname{div}(h \nabla \eta) = 0. \quad (2.42)$$

Будем считать, что волна монохроматическая, и глубина меняется только вдоль одной координаты x . В этом случае решение (2.42) можно записать в виде

$$\eta = \eta(x) \exp[i(\omega t - k_y y)]. \quad (2.43)$$

Тогда для $\eta(x)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$g \frac{d}{dx} \left(h \frac{d\eta}{dx} \right) + (\omega^2 - ghk_y^2) \eta = 0. \quad (2.44)$$

После замены

$$\eta = \xi h^{-1/2} \quad (2.45)$$

уравнение (2.44) сводится к

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \left[\frac{\omega^2 - ghk_y^2}{h} - \frac{1}{2h^{1/2}} \frac{d}{dx} \left(h^{-1/2} \frac{dh}{dx} \right) \right] \xi = 0. \quad (2.46)$$

На языке этого уравнения каустики соответствует обращение в нуль выражения, стоящего в круглых скобках, пускай это происходит в точке $x = 0$. Поскольку все функции аналитические, их можно разложить в ряд в окрестности данной точки. Удерживая только первый член разложения и принимая для простоты

$$h = h_0 \left(1 + \frac{x}{L} \right) \quad (2.47)$$

(считаем $k_y L \gg 1$), уравнение (2.46) сведем к уравнению Эйри:

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} - \frac{k_y^2}{L} x \xi = 0. \quad (2.48)$$

Его ограниченным решением является функция Эйри

$$\xi(x) = a \operatorname{Ai} \left(-x \frac{k_y^{2/3}}{L^{1/3}} \right), \quad (2.49)$$

осциллирующая в сторону отрицательных x и экспоненциально затухающая в сторону положительных x . Асимптотика функции Эйри при больших отрицательных значениях x есть

$$\operatorname{Ai}(z) \approx \sin[(2/3) |z|^{3/2} + \pi/4] / (\pi^{1/2} |z|^{1/4}), \quad (2.50)$$

и она соответствует стоячей волне, представляющей собой суперпозицию падающей и трансформированной на каустике волн:

$$\xi = H_0(x) \left[\sin \left(\omega t - \frac{2k_y}{3L^{1/2}} |x|^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\omega t + \frac{2k_y}{3L^{1/2}} |x|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (2.51)$$

где H_0 — амплитуда волны

$$H_0(x) \approx (aL^{1/12}) / (2\pi^{1/2} |x|^{1/4} k_y^{1/6}). \quad (2.52)$$

Задавая амплитуду волны на расстоянии L от каустики, можно найти константу a в (2.49):

$$a = 2\sqrt{\pi} (Lk_y)^{1/6} H_0, \quad (2.53)$$

которая и определяет амплитуду поля на каустике. Таким образом, коэффициент усиления волны на каустике пропорционален фактору $(Lk_y)^{1/6}$ и для типичных ситуаций с волнами цунами он не очень-то велик, так что можно ожидать, что волна цунами на каустике остается слабо нелинейной. Обратим внимание еще на одну особенность эталонного решения: высота трансформированной волны равна высоте падающей волны, что очевидно, поскольку диссипации энергии не происходит. Это означает, что поле трансформированной волны можно "сшить" с полем падающей без детального анализа структуры поля на каустике и в дальнейшем вновь использовать лучевые методы. На самом деле, однако, это утверждение справедливо для монохроматической волны. Как видно из (2.51), между падающей и отраженной волнами существует сдвиг фаз, равный времени движения волны к каустике и обратно (он легко учитывается сдвигом времени) и $\pi/2$, что является принципиальным при рассмотрении импульсных возмущений, поскольку фазовый спектр волны меняется кардинальным образом (энергетический или амплитудный спектр не меняется). Изменение фазы каждой спектральной компоненты на $\pi/2$ соответствует преобразованию Гильберта, приведем соответствующую формулу, связывающую трансформированную волну с падающей:

$$\eta_{tr}(t) = \pi^{-1} \int \eta_{in}(\tau) d\tau / (\tau - t). \quad (2.54)$$

Преобразование Гильберта является типичным для всех задач, связанных с внутренним отражением. Однако его применение столкнулось с очевидной трудностью объяснения возникающего здесь предвестника. Действительно, если принять падающую волну в виде дельта-функции, то трансформированная волна будет описываться функцией $1/t$ и сигнал появится еще до прихода падающей волны. Возникновение предвестника пытались объяснить разными способами, но это, разумеется, противоречит физическим законам. На самом деле, мы должны помнить, что формула (2.54) получена из (2.51), которая является асимптотической и справедливой при $\lambda \ll L$. Но в импульсном сигнале всегда есть низкочастотные составляющие, не удовлетворяющие этому критерию. Более точный анализ решения уравнения (2.42) с использованием начальных условий (применением преобразования Фурье — Лапласа) показал, что предвестник, естественно, не существует, а форма трансформированной волны в энергонесущей ее части близка к рассчитываемой по (2.54), если импульс достаточно короткий [Курин и др., 1985]. Поэтому на практике можно использовать преобразование Гильберта, устрояя предвестник "волевым" образом.

Полученные формулы, строго говоря, справедливы для линейного волнового уравнения (2.42). Малая дисперсия не может изменить результат кардинально (соответствующая задача, конечно же,

может быть решена точно при любой дисперсии) и приводит к слабым вариациям положения каустики и амплитуды поля на каустике. Аналогичный результат получен и при учете слабой нелинейности в рамках прямой теории возмущений [Engelbrecht et al., 1988]. Все эти результаты применимы для простой геометрии каустики.

Таким образом, для слабонелинейных волн прикаустическую область можно "пройти" с помощью преобразования Гильберта и далее для анализа эволюции трансформированной волны снова использовать лучевые методы. В результате получается замкнутая схема расчета волн цунами в открытом океане, пригодная как для линейных, так и слабонелинейных волн.

2.1.4. Нелинейное эволюционное уравнение для волн цунами над шероховатым дном

Разработанный выше лучевой метод существенно опирается на крупномасштабность изменения рельефа дна и позволяет пренебречь отражением волны от неоднородностей. На практике океаническое дно содержит все компоненты неровностей: от крупномасштабных до мелкомасштабных. Неровности дна в общем случае естественно рассматривать как случайные, они ведут к рассеянию энергии волн и их затуханию (решение линейной задачи, например, содержится в работе [Dyatlov, Pelinovsky, 1990]). Нелинейная задача оказалась более сложной и только сейчас удалось предложить асимптотическую схему, справедливую для слабонелинейных волн и одномерности шероховатостей [Бенилов, Пелиновский, 1988, 1993; Benilov, 1992; Gurevich et al., 1993].

В качестве исходного уравнения выберем одномерный вариант уравнений (2.21):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \varepsilon^2 \Pi \{u, \eta\}, \quad \Pi = -\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (\eta u) - \frac{\partial}{\partial x} \left(hD - hu \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (2.55)$$

Как и ранее, слагаемое Π предполагается малым, что учитывается малым параметром ε , к его вычислению вернемся в конце раздела. Для упрощения расчетов введем новую координату

$$y = \int dx / [gh(x)]. \quad (2.56)$$

Тогда уравнение (2.55) сводится к

$$gh(y) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \varepsilon^2 gh \Pi = \varepsilon^2 \Psi. \quad (2.57)$$

Сделаем еще одну замену, вводя вместо t переменную s , где c — не известная пока величина:

$$s = t - \int c(y) dy, \quad (2.58)$$

и будем считать неровности дна малыми:

$$h(y) = h_0 + \varepsilon h_1(y). \quad (2.59)$$

Тогда уравнение (2.55) принимает следующую форму:

$$(gh_0 - c^2 + \varepsilon gh_1) \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + 2c \frac{\partial^2 \eta}{\partial s \partial y} + \frac{dc}{dy} \frac{\partial \eta}{\partial s} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \varepsilon^2 \Psi. \quad (2.60)$$

Применим теперь асимптотическую процедуру метода многих масштабов, т. е. наряду с быстрой координатой y введем медленные координаты $Y_1 = \varepsilon y$, $Y_2 = \varepsilon^2 y$, ..., тогда производная по y заменяется на

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial Y_2} + \dots \quad (2.61)$$

Решение уравнения (2.60) ищем в виде асимптотического ряда

$$\begin{aligned} \eta(s, y, Y_1, \dots) &= \eta_0(s, y, \dots) + \varepsilon \eta_1(s, y, \dots) + \varepsilon^2 \eta_2(s, y, \dots) + \dots \\ c(y, Y_1, \dots) &= c_0 + \varepsilon c_1(y, Y_1, \dots) + \varepsilon^2 c_2(y, Y_1, \dots) + \dots \end{aligned} \quad (2.62)$$

После подстановки (2.61), (2.62) в (2.60) получим семейство уравнений в каждом порядке теории возмущений. Нулевой по ε порядок удовлетворяется, если положить

$$c_0 = (gh_0)^{1/2}, \quad (2.63)$$

тогда η_0 не зависит от быстрого y и определяет волну,двигающуюся в сторону положительных x .

В первом порядке по ε имеем неоднородное линейное уравнение для η_1 :

$$2c_0 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial y \partial s} - \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial y^2} = (2c_0 c_1 - gh_1) \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial s^2} - \frac{dc_1}{dy} \frac{\partial \eta_0}{\partial s} - 2c_0 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial s \partial Y_1}. \quad (2.64)$$

Предположим, что вариации глубины случайны и среднее значение $\langle h_1 \rangle = 0$. Тогда необходимым условием ненарастания η_1 по y является

$$\langle c_1 \rangle = 0, \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial Y_1} = 0. \quad (2.65)$$

Уравнение (2.64) необходимо дополнить условием отсутствия отраженных волн при $y \rightarrow -\infty$, что позволяет решить возникающую при этом задачу Гурса

$$\eta_1 = \int_0^{\infty} \frac{\partial \eta_0}{\partial s}(s + 2c_0 \tau, Y_2) c_1(y - \tau) d\tau - \frac{\partial \eta_1}{\partial s}(s, Y_2) \int_{-\infty}^y (gh_1 - 2c_0 c_1) d\tau. \quad (2.66)$$

Легко показать, что условием ненаращения дисперсии η_1 является равенство нулю скобки во втором интеграле, что и определяет однозначно неизвестную функцию c_1 :

$$c_1 = gh_1/2c_0. \quad (2.67)$$

В результате поправка первого приближения записывается в явном виде:

$$\eta_1 = \int_0^\infty \frac{\partial \eta_0}{\partial s} (s + 2c_0\tau, Y_2) c_1(y - \tau) d\tau. \quad (2.68)$$

Во втором приближении по ϵ получим линейное неоднородное уравнение для η_2 :

$$2c_0 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial y \partial s} - \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial y^2} = F(s, y, Y_2), \quad (2.69)$$

$$F = \Psi + 2c_0 c_2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial s^2} - 2c_0 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial s \partial Y} - \frac{dc_2}{dy} \frac{\partial \eta_0}{\partial s} - 2c_1 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial s \partial y} - \frac{dc_1}{dy} \frac{\partial \eta_1}{\partial s}. \quad (2.70)$$

Необходимым условием ненаращения функции F по y является отсутствие ее среднего

$$\langle F \rangle = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta}^{+\Delta} F(s, y, Y_2) dy, \quad (2.71)$$

что и дает нам искомое эволюционное уравнение для η_0 :

$$2c_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial Y} = \int \Psi ds - \langle 2c_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{dc_1}{dy} \eta_1 \rangle. \quad (2.72)$$

Осталось преобразовать Ψ в соответствии с (2.34) и вычислить входящие сюда средние с помощью (2.68):

$$(gh)^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial l} + \frac{3\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} + \int_0^\infty \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} (s + 2\tau, l) W(\tau) d\tau = 0, \quad (2.73)$$

где $W(\tau) = \langle h_1(t + \tau) h_1(t) \rangle / h_0^2$ — корреляционная функция неровностей дна. Мы переписали уравнение в привычных "физических" переменных. Как видим, получилось опять модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза, последнее слагаемое и описывает рассеяние волны цунами на неровностях дна. Подчеркнем, однако, что уравнение (2.73) справедливо только для одномерных неровностей дна, и здесь еще предстоит работа по совершенствованию подходящих асимптотических процедур. Анализ полученного эволюционного уравнения будет проведен несколько ниже (разд. 2.4.3).

2.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВОЛНЫ ЦУНАМИ

Обсудим роль ряда нелинейных эволюционных уравнений в проблеме цунами. Следует заметить, что влияние нелинейности и дисперсии на распространение волн цунами неоднократно рассматривалось в литературе. Практически все численные расчеты волн цунами на ограниченных акваториях показывают, что нелинейностью и дисперсией можно пренебречь. Аналитические оценки, данные в работах [Hattack, 1973; Hattack, Segur, 1978; Пелиновский, 1982; Мирчина, Пелиновский, 1984], показывают, что эти эффекты могут быть существенны для ряда цунами. Пожалуй, только во время японскоморского цунами 1983 г. надежно регистрировались сильно нелинейные образования и численное моделирование объяснило факт их существования [Shuto, 1985]. Для ответа на эти вопросы суммируем основные следствия, вытекающие из нелинейно-дисперсионной теории цунами, и привлечем суммарный фактический материал о цунами этого столетия.

2.2.1. Приближенные решения уравнения Кортевега – де Вриза

В качестве исходной модели выберем одномерное уравнение Кортевега – де Вриза для волн в бассейне постоянной глубины, выведенное в разд. 2.1.2, которое здесь воспроизведем:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{ch^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (2.74)$$

Уравнение Кортевега – де Вриза является замечательным уравнением математической физики, для которого впервые удалось получить решение задачи Коши с помощью метода обратной задачи теории рассеяния (это было сделано в 1967 г.), в дальнейшем этот метод показал свою эффективность, "справившись" с многими уравнениями, играющими важную роль в нелинейной физике (см., например, [Уизем, 1977; Ablowitz, Segur, 1981; Ньюэлл, 1989; Drazin, Johnson, 1989]). Приведем ряд решений, иллюстрирующих нелинейную и дисперсионную динамику волн.

В первую очередь остановимся на уединенных волнах, получивших название солитонов из-за их стабильности в процессе распространения и взаимодействия. После введения "бегущей" координаты $\zeta = x - Vt$ уравнение (2.74) один раз интегрируется:

$$\frac{ch^2}{6} \frac{d^2 \eta}{d\zeta^2} + \frac{3c}{4h} \eta^2 + (c - V) \eta = 0. \quad (2.75)$$

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение легко исследуется методами качественной теории, для него легко построить

фазовый портрет. Наиболее просто находятся решения, спадающие на бесконечности. Проинтегрируем уравнение (2.75) еще раз:

$$\frac{ch^2}{6} \left(\frac{d\eta}{d\zeta} \right)^2 + \frac{c}{2h} \eta^3 + (c - V) \eta^2 = 0, \quad (2.76)$$

где константа, как и в (2.75), выбрана нулевой, чтобы удовлетворить условию убывания поля на бесконечности. Учитывая, что максимуму поля $\eta_{\max} = H$ соответствует $\frac{d\eta}{d\zeta} = 0$ из (2.76), находим зависимость скорости распространения волны от амплитуды:

$$V = c[1 + (H/(2h))]. \quad (2.77)$$

Уравнение (2.76) при условии (2.77) легко интегрируется в элементарных функциях:

$$\eta = H \cosh^{-2} \left[\left(\frac{3H}{4h} \right)^{1/2} \frac{x - x_0 - Vt}{h} \right], \quad (2.78)$$

где константа x_0 определяет положение солитона в начальный момент времени. Итак, на поверхности воды возможно существование только стационарно движущегося уединенного горба, скорость которого превышает линейную скорость длинных волн, а амплитуда волны в этом приближении может быть произвольной. Солитон впервые наблюдался еще в 1844 г. С. Расселлом, сейчас такие образования открыты во многих областях физики. Длину солитона определим по уровню 0,5, она равна

$$\lambda = 2h \left(\frac{4h}{3H} \right)^{1/2} \ln(1 + 2^{1/2}) \approx 2h \left(\frac{h}{H} \right)^{1/2}. \quad (2.79)$$

Величина λ для типичных значений h и H в открытом океане приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Длина солитона (в километрах)

h , км	H , м						
	0,5	1	2	3	4	5	10
0,5	32	22	16	13	11	10	7
1	89	63	45	37	32	28	20
2	253	179	126	103	89	80	57
3	465	329	232	190	164	147	104
4	716	506	358	292	253	226	160
5	1000	707	500	408	354	316	224

Сравнивая длину солитона со значениями параметров цунами в очаге (см. табл. 1.1), видим, что параметры многих реальных

цунами близки к параметрам солитонов, в результате чего можно ожидать, что теория солитонов окажется пригодной для описания свойств цунами. Разумеется, только такое сравнение является недостаточным, мы должны исследовать нестационарные процессы, чтобы понять, возможно ли образование солитонов в процессе эволюции или только их непосредственная генерация в очаге.

Для изучения нестационарных процессов полезно ввести безразмерные переменные

$$\zeta = \eta/H, \quad y = (x - ct)/\lambda, \quad \tau = (2tH)/(3\lambda h), \quad (2.80)$$

где H — амплитуда и λ — длина начального возмущения, тогда уравнение (2.74) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{9U\Gamma} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} = 0, \quad (2.81)$$

с начальным условием

$$\zeta(y, 0) = \zeta_0(y), \quad (2.82)$$

где ζ_0 — безразмерная функция, описывающая форму начального возмущения. В уравнении (2.81) содержится единственный определяющий параметр

$$U\Gamma = (H\lambda^2)/h^3, \quad (2.83)$$

называемый параметром Урселла [Стокер, 1959] (в литературе по нелинейным волнам за ним установилось название параметра подобия). Его физический смысл очевиден: он характеризует отношение нелинейности к дисперсии и подобен числу Рейнольдса (отношению нелинейности к диссипации). Для солитона $U\Gamma = 4$, и это значение разделяет возможные режимы эволюции начального возмущения. При $U\Gamma \ll 4$ нелинейность не существенна и волны цунами могут быть описаны в рамках линейной дисперсионной теории. При $U\Gamma \gg 4$ дисперсией можно пренебречь и волны цунами описываются нелинейными уравнениями мелкой воды. При $U\Gamma \sim 4$ необходимо воспользоваться уравнением Кортевега — де Вриза и учитывать оба фактора. Эта классификация, предложенная в [Hammack, Segur, 1976; Мурти, 1981; Уи, 1979], должна быть дополнена определением пространственных масштабов проявления каждого из эффектов. Разберем подробно каждый из этих случаев.

Линейные дисперсионные волны. При $U\Gamma \ll 4$ нелинейным слагаемым в уравнении (2.81) и, следовательно, в (2.74) можно пренебречь. Линеаризованное уравнение Кортевега — де Вриза имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{ch^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (2.84)$$

Ввиду линейности легко может быть выписано общее решение

уравнения (2.84) в интегральной форме

$$\eta(x, t) = \int \eta(k) \exp[i(\omega t - kx)] dk, \quad (2.85)$$

где $\eta(k)$ — фурье-спектр начального возмущения и

$$\omega(k) = ck[1 - (k^2 h^2)/6] \quad (2.86)$$

представляет собой длинноволновое разложение дисперсионного соотношения (в принципе, вместо (2.86) можно рассматривать точное дисперсионное соотношение, но нас интересуют длинные волны, и всюду, где это возможно, будем использовать приближение (2.86)).

Если в начальный момент времени задана δ -функция, т. е. $\eta(x, 0) = H_0 \delta(x/\lambda_0)$, то интеграл в (2.85) вычисляется и представляет функцию Эйри:

$$\eta(x, t) = H_0 \lambda_0 [2/(ct h^2)]^{1/3} \text{Ai}\{[2/(ct h^2)]^{1/3}(x - ct)\}. \quad (2.87)$$

Легко показать, что это же решение является асимптотикой произвольного начального возмущения с $\theta = \int \eta(x, 0) dx \neq 0$ на расстояниях, значительно больших λ_0 ; оно представляет собой автомодельное решение линеаризованного уравнения Кортевега — де Вриза. Как следует из формулы (2.87), максимальной является головная волна, амплитуда которой падает как $t^{-1/3}$ (или, что то же самое, как $x^{-1/3}$), а длина растет как $t^{1/3}$ (или $x^{1/3}$). В рамках (2.87) за головной волной следует цуг все более коротких волн с уменьшающейся амплитудой, скорости этих волн меньше скорости длинных волн, и они с течением времени отстают от головной волны. Таким образом, дисперсия "растаскивает" начальное возмущение, приводя к передаче энергии назад, в осциллирующий волновой пакет. Детальная структура пакета зависит от вида начального возмущения $\eta(x, 0)$, его структура может быть оценена из (2.85) с помощью метода стационарной фазы

$$\eta(x, t) \approx [v/(2\pi |dv/dk| x)]^{1/2} \eta(k) \cos(\omega t - kx - \pi/4), \quad (2.88)$$

где

$$v = \frac{d\omega}{dk} = \frac{x}{t} \quad (2.89)$$

и ω определяется формулой (2.86). Разумеется, в окрестности головной волны, где $k \rightarrow 0$, метод стационарной фазы несправедлив (за конечное время волны с скоростями, близкими к скорости длинных волн, не успевают разбежаться), здесь надо пользоваться решением (2.87). Анализ амплитудного множителя в (2.88) показывает, что если начальное возмущение — крупномасштабное и $\eta(k)$ спадает монотонно, то форма волны близка к (2.87) не только в области головной волны; если же начальное возмущение относительно мелкомасштабно, то после ряда длинных волн следует цуг коротких волн с максимальной амплитудой, спадающей со временем как $t^{-1/2}$. Заме-

тим, однако, что ввиду медленного спада амплитуды головной волны на больших расстояниях "выживают" только длинные волны и максимальной является головная волна.

Если в начальный момент времени (в очаге) $\theta = \int \eta(x, 0) dx = 0$ (такое условие выполняется при сбросовых подвижках или взрывах в воде), то легко показать, что автомодельное решение в передней части цуга затухает сильно (как $t^{-2/3}$) и на большом расстоянии "выживает" относительно короткомасштабный цуг с амплитудой в максимуме, убывающей как $t^{-1/2}$, а длина волны максимальной амплитуды постоянна и пропорциональна масштабу начального возмущения. Например, если смещение в очаге представляет собой разного знака две однородные ступени длиной l (такая ситуация может реализоваться при сбросовой подвижке), то длина волны максимальной амплитуды есть $\lambda = 3,7l$ [Пелиновский, 1982]. Таким образом, делающиеся иногда попытки отождествлять длину волны цунами с размером очага не всегда являются корректными. Отметим также, что номер волны максимальной амплитуды растет с расстоянием, что важно для оценки цунамиопасности пришедших к берегу волн.

Для практики важно знать расстояния, на которых проявляется дисперсия, поскольку длинная волна сначала долгое время не меняет своей формы в соответствии с предсказаниями линейной теории мелкой воды. Из соображений размерности и, конечно, из уравнения (2.84) следует формула для длины дисперсии — расстояния, на котором дисперсионные эффекты становятся заметными:

$$L_d = (a_d \lambda^3) / h^2, \quad (2.90)$$

где a_d — численный коэффициент, зависящий от формы начального возмущения и принимаемых нами условий заметности дисперсионных эффектов (например, появление отрицательной девинилиции уровня за первоначально положительным возмущением). Этот вопрос с геофизической точки зрения рассматривался в работе [Пелиновский, 1982], где показано, что a_d имеет порядок 10^{-2} . Отсюда видно, что если длина волны порядка 100 км, то при распространении в открытом океане с глубиной 4 км дисперсионные эффекты накапливаются на расстояниях порядка 625 км, это вполне разумные цифры для волн цунами.

Важным для выбора адекватных математических моделей является вопрос о пригодности линейной дисперсионной теории для описания волнового процесса в любой момент времени, если в начальный момент $U\tau \ll 4$. Для ответа на этот вопрос достаточно рассмотреть поведение локального параметра Урселла, определяемого через амплитуду и длину волны в любой момент времени. Учитывая формулу (2.87) при $\theta \neq 0$, немедленно получаем, что $U\tau \sim t^{1/3}$, т. е. с течением времени параметр Урселла растет, что означает накопление нелинейных эффектов с расстоянием. Таким образом, первоначально линейная волна становится нелинейной, и

для нее совместный учет нелинейности и дисперсии является принципиальным. По порядку величины расстояние, на котором переход к нелинейно-дисперсионным моделям необходим, определяется формулой [Пелиновский, 1982]

$$L_{dn} \sim h^7 / (H^3 \lambda^3) \quad (2.91)$$

и быстро увеличивается с возрастанием глубины бассейна или уменьшением амплитуды волны.

В случае же $\theta = 0$ легко показать, что параметр Урселла для головной волны убывает (как $x^{-1/2}$) и, следовательно, линейная вначале волна остается линейной в любой момент времени.

Нелинейные волны без дисперсии. При $Ug \gg 1$ в уравнении Кортвега — де Вриза можно пренебречь дисперсионным слагаемым. Получаемое при этом уравнение решается точно

$$\eta(x, t) = \eta_0 [x - c(1 + 3\eta/2h) t] \quad (2.92)$$

и описывает волну Римана (простую волну). Характерной особенностью решения (2.92) является зависимость скорости распространения от мгновенного значения поля, что приводит к непрерывному изменению формы волны: укручению переднего склона и сглаживанию заднего (для волны возвышения). Крутизна волны легко вычисляется в явном виде:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{d\eta_0}{dx} \right) / \left(1 + \frac{3ct}{2h} \frac{d\eta_0}{dx} \right). \quad (2.93)$$

Отсюда видно, что на участках с $\frac{d\eta_0}{dx} < 0$ крутизна волны возрастает и за время

$$T_* = - \frac{2h}{3c} \left(\frac{d\eta_0}{dx} \right)^{-1} \quad (2.94)$$

обращается в бесконечность, в рамках данной модели этому соответствует обрушение волны. Такой процесс хорошо известен в гидродинамике и описывает формирование бора [Стокер, 1959].

При исследовании поведения цунами в береговой зоне часто важно знать спектральный состав волны, так как частотная характеристика шельфа обычно имеет резонансный характер. Общая процедура нахождения спектров для неявных решений типа (2.92) разработана в [Пелиновский, 1976]. В частности, если при $t = 0$ задана монохроматическая волна длиной $2\pi/k_0$, то спектр в любой момент времени (но не очень большой) совпадает с рядом Бесселя — Фубини, хорошо известным в нелинейной акустике

$$\eta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}h}{3nck_0t} J_n \left(\frac{3H}{2h} nck_0t \right) \sin [nk_0(x - ct)], \quad (2.95)$$

где $J_n(z)$ — функция Бесселя. Как следует из формулы (2.95), амплитуды обертонов растут со временем, в то время как амплитуда основной волны падает. В частности, в момент обрушения волны энергия второй гармоники составляет около 25 % от исходной; энергия третьей — около 10 % и т. д.

Используя (2.93), можно найти расстояние, на котором проявляются нелинейные эффекты. Критерием этого будем считать увеличение крутизны переднего склона волны цунами, например вдвое. Элементарный расчет приводит к следующей формуле:

$$L_n = a_n (\lambda_0 h) / H, \quad (2.96)$$

где a_n — численный коэффициент, зависящий только от формы начального возмущения. В частности, для синусоидального гребня $a_n = 1/3\pi = 0,11$. На расстояниях больших L_n крутизна волны возрастает значительно, дисперсия перестает быть малой и необходимо переходить к нелинейно-дисперсионной теории. В качестве критерия можно выбрать условие совпадения длины переднего склона и глубины океана. Соответствующая оценка, по существу, совпадает с (2.96), меняется только величина численного коэффициента.

Нелинейно-дисперсионные волны. Итак, как показано выше, практически для любых начальных возмущений на больших расстояниях волны должны описываться нелинейно-дисперсионной теорией. По существу, это означает, что на больших расстояниях длина характерных волн сравнивается с солитонной длиной, и следует ожидать генерации солитоноподобных возмущений. В случае импульсных возмущений можно предсказать дальнейшую эволюцию с помощью простых качественных рассуждений. Если на теле волны генерируются солитоны, то, поскольку их скорость превышает скорость длинных волн, они будут отделяться от исходной волны и "выстраиваться по росту" (скорость солитона тем больше, чем больше его амплитуда). Солитоны, как знакоположительные образования, должны генерироваться гребнеобразными возмущениями. Знакопостоянство солитонов легко объяснимо конкуренцией нелинейных и дисперсионных эффектов. Действительно, дисперсия старается "растачивать" импульс, приводя к формированию волнового хвоста, и в этом смысле можно говорить, что дисперсия действует в отрицательном (по сравнению с направлением движения исходной волны) направлении для возмущений любого знака. Нелинейность же приводит к укрупнению переднего склона гребня и в этом смысле действует в положительном направлении. Конкуренция действующих в противоположных направлениях дисперсии и нелинейности приводит к стабилизации формы волны: образованию солитона положительной полярности. Если волна представляет собой впадину, то нелинейность приводит к увеличению крутизны заднего склона, т. е. действует в отрицательном направлении, как и дисперсия. В этом случае конкуренция нелинейности и дисперсии отсутст-

вует и стационарных волн отрицательной полярности не существует.

Количественная теория эволюции начального возмущения основана на замечательных свойствах уравнения Кортевега – де Вриза: его полной интегрируемости и возможности широкого применения аналитических методов. Ввиду ее важности выделим точные результаты интегрирования уравнения Кортевега – де Вриза в самостоятельный раздел.

2.2.2. Точные решения задачи Коши для уравнения Кортевега – де Вриза

Применим к уравнению Кортевега – де Вриза в безразмерной форме (2.81) преобразование Миуры

$$\zeta(y, \tau) = -v^2 + \left(\frac{2}{3U\Gamma}\right)^{1/2} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.97)$$

которое переводит его в модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (или, как иногда говорят, кубическое уравнение Кортевега – де Вриза)

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - v^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{9U\Gamma} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = 0. \quad (2.98)$$

Сделаем еще одно преобразование, учитывая, что постоянная составляющая в v (уровень воды) является решением уравнения (2.98)

$$v = 1/(2\varepsilon) + \varepsilon w, \quad (2.99)$$

где ε – произвольный параметр, тогда уравнение (2.98) приводится к виду

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - \left(\frac{1}{4\varepsilon^2} + w + \varepsilon^2 w^2\right) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{9U\Gamma} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad (2.100)$$

и заменой переменных $y' = y + 1/(4\varepsilon^2)$, $\tau' = \tau$ сводится к "смешанному" уравнению Кортевега – де Вриза (штрихи опущены)

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - (w + \varepsilon^2 w^2) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{9U\Gamma} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0. \quad (2.101)$$

Как и всюду в книге, мы рассматриваем только импульсные возмущения, характерные для проблемы цунами, в этом случае w достаточно быстро спадает при $|y| \rightarrow \infty$. Тогда из (2.101) немедленно следует сохранение следующей величины

$$\int w(y, \tau) dy = \text{const} \quad (2.102)$$

во времени. Функция w не имеет физического смысла, она зависит также от произвольного параметра ε и может быть разложена в степенной ряд по этому параметру (необходимые условия аналитич-

ности функции w , как можно будет проверить позже, окажутся выполнимыми):

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n(y, \tau). \quad (2.103)$$

Но тогда из (2.102) вытекает неограниченность законов сохранения

$$\int w_n(y, \tau) dy = \text{const}. \quad (2.104)$$

В силу (2.97) и (2.99) можно выразить исходную функцию ζ через w

$$\zeta = -\left(\frac{1}{4\varepsilon^2} + w + \varepsilon^2 w^2\right) + \varepsilon \left(\frac{2}{3U\Gamma}\right)^{1/2} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.105)$$

и с учетом ряда (2.103) уравнение (2.105) представляет собою дифференциальное уравнение для нахождения w_n через ζ и ее производные. В результате получаем бесконечное число законов сохранения для исходного поля, ввиду их важности приведем некоторые из них в размерных переменных:

$$\int \eta(x, t) dx = \text{const}, \quad (2.106)$$

$$\int \eta^2(x, t) dx = \text{const}, \quad (2.107)$$

$$\int \left[\eta^3 + h^3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \text{const} \quad (2.108)$$

и т. д. Существование первых двух интегралов (импульса и энергии) является тривиальным следствием теоремы Нетер для консервативной автономной системы. Наличие остальных свидетельствует о глубоких свойствах симметрии решений уравнения Кортевега — де Вриза и возможности его полного интегрирования.

Схема точного решения уравнения Кортевега — де Вриза основана на подстановке

$$\zeta = -6\beta \left[E(\tau) + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right], \quad (2.109)$$

где $\beta = 1/9U\Gamma$, преобразующей уравнение (2.81) к следующей форме:

$$6 \frac{dE}{d\tau} \Psi^2 = \frac{\partial}{\partial y} \left(R \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \Psi \frac{\partial R}{\partial y} \right), \quad (2.110)$$

$$R = 6 \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \Psi \frac{\partial \eta}{\partial y} + 2\zeta \frac{\partial \Psi}{\partial y} - 24\beta E \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (2.111)$$

Замена (2.109) представляет собою уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \left(E + \frac{1}{6\beta} \zeta \right) \Psi = 0 \quad (2.112)$$

с потенциалом, определяемым решением уравнения Кортевега – де Вриза. В общем случае, как известно, уравнение Шредингера имеет дискретный и сплошной спектр собственных значений E . В случае дискретного спектра собственные функции Ψ достаточно быстро спадают на бесконечности и интегрирование (2.110) по y в бесконечных пределах приводит к

$$\frac{dE}{d\tau} = 0, \quad (2.113)$$

т. е. к неизменности дискретного спектра, как бы ни изменялось в пространстве и времени решение уравнения Кортевега – де Вриза! Аналогичное заключение можно сделать и относительно сплошного спектра, проинтегрировав (2.110) по периоду вне зоны влияния функции ζ (рассматриваем только импульсные возмущения). Таким образом устанавливаем тесную связь между решениями уравнения Кортевега – де Вриза и уравнением Шредингера. Собственные функции уравнения Шредингера удовлетворяют также уравнению, следующему из (2.110) с учетом (2.113):

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + 2\beta \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} - 6\beta E \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \zeta(y, \tau) \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0. \quad (2.114)$$

Полученные уравнения для функции Ψ позволяют предложить новую схему решения уравнения Кортевега – де Вриза.

1) По заданному начальному условию $\zeta_0(y)$ из уравнения Шредингера (2.112) находится полный спектр собственных значений E и набор собственных функций $\Psi(y, 0)$.

2) Далее находится временная эволюция функций Ψ из (2.114). Однако мы знаем только, что E не зависит от τ , а зависимость ζ от τ нам не известна. Рассмотрим поэтому уравнение (2.114) вне зоны действия возмущения при $|y| \rightarrow \infty$. В этом случае оно становится уравнением с постоянными коэффициентами и легко интегрируется. В результате находим асимптотики собственных функций в любой момент времени $\Psi(y, \tau)$ при больших y .

3) Возвратимся к уравнению Шредингера (2.112). По заданному спектру и асимптотикам собственных функций восстанавливается потенциал $\zeta(y, \tau)$ в любой момент времени. Решение обратной задачи для уравнения Шредингера, как известно, однозначно и осуществляется с помощью интегрального уравнения Марченко. Это наиболее "тяжелая" часть вычислительной работы в проблеме солитонов, однако она не связана непосредственно с предметом книги и здесь опущена. Более полное изложение всех вопросов решения уравнения Кортевега – де Вриза с помощью описанного подхода, в том числе и применительно к волнам на воде, см. в [Zabusky, Galvin, 1971; Segur, 1973; Узем, 1977; Miura, 1976; Ablowitz, Segur, 1981; Ньэлл, 1989; Drazin, Johnson, 1989; Mei, 1989; Ablowitz, Clarkson, 1991].

Наконец, стоит отметить гамильтоновость уравнения Кортевега — де Вриза, оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H_s}{\delta \eta}, \quad (2.115)$$

где гамильтониан H_s есть

$$H_s(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{ch^2}{12} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \frac{c\eta^3}{4h} \right] dx. \quad (2.116)$$

Гамильтоновость нелинейного эволюционного уравнения позволяет понять многие важные вопросы симметрии, существования интегралов, устойчивости получаемых решений. В частности, очевидно, что солитон не может быть устойчив в ляпуновском смысле, поскольку, как уже показано выше, он формируется из весьма общих начальных возмущений, а его скорость зависит от амплитуды; следовательно, из двух близких возмущений рождаются два солитона с близкими амплитудами, которые за достаточно большое время разбегутся на конечное расстояние. Поэтому об устойчивости солитона надо говорить только в смысле орбитальной устойчивости [Benjamin, 1972; Vona, 1975]; аналогичные утверждения справедливы и для N солитонных решений уравнения Кортевега — де Вриза, хотя их доказательство весьма нетривиально [Maddocks, Sachs, 1993].

Для приложений наиболее важно знать количество солитонов, которое может образоваться из произвольного начального возмущения. В этом случае достаточно решить уравнение Шредингера (2.112), при этом амплитуды вторичных солитонов находятся через дискретные значения E по формуле

$$H_n = (|E_n|/U_0) H_0. \quad (2.117)$$

Из этой схемы становится очевидным следующий факт: если $\zeta_0 < 0$ (нет потенциальной ямы в уравнении Шредингера и, следовательно, нет дискретных уровней), то солитоны в принципе не могут возникать, этот вывод мы уже получали из качественных соображений. Волна на больших расстояниях в этом случае похожа на линейный цуг волн (автомодельное решение линеаризованного уравнения Кортевега — де Вриза, описываемое функцией Эйри), однако количественные характеристики этого цуга зависят от нелинейности. Если же в профиле возмущения доля гребней велика, так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_0(y) dy > 0, \quad (2.118)$$

то уравнение Шредингера всегда имеет дискретный спектр, и по крайней мере один солитон всегда образуется. Наиболее простой пример расчета вторичных солитонов имеет место в случае, если

начальное возвышение является солитоноподобным, т. е. $\zeta_0 \sim \text{sech}^2 x$, но λ_0 и H_0 не связаны соотношением (2.79), тогда получаем простую формулу для амплитуд вторичных солитонов:

$$H_{n+1} = \frac{H_0}{4U\Gamma} [(1 + 8U\Gamma)^{1/2} - (1 + 2n)]^2, \quad (2.119)$$

где $n = 0, 1, \dots, N-1$, при котором выражение, стоящее в квадратных скобках, положительно. Из формулы (2.119) следует вывод, что амплитуды солитонов не более чем в два раза могут превосходить начальную амплитуду — этот вывод справедлив для начальных возмущений любой формы и удобен для проверки численных алгоритмов.

Использованное выше уравнение Кортевега — де Вриза, как и модели буссинесковского типа для описания длинных волн на воде, вообще говоря, не является единственным. Действительно, длинноволновое разложение линейного дисперсионного соотношения может быть записано в нескольких эквивалентных формах:

$$\omega = ck [1 - (k^2 h^2)/6], \quad (2.120)$$

$$\omega = ck [1 - (\omega^2 h)/(6g)], \quad (2.121)$$

$$\omega = ck [1 - (\omega k h^2)/(6c)], \quad (2.122)$$

в пределе длинных волн они равноправны. Поскольку при слабой нелинейности и дисперсии учет каждого фактора может быть произведен в отсутствие других, то можно записать также несколько форм нелинейного эволюционного уравнения для длинных волн, первая из которых соответствует (2.120) — это и есть собственно уравнение Кортевега — де Вриза; вторая, соответствующая (2.121)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{ch}{6g} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} = 0, \quad (2.123)$$

пока еще не имеет своего имени, и третья, соответствующая (2.122), получила название уравнения *Benjamin — Bona — Mahony* (1972) (см. также [Bona et al., 1981]):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (2.124)$$

По существу, каждое из этих уравнений может быть получено из соответствующих версий уравнений нелинейно-дисперсионной теории буссинесковского типа, неоднозначность моделей уже обсуждалась в разд. 1.1.1. В пределе длинных волн малой амплитуды все три уравнения — (2.97), (2.123) и (2.124) — должны рассматриваться как равноправные, однако математика здесь получается разная. Так, только уравнение Кортевега — де Вриза является точно интегрируемым с помощью метода обратной задачи теории рассеяния, и в его рамках взаимодействие солитонов носит упругий характер. В

рамках других уравнений, как показывают результаты численных расчетов, взаимодействие солитонов приводит к потерям энергии, за солитонами образуются хвосты и т. д. Правда, все эти эффекты проявляются в следующем порядке по нелинейности, т. е. по существу за рамками всех предлагаемых моделей. Поэтому не стоит придавать слишком большого значения точной интегрируемости уравнения Кортевега — де Вриза для понимания волн на воде, хотя, конечно, наличие точного решения (помимо самостоятельной красоты с точки зрения чистой математики) упрощает многие процедуры, и мы в дальнейшем неоднократно будем использовать уравнение Кортевега — де Вриза в качестве первого приближения.

2.2.3. Оценки нелинейности и дисперсии для волн цунами

Полученные выше формулы позволяют выяснить роль нелинейности и дисперсии для волн цунами в открытом океане. Но существуют и некоторые трудности.

1) Параметр Урселла, масштабы дисперсии и нелинейности сильно зависят от глубины океана и длины волны. Глубина в очаге значительно меняется на протяжении очага, который обычно располагается на склоне подводной впадины. Длина волны из-за неопределенности и неизвестности формы возмущения в очаге может выбираться относительно произвольно (по нулям, по уровню 0,5 и т. д.). В частности, для полусинусоиды (типичной формы очага в модельных расчетах) длина волны по уровню 0,5 составляет $2/3$ от "истинной".

2) Критерии переходов от одной модели к другой в известной мере произвольны (например, изменение крутизны волны именно в два раза), поэтому численные коэффициенты во всех формулах, определяющих масштабы, можно менять в некоторых пределах. Более того, эти критерии должны быть согласованы между собой. В частности, солитон является установившейся волной в результате конкуренции нелинейности и дисперсии, так что соответствующие масштабы действия этих эффектов должны быть одинаковыми. Это дает основание по известному a_n выбрать a_d , и наоборот.

Таким образом, аналитические оценки нелинейности и дисперсии для волн цунами, сделанные только на основании приведенных выше формул, а не на основании детальных численных расчетов, в значительной мере условны и точность числовых значений невысока. Тем не менее в качестве первого шага такие оценки необходимо было сделать [Пелиновский, 1982; Mirchina, Pelinovsky, 1982, 1984, 1988]. Они показали следующее.

Цунами, вызванные подводными землетрясениями. В качестве фактического материала были выбраны данные об очагах цунами этого столетия, реконструированные с помощью метода обратных

рефракционных диаграмм. Эти данные частично уже приводились в табл. 1.1. Расчеты параметров Урселла и длин нелинейности и дисперсии показали, что характерные масштабы проявления нелинейных и дисперсионных эффектов меняются в широких пределах: от нескольких десятков до десятков тысяч километров и практически большинство из них может считаться нелинейно-дисперсионными при распространении на трансокеанических трассах. Приведем несколько примеров.

Цунами 2 марта 1933 г., Япония, вызвано одним из сильнейших в этом столетии землетрясений, унесшим около 20 тысяч жизней. Для него параметр Урселла имеет порядок 0,05–0,6, т. е. данное цунами следует отнести к чисто дисперсионному. Длина дисперсии в этом случае составляет 200–3000 км, что вполне достаточно для наблюдения дисперсионных эффектов. К сожалению, данных наблюдений, как, впрочем, и во многих других случаях, недостаточно, чтобы судить о реальности проявления дисперсионных эффектов.

Ниигатское цунами 16 апреля 1964 г. Параметр Урселла 12–47, следовательно, данное цунами следует считать нелинейным. Длина нелинейности составляет всего 300–600 км, так что действием нелинейности здесь никак нельзя пренебрегать.

Цунами в Японском море 26 мая 1983 г. Параметр Урселла здесь меняется в широких пределах от 0,01 до 10, и, следовательно, для него должны быть важными и нелинейные, и дисперсионные эффекты. Данное цунами, с точки зрения специалиста, примечательно прежде всего тем, что для него имеются многочисленные наблюдения, которые свидетельствуют в пользу сделанного вывода о нелинейно-дисперсионном характере цунами в Японском море. На рис. 1 (см. введение) приведены различные типы волновых профилей на побережье Японии во время данного цунами, где видны как чисто нелинейные эффекты (обрушение волн), так и формирование групп солитонов из-за взаимного действия нелинейности и дисперсии.

Оценим теперь роль нелинейности и дисперсии для очагов, использованных для оценки цунами риска на побережьях России. В российских схемах цунами районирования принимаются следующие параметры волн цунами в очаге: высота 1 м и длина 90 км (см., например, [Пелиновский, 1982]). Тогда параметр Урселла порядка 10, и, следовательно, можно ожидать проявления нелинейных эффектов. Однако длина нелинейности при этом составляет примерно 20 тыс км, что значительно больше расстояния до берега, поэтому нелинейные эффекты не успевают накопиться. Этот вывод, ранее сделанный на основании сравнения результатов численных расчетов линейного и нелинейного вариантов, находит свое простое объяснение в рамках аналитических моделей.

И наконец, возможен прямой путь оценки важности нелинейности и дисперсии для волн цунами в рамках численного моделирования реальной ситуации распространения волны цунами по различным моделям. В частности, расчеты для побережья Японии от

модельного очага, выполненные *Shuto* (1977), показали, что для волн цунами с периодом 20 мин нелинейность существенна на глубинах меньших 30 м, а дисперсией можно пренебречь. С уменьшением периода дисперсия становится также существенной.

Цунами, вызванные извержениями подводных вулканов и взрывами в воде. Хотя мы и описали ряд механизмов генерации волн цунами эксплозивными извержениями подводных вулканов и взрывами в воде (см. разд. 1.3), но степень подтверждения теоретических моделей натурными данными невелика, используем здесь для оценок приближенные эмпирические формулы, описывающие параметры эквивалентного очага (1.188)–(1.190). Параметр Урселла в этом случае находится в явном виде:

$$U_r = 2,8 \cdot 10^{-5} E^{0,84} h_e^{-3}, \quad (2.125)$$

где h_e — в метрах и E — в джоулях. Применим эту формулу для оценки свойств цунами, вызванного извержением вулкана Кракатау в 1883 г. Энергия этого извержения оценивается энергией взрыва 250–500 тысяч атомных бомб типа хиросимской (10^{19} Дж). Глубина океана в этом районе не превышает 200 м. Из формулы (2.125) находим $U_r \sim 40$ тысяч. Даже если учесть мелководность извержения и снизить высоту волны цунами в очаге, то величина параметра Урселла все равно остается большой и, следовательно, определяющим эффектом для волн цунами, вызванных извержениями вулкана Кракатау, является нелинейность. С другой стороны, при взрывах, в том числе ядерных ($E < 10^{15}$ Дж), на глубокой воде параметр Урселла всегда мал, и основным эффектом является дисперсия.

Оценим теперь характерные масштабы нелинейности и дисперсии. Так, для длины нелинейности с помощью формул (1.189), (1.190) и (2.96) находим

$$L_n = 8 \cdot 10^{-2} h_e E^{0,06}, \quad (2.126)$$

где L_n и h_e — в метрах. Длина нелинейности практически не зависит от энергии извержения и составляет не более $10h_e$ (в плоской задаче). Длина дисперсии находится аналогично:

$$L_d = 3,4 \cdot 10^{-6} E^{0,9} h_e^{-2}. \quad (2.127)$$

В частности, для цунами, вызванных взрывами в открытом океане, длина дисперсии не превышает нескольких сотен метров. Дисперсия проявляется очень быстро, что и подтверждается многочисленными натурными данными, на чем здесь останавливаться не будем. Такая же ситуация типична и для цунами, вызванных извержениями небольших вулканов. Так, при извержении подводного вулкана Миедзин (около Японии) 23 сентября 1952 г. зарегистрированы волны цунами высотой 1,5 м и периодом около 1,5 мин (см., например, [*Mirchina, Pelinovsky, 1988*]). Для этого цунами $U_r \ll 1$ и $L_d < 100$ м, так что дисперсия определяет динамику данного цунами.

Влияние дисперсии может приводить к новым эффектам в силу множественности извержения вулкана (многократность выбросов из жерла вулкана). Рассмотрим, например, случай двух последовательных выбросов через промежуток времени τ . Если первый выброс был относительно слабощным, то он приводит к генерации слабых и коротких волн цунами, имеющих малую скорость распространения в силу дисперсии коротких волн на воде. Если затем следует более мощный выброс, то он генерирует более мощные и более длинные волны, имеющие большую скорость распространения. На некотором расстоянии от очага эти волны могут наложиться друг на друга и в результате интерференции высота волны может быть весьма значительной [Мирчина, Пелиновский, 1987]. Подчеркнем, что этот эффект может быть только в дисперсионной (или нелинейно-дисперсионной) среде, когда волны разной длины имеют разную скорость распространения. Эта проблема тесно связана с симметрией исходных уравнений во времени и, следовательно, с обратимостью функции Грина, формально представляющей собой отклик системы на дельта-функцию — возмущение бесконечной амплитуды. В дисперсионной среде функция Грина всегда конечна, в частности для линеаризованного уравнения Кортевега — де Вриза она выражается через функцию Эйри. Если каким-либо образом создать "обратную" функцию Грина, то на некотором расстоянии она соберется в дельта-функцию, а затем превратится в "обычную" функцию Грина. Эта же ситуация возможна и в нелинейно-дисперсионной задаче, в частности, известно решение задачи Коши для уравнения Кортевега — де Вриза при дельтаобразном начальном возмущении. Конечно, для возмущений большой амплитуды слабонелинейные эволюционные уравнения типа уравнения Кортевега — де Вриза неприменимы, тем не менее эффект усиления волны при соответствующем выборе начальных условий может быть весьма значительным. В работе [Мирчина, Пелиновский, 1987] показано, что если основному извержению предшествует весьма слабое извержение с энергией, составляющей только 2 % от энергии основного выброса, то результирующая амплитуда волны может увеличиться на 10 % и быть весьма заметной.

Таким образом, и при рассмотрении волн цунами, вызванных извержениями подводных вулканов и взрывами в воде, необходимо также учесть нелинейность и дисперсию.

2.2.4. Учет влияния вращения Земли на нелинейную динамику волн цунами

Мы уже приводили фактические данные о параметрах волн цунами в очаге, свидетельствующие об их широком разнообразии. Встречаются волны с длинами порядка 100 км и, следовательно, периодами порядка часа. Для таких волн влияние вращения Земли

может оказаться принципиальным. Для упрощения выкладок пренебрежем в этом разделе неровностями глубины океана. В разд. 2.1 мы получили уравнения нелинейно-дисперсионной теории для волн цунами в невращающемся бассейне и показали, что они представляют собой известные нелинейные уравнения мелкой воды с добавочным слагаемым, учитывающим малую дисперсию волн — уравнения (2.11) и (2.12). С другой стороны, в рамках чисто нелинейной теории мелкой воды вращение Земли легко учитывается, см. формулу (1.8). Можно проследить в рамках асимптотических процедур, что это слагаемое не изменяется и при слабой дисперсии. Запишем основные уравнения нелинейно-дисперсионной теории, модифицированной вращением Земли:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}[(h + \eta) \mathbf{u}] = 0, \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2[\mathbf{f} \times \mathbf{u}] + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta = \mathbf{D}, \quad (2.129)$$

$$\text{где } \mathbf{D} = \frac{1}{3(h + \eta)} \nabla \left\{ (h + \eta)^3 \left[\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} - (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \right] \right\}. \quad (2.130)$$

При слабой нелинейности выражение для дисперсионного слагаемого может быть упрощено:

$$\mathbf{D} = \frac{h}{3} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{1}{3} \nabla \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{h}{3} \nabla \Delta \eta. \quad (2.131)$$

Если нелинейность и дисперсию считать малой, то снова удобно перейти от системы (2.128), (2.129) к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \Delta \eta = \Pi - 2h \operatorname{div}[\mathbf{f} \times \mathbf{u}], \quad (2.132)$$

где функция Π определена формулой (2.21). Будем считать также слабым влияние вращения Земли, это предположение оправдано для не очень длинных волн. Тогда слагаемые, стоящие в правой части уравнения (2.132), являются малыми и в них можно использовать любые преобразования, вытекающие из линейной теории мелкой воды (мы использовали эти приближения в разд. 2.1.2). Вводя вместо t новую координату s

$$s = xc^{-1} - t, \quad c = (gh)^{1/2} \quad (2.133)$$

и рассматривая только одномерные движения, после однократного интегрирования уравнение (2.132) сведем к

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} \right) = 2f^2 \eta. \quad (2.134)$$

Здесь использована дополнительная связь между продольной и поперечной компонентами скорости, вытекающая из уравнения (2.129) в линейном приближении:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2fu = 0. \quad (2.135)$$

Уравнение (2.134) было выведено *Островским* (1978), а затем использовалось во многих работах для описания нелинейных волн различной физической природы во вращающемся океане, в литературе его часто называют уравнением *Островского*. Отметим сразу же два простых интегральных следствия уравнения (2.134). Рассматривая локализованные возмущения, для которых $\eta \rightarrow 0$ при $|s| \rightarrow \infty$, легко показать справедливость двух интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(s, x) ds = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2(s, x) ds = \text{const}, \quad (2.136)$$

причем, как видим, первый интеграл фиксирован в отличие от уравнения *Кортевега – де Вриза*, и солитонные решения уравнения *Кортевега – де Вриза* не могут ему удовлетворять.

Исследуем сначала стационарные периодические решения уравнения (2.134), зависящие лишь от одной "бегущей" координаты $\xi = s - vs$. Тогда уравнение (2.134) трансформируется в обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d}{d\xi} \left(-vc \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{3\eta}{2h} \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{h}{6g} \frac{d^3\eta}{d\xi^3} \right) = 2f^2 \eta, \quad (2.137)$$

аналитические решения которого получить в явном виде не удастся. Рассмотрим сначала очень длинные пологие волны, для которых высокочастотная дисперсия не существенна. В этом случае в уравнении (2.137) можно опустить слагаемое с четвертой производной, и оно сводится к уравнению нелинейного осциллятора

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(-vc\eta + \frac{3\eta^2}{4h} \right) = 2f^2 \eta, \quad (2.138)$$

имеющему первый интеграл:

$$\left[\frac{d}{d\xi} \left(-vc\eta + \frac{3\eta^2}{4h} \right) \right]^2 + 2vc f^2 \eta^2 - f^2 h^{-1} \eta^3 = \text{const}. \quad (2.139)$$

На фазовой плоскости стационарных волн в этом случае имеется только одно положение равновесия $\eta = 0$, являющееся центром при $v > 0$, и, следовательно, солитоны не могут существовать. Траектории вблизи этого положения равновесия, близкие к эллипсам, соответствуют линейной гармонической волне. На фазовой плоскости имеется также особая прямая $\eta = 2vch/3$, ограничивающая область финитных периодических движений. Ей соответствует волна предельной амплитуды, состоящая из кусков парабол

$$\eta = \frac{2}{9} f^2 h \xi^2 - \frac{1}{3} vch \quad (2.140)$$

между минимальным и максимальным значениями

$$\eta_- = -\frac{1}{3} uch, \quad \eta_+ = \frac{2}{3} uch. \quad (2.141)$$

Удобно, как и для волн Стокса, выразить все параметры предельной волны через длину волны:

$$\eta_+ = \frac{f^2 \lambda^2}{27g}, \quad \eta_- = -\frac{f^2 \lambda^2}{54g}. \quad (2.142)$$

На вершине предельной волны имеется излом с углом при вершине

$$q = \pi - \arctg \frac{4 f^2 \lambda}{31/3 g}. \quad (2.143)$$

Отметим также, что в предельной волне вертикальное ускорение

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = \frac{4}{9} f^2 h \quad (2.144)$$

есть величина постоянная, за исключением вершины волны, где, вообще говоря, нарушается приближение очень пологих волн. В окрестности предельной волны необходим более точный анализ нелинейности [Шприца, 1986], однако для волн относительно малой амплитуды возникающие здесь поправки несущественны.

Сделаем некоторые оценки влияния вращения на структуру нелинейных волн цунами. Принимая $f = 10^4 \text{ с}^{-1}$ и длину волны цунами $\lambda = 100 \text{ км}$, из (2.142) получим максимальную амплитуду волны в 0,5 м. Еще меньше будут амплитуды более коротких волн цунами. Столь низкие значения предельных амплитуд нелинейных длинных волн во вращающемся океане свидетельствуют о слабой эффективности стационарных нелинейных волн, более вероятными являются нестационарные процессы. В частности, на гребнях такой волны коротковолновая дисперсия становится существенной (отброшенное слагаемое с четвертой производной), и здесь, по-видимому, формируются солитоны, описываемые уравнением Кортевега – де Вриза. Структура стационарных волн в рамках более полного уравнения (2.137) изучалась численно [Ostrovsky, Stepanyants, 1990; Gilman et al., 1996]. Действительно, стационарная волна большой амплитуды состоит из солитона, "сидящего" на параболическом профиле (2.140). Численное решение задачи Коши для эволюционного уравнения (2.134) показало, что если в начальный момент задать профиль волны близким к параболическому в соответствие с (2.140), то в областях, близких к вершинам, происходит интенсивная генерация коротких импульсов, форма которых снова близка к форме солитонов Кортевега – де Вриза. Число солитонов зависит от эффективного параметра Урселла, как это и должно следовать для уравнения Кортевега – де Вриза. Вне солитонной зоны профиль волны фактически остается параболическим. Если же в начальный момент задана периодическая последовательность солитонов, соответствующая кноидальной волне – решению уравнения Кортевега –

де Вриза, то солитоны начинают трансформироваться, за ними возникают аперiodические хвосты, затем солитоны вообще теряются в образовавшихся нестационарных возмущениях разной полярности, однако через некоторое время они вновь восстанавливаются почти с первоначальной амплитудой на фоне квазисинусоидальных возмущений больших и малых масштабов. Форма импульса все время, пока он хорошо различим, остается близкой к форме солитона соответствующей амплитуды. Затем повторяется процесс разрушения импульса и образования нового; происходит явление, похожее на рекуррентцию.

Таким образом, вращение Земли влияет на нелинейную динамику одиночных волн цунами на больших расстояниях.

2.3. ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН ЦУНАМИ В ОКЕАНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Неровности дна приводят к искажению путей распространения волн цунами. Уже отмечалось, что рефракция является основным фактором изменения высоты цунами вдоль побережья. Кроме того, возможна локализация энергии волны вдоль некоторых направлений. В частности, стационарное (волноводное) распространение волны над подводным хребтом наблюдается как в лабораторных, так и численных экспериментах. Очевидно, что в случае волноводного распространения энергия цунами может передаваться на большие расстояния без заметного ослабления. Все это указывает на необходимость более внимательного рассмотрения теоретических моделей планового распространения волн цунами.

2.3.1. Рефракция волн цунами

Для описания рефракционных эффектов с учетом нелинейности и дисперсии воспользуемся лучевым методом, развитым в разд. 2.1.2. При малой нелинейности и дисперсии он приводит к уравнениям для лучей (2.27), (2.28) и нелинейному эволюционному уравнению типа модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза (2.37) или (2.39) — все уравнения из разд. 2.1.2. Общее решение этих уравнений для произвольной топографии дна океана не находится, и интересно рассмотреть различные приближенные решения, иллюстрирующие влияние различных факторов на процесс распространения волн цунами.

Траектории лучей. Воспроизведем сначала лучевые уравнения в гамильтоновой форме:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad \omega = [gh(x, y)]^{1/2} |k|. \quad (2.145)$$

Отметим еще раз, что в этом приближении лучи определяются без учета нелинейности и дисперсии, это можно сделать только для достаточно длинных волн малой амплитуды.

Начнем анализ с тривиального случая бассейна постоянной глубины. Тогда $\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$ и уравнения (2.145) легко интегрируются:

$$r = r_0 + I_0 (gh)^{1/2} t,$$

или

$$y = y_0 + \text{const}(x - x_0) \quad (2.146)$$

(I — единичный вектор). Лучи в данном случае представляют собой прямые линии, в общем случае не обязательно параллельные, так что динамика волнового поля может быть весьма нетривиальна. Рассмотрим теперь движение волны к берегу в случае простой геометрии прибрежной зоны (изобаты параллельны берегу, т. е. $h = h(x)$). При этом из (2.145) сразу следует, что $k_y = \text{const}$ и, если обозначить начальное положение луча x_0, y_0 и начальный угол скольжения χ_0 (угол между направлением лучей и изобатами), то легко получить общий интеграл (2.145) в виде

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x \left[\frac{h_0}{h(x)} - \cos^2 \chi_0 \right]^{-1/2} dx. \quad (2.147)$$

В частном случае параболического дна $h = h_0(x/x_0)^2$ лучи являются дугами окружности

$$(y - y_0 - x_0 \operatorname{tg} \chi_0)^2 + x^2 = x_0^2 / \cos^2 \chi_0 \quad (2.148)$$

с центром на береговой линии и радиусом, зависящим от начального угла скольжения. Уже из этого простого аналитического примера можно увидеть ряд общих свойств лучей в бассейне переменной глубины: выпрямление лучей на мелководье (формально в рамках данного приближения к берегу волны всегда подходят нормально), поворот лучей и их отражение от зоны больших глубин, формирование волноводов цунами над подводными хребтами (простейшие решения здесь представляют собой "склепку" дуг окружности (2.148) по разные склоны хребта), образование краевых волн на подводном склоне и т. д. Они, естественно, сохраняются и при более общих законах изменения глубины. Существующие здесь результаты сейчас являются классическими, отметим лишь несколько книг, в которых рассматривается математическая теория динамики лучей [Бабич, Булдырев, 1972].

Система уравнений (2.145) является нелинейной, их гамильтоновость позволяет использовать современные методы нелинейной динамики. Рассмотрим, например, волноводное распространение

волн цунами над подводным хребтом, ось волноводного канала обозначим x . В этом случае удобно в качестве независимой переменной использовать не t , а x . Тогда уравнения (2.145) можно переписать с сохранением гамильтоновой формы [Abdulaev, 1991]:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (2.149)$$

где функция Гамильтона H равна

$$H = -[n^2(x, y) - p^2]^{1/2}, \quad (2.150)$$

$$p = \left(n \frac{dy}{dx} \right) / \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right], \quad n = \left[\frac{h_0}{h(x, y)} \right]^{1/2}. \quad (2.151)$$

Будем считать, что глубина изменяется так, что функция n представима в следующем виде:

$$n^2 = n_0^2(y) + \varepsilon n_1(x, y), \quad (2.152)$$

где ε — некоторый малый параметр. Учитывая его малость, гамильтониан представим в виде

$$H = H_0(y, p) + \varepsilon V(y, p, x), \quad (2.153)$$

$$H_0 = -[n_0^2(y) - p^2]^{1/2}, \quad V(y, p, x) = n_1(x, y)/(2H_0). \quad (2.154)$$

Такое представление соответствует случаю, когда при $\varepsilon = 0$ глубина меняется только в поперечном к оси хребта направлении, т. е. $h = h(y)$. Будем считать, что ширина хребта равна L и вне его глубина постоянна. Тогда легко представить себе поведение лучей в невозмущенном волноводе: часть лучей будет захвачена волноводом (в простейшем случае параболического профиля волновода такие лучи описываются дугами окружности (2.148), сшиваемыми на оси хребта), другие соответствуют

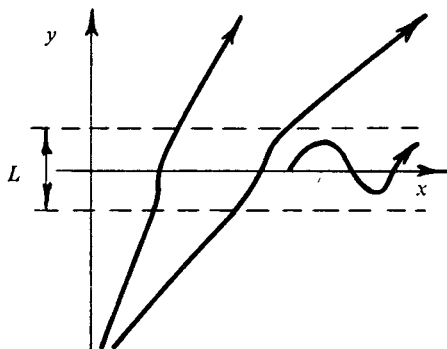


Рис. 2.1. Трансформация лучей над подводным хребтом

прохождению лучей через хребет без их захвата (комбинация прямых линий (2.146) и дуг окружности (2.148)), качественно эти случаи показаны на рис. 2.1. Интересно представить различные режимы лучевых траекторий на фазовой плоскости (y, p) — рис. 2.2. Захваченным лучам соответствуют замкнутые траектории на фазовой плоскости, а незахваченным (пролетным) — незамкнутые, уходящие на бесконечность параллельно оси y . Эти режи-

мы разделены сепаратрисами. Фазовый портрет этой системы эквивалентен фазовому портрету нелинейного осциллятора (для волноводных мод) и эта аналогия помогает представить себе возможные режимы при наличии возмущений. Так, если ось хребта периодически изгибается в поперечном направлении или глубина на оси хребта периодически модулирована, то получаем нелинейный осциллятор с внешней периодической силой и его поведение хорошо известно (см., например, [Thompson, Stewart, 1990; Gaponov-Grekhov, Rabinovich, 1992; Nettel, 1992]). Возникающий здесь нелинейный резонанс может приводить к раскачке амплитуды колебаний, а при некоторых условиях и к их стохастизации. Но тогда поведение лучей становится непредсказуемым, и волновое поле, прошедшее большое расстояние вдоль хребта (или вдоль берегового склона), носит нерегулярный характер. Эти эффекты сейчас активно изучаются в оптике и акустике [Abdulaev, 1991] и, естественно, могут быть перенесены на задачи цунами. Здесь, однако, предстоит еще большая работа по их анализу и оценке их важности для описания реальных цунами.

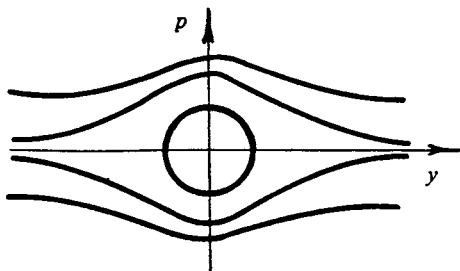


Рис. 2.2. Фазовая плоскость для лучей над подводным хребтом

Динамика волнового поля. Рассмотрим теперь эволюцию волнового поля вдоль лучей, описываемую модифицированным уравнением Кортевега – де Вриза, полученным в разд. 2.1. В переменных

$$\eta = \xi M, \quad M(t) = (h_0/h)^{1/4} (b_0/b)^{1/2}, \quad (2.155)$$

где h_0 и b_0 – начальные значения глубины и расстояния между лучами, оно сводится к уравнению Кортевега – де Вриза с переменными коэффициентами

$$(gh)^{1/2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{3M}{2h} \xi \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} = 0, \quad (2.156)$$

которое наиболее удобно для дальнейшего анализа.

Прежде всего рассмотрим линейные длинные волны. Тогда из (2.156) немедленно следует сохранение ξ вдоль луча, а из (2.155) известный закон Грина для высоты волны

$$H(t) = H_0 M(t) = H_0 (h_0/h)^{1/4} (b_0/b)^{1/2}, \quad (2.157)$$

так что глубина волны возрастает на мелководье и при сужении лучей. Следует сразу заметить, что в этом приближении соседние лучи играют роль канала для волны, поэтому мы часто будем говорить о b как о ширине канала.

Если параметр Урселла мал ($Ur \ll 1$), то в уравнении (2.156) можно пренебречь нелинейностью, после введения новой независимой переменной

$$l' = \int (h/h_0)^{1/2} dl \quad (2.158)$$

оно сводится к линеаризованному уравнению Кортевега — де Вриза с постоянными коэффициентами и его решение может быть выписано в интегральной форме. На больших расстояниях от очага оно определяется автомодельным решением, выражаемым через функцию Эйри, выпишем здесь решение непосредственно для смещения уровня воды:

$$\eta(t, l) = H_0 \lambda_0 (h_0/h)^{1/4} (b_0/b)^{1/2} \left[2/h_0^2 \int (h/h_0)^{1/2} dl \right]^{1/3} \times \\ \times Ai \left\{ \left[2/h_0^2 \int (h/h_0)^{1/2} dl \right]^{1/3} (gh_0)^{1/2} \left[t - \int (gh)^{-1/2} dl \right] \right\}. \quad (2.159)$$

Это решение справедливо при неравном нулю объеме вытесненной воды в очаге. Максимальной является головная волна, ее высота изменяется по закону

$$H(l) = H_0 \lambda_0 (h_0/h)^{1/4} (b_0/b)^{1/2} \left[2/h_0^2 \int (h/h_0)^{1/2} dl \right]^{1/3}. \quad (2.160)$$

Первые два множителя соответствуют известному закону Грина, последний описывает влияние дисперсии, стремящейся уменьшить высоту волны, особенно в глубоководной части. Отметим также, что дисперсионное слагаемое не зависит от расстояния между лучами, т. е., по существу, от одномерности или двумерности задачи, но это справедливо на больших расстояниях от очага, когда волна становится квазиодномерной. Период головной волны определяется формулой

$$T = \left[h_0^2 \int (h/h_0)^{1/2} dl \right]^{1/3} / \left[2^{1/3} (gh_0)^{1/2} \right], \quad (2.161)$$

откуда видно, что период волны растет с расстоянием и зависит от глубины океана на всем пути распространения.

Если $\int \eta(t, 0) dt = 0$, то головная волна быстро затухает и цунами представляет собой цуг волн, причем номер волны максимальной высоты возрастает с расстоянием. Период волны в этом случае постоянен, а высота изменяется в соответствии с

$$H(l) = H_0 \lambda_0 (h_0/h)^{1/4} (b_0/b)^{1/2} \left[\int (h/h_0)^{1/2} dl \right]^{-1/2}. \quad (2.162)$$

Применимость линейной теории на больших расстояниях, как и раньше, может быть оценена с помощью локального значения параметра Урселла

$$Ur = H(l) \lambda^2(l) h^{-3}(l). \quad (2.163)$$

Очевидно, что, по крайней мере на малых глубинах, параметр

Урселла растет и в расчет необходимо принимать нелинейные эффекты.

Приводимые выше формулы несправедливы вблизи каустики, где расстояние между лучами обращается в нуль. Однако дисперсия не влияет на изменение поля в каустической окрестности в рамках лучевых методов, и усиление определяется тем же множителем, что и для линейных недисперсионных волн. Это означает, что трансформация линейной волны на каустике может быть рассмотрена без учета дисперсии. Такой анализ, выполненный в разд. 2.1.3, показал, что усиление определяется фактором $(L/\lambda)^{1/6}$, где L — характерный масштаб изменения глубины. Поскольку длина волны цунами велика и сравнима с L , то фактически заметного усиления волны цунами на каустике трудно ожидать. На каустике происходит также сдвиг фаз между падающей волной и трансформированной (отраженной) волной на $\pi/2$. Если волна имеет импульсную форму, то сдвиг фаз каждой спектральной компоненты приводит к изменению формы волны, и этот процесс описывается преобразованием Гильберта. В частности, если падающая волна представляет собой колоколообразный горб

$$\eta(t) = H_0 / (1 + t^2/T^2), \quad (2.164)$$

то трансформированная волна представляет собой волну знакопеременной формы

$$\eta_{tr} = - (H_0 t/T) / (1 + t^2/T^2), \quad (2.165)$$

ее высота при этом не изменилась.

Рассмотрим теперь эволюцию волны цунами при $Ug \gg 1$. В этом случае в уравнении (2.156) можно пренебречь последним слагаемым и проинтегрировать его:

$$\xi = \eta_0 \left[t - \int \frac{dl}{(gh)^{1/2}} + \frac{3\xi z}{2h_0 (gh_0)^{1/2}} \right], \quad (2.166)$$

$$z = \int (h_0/h)^{7/4} (b_0/b)^{1/2} dl, \quad (2.167)$$

где $\eta_0(t)$ — форма волны в начале луча. В переменных ξ и z волна описывается классическим решением Римана. Сведение задачи о рефракции нелинейной волны в неоднородной среде к известной для однородной среды позволяет сразу воспользоваться известными результатами, в частности, высота нелинейной волны, как и линейной без дисперсии, меняется в соответствии с законом Грина (2.157), а длина нелинейности находится из условия

$$z(l_n) = \int (h_0/h)^{7/4} (b_0/b)^{1/2} dl = L_n. \quad (2.168)$$

Отсюда видно, что на мелководье и в местах сужения лучей нелинейные искажения накапливаются быстрее и волна может опроки-

нуться. Отметим весьма интересный эффект, что если волна распространяется в область больших глубин (для простоты $b = 1$) и глубина меняется достаточно быстро, например, $h \sim l$, то интеграл в (2.168) стремится к константе при больших l . Это означает, что нелинейные эффекты перестают накапливаться, форма волны стабилизируется и волна ведет себя как линейная без обрушения. Такие факты известны для акустических волн, распространяющихся в земной атмосфере вертикально-вверх, соответствующие примеры расчетов приведены в [Engelbrecht et al., 1988].

И в этом приближении полученные формулы несправедливы в окрестности каустики. Влияние нелинейности здесь характеризуется множителем $b^{-1/2}$ в интеграле (2.168). Если каустика простая, т. е. $b \sim l$, то этот интеграл сходится и, следовательно, нелинейность в лучевом приближении не влияет катастрофически (не приводит к формированию ударного профиля, если к каустике подошла волна гладкой формы) на эволюцию волны в прикаустической зоне. Тогда снова можно воспользоваться преобразованием Гильберта для нахождения формы трансформированной волны и далее снова использовать лучевые методы. В частности, преобразованная волна имеет впадину, глубина которой возрастает с увеличением крутизны переднего склона, и, если падающая волна является ударной (бором), то глубина впадины логарифмически расходится [Пелиновский, 1982].

Таким образом, и для нелинейных недисперсионных волн удастся дать простые алгоритмы для количественных расчетов; если последние требуют применения численных методов, то к вычислению лучей необходимо добавить вычисление двух интегралов для z и η_{lr} .

Рассмотрим теперь совместное действие нелинейности и дисперсии на процесс эволюции волны в лучевом приближении. Модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза (2.156) с учетом всех факторов (нелинейности, дисперсии и переменности коэффициентов) не может быть решено в общем виде и здесь эффективным является применение приближенных методов, если какой-либо из факторов является малым. Мы уже рассматривали малость нелинейности и дисперсии по отдельности. Рассмотрим альтернативный случай, когда нелинейность и дисперсия являются величинами одного порядка, а глубина и расстояние между лучами изменяются столь медленно, что их можно считать функциями $1/\epsilon$, где ϵ — малый параметр. При этом важно определить класс решений нулевого приближения, на который будет влиять неоднородность. Наиболее естественно взять класс стационарных решений, отвечающих бегущим волнам. Тогда в отсутствие возмущений их динамика тривиальна и все изменения будут связаны только с влиянием переменности глубины. Для уравнения Кортевега — де Вриза известны все стационарные решения, они представляют собой периодические

(кноидальные) и уединенные (солитоны) волны. Методы анализа разработаны для обоих классов волн: для периодических — это различные варианты метода усреднения, включая усредненный вариационный принцип Уизема [Уизем, 1977]. Однако периодические решения не должны быть типичными для волн цунами, связанными, как правило, с короткими по длительности возмущениями, поэтому здесь рассмотрим класс уединенных волн.

2.3.2. Рефракция медленно изменяющихся солитонов

Асимптотические методы для решения подобных задач развиты как на основе многомасштабных разложений [Gorschkov et al., 1974; Gorschkov, Ostrovsky, 1981; Grimshaw, 1979], так и с помощью теории возмущений к методу обратной задачи рассеяния [Kaup, Newell, 1978; Karpman, 1979]. Эти методы в первом приближении приводят к одному результату, воспользуемся методом многомасштабных разложений.

Рассмотрим модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза (2.156) при условии медленности изменения входящих в него коэффициентов h и M . При $\epsilon = 0$ (постоянстве его коэффициентов) простейшим решением, учитывающим нелинейность и дисперсию, является солитон, который в переменных ξ , s , l имеет вид

$$\xi = a \operatorname{sech}^2 \gamma \Phi, \quad \Phi = s - ql - s_0, \quad \gamma = \left(\frac{3gMa}{4h^2} \right)^{1/2}, \quad q = \frac{Ma}{2h (gh)^{1/2}}, \quad (2.169)$$

где амплитуда солитона a и начальное положение солитона x_0 — произвольные постоянные. При $\epsilon \neq 0$ решение отыскиваем в виде асимптотического ряда

$$\xi(\Phi, l) = \xi_0 + \epsilon \xi_1 + \epsilon^2 \xi_2 + \dots, \quad (2.170)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_0 &= a(L) \operatorname{sech}^2 \gamma(L) \Phi, \quad \Phi = s - \Psi(L), \\ \Psi(L) &= s_0 + \frac{1}{\epsilon} \int q(L) dl, \quad \gamma = \left(\frac{3gMa}{4h^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Здесь мы ввели медленную координату $L = l/\epsilon$ и отыскиваем q тоже в виде асимптотического ряда

$$q(L) = q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \dots \quad (2.172)$$

В нулевом приближении по ϵ получим для q_0

$$q_0 = \frac{Ma}{2h (gh)^{1/2}}, \quad (2.173)$$

и решение нулевого приближения полностью определено, однако функция $a(L)$ пока произвольна.

В следующем приближении запишем линейное уравнение для ξ_1 :

$$P\xi_1 = -q_0 (gh)^{1/2} \frac{\partial \xi_1}{\partial \Phi} + \frac{3M}{2h} \frac{\partial}{\partial \Phi} (\xi_0 \xi_1) + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial \Phi^3} = H_1, \quad (2.174)$$

$$H_1 = (gh)^{1/2} \frac{\partial \xi_0}{\partial L} + (gh)^{1/2} q_1 \frac{\partial \xi_0}{\partial \Phi}. \quad (2.175)$$

Для получения условий разрешимости линейного уравнения (2.174) необходимо знать сопряженный к P оператор, он легко находится в явном виде

$$P^* = (gh)^{1/2} q_0 \frac{\partial}{\partial \Phi} - \frac{3M}{2h} \xi_0 \frac{\partial}{\partial \Phi} - \frac{h}{6g} \frac{\partial^3}{\partial \Phi^3}. \quad (2.176)$$

Легко показать, что из собственных функций оператора P^* только одна ограничена:

$$Z_1 = \xi_0, \quad P^* Z_1 = 0. \quad (2.177)$$

Тогда условие разрешимости линейного неоднородного уравнения (2.174) примет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_1 \xi_0 d\Phi = 0, \quad (2.178)$$

или

$$\frac{d}{dL} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_0^2 d\Phi = 0, \quad (2.179)$$

что означает сохранение энергии солитона в бассейне переменной глубины и понятно из физических соображений, так как лучевые методы не учитывают отражение от откоса. Следует заметить, что модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза имеет два закона сохранения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(s, t) ds = \text{const}, \quad (2.180)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2(s, t) ds = \text{const}, \quad (2.181)$$

и, как мы показали с помощью асимптотической процедуры, только один из них (2.181) остается справедливым при подстановке в него решения в форме солитона. Несохранение интеграла (2.180) означает, что солитон из-за взаимодействия с неоднородным рельефом генерирует "хвост", который должен отставать от солитона, поскольку скорость солитона превышает скорости возможных волновых

движений. Образование хвоста можно изучить в рамках (2.174), проинтегрировав его один раз:

$$-q_0 (gh)^{1/2} \xi_1 + \frac{3M}{2h} \xi_0 \xi_1 + \frac{h}{6g} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \Phi^2} = F_1, \quad (2.182)$$

где

$$F_1 = (gh)^{1/2} \frac{\partial}{\partial L} \int_{\Phi}^{+\infty} \xi_0 d\Phi + (gh)^{1/2} q_1 \xi_0 + D_1, \quad (2.183)$$

где D_1 — дополнительная константа, подлежащая определению, она может зависеть от медленной координаты L . Однако, если учесть, что впереди солитона возмущения должны затухать, то немедленно получим из (2.182) и (2.183), что $D_1 = 0$. Позади солитона, как следует из тех же формул, появляется пьедестал

$$-q_0 \xi_{\bar{1}} = \frac{\partial}{\partial L} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_0 d\Phi, \quad (2.184)$$

который вычисляется в явном виде (приведем его для физической переменной — η):

$$\eta_{\bar{1}} = \frac{8}{3} \left(\frac{h}{H} \right)^{1/2} \frac{h^4}{M} \frac{d}{dL} \left(\frac{M}{h^2} \right). \quad (2.185)$$

При движении волны в зону мелководья пьедестал имеет тот же знак, что и солитон, а при движении в сторону глубокой воды — противоположный знак. В рамках данной теории возмущений пьедестал получился неограниченно простирающимся за солитоном. На самом деле, необходимо модифицировать асимптотическую схему, считая пьедестал функцией двух медленных переменных: координаты и времени. Тогда мы бы для него получили линейное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее отставание пьедестала от солитона. Но можно поступить и проще, оценивая длительность пьедестала с помощью закона сохранения (2.180), поскольку именно хвост и обеспечивает его сохранение.

В следующем приближении по ϵ находится поправка к скорости распространения солитона и т. д.

Обсудим более подробно закон изменения высоты солитона. Используя (2.179), после ряда простых вычислений получим явную формулу для "истинной" высоты солитона:

$$H(l) = H_0 (h/h_0)^{-1} (b/b_0)^{-2/3}, \quad (2.186)$$

а с помощью (2.169) — пространственную и временную длительности солитона:

$$\lambda(l) = \lambda_0 (h/h_0)^2 (b/b_0)^{1/3}, \quad (2.187)$$

$$T(l) = T_0 (h/h_0)^{3/2} (b/b_0)^{1/3}. \quad (2.188)$$

Эти формулы получались многими авторами [Островский, Пелиновский, 1970; Grimshaw, 1970, 1971; Johnson, 1972, 1973].

Для описания поля в прикаустической зоне снова можно воспользоваться преобразованием Гильберта. Как и в случае (2.165), за головной волной (горб) возникает впадина [Пелиновский, Степанянц, 1981]. Трансформированная волна, очевидно, уже не является установившейся и в процессе эволюции должна распадаться на солитоны и осциллирующие цуги. Если пренебречь изменением глубины вне каустики, то задача сводится к точному решению уравнения Кортевега — де Вриза. Расчет показал, что формально образуется бесконечное число солитонов, амплитуда первого составляет 0,51 от первоначального, второго — 0,085 и т. д. Фактически надо рассматривать только первый солитон, поскольку малые солитоны связаны с плохой сходимостью на краях трансформированной волны в силу преобразования Гильберта; мы уже говорили в связи с проблемой предвестника, что низкочастотные компоненты в спектре волны не описываются данным преобразованием.

Модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза (одномерная ситуация) численно интегрировалось многими авторами, см., например, [Johnson, 1972, 1973; Ko, Kuehl, 1978]. В тех случаях, когда глубина изменялась достаточно медленно, амплитуда изменялась в соответствии с (2.186). Подтверждено также формирование положительного пьедестала за солитоном при движении в сторону мелководья. Формулы (2.186), (2.187), (2.188), опять же, конечно, для одномерной ситуации, служили предметом специальных экспериментальных исследований ввиду легкости их моделирования (в лабораторных условиях практически всегда сильная нелинейность и солитоны образуются достаточно быстро). В тех случаях, когда глубина менялась достаточно медленно (на масштабах нелинейности и дисперсии), высота волны изменялась в соответствии с (2.186). Обсуждение этих данных с геофизической точки зрения выполнено в работе автора [Пелиновский, 1982].

Особый интерес вызывает частный случай модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза для осесимметричных волн в бассейне постоянной глубины, практическое приложение которого обусловлено взрывами в воде и извержениями подводных вулканов. По существу, изложенные выше приближенные решения легко переписываются на этот случай [Дорфман и др., 1981; Пелиновский, Степанянц, 1981, 1982; Chwang, Wu, 1976; Weidman, Zakhmet, 1988]. Отметим лишь последнюю работу по сравнению теоретических выводов в рамках осесимметричного уравнения Кортевега — де Вриза с результатами экспериментального исследования взрывных волн на воде, свидетельствующую о хорошей применимости упрощенной модели [Khangaonkar, Le Mehaute, 1991] и лишней раз показывающую пользу лучевого описания нелинейных волн.

2.3.3. Саморефракция нелинейных волн

Выше для расчета рефракции нелинейных волн мы использовали лучи в линейном приближении. Однако, если лучи почти параллельны, то нелинейность способна изменить их траектории. Рассмотрим, например, простейшую ситуацию плоского солитона в бассейне постоянной глубины. Если амплитуда солитона промодулирована по фронту, допустим, в центре амплитуда солитона выше, чем на краях, то в силу зависимости скорости солитона от его амплитуды солитоны в центре будут распространяться быстрее, чем на краях, и это приведет к искривлению фронта, волна будет напоминать цилиндрическую. Очевидно, что этот эффект не описывается в терминах "линейных" лучей. Процесс воздействия волны на траектории лучей естественно назвать "нелинейной рефракцией" и разработать соответствующие математические модели.

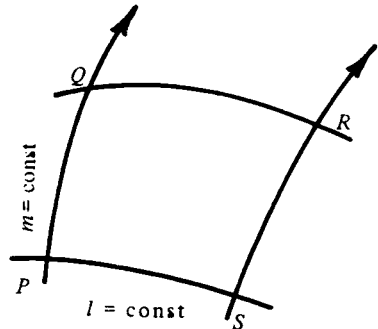


Рис. 2.3. Система координат, связанная с лучами и фронтами

Прежде всего рассмотрим более внимательно кинематику лучей. С лучами можно связать криволинейную ортогональную систему координат, показанную на рис.

2.3. Здесь PQ и SR — два соседних луча ($m = \text{const}$), а PS и QR — соседние положения фронтов ($l = \text{const}$). Посмотрим, как можно переписать лучевые уравнения в новых координатах l и m . Обозначим PQ как $\delta l = c \delta t$, а PS как $b \delta m$. Поскольку скорость распространения волны c и расстояние между лучами (точнее, фактор фокусировки) b меняются в пространстве, то

$$SR = (c + \delta c) \delta t = \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial m} \delta m\right) \delta l, \quad (2.189)$$

$$QR = b \left(1 + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial l} \delta l\right) \delta m. \quad (2.190)$$

Введем теперь угол θ , характеризующий наклон луча к некоторому фиксированному направлению. Тогда вариации наклона луча есть

$$\delta \theta = \frac{QR - PS}{PQ} = \frac{\partial b}{\partial l} \delta m, \quad (2.191)$$

аналогично вариации наклона фронта

$$\delta \theta = \frac{PQ - SR}{PS} = -\frac{1}{bc} \frac{\partial c}{\partial m} \delta l. \quad (2.192)$$

Переходя к дифференциальному пределу, получаем два уравнения в частных производных [Уизем, 1977]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial l'}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial l} = -\frac{1}{bc} \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (2.193)$$

Данные уравнения вытекают только из кинематики лучей и никак не связаны с физикой процесса. Однако они не замкнуты и необходимо добавить еще одно уравнение, связывающее три переменные b , c , θ , для этого и необходимы физические предположения. В частности, при малой нелинейности естественно считать, что скорость солитона связана с амплитудой соотношением (2.169), а расстояние между лучами — формулой (2.186), то система (2.193) становится замкнутой. На таком физическом уровне строгости эта система решается в работах [Островский, Шрира, 1976; Miles, 1977; Шрира, 1980], и этот подход обобщает известный ранее для ударных волн [Уизем, 1977]. Необходимо, однако, обосновать его, разработав соответствующую асимптотическую схему. Для этого вернемся к уравнению (2.23), из которого получали основные уравнения лучевого метода. Пренебрежем снова членом второго порядка $\text{div}(c^2 \nabla \eta)$, остальные же будем считать членами одного порядка:

$$[1 - gh(\nabla \tau)^2] \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s} [2gh \nabla \tau \nabla \eta + \text{div}(gh \nabla \tau) \eta] = \text{П}. \quad (2.194)$$

Обозначим

$$\Phi(l) = 1 - gh(\nabla \tau)^2 \quad (2.195)$$

и учтем, что все преобразования в другой скобке, сделанные в первой главе, остаются справедливыми при малой нелинейности. Тогда уравнение (2.194) сводится к

$$c \frac{\partial \eta}{\partial l} + \frac{3\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} + \frac{c\eta}{4c^2 b^2} \frac{d(c^2 b^2)}{dl} - \frac{1}{2} \Phi \frac{\partial \eta}{\partial s} = 0 \quad (2.196)$$

и оно отличается от уравнения (2.37) последним слагаемым и тем, что вместо $(gh)^{1/2}$ сюда входит c . Но последнее слагаемое соответствует поправке к скорости распространения волны и может быть исключено простой заменой переменных. Оставшееся модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза мы только что рассматривали в разд. 2.3.2. Главный результат для солитона — это сохранение его энергии, т. е. формула (2.186), связывающая амплитуду солитона с глубиной и расстоянием между лучами. С другой стороны, у нас осталась неопределенной величина Φ . Если привязать фронты к максимуму солитона — амплитудные фронты (и соответственно лучи), то c должна быть скоростью солитона. Из стационарного решения уравнения (2.196) скорость солитона равна (ср. с (2.173))

$$q = c + \frac{Ma}{2h(gh)^{1/2}} - \frac{1}{2} \Phi, \quad (2.197)$$

следовательно, чтобы $q = c$, необходимо выбрать Φ в виде

$$\Phi = \frac{Ma}{h(gh)^{1/2}} \quad (2.198)$$

В результате, получим замкнутую систему уравнений, она сводится к дифференциальным уравнениям (2.193) и алгебраическим соотношениям (2.169) и (2.186). При этом формула (2.198) нужна только для вычисления времени движения волны вдоль луча по формуле (2.195) [Engelbrecht et al., 1988].

Обсудим несколько более подробно эффекты саморефракции в бассейне постоянной глубины. Прежде всего, сразу скажем, что в линейном приближении, когда скорость распространения волны постоянна и равна $c = (gh)^{1/2}$, из (2.193) сразу следует, что θ сохраняется вдоль луча, что полностью соответствует выводам линейной теории (лучи представляют собой прямые линии). Для солитона связь между c и b вытекает из (2.169) и (2.186):

$$c = (gh)^{1/2} \left[1 + (3H_0/2h) (b/b_0)^{-2/3} \right], \quad (2.199)$$

и система (2.193) становится замкнутой.

Рассмотрим эволюцию слабomodulированного по амплитуде плоского солитона, определяющего начальные условия к системе (2.193):

$$b(m, 0) = 1 + \varepsilon f(m), \quad \theta(m, 0) = 0, \quad (2.200)$$

где ε , как и ранее, — малый параметр и $f(m)$ представляет собой впадину, если по фронту в центре амплитуда солитона больше, чем на краях. Используя малость ε , линеаризуем систему (2.193), тогда она сводится к волновому уравнению для $b' = b - 1$

$$\frac{\partial^2 b'}{\partial t^2} - c_*^2 \frac{\partial^2 b'}{\partial m^2} = 0 \quad (2.201)$$

с эффективной скоростью распространения

$$c_* = \left[- (gh)^{-1/2} \frac{dc}{db} \right]^{1/2} = (H_0/h)^{1/2} \quad (2.202)$$

и начальными условиями

$$b'(m, 0) = f(m), \quad \frac{\partial b'}{\partial t}(m, 0) = 0. \quad (2.203)$$

Как видим, скорость распространения возмущений по фронту солитона определяется параметром нелинейности, поэтому действительно возникающие здесь эффекты можно рассматривать как нелинейную рефракцию. Решение (2.201) с начальными условиями (2.203) тривиально, оно описывает две волны, распространяющиеся от центра возмущений по фронту, при этом величина θ становится отличной от нуля в пределах этой волны, а затем снова возвращается

к нулевому значению. Следовательно, после ухода возмущения солитон остается плоским и в этом смысле можно говорить об устойчивости плоского солитона. Учет конечности возмущений в рамках системы (2.193) не меняет картину явления, правда, из-за нелинейности волны возмущения становятся ударными, и формируется ударная волна возмущений (соответствующая картина применительно к волнам на воде анализируется в работе [Peregrine, 1983]). Существование ударных волн огибающей в рамках лучевых уравнений рассматривать нельзя, поскольку нарушается условие медленности изменения параметров волны. Если же считать этот процесс возможным, то ударный фронт должен диссипировать и, следовательно, возмущения должны затухать. Этот вывод был проверен в рамках теории возмущений для уравнения Кадомцева — Петвиашвили, представляющего двумерный вариант уравнения Кортевега — де Вриза.

Аналогично может быть рассмотрена эволюция цилиндрической волны, которой отвечает следующее решение системы (2.193):

$$\theta = m, \quad b = 1. \quad (2.204)$$

Для анализа слабой модуляции на фоне цилиндрической волны линеаризуем систему (2.193) на фоне (2.204), причем зависимость от угловой координаты естественно выбрать в виде $e^{in\theta}$, где n — целое число, тогда для b' получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 b'}{dt^2} + \frac{H_0 l^2}{n^2 h l^3} b' = 0. \quad (2.205)$$

Очевидно, что для расходящейся волны (l увеличивается) частота колебаний уменьшается и, соответственно, уменьшается энергия возмущений. Следовательно, цилиндрическая волна является устойчивой. Для сходящейся волны (l уменьшается), напротив, энергия колебаний возрастает, и такая волна является неустойчивой. Интересный пример решения нелинейной задачи в этом случае приведен в работе [Островский, Шрира, 1976], он соответствует "куску" цилиндрически сходящегося солитона, сопряженного с плоскими солитонами, начальная амплитуда солитона одинакова всюду. Характеристики системы (2.193) для этой ситуации представлены на рис. 2.4. Как обычно для гиперболических систем, легко выделить различные области: области покоя (*I*), где фронт остается плоским, области простых волн (*II*), соответствующие уходящим возмущениям, и область взаимодействия возмущений, где фронт первоначально был цилиндрическим (*III*). Уже отсюда ясен качественный характер процесса: при некотором l возмущения ушли из центральной области, что соответствует образованию плоского фронта (см. рис. 2.4). В дальнейшем за счет образования ударных волн (пересечения характеристик) волна состоит из трех плоских солитонов. Таким образом, здесь нелинейность "расталкивает" сходящиеся лучи, делая

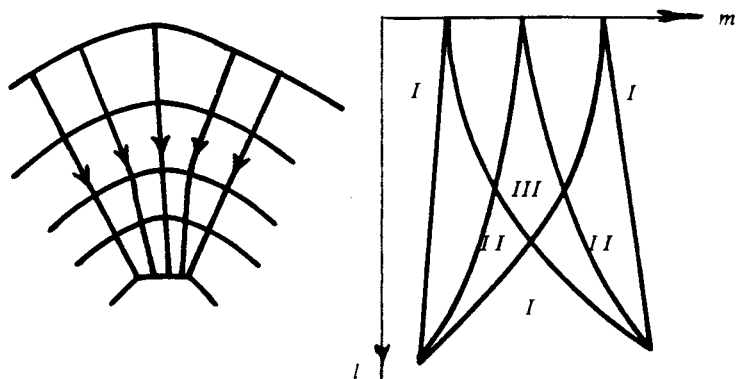


Рис. 2.4. Сходящийся цилиндрический солитон

их параллельными, причем это достаточно медленный эффект (ввиду малости эффективной скорости c_e). Фактически он справедлив для лучей, которые не успевают заметно измениться на расстояниях порядка длины нелинейности, а это имеет место для почти параллельных лучей. Более детальные расчеты нелинейной рефракции солитонов выполнены в работах [Островский, Шприца, 1976; Miles, 1977; Шприца, 1980]. Этот же подход справедлив и для периодических волн на глубокой воде [Peregrine, Smith, 1979; Peregrine, Ryrie, 1983].

2.3.4. Дифракция волн цунами в бассейне переменной глубины

Выше мы рассматривали достаточно широкие волновые пучки, считая, что изменения амплитуды волны сказываются главным образом вдоль луча. Если же волновой пучок достаточно узкий (как говорят, параксиальный пучок), то изменения волнового поля поперек луча могут быть более существенными, чем вдоль луча. Математически это проявляется в разных малых масштабах, характеризующих такое изменение: ϵ вдоль луча и $(\epsilon)^{1/2}$ поперек луча. Для описания этих эффектов воспроизведем снова уравнение (2.23):

$$[1 - gh(\nabla\tau)^2] \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s} [2gh \nabla\tau \nabla\eta + \text{div}(gh \nabla\tau) \eta] - \text{div}(gh \nabla\eta) = \Pi. \quad (2.206)$$

Если считать, что η есть функция ϵl и $(\epsilon)^{1/2} m_{\perp}$, то из слагаемого $\text{div}(gh \nabla\eta)$, которым мы раньше обычно пренебрегали, необходимо оставить член $gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial m^2}$, который имеет тот же порядок, что и слагаемые во второй скобке. Дальнейшее упрощение уравнения (2.206)

зависит от предположений на характер изменения лучей. Если можно считать их линейными, то уравнение (2.206) разделяется на два: уравнение эйконала

$$1 - gh(\nabla\tau)^2 = 0 \quad (2.207)$$

и эволюционное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(gh)^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial l} + \frac{3\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} + \frac{(gh)^{1/2}}{4hb^2} \frac{d(hb^2)}{dl} \eta \right] + \frac{gh}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial m^2} = 0, \quad (2.208)$$

которое можно назвать модифицированным уравнением Кадомцева – Петвиашвили, поскольку сводится к последнему для плоской волны в бассейне постоянной глубины. Уравнение Кадомцева – Петвиашвили, как и уравнение Кортевега – де Вриза, является эталонным уравнением в теории нелинейных волн, допускающим точное решение задачи Коши методом обратной задачи рассеяния [Ablowits, Segur, 1981; Drazin, Johnson, 1989; Узем, 1977].

Более быстрое изменение поля по поперечной координате возможно и в случаях, когда волна распространяется в узком волноводе, образованном, например, узким подводным хребтом. В такой ситуации фактически имеется только один луч, и эйконал в криволинейной системе координат, связанной с лучом, необходимо вычислять более тщательно. Если лучи не зависят от нелинейности и дисперсии, то соответствующие вычисления совпадают с известными и они проделаны в работе [Бабиц, Булдырев, 1972]:

$$(\nabla\tau)^2 = 1 / [gh(l) (1 + m/\rho)^2], \quad (2.209)$$

где ρ – радиус кривизны луча. Используя связь между радиусом кривизны и производными от скорости (подробности см. в той же работе), уравнение (2.208) можно свести к следующему:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \left[(gh)^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial l} + \frac{3\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} + \frac{(gh)^{1/2}}{4h} \frac{dh}{dl} \eta \right] + \\ & + \frac{gh}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial m^2} + D(l) m^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} = 0, \end{aligned} \quad (2.210)$$

где

$$D = \frac{1}{2(gh)^{1/2}} \left. \frac{d^2(gh)^{1/2}}{dm^2} \right|_{m=0}. \quad (2.211)$$

Полученное уравнение представляет собой другую модификацию уравнения Кадомцева – Петвиашвили, справедливую для волн в узком волноводе (обратим внимание, что в этом случае фактор фокусировки не входит в эволюционное уравнение, как уже отмечалось, мы имеем дело здесь только с одним лучом).

Следует подчеркнуть, что, хотя порядок модифицированных уравнений Кадомцева – Петвиашвили такой же, как у нелинейно-дисперсионной системы, все же они проще, поскольку для их интег-

рирования необходимо задание начальных и граничных условий в небольшой окрестности луча, который сам находится просто из решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В то же время при непосредственном интегрировании уравнений нелинейно-дисперсионной системы начальные и граничные условия необходимо задавать на всей океанической акватории или на ее большей части. Это позволяет надеяться на перспективность использования модифицированных уравнений Кадомцева – Петвиашвили для расчетов волн цунами.

Для иллюстрации новых эффектов приведем одно частное решение уравнения (2.210) без учета нелинейности и дисперсии:

$$\eta(m, l) = H_0(h/h_0)^{-1/4} (\Delta / \Delta_0)^{-1/2} \times \exp \left[i\omega s - \frac{m^2}{\Delta^2} - i \left(\int \frac{(gh)^{1/2} dl}{\omega \Delta^2} - \frac{\omega m^2}{2 \Delta (gh)^{1/2}} \frac{d \Delta}{dl} \right) \right], \quad (2.212)$$

где длина гребня Δ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \Delta}{dl_n^2} = \frac{4}{\Delta^3} - \frac{2D\omega^2}{gh} \Delta, \quad l_n = \omega \int (gh)^{1/2} dl. \quad (2.213)$$

Характер решения виден из (2.213). Если $D < 0$ (подводная впадина), то $\frac{d^2 \Delta}{dl_n^2} > 0$ и длина гребней возрастает (если в начальный момент времени задана сходящаяся волна, то после прохождения фокуса волна снова становится расходящейся) — переменность глубины влияет только на темпы дифракции. Такое же решение, естественно, получается и в рамках (2.208). Если $D > 0$ (движение над подводным хребтом), то длина гребня осциллирует около некоторого значения

$$\Delta_0 = [(2gh)/(D\omega^2)]^{1/4} \quad (2.214)$$

или остается равной Δ_0 . В этом случае дифракция подавлена неоднородностями рельефа дна. По существу, несколько другим путем получен известный результат: подводные горы могут служить волноводом для волн цунами. Важно подчеркнуть, что волноводное распространение сопровождается дисперсией волн. Дисперсионное соотношение вытекает из (2.212):

$$k = (\omega/c) [1 - c^2/(\omega^2 \Delta^2)], \quad c = (gh)^{1/2}. \quad (2.215)$$

Отсюда видно, что волны малых частот имеют меньшую групповую скорость и должны отставать от головной волны. Из-за волноводной дисперсии можно ожидать замедление темпов нелинейного взаимодействия, и соответствующие численные расчеты подтверждают это.

Таким образом, изложенный здесь модифицированный лучевой метод позволяет описать дифракционные и волноводные эффекты для волн цунами, распространяющихся в бассейне переменной глубины.

2.3.5. Захваченные волны

Мы уже получили в рамках приближенного метода, что неровности дна могут захватывать волны цунами. Интерес к захваченным волнам велик прежде всего потому, что такие волны затухают медленнее (их расходимость подавлена волноводом). Кроме того, имеются данные наблюдений реальных цунами, интенсивность которых нельзя объяснить без привлечения теории захваченных волн. Так, *Ishi и Abe* (1980) полагают, что проявления наиболее разрушительного для России Камчатского цунами 1952 г. на побережье Японии обусловлены именно захваченными волнами, и приводят соответствующие расчеты времен добегания.

В простейшем случае линейной теории структура захваченных волн получается разделением переменных, если глубина бассейна является функцией только одной переменной [*Ле Блон, Майсек, 1981; Mei, 1989; Рабинович, 1994*]. Рассмотрим, например, волновые движения над плоским откосом $h = \alpha x$ в рамках линейной теории мелкой воды. Разделяя переменные, легко найти структуру захваченных (краевых) волн:

$$\eta(x, y, t) = A \exp(-kx) L_n(2kx) \exp[i(\omega t - ky)], \quad (2.216)$$

где L_n — полином Лагерра, ω и k связаны дисперсионным соотношением

$$\omega = [\alpha g k (2n + 1)]^{1/2}, \quad (2.217)$$

а n — целое число, определяющее номер моды. Функции Лагерра убывают на бесконечности, поэтому волновое поле оказывается прижатым к берегу. Существенно подчеркнуть, что краевые волны оказываются сильно дисперсионными, для них отсутствует участок кривой типа $\omega \sim k$, как для длинных волн в бассейне постоянной глубины. В результате первоначальное импульсное возмущение быстро трансформируется в цуг затухающих волн, такое решение может быть получено строго в рамках линейной теории методом интегральных преобразований [*Стокер, 1959; Дорфман, 1984; Бестужева, Дорфман, 1990*]. Получаемые здесь интегралы для достаточно больших расстояний от очага вычисляются с помощью метода стационарной фазы. Такие расчеты выполнены, например, в работе [*Кочергин, Пелиновский, 1988*] для источника цунами с размерами по оси x 96 км и по оси y 24 км, источник удален на расстояние 160 км от берега. На рис. 2.5 приведено распределение максимальных амплитуд волн вдоль берега, которое не является монотонным. Качественно такой эффект хорошо известен для волноводов и мог быть получен с помощью лучевых методов (лучи, выпущенные из точечного источника, подходят к берегу в конечной области — первый максимум на рис. 2.5, затем отражение от берега и подход снова к берегу — второй максимум и т. д.). Осциллограммы волны на разном

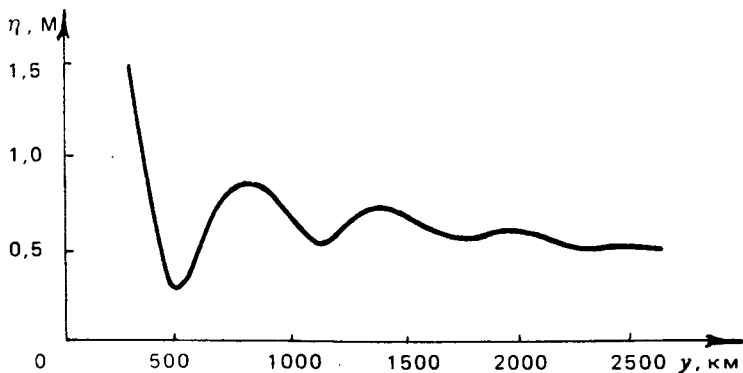


Рис. 2.5. Распределение высоты цунами вдоль берега, обусловленное краевыми волнами

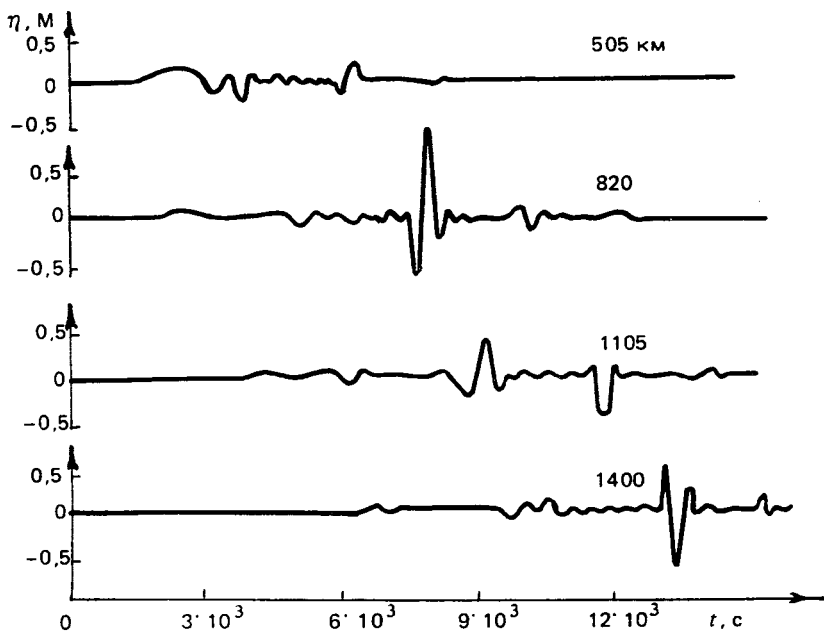


Рис. 2.6. Осциллограммы волн цунами на различных расстояниях от источника

расстоянии от источника представлены на рис. 2.6. Как видим, волне максимальной амплитуды предшествуют более слабые низкочастотные предвестники. Интерес к ним понятен с точки зрения заблаго-

временной регистрации цунами. Отметим также важный вывод, вытекающий из рис. 2.6: за предвестником возможна зона "молчания" перед приходом основной волны. Эти выводы сохраняются и в более сложных моделях изменения глубины. Ввиду сильной дисперсии захваченных волн нелинейные эффекты влияют не столько на форму волны, сколько на взаимодействие волн разных мод и изменение огибающих в пределах цугов, некоторые такие эффекты рассмотрены в работах [Minzoni, 1976; Whitham, 1976; Кочергин, Пелиновский, 1989; Головачев и др., 1991].

2.4. ЗАТУХАНИЕ ВОЛН ЦУНАМИ

Натурных данных о диссипации волн цунами очень немного. Так, по данным о Чилийском (1960) и Ниигатском (1966) цунами величина коэффициента диссипации найдена в пределах 0,043–0,174 ч⁻¹ (время жизни 6–23 ч) [Мурти, 1981], правда, не исключено, что эта величина во многом характеризует "добротность" шельфа, связанную с уходом волны в открытый океан, а не диссипацией. Неясно даже, какого рода диссипация является существенной для волн цунами. Кроме чисто привычных "водных" типов диссипации, рассматриваются также более экзотические, например, диссипация, связанная с излучением атмосферных гравитационных волн, характерное время жизни составляет 40 ч. Такая неопределенность делает расчеты цунами скорее качественными, чем количественными. Здесь мы рассмотрим главным образом нелинейные механизмы диссипации волн цунами.

2.4.1. Диссипация цунами в придонном пограничном слое – модель с постоянным коэффициентом обмена

Движение в придонном пограничном слое при прохождении волны цунами, как показывают простейшие оценки числа Рейнольдса, является турбулентным, и, следовательно, исходными здесь должны быть уравнения Рейнольдса в виде [Монин, Яглом, 1965]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}_u, \quad (2.218)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \omega + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}_\omega, \quad (2.219)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad (2.220)$$

где \mathbf{T} – тензор напряжений Рейнольдса:

$$\mathbf{T}_{ij} = -\rho \langle u'_i u'_j \rangle. \quad (2.221)$$

Как обычно, пренебрегаем молекулярной вязкостью. Условия непротекания жидкости через дно и свободную поверхность имеют вид на ровном дне ($z = -h$):

$$u = w = 0 \quad (2.222)$$

– условие прилипания;

на свободной поверхности ($z = \eta$):

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (u \nabla) \eta \quad (2.223)$$

– кинематическое и

$$(\rho - \rho_a) n_i = \sum_j (T_{ij} - T_{ij}^a) n_j \quad (2.224)$$

– динамическое условия, где индекс a указывает на атмосферные величины, n – единичный вектор нормали к свободной поверхности. Подстановка значений n в (2.224) приводит, в частности, к следующему граничному условию для давления:

$$p = p_a + T_{33} - T \nabla \eta, \quad (2.225)$$

где $T = \{T_{13}, T_{23}\}$ и считается, что $T^a = 0$ (генерация волн цунами касательными напряжениями трения и переменным давлением рассмотрены в разд. 1.4).

Приведенная выше система уравнений Рейнольдса является незамкнутой и необходимо связать компоненты тензора напряжений Рейнольдса с средними гидрофизическими полями. Наиболее простой моделью замыкания является восходящая к Буссинеску связь между турбулентными потоками и градиентами соответствующих средних скоростей:

$$T_{ij} = \rho K_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (2.226)$$

где K – коэффициенты эффективной (вообще говоря, анизотропной) турбулентной вязкости. В свою очередь, коэффициенты турбулентной вязкости могут быть функциями координат и самих полей, соответствующие модели можно найти в ряде книг, см., например, [Монин, Яглом, 1965; Вольцингер и др., 1989]. В результате система (2.218)–(2.225) становится замкнутой.

Для первоначальной оценки роли диссипации в проблеме цунами будем считать коэффициенты турбулентной вязкости постоянными, а волны линейными. Кроме того, используем длинноволновость цунами, т. е. гидростатичность давления. Тогда, интегрируя уравнения (2.218) и (2.220) по глубине с учетом граничных условий (этот прием неоднократно применялся в первой части), получим замкнутую систему, описывающую модель диссипации с постоянным коэффициентом обмена:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.227)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 u \, dz = 0, \quad (2.228)$$

с граничными условиями

$$u(z = -h) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(z = 0) = 0, \quad (2.229)$$

где обозначено $v = K_{33}$ и для простоты рассматривается двумерное движение. Удобно перейти к безразмерным переменным

$$u' = u/c, \quad \eta' = \eta/h, \quad x' = (x\omega)/c, \quad z' = z/h, \quad t' = \omega t, \quad (2.230)$$

где ω — частота волны, $c_0 = (gh)^{1/2}$ — скорость распространения длинных волн. В этом случае система (2.227) — (2.228) преобразуется к (штрихи опускаем)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.231)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^0 u \, dz = 0, \quad (2.232)$$

и определяется только одним безразмерным параметром — модифицированным числом Экмана, характеризующим отношение сил турбулентного трения и инерции

$$E = v/(\omega h^2), \quad (2.233)$$

откуда видно, что вязкость в рамках данной модели сказывается на относительно низкочастотных компонентах в спектре волны цунами.

Рассмотрим сначала простейшие решения в виде монохроматической волны. Они имеют вид

$$\eta = a \exp(-\gamma x) \cos(kx - t), \quad (2.234)$$

$$u = a \exp(-\gamma x) (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{1/2} \sin(kx - t - \Psi), \quad (2.235)$$

$$k + i\gamma = (1 - \tanh q/q)^{-1/2}, \quad (2.236)$$

$$\varphi_1 - i\varphi_2 = (1 - \tanh q/q)^{-1/2} \{1 - [\cosh q(1 - z)]/\cosh q\}, \quad (2.237)$$

$$\operatorname{tg} \Psi = -\varphi_1/\varphi_2, \quad q = (1 - i)(2E)^{-1/2}. \quad (2.238)$$

Вертикальное распределение скорости течения в длинной волне изображено на рис. 2.7 для различных значений чисел Экмана. С возрастанием числа Экмана толщина пограничного слоя увеличивается и изменение поля в нем становится монотонным.

Рис. 2.7. Вертикальная структура длинной волны при различных числах Экмана

Сделаем оценки роли этого механизма в диссипации волн цунами. Коэффициенты турбулентного обмена меняются в пределах $10\text{--}500\text{ см}^2/\text{с}$, периоды волн цунами $5\text{--}100$ мин. Следовательно, число Экмана меняется в пределах $10^{-10}\text{--}10^{-5}$ для больших глубин и $10^{-1}\text{--}5$ в приурезовой области. Оценки характерных длин затухания показывают, что амплитуда волны цунами может уменьшиться в два раза на расстояниях порядка $10\text{--}100$ длин волн, так что эффект диссипации должен приниматься во внимание при расчетах волн цунами на больших трассах. Приведем здесь также асимптотическую формулу для декремента при $E \ll 1$ (в размерных переменных):

$$\gamma = \left(\frac{\nu \omega}{8gh^3} \right)^{1/2}. \quad (2.239)$$

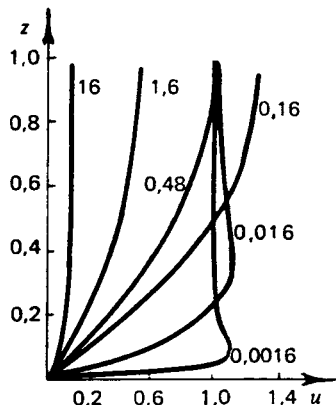
Реальная волна цунами не является монохроматической. В рамках линейной теории общее решение может быть получено с помощью фурье-суперпозиции. Ввиду зависимости декремента от частоты интегралы Фурье на больших расстояниях легко вычисляются методом перевала, они представляют собой автомодельные решения системы (2.231), (2.232) [Клеванный, Пелиновский, 1986]. В частности, при малых числах Экмана автомодельное решение имеет вид

$$\eta(x, t) = x^{-2} F(\zeta), \quad \zeta = (8gh^3 t) / (\nu x^2), \quad (2.240)$$

$$F(\zeta) = \int_0^{\infty} \exp[-\Omega^{1/2} \cos(\Omega \zeta - \Omega^{1/2})] d\Omega. \quad (2.241)$$

Видно, что амплитуда волны затухает как x^{-2} , а длительность растет как x^2 . В цитированной выше работе выполнен численный анализ выхода на асимптотический режим первоначального гауссова импульса и определены условия на расстояние, на котором волна становится автомодельной. Эти оценки свидетельствуют о реальности прогнозируемых здесь эффектов.

Нелинейные модели с вертикальным разрешением могут быть решены только численно, эти вопросы излагаются в книге [Вольцингер и др., 1989].



2.4.2. Гидравлическая модель диссипации волн цунами

Описанные выше модели не являются простыми в вычислительном плане, они опираются на пространственные сетки с существенно разными масштабами по горизонтальным и вертикальной координатам. Поэтому получили большое распространение так называемые гидравлические модели (система Сен-Венана), в которой вертикальная координата отсутствует, а диссипация учитывается феноменологически с помощью силы трения. Основные уравнения данной модели имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u + g \nabla \eta = - \frac{\mu u |u|}{h}, \quad (2.242)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div} [(h + \eta) u] = 0, \quad (2.243)$$

где в правой части уравнения (2.242) содержится придонное напряжение T_b (см. формулу (2.29)). Мы пренебрегли им в разд. 1.4.2 и разд. 2.4.1, поскольку ограничились рассмотрением там линейных задач. Наблюдения за гидравлическими потоками свидетельствуют о нелинейности придонного напряжения, простейшей аппроксимацией которого является квадратичный закон $\mu |u|$. Для того чтобы выделить нелинейную диссипацию в "чистом" виде, пренебрежем остальными нелинейными слагаемыми в уравнениях мелкой воды и рассмотрим одномерные движения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{\mu u |u|}{h}, \quad (2.244)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.245)$$

Удобно перейти к одному уравнению для скорости частиц воды

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{h} \frac{\partial}{\partial t} (u |u|) = 0. \quad (2.246)$$

При $\mu \rightarrow 0$ уравнение (2.246) может быть упрощено переходом в систему координат, движущуюся со скоростью длинных волн (мы неоднократно использовали этот прием во второй части), так что приведем его без вывода:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (gh)^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu u |u|}{2h} = 0. \quad (2.247)$$

Это уравнение интегрируется точно. Учитывая, что $u \approx \eta(g/h)^{1/2}$, перепишем решение в окончательной форме

$$\eta(x, t) = [\eta_0(x - ct)] / \left(1 + \frac{\mu x}{2h^2} |\eta_0(x - ct)| \right), \quad (2.248)$$

где $\eta_0(x)$ — начальная форма волны. Итак, при $\mu \rightarrow 0$ волна распространяется со скоростью длинных волн и ее высота убывает со временем, причем форма волны изменяется: гребень и ложбина становятся плоскими. На больших расстояниях решение перестает зависеть от начальных условий:

$$\eta(x, t) \approx (2h^2) (\mu x)^{-1} \operatorname{sign} \eta_0, \quad (2.249)$$

что должно приводить к выравниванию характеристик цунами различных энергий и, следовательно, ослаблению разрушительных цунами.

Сделаем некоторые оценки. Коэффициент μ оценивается в 10^{-3} – 10^{-1} . Длина затухания очень велика на глубокой воде, порядка сотен и тысяч километров, на мелкой воде мала (порядка километра), так что наиболее сильно диссипация проявляется на мелководье.

Вблизи берега роль диссипативного слагаемого в (2.246) возрастает и здесь, напротив, можно пренебречь слагаемым $\partial^2 u / \partial t^2$. Получающееся нелинейное уравнение диффузии имеет автомодельное решение [Пелиновский, 1982]:

$$u(x, t) = (Wt^{-1/3}) / \left[1 + (\mu W x^2 t^{-4/3}) / (3gh^2) \right], \quad (2.250)$$

где W совпадает с кинетической энергией начального возмущения, сохраняющейся при любом t . Как видно из (2.250), высота падает как $t^{-1/3}$, а размер возмущения растет как $t^{2/3}$.

Мы рассмотрели простейшую модель, когда нелинейность учитывается только в диссипативном слагаемом. Соответствующее упрощенное уравнение (2.247) в случае малых μ представляет собой фактически комбинацию линейного варианта эволюционного уравнения и отдельного диссипативного слагаемого. Очевидно, что такого же типа уравнение может быть получено и при учете гидродинамической нелинейности. Приведем его также без вывода:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \left(1 + \frac{3u}{2c} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu u |u|}{2h} = 0. \quad (2.251)$$

Нелинейное уравнение (2.251) решается в явном виде с помощью метода характеристик, например, для $u > 0$:

$$u = u_0 / \left[1 + (\mu u_0 t) / (2h) \right], \quad (2.252)$$

$$x = x_0 + ct + (3u_0 h \mu^{-1}) \ln \left[1 + (\mu u_0 t) / (2h) \right], \quad (2.253)$$

где, как обычно, надо положить x_0 произвольной функцией u_0 . Легко показать, что траектории $x(t)$ для различных участков волны пересекаются, так что волна в рамках (2.251) обязательно обрушится.

Нелинейная гидравлическая модель находит широкое применение при расчетах длинноволновой динамики прибрежной зоны, в ее рамках сформулированы эффективные численные алгоритмы, и эта модель, пожалуй, является наиболее популярной [Abbot, 1979].

2.4.3. Рассеяние энергии цунами неровностями дна

В разд. 2.1.4 мы уже пытались учесть неровности дна в рамках лучевого метода, причем стартовали из уравнений нелинейно-дисперсионной модели, предполагая тем самым, что рассеянные неровностями волны также являются длинными. Это предположение нуждается в обосновании.

Рассмотрим классическую постановку линейной задачи о рассеянии монохроматической волны частоты ω при условии потенциальности движения жидкости над неровностями дна. Исходными являются уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.254)$$

и граничные условия: на свободной поверхности ($z = 0$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \varphi \quad (2.255)$$

и на неровном дне ($z = -h$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\nabla h \nabla \varphi. \quad (2.256)$$

Представим

$$h = h_0 + h'(x, y), \quad h_0 = \text{const}, \quad \langle h' \rangle = 0. \quad (2.257)$$

Здесь $\langle \rangle$ означают статистическое усреднение и h' предполагается малым. Ввиду этого граничное условие (2.256) удобно снести с неровной поверхности $z = -h$ на плоскость $z = -h_0$ разложением потенциала в ряд по вертикальной координате. Ограничиваясь первыми двумя членами разложения и используя (2.254), уравнение (2.256) заменим на

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\text{div}(h' \nabla \varphi) \quad (z = -h_0). \quad (2.258)$$

Для решения данной краевой задачи применим модифицированную теорию возмущений, использующую малость h' . Представим потенциал в виде, эквивалентном (2.257):

$$\varphi = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y), \quad \langle \varphi_1 \rangle = 0, \quad (2.259)$$

где φ_0 — среднее поле и φ_1 — его флуктуации, обусловленные рассеянием на неровностях дна. Подставляя (2.259) в исходную систему (2.254), (2.255), (2.258) и производя статистическое усреднение, получаем точную краевую задачу для среднего поля:

$$\Delta \varphi_0 + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = 0, \quad (2.260)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \varphi_0 \quad (z = 0), \quad (2.261)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = -\operatorname{div} \langle h' \nabla \varphi_1 \rangle \quad (z = -h_0), \quad (2.262)$$

которая не является замкнутой, так как в (2.262) входит функция φ_1 . Уравнения для последней получаются вычитанием из исходной системы, полученной для среднего поля:

$$\Delta \varphi_1 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad (2.263)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \varphi_1 \quad (z = 0), \quad (2.264)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\operatorname{div} \langle h' \nabla \varphi_0 \rangle - \operatorname{div} \langle h' \nabla \varphi_1 + \langle h' \nabla \varphi_1 \rangle \rangle \quad (z = -h_0). \quad (2.265)$$

Уравнение (2.265) содержит переменные случайные коэффициенты и не может быть решено точно. Поскольку, однако, h' есть малая величина, назовем ее ε , то и φ_1 будет пропорциональна ε , так как генерируется неровностями глубины. Но тогда выражение, стоящее в квадратных скобках в (2.265), пропорционально ε^2 и в первом приближении может быть опущено (хорошо известное приближение *Bourret*, 1962) и уравнение (2.265) трансформируется в

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\operatorname{div} \langle h' \nabla \varphi_0 \rangle \quad (z = -h_0). \quad (2.266)$$

В этом случае система уравнений (2.263), (2.264), (2.266) уже не содержит переменных коэффициентов, а только правую вынуждающую силу, и может быть проинтегрирована, а затем с помощью φ_1 замкнута система для среднего поля.

Представим φ_0 и φ_1 в виде интеграла Фурье по пространственным переменным:

$$\varphi_{0,1}(z, r) = (1/4\pi^2) \int \varphi_{0,1}(k_1, z) \exp(ik_1 r) dk_1. \quad (2.267)$$

Тогда система (2.263), (2.264), (2.266) сводится к

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} - k_1^2 \varphi_1 = 0 \quad (-h_0 < z < 0), \quad (2.268)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \frac{\omega^2}{g} \varphi_1 \quad (z = 0), \quad (2.269)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \Lambda(k_1) \quad (z = -h_0), \quad (2.270)$$

где

$$\Lambda = - \int (k_2 k_1) H(k_2 - k_1) \varphi_0(k_2, -h_0) dk_2, \quad (2.271)$$

$$H(k_1) = \int h'(r) \exp(-ik_1 r) dr. \quad (2.272)$$

Решение уравнения (2.268) с граничными условиями (2.269) и (2.270) легко находится:

$$\varphi_1 = \frac{\Lambda}{k_1} \frac{gk_1 \cosh(k_1 z) + \omega^2 \sinh(k_1 z)}{\omega^2 \cosh(k_1 h_0) - gk_1 \sinh(k_1 h_0)}. \quad (2.273)$$

Применяя теперь преобразование Фурье к уравнениям (2.260), (2.261), (2.262), используя (2.273), получим граничную задачу для φ_0 :

$$\frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} - k_1^2 \varphi_0 = 0 \quad (-h_0 < z < 0), \quad (2.274)$$

$$\frac{d\varphi_0}{dz} = \frac{\omega^2}{g} \varphi_0 \quad (z = 0), \quad (2.275)$$

$$\frac{d\varphi_0}{dz} = \varphi_0 \Pi(k_1) \quad (z = -h_0), \quad (2.276)$$

где

$$\Pi(k_1) = \int \frac{gk_2 - \omega^2 \tanh(k_2 h_0)}{\omega^2 - gk_2 \tanh(k_2 h_0)} \frac{(k_1 k_2)}{\xi} \Phi(k_2 - k_1) dk_2 \quad (2.277)$$

и $\Phi(k) = \langle H^2 \rangle$ представляет собой спектр неровностей дна. Полученная система замкнута и однородна относительно φ_0 . Она разрешима при выполнении дисперсионного соотношения [Dyatlov, Pelinovsky, 1990]:

$$\frac{\omega^2 - gk \tanh(kh_0)}{gk - \omega^2 \tanh(kh_0)} = I = \int \frac{gk_1 - \omega^2 \tanh(k_1 h_0)}{\omega^2 - gk_1 \tanh(k_1 h_0)} \frac{(kk_1)}{kk_1} \Phi(k - k_1) dk_1. \quad (2.278)$$

Разрешая это уравнение, можно получить скорость распространения и коэффициент затухания среднего поля. Учитывая малость флуктуаций глубины, представим

$$k = k_0 + \delta k + i\gamma, \quad (2.279)$$

где k_0 отвечает невозмущенному дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = gk_0 \tanh(k_0 h_0). \quad (2.280)$$

Интеграл I — комплексный, его реальная часть определяет вариации скорости распространения (они могут быть существенны на транс-океанских трассах [Holloway et al., 1986]). Декремент затухания определяется полюсом в интеграле I :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \frac{16k^5}{[2kh_0 + \sinh(2kh_0)]^2} \int_0^{2\pi} \Phi\left(2k \sin \frac{\theta}{2}, \frac{3\pi + \theta}{2}\right) \cos^2 \theta \, d\theta. \quad (2.281)$$

Полученная формула имеет ясный физический смысл: в рассеянии принимают участие спектральные компоненты неровностей, удовлетворяющие известному условию Брега:

$$k_{ir} = 2k \sin(\theta/2), \quad (2.282)$$

которые можно трактовать как условия пространственного синхронизма взаимодействующих волн: падающей, рассеянной и волны "неоднородностей". Отсюда вытекает, что если падающая волна является длинной, то в затухание дают вклад также длинноволновые компоненты неровностей, а следовательно, задача рассеяния волн цунами на неровностях дна может рассматриваться в рамках теории длинных волн, что мы и делали в разд. 2.1.4. В случае длинных волн формула (2.281) упрощается:

$$\gamma = \frac{\pi k^3}{2h^2} \int_0^{2\pi} \Phi\left(2k \sin \frac{\theta}{2}, \frac{3\pi + \theta}{2}\right) \cos^2 \theta \, d\theta. \quad (2.283)$$

В работе [Пелиновский, 1982] выполнены оценки затухания волн цунами в северо-западной части Тихого океана, для которой имеются данные о спектрах неровностей; они показали, что максимум затухания приходится на диапазон длин волн 20–200 км, но длина затухания при этом сравнивается с размерами Тихого океана. Таким образом, диссипация такого рода эффективна только на трансокеанических трассах. Для прибрежной зоны роль этого механизма возрастает (в знаменателе (2.283) стоит глубина бассейна).

В разд. 2.1.4 мы уже получали нелинейное эволюционное уравнение для волн цунами над неровным дном, которое здесь воспроизведем:

$$(gh)^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} - \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} (s + 2\tau, l) W(\tau) \, d\tau = 0, \quad (2.284)$$

где $W(\tau) = \langle h_1(t + \tau) h_1(t) \rangle / h_0^2$ — корреляционная функция относительных неровностей дна. Прежде всего рассмотрим линейный предел этого уравнения и вычислим пространственный декремент затухания монохроматической волны:

$$\gamma = k^2 \int_0^{\infty} W(x) \exp(2ikx) \, dx = (k^2/h^2) \Phi(2k), \quad (2.285)$$

он выражается через одномерный спектр неровностей. С другой стороны, в случае одномерных неровностей двумерный спектр содержит две δ -функции $k\Phi \sim \delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)$ и интеграл (2.283) также вычисляется:

$$\gamma = (k^2/h^2) [\Phi(0) + \Phi(2k)] . \quad (2.286)$$

Таким образом, эволюционное уравнение (2.284) правильно учитывает диссипацию, связанную с одной частью рассеяния, а именно, рассеянием "назад" (легко показать, что рассеянная волна распространяется в обратную сторону). Другая часть рассеяния соответствует рассеянию "вперед", она происходит на нулевой компоненте в спектре неровностей. Фактически эта часть соответствует флуктуациям скорости распространения и учитывается в рамках эволюционного уравнения тем, что оно записано в системе координат, движущейся со случайной скоростью. Если выполнить статистическое усреднение поля η , то из-за флуктуаций скорости волны разбегутся на разные расстояния в разных реализациях и среднее поле будет затухать в соответствии с первым членом в формуле (2.286).

Рассмотрим теперь нелинейные режимы движения волны в океане с неровностями глубины. Для простоты будем считать неровности мелкомасштабными, тогда в интегральном слагаемом (2.284) можно вынести за знак интеграла $\partial^2\eta/\partial s^2$, и уравнение (2.284) сводится к уравнению Кортевега – де Вриза – Бюргерса:

$$(gh)^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{h}{6g} \frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} - \delta \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} = 0, \quad (2.287)$$

где

$$\delta = \int_0^{\infty} W(t) dt \quad (2.288)$$

представляет собой эффективный коэффициент вязкости. Уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса является одним из основных в нелинейной теории волн в диссипативных средах. В следующем разделе опишем одно из таких решений, показывающее влияние рассеяния на неровностях дна на распространение нелинейных волн.

2.4.4. Затухание солитонов

Выше рассматривались различные диссипативные механизмы и оценивалась их эффективность в проблеме цунами. Как правило, анализировалась диссипация в "чистом" виде без учета остальных нелинейных и дисперсионных слагаемых. Рассмотрим здесь совместное действие всех перечисленных эффектов. Поскольку диссипация всегда мала, за исключением, может быть, приурезовой области, то фактически она учитывается добавочным слагаемым в нелинейном эволюционном уравнении типа модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза. Запишем наиболее общий вид этого уравнения при постоянной глубине [Пелиновский, 1971; Miles, 1976, 1979]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \left(1 + \frac{3\eta}{2h} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{ch^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + F\{\eta\} = 0, \quad (2.289)$$

где выражение для "силы трения" F зависит от конкретного механизма диссипации. В частности, если декремент затухания γ не зависит от амплитуды и определяется в рамках линейной теории, то

$$F = \int G(x - x') \eta(x') dx', \quad (2.290)$$

$$G(x) = \int \gamma(k) \exp(ikx) dk. \quad (2.291)$$

Уравнение (2.289) в этом случае является интегродифференциальным. В частности, если потери обусловлены диссипацией в придонном пограничном слое и выражаются упрощенной формулой (2.239), то

$$F = - \left(\frac{vc}{4\pi h^2} \right)^{1/2} \int \frac{\eta(x', t) dx'}{(x - x')^{3/2}}. \quad (2.292)$$

В случае диссипации, обусловленной рассеянием на неровностях дна, функция F определена интегральным слагаемым в (2.284) и только при мелкомасштабности неровностей дна имеет простой вид:

$$F = - gh\delta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (2.293)$$

где δ задана формулой (2.288). Если диссипация определяется нелинейными механизмами, например, в рамках гидравлической модели, то соответствующее выражение для F может быть записано как

$$F\{\eta\} = \frac{\mu g}{2h^2} \eta |\eta|. \quad (2.294)$$

Здесь рассмотрим только одно частное решение уравнения (2.289), соответствующее затуханию солитонов. Адиабатическое сохранение формы солитона возможно только при условии малости потерь (по сравнению с нелинейностью и дисперсией), что будет предполагаться. Асимптотическая процедура для описания трансформации солитона в неоднородной среде рассматривалась в разделе 2.3.4. Ее применение к уравнению (2.289) также ведет к уравнению энергетического баланса, которое может быть получено непосредственно из (2.289) умножением его на η и интегрированием в бесконечных пределах по x . В результате получим уравнение для амплитуды солитона [Пелиновский, 1971, 1982; Miles, 1976]:

$$\frac{dH}{dt} = - \tilde{F}(H). \quad (2.295)$$

Здесь F для рассмотренных выше примеров диссипации выражается следующим образом:

— диссипация в придонном пограничном слое

$$\tilde{F} = \rho v^{1/2} g^{1/4} h^{-3/2} H^{5/4}, \quad (2.296)$$

где ρ — численный коэффициент порядка единицы;

— нелинейная диссипация в рамках гидравлической модели

$$\tilde{F} = \frac{2\mu H^2}{3h} \left(\frac{g}{h}\right)^{1/2}, \quad (2.297)$$

— рассеяние на мелкомасштабных неровностях дна

$$\tilde{F} = \frac{8c\delta}{15h^2} H^2. \quad (2.298)$$

Поскольку \tilde{F} по-разному зависит от высоты солитона, то из формулы следует преобладающее влияние определенного вида диссипации при различных высотах волн. Так, диссипация в придонном пограничном слое важна при малых амплитудах, а нелинейная диссипация и рассеяние на мелкомасштабных неровностях существенны при более больших амплитудах. Приведем явные аналитические выражения, описывающие временную эволюцию затухающего солитона. Диссипация в придонном пограничном слое выразится следующим соотношением:

$$H = H_0 / \left(1 + \frac{\rho v^{1/2} t (g H_0)^{1/4}}{4h^{3/2}}\right)^4. \quad (2.299)$$

Обратим внимание, что на больших временах высота солитона перестает зависеть от начальной амплитуды и затухает со временем как t^{-4} . Нелинейную диссипацию в рамках гидравлической модели запишем как

$$H = H_0 / \left(1 + \frac{3\mu H_0 t (g/h)^{1/2}}{h}\right). \quad (2.300)$$

И здесь на больших временах амплитуда солитона перестает зависеть от начальной амплитуды, но затухание происходит по более медленному закону. Рассеяние на шероховатостях дна опишется выражением

$$H = H_0 / \left(1 + \frac{8\delta c H_0 t}{15h^2}\right). \quad (2.301)$$

Нетрудно также в принципе учесть взаимное влияние диссипативных, нелинейных, дисперсионных факторов в бассейне переменной глубины на изменение высоты солитона. В этом случае удобно использовать вместо времени t координату l и с учетом адиабатического изменения высоты солитона в соответствии с нелинейным законом Грина (см. разд. 2.3.3) переписать уравнение (2.295) в виде

$$\frac{dH}{dl} = -H \frac{dh/dl}{h} - \frac{1}{c} \tilde{F}(H, h). \quad (2.302)$$

Для переменной

$$A = Hh \quad (2.303)$$

уравнение (2.302) принимает форму

$$\frac{dA}{dh} = -\frac{h}{c} \frac{F(A, h)}{dh/dt} \quad (2.304)$$

и может быть проинтегрировано для каждого вида диссипации, рассмотренного выше, при движении волны по откосу постоянного уклона. Некоторые такие решения приведены, например, в [Djordjevic, 1980; Miles, 1983].

2.5. УСИЛЕНИЕ ЦУНАМИ ДВИЖУЩИМИСЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В первой главе было показано, что в большинстве случаев механизмы генерации волн цунами могут быть рассмотрены в рамках линейной теории. Исключения составляют движущиеся резонансно с волной цунами возмущения. Если говорить о подвижках дна, то они сосредоточены только в очаговой области, поэтому значительного усиления волн цунами в этом случае трудно ожидать. В этой связи интерес представляют движущиеся атмосферные возмущения (циклоны и тайфуны), способные передвигаться на большие расстояния и приводить к эффективному возбуждению метеоцунами. Рассмотрим соответствующую модель явления, считая, что глубина океана постоянна и движение является одномерным.

2.5.1. Вывод упрощенной модели взаимодействия солитона с атмосферными возмущениями

В разд. 1.4.1 мы уже выводили уравнения нелинейно-дисперсионной теории генерации цунами возмущениями атмосферного давления, которые здесь воспроизведем:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta) u] = 0, \quad (2.305)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x}. \quad (2.306)$$

Будем снова считать, что нелинейность и дисперсия малы, а возмущения атмосферного давления слабые. Тогда система уравнений (2.305) и (2.306) может быть переписана в виде нелинейного волнового уравнения для уровня η :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \Pi\{\eta, u\} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2}, \quad (2.307)$$

$$\Pi = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3}. \quad (2.308)$$

Здесь правая часть уравнения (2.307) может рассматриваться пропорциональной малому параметру ϵ . Тогда, вводя координаты

$$x' = x - ct, \quad t' = t \quad (2.309)$$

и используя линейные связи между u и $\eta (u = \eta g/c)$, уравнение (2.307) можно проинтегрировать один раз (штрихи опущены):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3g}{2c} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gh^3}{6c} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = \frac{h}{2\rho c} \frac{\partial p_a}{\partial x}. \quad (2.310)$$

Удобно переписать его в несколько более общем виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2.311)$$

$$\text{где } c = (gh)^{1/2}, \quad \alpha = \frac{3c}{2h}, \quad \beta = \frac{ch^2}{6}, \quad f = \frac{c}{2\rho g} p_a. \quad (2.312)$$

Уравнение (2.311) представляет собой известное уравнение Кортевега — де Вриза, которое мы уже многократно изучали, с правой частью, его часто называют вынужденным уравнением Кортевега — де Вриза, и в настоящее время оно рассматривается как одно из эталонных уравнений математической физики. Будем считать, что волна давления (правая часть в (2.311)) является функцией $x - vt$, где v — скорость перемещения атмосферного возмущения и v близка к линейной скорости распространения (резонанс). Тогда удобно перейти в систему координат, связанную с возмущением

$$x' = x - vt, \quad t' = t, \quad (2.313)$$

и переписать (2.311) в окончательной форме (штрихи снова опущены):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (c - v) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (2.314)$$

Если $f = 0$, то главную роль в решении уравнения Кортевега — де Вриза играют солитоны, которые в этих обозначениях описываются следующей формулой:

$$\eta = a \operatorname{sech}^2 \gamma \Phi, \quad \Phi = x - qt - x_0, \quad \gamma = \left(\frac{\alpha a}{12\beta} \right)^{1/2}, \quad q = c - v + \frac{\alpha a}{3}, \quad (2.315)$$

где амплитуда солитона a и начальное положение солитона x_0 являются свободными параметрами. В этой системе координат, как легко видеть, свободный солитон движется быстрее, чем возмущение, если $v < c$ (солитон распространяется в правую сторону). Если возмущение движется быстро ($v > c$), то солитон малой амплитуды распространяется в левую сторону, так как его скорость меньше

скорости возмущения. Однако солитон большой амплитуды может обогнать возмущение (при условии $a > 3\beta(v - c)/\alpha$) и распространяться в правую сторону. Уже из этого рассмотрения следует, что случай $v > c$ с малой величиной разницы $v - c$ должен быть весьма интересным с математической и физической точек зрения.

Генерация волн цунами движущимися возмущениями рассматривалась в первой части, и здесь не будем повторять анализ начальной стадии. Предположим, что солитон уже сформировался, и рассмотрим процесс его усиления под действием движущегося возмущения. Как и ранее, будем считать, что возмущение достаточно слабое, так что солитон сохраняет свою форму в процессе взаимодействия (условием адиабатического взаимодействия является медленность изменения параметров солитона на расстояниях порядка длины нелинейности). Тогда решение вынужденного уравнения Кортевега — де Вриза отыскивается в виде

$$\eta_0 = a(T) \operatorname{sech}^2 \chi(T) \Phi, \quad \Phi = x - \Psi(T),$$

$$\Psi(T) = x_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int q(T) dT, \quad \chi(T) = \left(\frac{\alpha a}{12\beta} \right)^{1/2}. \quad (2.316)$$

Дальнейшая процедура получения уравнений для амплитуды и скорости солитона в рамках асимптотического метода полностью аналогична процедуре, изложенной в разд. 2.3.2, и здесь не повторяется. В частности, в первом приближении снова получим для амплитуды уравнение энергетического баланса

$$\frac{d}{dT} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \eta_0^2 d\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_0 \frac{\partial f}{\partial \Phi} d\Phi, \quad (2.317)$$

а для положения (фазы) солитона невозмущенные соотношения

$$\frac{d\Psi}{dT} = q_0, \quad (2.318)$$

$$q_0 = c - v + \frac{\alpha a}{3}. \quad (2.319)$$

Эти максимально упрощенные уравнения позволяют понять физику процесса адиабатического взаимодействия солитона с движущимися возмущениями.

2.5.2. Взаимодействие солитона с движущимся возмущением

Для произвольной формы возмущения уравнение (2.317) не интегрируется, рассмотрим два предельных случая широких и узких возмущений.

Гладкие возмущения. В этом случае солитон играет роль дельта-функции, позволяющей вычислить интеграл в (2.317). В результате исходные уравнения модели принимают вид

$$\frac{da}{dT} = 2 \frac{df}{d\Psi}, \quad (2.320)$$

$$\frac{d\Psi}{dT} = c - v + \frac{\alpha a}{3}. \quad (2.321)$$

Эта система уравнений была получена в работе [Warn, Brasnett, 1983] для задач атмосферной динамики. Видно, что система (2.320), (2.321) сводится к уравнению нелинейного осциллятора

$$\frac{d^2\Psi}{dT^2} = \frac{2\alpha}{3} \frac{df}{d\Psi} \quad (2.322)$$

и легко исследуется на фазовой плоскости. Отметим, что все интегральные траектории легко находятся в явном виде:

$$\frac{4\alpha}{3} f(\Psi) = \left(c - v + \frac{\alpha a}{3} \right)^2 + P, \quad (2.323)$$

где P — произвольная константа. Мы будем рассматривать симметричные возмущения $f(x) = f(-x)$ в форме одного положительного или отрицательного импульса с одним экстремумом. Для определенности положим

$$f(x) = b \operatorname{sech}^2 x/l \quad (2.324)$$

и сделаем некоторые подстановки:

$$\theta = \Psi/l, \quad \Gamma = a/a_0, \quad a_0 = 3|v - c|, \quad Q = (4\alpha b)/[3(v - c)^2]. \quad (2.325)$$

Тогда формула (2.323) может быть переписана в безразмерной форме:

$$Q \operatorname{sech}^2 \theta = [1 - \Gamma \operatorname{sign}(v - c)]^2 + P. \quad (2.326)$$

Фазовый портрет системы (2.320)–(2.321), все траектории которого определяются формулой (2.326), зависит от знака Q и $(c - v)$. Сначала рассмотрим случай $c > v$. Фазовый портрет для этого случая изображен на рис. 2.8, а для $Q > 0$ и рис. 2.8, б для $Q < 0$. Главным режимом здесь является режим пролетных траекторий, соответствующих быстрому движению солитонов через область возмущений. Амплитуда солитона возрастает в момент взаимодействия при $Q > 0$ (и убывает при другом знаке возмущения) и восстанавливается после взаимодействия. На фазовой плоскости (см. рис. 2.8, а) также видны (в области малых амплитуд) траектории, соответствующие генерации виртуальных солитонов. Эти солитоны генерируются позади возмущения, затем нарастают, обгоняют возмущение и диссипируют. Такой же режим есть и при $Q < 0$ (см. рис. 2.8, б), в этом случае солитоны, расположенные позади возмущения, диссипируют при взаимодействии, а часть солитонов генерируется впереди возмущения.

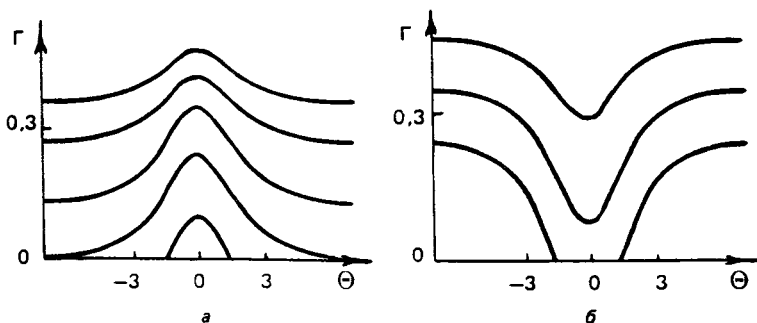


Рис. 2.8. Фазовая плоскость системы (2.320), (2.321) для "быстрого" солитона ($c > v$) при $Q > 0$ (а) и $Q < 0$ (б)

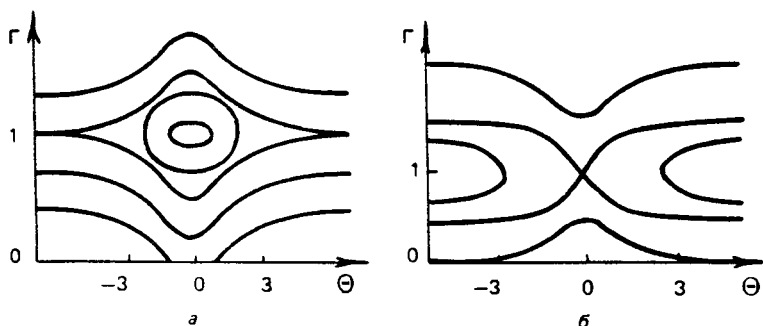


Рис. 2.9. Фазовая плоскость системы (2.320), (2.321) для "медленного" солитона ($c < v$) при $0 < Q < 1$ (а) и $-1 < Q < 0$ (б)

Рассмотрим теперь противоположный случай $c < v$. Динамика солитонов здесь существенно богаче. Во-первых, здесь существует состояние равновесия:

$$\alpha a_0 = 3(v - c), \quad \theta = 0. \quad (2.327)$$

Оно эквивалентно существованию солитона, распространяющегося с той же скоростью, что и возмущение. Естественно, это возможно только при определенной амплитуде солитона. Характер равновесия зависит от знака Q . В частности, при $Q < 0$ оно — седло, а при $Q > 0$ — центр. В первом случае солитоны отражаются от области, занятой возмущением, а во втором осциллируют по амплитуде с частотой

$$\omega = [(4\alpha b)/(3l^2)]^{1/2}. \quad (2.328)$$

Этот режим соответствует захвату солитонов полем движущегося возмущения. Более детально эти режимы иллюстрируются на фазовой плоскости, рис. 2.9, для $|Q| < 1$. И здесь есть старые режимы пролетных траекторий и виртуальных солитонов, они отчетливо видны на фазовой плоскости. Отметим важную формулу, вытекающую из (2.326)

$$\Gamma_{\max} + \Gamma_{\min} = 2. \quad (2.329)$$

Она связывает изменение амплитуды солитона при его отражении от возмущения при $Q > 0$ или при его захвате, когда $Q < 0$.

Короткое возмущение. Рассмотрим теперь другой, альтернативный случай, когда $f(x)$ может быть аппроксимирована дельта-функцией:

$$f(x) = b \delta(x/l), \quad (2.330)$$

где b и l имеют тот же смысл, что и в (2.324). В случае (2.330) интеграл в (2.317) легко вычисляется:

$$\frac{da}{dT} = -\frac{\alpha b l}{12\beta} a \operatorname{sech}^2 \gamma \Psi \tanh \gamma \Psi, \quad (2.331)$$

другое уравнение (2.318), конечно же, не изменилось. Удобно ввести новую переменную

$$\theta = \gamma \Psi, \quad (2.332)$$

и система (2.331) и (2.318) принимает окончательную форму

$$\frac{d\gamma}{dT} = -\frac{\alpha b l}{12\beta} \gamma \operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta, \quad (2.333)$$

$$\frac{d\theta}{dT} = \gamma(c - v + 4\beta\gamma^2), \quad (2.334)$$

где мы пренебрегли малым членом (пропорциональным b) в правой части уравнения (2.334).

Все интегральные траектории и в этом случае находятся в явном виде:

$$\frac{\alpha b l}{24\beta} \operatorname{sech}^2 \theta = (c - v) \gamma + \frac{4\beta}{3} \gamma^3 + P. \quad (2.335)$$

После подстановок

$$\alpha a_0 = 3|c - v| = 12\beta\gamma_0^2, \quad G = \frac{\gamma}{\gamma_0} \quad (\Gamma = G^2), \quad Q^* = \frac{\alpha b l}{24\beta\gamma_0|c - v|} \quad (2.336)$$

можно переписать формулу (2.335):

$$Q^* \operatorname{sech}^2 \theta = -G \operatorname{sign}(v - c) + \frac{1}{3} G^3 + P. \quad (2.337)$$

Эта формула похожа на (2.326) для гладкого возмущения, поэтому

фазовые портреты здесь практически тождественны. Меняется только критическое значение Q^* , в частности, для узкого возмущения $Q_{кр}^* = 2/3$.

Приведем также алгебраическую связь между начальным и конечным значениями амплитуды солитона при отражении от движущегося узкого возмущения:

$$G_k = -\frac{G_n}{2} + \left[3 \left(1 - \frac{G_n^2}{4} \right) \right]^{1/2}. \quad (2.338)$$

Максимально фактор усиления (или затухания) может достигать трех (для гладких возмущений — только двух).

Похожесть решений в предельных случаях коротких и длительных возмущений показывает, что такая же картина должна сохраняться и для возмущений произвольной длительности. Как показали численные решения вынужденного уравнения Кортевега — де Вриза, приведенная здесь упрощенная модель правильно отражает физическую картину взаимодействия солитона с движущимся возмущением [Grimshaw et al., 1994; Гримшоу, Пелиновский, 1995]. С другой стороны, приведенная здесь теория позволяет понять также устойчивость генерируемых солитонов стационарно движущимся возмущением, этот важный вопрос разбирается в работе [Camassa, Wu, 1991].

НАКАТ ВОЛН ЦУНАМИ НА БЕРЕГ

Для волн цунами в прибрежной зоне лучевые методы, как правило, неприменимы. Здесь существенную роль начинает играть отражение от материкового склона и берега. Большое значение имеют и шельфовые эффекты, приводящие к резонансному усилению волн избранных частот. Особое место занимает приурезовая область, определяющая в конечном счете разрушительную силу цунами. Конечно, теоретическое изучение наката цунами на берег является составной частью исследований волн цунами в бассейне переменной глубины и, соответственно, основывается на общих для всей проблемы моделях, таких как нелинейно-дисперсионная модель, неоднократно обсуждавшаяся выше. Вместе с тем моделирование наката является более сложной задачей, чем расчеты предшествующих стадий распространения волн, в связи с появлением в этом случае дополнительной, заранее неизвестной подвижной границы — линии уреза.

Из наблюдений за морскими волнами и данных гидромоделирования установлено существование нескольких типов наката волн на берег [Galvin, 1966; Mei, 1989] (рис. 3.1):

— расплескивающийся бурун (*spilling*) — разрушается вершина волны и пена стекает по ее переднему склону, характерен при малых уклонах дна;

— ныряющий бурун (*plunging*) — вершина волны обгоняет подножие и наклоняется вниз, характерен при больших уклонах дна;

— вздымающийся бурун (*surging*) — волна подтопляет берег без обрушения, характерен для крутых откосов.

Очевидно, что каждый из типов наката нуждается в соответствующей математической модели. Волны цунами являются достаточно длинными, поэтому они зачастую не должны успевать опрокинуться. Этот важный вопрос изучался в работе [Мазова и др., 1983] на примере тихоокеанских цунами. Их анализ (всего было изучено 415 событий) показал, что примерно в 75 % случаев (319 событий) волны цунами подтапливали берег без обрушения. С увеличением амплитуды волны вероятность обрушения растет и ее можно аппроксимировать нормальным законом распределения:

$$P = 0,5 + \Phi(\zeta), \quad \zeta = 1,9(\lg R - 1,2),$$

где Φ — функция Лапласа. Разумеется, это весьма средние цифры

(в введении мы показывали многообразные типы разрушения волн во время цунами в Японском море 26 мая 1983 г.). Тем не менее в качестве первой и основной модели будем развивать модель наката необрушенных волн цунами, имея в виду, что при учете обрушения, как и любого типа диссипации, рассчитанные высоты волн могут только уменьшиться. Математической моделью в этом случае является нелинейная теория мелкой воды с различными модификациями. Ниже обсуждаются главным образом аналитические результаты, полученные в рамках данной модели.

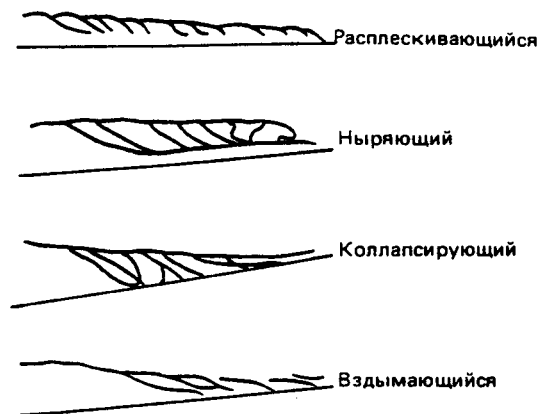


Рис. 3.1. Типы наката волн на берег

3.1. ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН ЦУНАМИ НА МАТЕРИКОВОМ СКЛОНЕ

Рассмотрим сначала простейшую геометрию задачи, когда глубина бассейна может быть аппроксимирована кусочно-постоянной функцией. Подобная схематизация наиболее удобна для получения аналитических решений и оценки влияния нелинейности и дисперсии на процесс трансформации волн цунами в береговой зоне.

3.1.1. Взаимодействие длинных волн с вертикальной стенкой

В практике океанологических расчетов большое распространение получило приближение вертикальной стенки на берегу или на краю материкового склона, позволяющее избежать некоторых вычислительных трудностей (переменность шага, спрямление береговой черты и т. д.). Такая ситуация хорошо моделирует волны цунами вблизи скалистых берегов. Для простоты положим глубину всюду постоянной и исследуем свойства волнового поля вблизи вертикальной стенки.

На первом этапе пренебрежем влиянием дисперсии и диссипации и рассмотрим одномерную задачу. В качестве исходных уравнений здесь воспроизведем нелинейные уравнения мелкой воды:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta) u] = 0, \quad (3.2)$$

которые необходимо решать в области $x < 0$. На вертикальной стенке ($x = 0$) естественно задать условие непротекания:

$$u = 0. \quad (3.3)$$

Решение поставленной задачи в рамках нелинейной теории мелкой воды дано С. Христиановичем. Оно основано на переходе к римановым инвариантам

$$I_{\pm} = u \pm 2\{[g(h + \eta)]^{1/2} - (gh)^{1/2}\} \quad (3.4)$$

в качестве независимых функций. Тогда система (3.1), (3.2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial I_{\pm}}{\partial t} + c_{\pm} \frac{\partial I_{\pm}}{\partial x} = 0, \quad (3.5)$$

$$c_{\pm} = \pm (gh)^{1/2} + \frac{3}{4} I_{\pm} + \frac{1}{4} I_{\mp}. \quad (3.6)$$

Процесс распространения и отражения волны может быть представлен рис. 3.2, где изображены характеристики c_{\pm} . В линейной теории характеристики всюду являются прямыми линиями (штриховые линии), из-за нелинейности характеристики изгибаются в области взаимодействия падающей и отраженной волн вблизи стенки (заштрихованная область). Поскольку из (3.5) следует, что I_{\pm} сохраняется вдоль характеристик, то эффект взаимодействия волн сводится к появлению дополнительных задержек во времени прихода различных фаз отраженной волны.

Если интересоваться только амплитудой волны у стенки, то ее можно рассчитать точно из условия сохранения I_{+} вдоль характеристики c_{+} . Вне области взаимодействия $I_{-} = 0$ и, следовательно,

$$I_{+} = 4\{[g(h + H_0)]^{1/2} - (gh)^{1/2}\}, \quad (3.7)$$

где H_0 — начальная амплитуда волны. На стенке из условия (3.3) вытекает, что

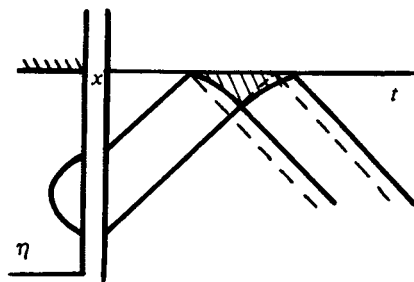


Рис. 3.2. Характеристики волн при отражении от стенки

$$I_+ = 2\{[g(h + H)]^{1/2} - (gh)^{1/2}\}. \quad (3.8)$$

Приравнивая (3.7) и (3.8), находим высоту волны на стенке:

$$H/h = 4\left[1 + H_0/h - \left(1 + H_0/h\right)^{1/2}\right]. \quad (3.9)$$

В предельном случае очень малых значений H_0/h (линейная задача) из (3.9), естественно, вытекает $H = 2H_0$. Учет нелинейности приводит к возрастанию высоты подъема у стенки, правда, не очень сильному (так, при $H_0 = h$ $H \approx 2,4H_0$). При малых H_0 формула (3.9) может быть упрощена:

$$H/H = 2 + H_0/(2h). \quad (3.10)$$

Из развитой теории удастся получить также условия ее применимости. С увеличением амплитуды уменьшается расстояние, на котором волна превращается в ударную. Поэтому при большой амплитуде волны и удаленности источника от вертикальной стенки к ней подойдет ударная волна. Этот эффект не связан с наличием стенки и определяется только эволюцией волны по мере распространения. Имеется, однако, другой эффект, полностью обусловленный наличием преграды и связанный с взаимодействием падающей и отраженной волн. Отраженная волна вблизи стенки распространяется в поле падающей волны и, если последняя достаточно мощная, то отраженная волна не сможет отойти от стенки и разрушится. Условие существования отраженной волны вытекает из определения характеристики

$$c_- = -(gh)^{1/2} + I_+/4 \leq 0, \quad (3.11)$$

и с помощью (3.7) находим

$$H_0 \leq 3h. \quad (3.12)$$

Таким образом, если $H_0 > 3h$, то волна заведомо разрушится у стенки, если же $H_0 < 3h$, то обрушение вблизи стенки зависит от ее предыдущей эволюции.

Итак, мы получили точное решение для высоты подъема уровня воды у вертикальной стенки при накате необрушенной длинной волны. Если к преграде подходит ударная волна (бор), то такая задача также может быть решена, поскольку на разрыве выполняются законы сохранения массы и импульса. Мы не обсуждаем подобные задачи, изложенные во многих книгах и учебниках, в частности в книге [Стокер, 1959].

Учтем теперь влияние дисперсии на характер наката волн цунами на вертикальную преграду. При этом исходными являются уравнения нелинейно-дисперсионной теории (2.11) и (2.12), которые мы здесь также воспроизводим:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta) u] = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = D, \quad (3.14)$$

$$D = \frac{1}{3(h + \eta)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (h + \eta)^3 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.15)$$

При учете дисперсии мы сразу сталкиваемся с проблемой нестационарного поведения волны при подходе к преграде, поскольку совместное влияние нелинейности и дисперсии приводит к появлению ондуляций на теле длинной волны, превращающихся по мере распространения в солитоны. Амплитуда волны меняется в процессе распространения, и в результате накат зависит не только от параметров нелинейности и дисперсии, но и от удаленности очага от стенки и от формы начального возмущения. Эти трудности снимаются при использовании начальных возмущений в виде солитона, который сохраняет свою форму до подхода к вертикальной преграде. Кроме того, для солитона существует жесткая связь между длиной и высотой волны, так что естественно ожидать, что высота наката будет зависеть только от одного параметра H_0/h , как и для римановой волны. Численные расчеты в рамках системы (3.13)–(3.15) подтвердили эти соображения и привели к следующей интерполяционной формуле [Железняк, 1985]:

$$H/H_0 = 1,99 + 0,602 H_0/h + 0,039 (H_0/h)^2, \quad (3.16)$$

пригодной до $H_0/h \sim 0,8$; первые два члена в (3.16), в сущности, соответствуют (3.10). Формула (3.16) хорошо подтверждается данными гидромоделирования, на чем мы здесь специально не останавливаемся. Отметим также, что численные и лабораторные эксперименты свидетельствуют, что волна, отраженная от стенки, уже не является солитоном, на малом расстоянии от стенки за гребнем следует ложбина, на большем — гребень превращается в солитон, за которым тянется осциллирующий хвост.

Следует подчеркнуть, что задача отражения волны от вертикальной преграды с математической точки зрения полностью эквивалентна задаче о столкновении двух волн в безграничной среде. В такой постановке задача часто бывает более удобной для аналитического рассмотрения. Приведенные выше слова о характере взаимодействия солитона со стенкой означают, что взаимодействие солитонов в безграничной среде не носит упругого характера, такая ситуация свойственна неинтегрируемым системам, к которым относится система (3.13)–(3.15). Даже при слабой нелинейности, когда D можно аппроксимировать выражением

$$D = -\frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}, \quad (3.17)$$

насколько нам известно, не удастся получить интегрируемую модель. Наиболее близкой моделью является уравнение буссинесковского типа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 w^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad (3.18)$$

рассмотренное Hirota (1973), получившим, в частности, двухсолитонное решение, которое может представлять собой и их упругое встречное взаимодействие. Система (3.13)–(3.14) при слабой нелинейности сводится к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{gh^3}{3} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = \frac{g}{2} \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x^2} + h \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}, \quad (3.19)$$

в котором нельзя исключить u (это можно сделать только в одноволновом приближении, когда $u \approx (g/h)^{1/2} \eta$, но тогда уравнение (3.19) будет фактически эквивалентно уравнению Кортевега – де Вриза). Можно попытаться получить замкнутое уравнение для потенциала, так как это всегда делается для линейных задач. Действительно, динамическое граничное условие (оно приведено в начале первой части) можно рассматривать как "определение" уровня

$$\eta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]_{z=\eta} \quad (3.20)$$

и при слабой нелинейности уровень можно выразить явно

$$\eta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \right]_{z=0} \quad (3.21)$$

с точностью до кубических по амплитуде слагаемых. Подставляя (3.21) в кинематическое граничное условие с такой же точностью, можно написать замкнутое граничное условие для потенциала на невозмущенной поверхности $z = 0$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{g} \nabla \varphi \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{g^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \right) \quad (3.22)$$

Таким образом, с точностью до кубических по амплитуде слагаемых мы получили замкнутую систему уравнений для потенциала – это уравнение Лапласа и два граничных условия: на свободной поверхности (3.22) и на дне, которое в случае ровного дна становится тривиальным

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h). \quad (3.23)$$

Разумеется, эту процедуру можно продолжать, получая с любой точностью по нелинейности граничное условие только для потенциала, этот прием используется в морской гидромеханике при изучении волн Стокса [Ньюмен, 1985]. Если теперь использовать длинноволновое приближение, т. е. разложить потенциал в ряд по глубине, то с учетом уравнения Лапласа и условия (3.23) его можно записать в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x, y, t) (z+h)^{2n}, \quad q_{n+1} = -\frac{\Delta q_n}{(2n+1)(2n+2)} \quad (3.24)$$

(в сущности, такое разложение уже неоднократно делалось в первой и второй частях). Подставляя теперь (3.24) в (3.22), можно получить замкнутое уравнение для функции $q_0(x, y, t)$ с любой степенью точности по дисперсии. В первом исчезающем приближении по нелинейности и дисперсии запишем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\beta}{3} \frac{\partial^4 q}{\partial t^4}, \quad (3.25)$$

которое мы переписали вслед за [Уизем, 1974] в безразмерных переменных:

$$\tilde{x} = x/\lambda, \quad \tilde{t} = \lambda t / (gh)^{1/2}, \quad \tilde{q} = q \lambda \alpha (gh)^{1/2}, \quad (3.26)$$

где λ — характерная длина волны, $\alpha = H_0/h$ — параметр нелинейности, H_0 — амплитуда волны, $\beta = h^2/\lambda^2$ — параметр дисперсии и тильды в дальнейшем опущены. В этих же обозначениях безразмерная величина смещения водной поверхности ($\tilde{\eta} = \eta/h$) равна:

$$\eta = -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^3 q}{\partial t^3}. \quad (3.27)$$

Как видим, и замкнутое уравнение для потенциала не совпадает с интегрируемой моделью (3.18), так что можно ожидать, что встречное взаимодействие солитонов (как и солитона со стенкой) сопровождается потерями энергии. Этот важный вопрос исследовался аналитически в случае солитона малой амплитуды, когда в той или иной форме можно использовать методы теории возмущений.

В отсутствие взаимодействия падающей и отраженных волн уравнение (3.25) сводится к уравнению Кортевега — де Вриза. Действительно, вводя новые координаты

$$\xi = x - t, \quad \tau = \alpha t \quad (3.28)$$

и пренебрегая членами порядка α^2 , получим из (3.25)

$$2\alpha \frac{\partial^2 q}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{3\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial q}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\beta}{3} \frac{\partial^4 q}{\partial \xi^4} = 0 \quad (3.29)$$

и после замены $\partial q / \partial \xi = \eta$, вытекающей из (3.27) в нулевом приближении, получим классическое уравнение Кортевега — де Вриза

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\beta}{6\alpha} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = 0. \quad (3.30)$$

При учете взаимодействия солитонов естественно ввести новые координаты

$$\xi_1 = x - t, \quad \xi_2 = -x - t, \quad \tau = \alpha t \quad (3.31)$$

и считать q в виде [Miles, 1977]

$$q = F_1(\xi_1, \tau) + F_2(\xi_2, \tau) + \alpha F_{12}(\xi_1, \xi_2, \tau), \quad (3.32)$$

где $F_{1,2}$ — не взаимодействующие солитоны, отвечающие уравнению (3.29), которое перепишем в соответствующей форме:

$$2\alpha \frac{\partial F_{1,2}}{\partial \tau} + \frac{3\alpha}{2} \frac{\partial F_{1,2}^2}{\partial \xi_{1,2}} + \frac{\beta}{3} \frac{\partial^3 F_{1,2}}{\partial \xi_{1,2}^3} = 0, \quad (3.33)$$

и F_{12} — результат взаимодействия. В этих переменных уравнения (3.25), (3.27) переписываются следующим образом:

$$\eta = (\partial_1 + \partial_2 - \alpha \partial_\tau) q - \alpha \left[\frac{1}{2}(\partial_1 q)^2 + \frac{1}{2}(\partial_2 q)^2 - \partial_1 q \partial_2 q \right] - \frac{1}{2}\beta(\partial_1 + \partial_2)^3 q, \quad (3.34)$$

$$(\partial_1 + \partial_2) \left\{ 2\alpha \partial_\tau q + \alpha \left[\frac{3}{2}(\partial_1 q)^2 + \frac{3}{2}(\partial_2 q)^2 - \partial_1 q \partial_2 q \right] \right\} + \frac{1}{3}\beta(\partial_1 + \partial_2)^3 q - 4\partial_1 \partial_2 q = 0, \quad (3.35)$$

где символ ∂ обозначает соответствующую частную производную. После подстановки (3.32) в (3.35) с учетом (3.33) получим простое уравнение (при всех преобразованиях сохраняем члены только первого порядка по нелинейности)

$$4\partial_1 \partial_2 F_{12} = -(\partial_1 + \partial_2) \partial_1 F_1 \partial_2 F_2, \quad (3.36)$$

которое легко интегрируется:

$$F_{12} = -\frac{1}{4}(\partial_1 + \partial_2) F_1 F_2. \quad (3.37)$$

В результате с использованием разложения в ряд Тейлора формула (3.32) принимает окончательный вид

$$q = F_1(\xi_1 + \chi_2, \tau) + F_2(\xi_2 + \chi_1, \tau), \quad (3.38)$$

где

$$\chi_n = -\frac{\alpha}{4} F_n(\xi_n, \tau). \quad (3.39)$$

Подстановка (3.38) в (3.34) позволяет вычислить смещение водной поверхности в явном виде [Miles, 1977]

$$\eta = N_1(\xi_1 + \chi_2, \tau) + N_2(\xi_2 + \chi_1, \tau) + \frac{\alpha}{2} N_1 N_2, \quad (3.40)$$

$$N_n = \left(\partial_n - \frac{\beta}{3} \partial_n^3 \right) F_n + \frac{\alpha}{4} (\partial_n F_n)^2. \quad (3.41)$$

Данное решение описывает взаимодействие встречных солитонов

с произвольными (но относительно малыми) амплитудами. В случае отражения солитона от вертикальной стенки необходимо принять, что $F_1 = F_2 = F$, и $N_1 = N_2 = N$. Тогда колебания уровня в точке $x = 0$ имеют простой вид

$$\eta_w = 2N \left(-t - \frac{\alpha}{4} F(0, \tau), \tau \right) + \frac{\alpha}{2} N^2(-t, \tau). \quad (3.42)$$

Максимальная высота наката отсюда получается в следующем виде (возвращаемся к размерным переменным) [Buatt-Smith, 1971; Miles, 1976; Rienecker, Fenton, 1981]:

$$H/H_0 = 2 + H_0/2h, \quad (3.43)$$

которая совпадает с (3.20), полученной для римановой волны малой амплитуды. Этот же подход может быть применен и при других граничных условиях на стенке; такой прием используется при замене реальной зоны наката эквивалентными граничными условиями [Sugimoto, Kakutani, 1984; Jeffrey, Dai, 1988], частично мы будем обсуждать эту проблему в разд. 3.2.6.

Обратим внимание, что в рамках рассматриваемой теории возмущений столкновение солитонов носит упругий характер, что легко видно из (3.38), взаимодействие приводит к появлению только фазовых задержек. Это означает, что образование хвоста за солитоном и соответствующие этому процессу потери энергии являются эффектами следующего порядка по нелинейности. Более высокие порядки теории возмущений рассмотрены Buatt-Smith (1988). Он получил, что уже в следующем порядке теории возмущений начинается образование хвоста за отраженным солитоном, и полное изменение амплитуды солитона после отражения описывается простой формулой:

$$(H_{\text{отр}} - H_0)/H = -(5/21) (H_0/h)^5. \quad (3.44)$$

Таким образом, можно утверждать, что дисперсия относительно слабо сказывается на процессе взаимодействия волны цунами с вертикальной стенкой. Правда, все основные выводы получены в рамках слабодисперсионной модели; рассмотрение этих эффектов в рамках полной теории показывает, что здесь возможно образование струй, пузырьков воздуха [Longuet-Higgins, 1983, 1993], и как они влияют на высоту наката, пока еще не ясно.

3.1.2. Взаимодействие солитона с вертикальной преградой (пространственная задача)

Неоднородная задача о поведении волны вблизи вертикальной преграды оказывается более сложной, поэтому здесь рассмотрим только солитоны малой амплитуды. Сначала применим опять подход Майлса для анализа процесса взаимодействия, причем будем стар-

товать с пространственной версии уравнений (3.25) и (3.27):

$$\eta = -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\alpha}{2} (\nabla q)^2 + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^3 q}{\partial t^3}, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \Delta q = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 + (\nabla q)^2 \right] + \frac{\beta}{3} \frac{\partial^4 q}{\partial t^4}, \quad (3.46)$$

получаемых аналогично одномерному случаю. Естественно ожидать, что если подходящая под углом Ψ к стенке волна является солитоном, то и отраженная волна будет солитоном, по крайней мере в первом порядке теории возмущений. Поэтому введем следующие переменные (Miles, 1977):

$$\xi_1 = y \cos \Psi_1 + x \sin \Psi_1 - t, \quad (3.47)$$

$$\xi_2 = y \cos \Psi_2 + x \sin \Psi_2 - t, \quad (3.48)$$

$$\tau = \alpha t. \quad (3.49)$$

В этих переменных уравнения (3.45) и (3.46) принимают следующий вид:

$$\eta = (\partial_1 + \partial_2 - \alpha \partial_\tau) q - \alpha \left[\frac{1}{2} (\partial_1 q)^2 + \frac{1}{2} (\partial_2 q)^2 + (1 - 2k) \partial_1 q \partial_2 q \right] - \frac{\beta}{2} (\partial_1 + \partial_2)^3 q, \quad (3.50)$$

$$(\partial_1 + \partial_2) \left\{ 2\alpha \partial_\tau q + \alpha \left[\frac{3}{2} (\partial_1 q)^2 + \frac{3}{2} (\partial_2 q)^2 + (3 - 4k) \partial_1 q \partial_2 q \right] \right\} + \frac{1}{3} \beta (\partial_1 + \partial_2)^3 q - 4k \partial_1 \partial_2 q = 0. \quad (3.51)$$

Эти уравнения отличаются от приведенных в предыдущем разделе множителем

$$k = \sin^2 [(\Psi_1 - \Psi_2)/2]. \quad (3.52)$$

Решение уравнения (3.51) будем отыскивать в виде

$$q = F_1(\xi_1, \tau) + F_2(\xi_2, \tau) + \alpha F_{12}(\xi_1, \xi_2, \tau), \quad (3.53)$$

где $F_{1,2}$ — солитонные решения уравнения (3.33), а F_{12} — результат взаимодействия. Дальнейшие выкладки полностью повторяют приведенные в разд. 3.1.1, запишем окончательные результаты:

$$q = F_1(\xi_1 + \chi_2, \tau) + F_2(\xi_2 + \chi_1, \tau), \quad (3.54)$$

$$\eta = N_1(\xi_1 + \chi_2, \tau) + N_2(\xi_2 + \chi_1, \tau) + \alpha I N_1 N_2, \quad (3.55)$$

$$N_n = \left(\partial_n - \frac{\beta}{3} \partial_n^3 \right) F_n + \frac{\alpha}{4} (\partial_n F_n)^2, \quad (3.56)$$

$$\chi_n = \alpha (3/4k - 1) F_n(\xi_n, \tau), \quad (3.57)$$

$$I = 3/2k - 3 + 2k. \quad (3.58)$$

Эти формулы соответствуют неоднородному взаимодействию двух солитонов в безграничном бассейне. При наличии вертикальной преграды естественно ожидать, что, как и в линейной теории, угол падения равен углу отражения ($\Psi_2 = -\Psi_1 = \Psi$) и положить $F_1 = F_2 = F$ и $N_1 = N_2 = N$. (Возможно рассмотрение и других граничных условий, соответствующих отражению от зоны наката, см. [Jeffrey, Dai, 1989]). Тогда колебания уровня воды вблизи вертикальной стенки ($x = 0$) описываются формулой

$$\eta_w = 2N(\xi_0 + \chi_0, \tau) + \alpha IN^2(\xi_0, \tau), \quad (3.59)$$

$$\xi_0 = y \cos\Psi - t, \quad \chi_0 = \alpha(3/4k - 1)F(\xi_0, \tau). \quad (3.60)$$

Максимальная высота наката на вертикальную преграду в этом случае равна (в размерных переменных)

$$H/H_0 = 2 + I(H_0/h). \quad (3.61)$$

В случае $\Psi = \pi/2$ (нормальный подход волны к стенке) $k = 1$ и $I = 1/2$, решение (3.61) переходит в (3.43). Косой подход волны изменяет нелинейную поправку к высоте наката:

$$I = 3/(2\sin^2\Psi) - 3 + 2\sin^2\Psi. \quad (3.62)$$

Эта поправка с отклонением Ψ от $\pi/2$ (нормальный подход) сначала слабо уменьшается (до 0,464) при $\Psi \approx 69^\circ$, а затем неограниченно возрастает, когда волна начинает двигаться вдоль преграды. Резкое увеличение нелинейных эффектов при движении волны вдоль стенки, очевидно, не отражает физики процесса (наоборот, если волна движется строго вдоль преграды, то она не должна ее чувствовать), а характеризует только слабость примененной процедуры возмущений. В принципе это очевидно: вместо трех переменных x, y, t мы фактически ввели две — ξ_1 и ξ_2 — согласно (3.47) и (3.48), которые предполагаются независимыми и главными. Но при малых Ψ (движение почти вдоль вертикальной стенки) ξ_1 и ξ_2 различаются между собой на малую величину порядка α , и следовательно концепция слабо взаимодействующих солитонов является некорректной.

Рассмотрим более подробно отражение волны от стенки в случае малых углов скольжения. При этом движение почти одномерно, в качестве базовой модели можно выбрать уравнение Кадомцева — Петвиашвили, оно выводилось нами в разд. 2.3.4 и здесь переписывается в более привычных обозначениях с учетом геометрии задачи:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{3c}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{ch}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} \right) = -\frac{c}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (3.63)$$

Приведем его к безразмерному виду

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + 6w \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) = -3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.64)$$

с помощью масштабных преобразований

$$w = \eta h/4, \quad \tilde{y} = 6^{1/2}(y - ct)/h, \quad \tilde{x} = 12^{1/2} x/h, \quad \tilde{t} = 6^{1/2} ct/h, \quad (3.65)$$

и тильду в дальнейшем опустим. Уравнение Кадомцева – Петвиашвили относится к классу точно интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния, поэтому здесь можно использовать ряд точных решений для анализа процесса взаимодействия волны с вертикальной преградой, не прибегая к теории возмущений. Удобно трансформировать уравнение (3.64) с помощью замены Хироты

$$w = 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln F(y, x, t) \quad (3.66)$$

к билинейному виду

$$F \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} - 3 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 - 4 \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + 3 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)^2 = 0. \quad (3.67)$$

В этом случае плоский солитон

$$w = (k_i^2/2) \operatorname{sech}^2(k_i \xi_i/2), \quad \xi_i = k_i(y - p_i x - V_i t), \quad V_i = k_i^2 + 3p_i^2, \quad (3.68)$$

записывается в простой форме

$$F = 1 + \exp \xi_i. \quad (3.69)$$

Здесь p определяет наклон фронта солитона. Аналогично двухсолитонные решения уравнения (3.67), а значит и уравнения Кадомцева – Петвиашвили, имеют вид [Satsuma, 1976; Onkuma, Wadati, 1983]

$$F = 1 + \exp \xi_i + \exp \xi_r + d^2 \exp(\xi_i + \xi_r), \quad \xi_r = k_r(y + p_r x - V_r t),$$

$$V_r = k_r^2 + 3p_r^2, \quad d^2 = \frac{(k_i + k_r)^2 - (p_i + p_r)^2}{(k_i - k_r)^2 - (p_i + p_r)^2}. \quad (3.70)$$

Легко видеть из (3.70), что при $x \rightarrow \infty$, т. е. вдали от стенки, располагаются пространственно разделенные плоские солитоны (3.69) – падающий (i) и отраженный (r), которые взаимодействуют в пристеночной области, в результате чего возникает пространственный фазовый сдвиг, приводящий к смещению фронтов солитонов. Из общего решения (3.70) необходимо выбрать вариант, удовлетворяющий граничным условиям на стенке $x = 0$. Естественно считать, что процесс отражения является стационарным и область пересечения взаимодействующих солитонов не отрывается от пристеночной области. Тогда граничные условия на стенке выполняются автоматически, если амплитуды солитонов и скорости их перемещения вдоль стенки равны:

$$k_r = k_i, \quad V_r = V_i. \quad (3.71)$$

Отсюда однозначно следует, что угол отражения равен углу падения

(закон Снелла для солитонов), $p_r = p_i$, и общая картина поля симметрична по обеим координатам:

$$\omega(y, x, t) = 2k_i^2 \frac{1 + d \cosh[k_i(y - V_i t)] \cosh[k_i p_i x]}{[\cosh[k_i(y - V_i t)] + d \cosh[k_i p_i x]]^2}, \quad d = \frac{(p_i^2 - k_i^2)^{1/2}}{p_i}. \quad (3.72)$$

С помощью (3.72) находим высоту волны на стенке:

$$\omega_w/\omega_0 = 4/(1 + d) = 4/\left[1 + (1 - k_i^2/p_i^2)^{1/2}\right] \quad (3.73)$$

или в размерных переменных

$$H/H_0 = 4/\left\{1 + [1 - 3(H_0/h)/\text{tg}^2\Psi]^{1/2}\right\}, \quad (3.74)$$

где Ψ — угол между фронтом солитона и осью x . При значениях $\Psi \approx \pi/2$ (почти нормальный подход солитона к стенке) высота наката почти в два раза превышает высоту падающей волны, как этого и следовало ожидать. Но уравнение Кадомцева — Петвиашвили несправедливо при больших Ψ , поэтому формула (3.74) при малых H_0/h не переходит в (3.61), полученную с помощью теории возмущений. При почти вдольстеночном движении солитона ($\text{tg}^2\Psi \approx 3H_0/h$), когда нелинейные и дифракционные эффекты одного порядка, высота наката может в четыре раза превышать исходную высоту (важный практический вывод). С другой стороны, при еще меньших углах, когда $k_i > p_i$, решение (3.72) становится комплексным. В этом случае можно получить и действительное решение, перенормировав в общем решении (3.70) фазовые постоянные; однако, что впервые было отмечено Майлсом (1977), отраженный солитон становится "антисолитоном" ($\cosh^2 \xi_r$) и не может быть реализован в физической задаче. Следовательно, при малых углах скольжения нарушается исходное предположение о стационарности процесса отражения и область взаимодействия падающей и отраженной волн должна отрываться от стенки. Фактически это можно уже увидеть из решения (3.72). Действительно, при почти нормальном падении ($p \gg k$) практически во всей области $x > 0$ можно выделить только падающий и отраженный солитоны (рис. 3.3). Однако при $p \rightarrow k$ в области взаимодействия возникает еще один индуцированный солитон, расположенный перпендикулярно стенке (рис. 3.4). Этот солитон распространяется с той же скоростью, что и падающий солитон, но амплитуда его другая при $d \neq 0$:

$$\omega_M = k_i^2 \cdot 2^{-1}/(1 + d). \quad (3.75)$$

Это означает, что такой солитон не является собственной волной (не является решением уравнения Кортевега — де Вриза), он получил название "виртуального солитона" [Onkuma, Wadati, 1983]. Лишь при $d = 0$ такой солитон становится "реальным" и может распространяться (чисто вдольстеночное распространение). В этом случае

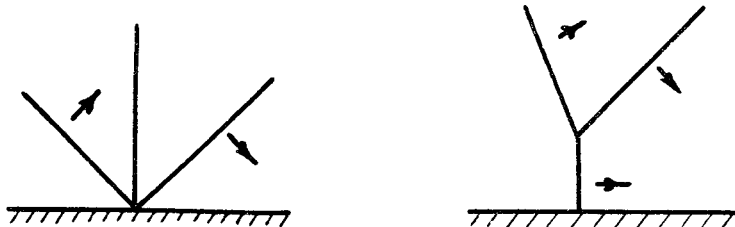


Рис. 3.3. Подход солитона к вертикальной стенке под большим углом.

Рис. 3.4. Маховское отражение солитона от вертикальной стенки

его, по аналогии с задачей отражения ударной волны от стенки, будем называть "ножкой Маха".

Таким образом, процесс нестационарного отражения можно "организовать" за счет резонансного взаимодействия трех солитонов — падающего, отраженного и ножки Маха [Infeld, Rowlands, 1990], при этом граничные условия на стенке будут выполнены. Действительно, предположим выполнение следующего соотношения:

$$k_i + k_r = p_i + p_r. \quad (3.76)$$

Тогда $d = 0$, и двухсолитонное решение (3.70) принимает вид

$$F = 1 + \exp \xi_1 + \exp \xi_2. \quad (3.77)$$

В области $x \rightarrow -\infty$ решение (3.77) представляет собой единственный солитон (ножка Маха)

$$w = \frac{(k_i + k_r)^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{k_i + k_r}{2} \left(y - \frac{k_i p_i - k_r p_r}{k_i + k_r} x - \frac{k_i V_i + k_r V_r}{k_i + k_r} t \right) \right], \quad (3.78)$$

этот солитон перпендикулярен стенке только при условии

$$k_i p_i = k_r p_r, \quad (3.79)$$

которое есть фактически закон Снелла для солитонов. Из (3.76) и (3.79) находятся параметры отраженного солитона

$$k_r = p_i, \quad p_r = k_i > p_i, \quad (3.80)$$

а также скорости всех солитонов, причем $V_r < V_M < V_i$, и следовательно процесс отражения не является стационарным. Высота наката легко находится из (3.78)

$$w_{\max}/w_0 = \left(1 + p_i/k_i \right)^2 \quad (3.81)$$

или в размерном виде

$$H/H_0 = \left[1 + \operatorname{tg} \Psi / (3H_0/h)^{1/2} \right]^2. \quad (3.82)$$

Формулы (3.82) при малых Ψ и (3.74) при относительно больших Ψ определяют высоту наката одиночной волны цунами на вертикальную преграду в пространственной задаче. Эта зависимость служила предметом специальных экспериментов для оценки ее точности [Melville, 1980; Funakoshi, 1980]. Главное, что при косом подходе нелинейной волны к вертикальной преграде высота запле-ска может быть очень большой, это обстоятельство необходимо учитывать при проектировании стенок и волноломов, предназначенных для защиты населенных пунктов от волн цунами.

3.1.3. Трансформация волны на уступе

Другим примером резкого изменения глубины является материковый склон, когда нельзя пренебречь отражением волновой энергии, достигающим на отдельных участках 60–80 %. Примем следующую приближенную модель береговой зоны: горизонтальный шельф глубины h_2 и материковый склон до глубины h_1 , причем ширина материкового склона мала, по крайней мере в сравнении с длиной нелинейности (для типичных цунами это условие является очень мягким). На первом этапе будем считать склон крутым (его ширина меньше длины волны) и аппроксимировать уступом. Решение задачи о трансформации длинной волны на уступе в рамках линейной теории мелкой воды тривиально находится с помощью граничных условий непрерывности давления (уровня)

$$\eta_1 = \eta_2 \quad (3.83)$$

и расхода воды

$$h_1 u_1 = h_2 u_2, \quad (3.84)$$

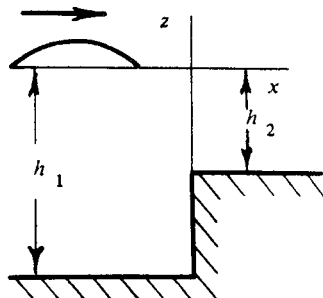
оно описывается формулами Лэмба, которые есть во всех учебниках:

$$\eta_{\text{тр}} = \eta_{\text{in}} \frac{2(h_1/h_2)^{1/2}}{1 + (h_1/h_2)^{1/2}}, \quad (3.85)$$

$$\eta_{\text{отр}} = \eta_{\text{in}} \frac{1 - (h_1/h_2)^{1/2}}{1 + (h_1/h_2)^{1/2}}. \quad (3.86)$$

Как видим, отраженная от уступа волна меняет свою полярность, а высота прошедшей волны увеличивается, но не более чем в два раза при очень больших перепадах глубин. На самом деле, ситуация даже в линейной задаче представляется не столь тривиальной. Действительно, вертикальная структура длинных волн представляет собой однородное по вертикали течение, и суперпозиция падающей и отраженной волн не может обеспечить равенства нулю скорости течений на самом уступе (где должно быть задано условие непротекания). Фактически это связано с неприменимостью теории мелкой воды в зоне больших градиентов дна (при выводе

Рис. 3.5. Трансформация волны на уступе



уравнений мелкой воды существенно использовалась малость градиентов дна). Поэтому необходимо рассмотреть эту же задачу в рамках точной краевой задачи для потенциала ϕ . Считая волну монохроматической, с частотой ω , а задачу плоской, запишем основные уравнения модели ($\phi_{1,2}$ — потенциалы течений для участков бассейна с глубинами $h_{1,2}$ соответственно, геометрия задачи изображена на рис. 3.5):

$$\frac{\partial^2 \phi_{1,2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{1,2}}{\partial z^2} = 0 \quad (-h_{1,2} < z < 0), \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial \phi_{1,2}}{\partial z} = 0 \quad (z = -h_{1,2}), \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial \phi_{1,2}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_{1,2} = 0 \quad (z = 0), \quad (3.89)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (-h_2 < z < 0), \quad (3.90)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (-h_1 < z < -h_2), \quad (3.91)$$

$$(\phi_1)_{x=0} = (\phi_2)_{x=0} \quad (-h_2 < z < 0). \quad (3.92)$$

Элементарные решения системы (3.87)–(3.89) легко находятся: это, в первую очередь, распространяющиеся волны вида

$$\phi_{1,2} = A_{1,2} \exp(ik_{1,2}x) \cosh[k_{1,2}(z + h_{1,2})], \quad (3.93)$$

где $k_{1,2}$ есть корень дисперсионного соотношения

$$\omega^2 = gk_{1,2} \operatorname{th}(k_{1,2}h_{1,2}), \quad (3.94)$$

и затухающие вдали от уступа волны вида

$$\phi_{1,2} = B_{1,2} \exp(-\lambda_{1,2}|x|) \cos[\lambda_{1,2}(z + h_{1,2})], \quad (3.95)$$

где $\lambda_{1,2}$ есть действительное решение трансцендентного уравнения

$$\omega^2 = -g \lambda_{1,2} \operatorname{tg}(\lambda_{1,2}h_{1,2}). \quad (3.96)$$

В случае малых значений частоты распространяющиеся волны (3.93) представляют собой длинные волны, которые и изучаются в этой книге. Затухающих волн — счетное множество. Поле захваченных

волн локализовано в окрестности уступа на расстоянии порядка $h_{1,2}$ по обе стороны, что существенно меньше длины падающей волны. Важно подчеркнуть, что эти волны не только затухающие, но и нераспространяющиеся: они не могут отойти от уступа и унести волновую энергию, так же как и ее поглотить (мы рассматриваем идеальную жидкость). Поэтому естественно поставить граничные условия вне зоны захваченных волн; поскольку ее размер существенно меньше длины волны, то это и будут обычные условия для давления и расхода жидкости (3.83) и (3.84) на скачке глубины. Такая физическая интерпретация применимости длинноволновых формул для описания трансформации волны на уступе подтверждается асимптотическим (при $\omega \rightarrow 0$) решением соответствующего интегрального уравнения, получаемого с помощью гриновских теорем из точной краевой задачи (3.87)–(3.92) [Bartholomeusz, 1958], либо решением алгебраической системы, получаемой после подстановки (3.93)–(3.96) в граничные условия (3.90)–(3.92) [Massel, 1991].

Исследуем теперь влияние нелинейности на процесс трансформации длинной волны в рамках теории мелкой воды (3.1)–(3.2). Граничные условия на уступе есть опять непрерывность давления

$$g\eta_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = g\eta_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (3.97)$$

и расхода воды

$$(h_1 + \eta_1) u_1 = (h_2 + \eta_2) u_2. \quad (3.98)$$

Удобно перейти к инвариантам Римана

$$I_{\pm 1,2} = u_{1,2} \pm 2 \{ [g(h_{1,2} + \eta_{1,2})]^{1/2} - (gh_{1,2})^{1/2} \} \quad (3.99)$$

и учесть, что в области h_2 имеется только прошедшая волна ($I_{-2} = 0$). Выражая η и u через I_{\pm} и подставляя в граничные условия (3.97) и (3.98), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (I_{+1} + I_{-1})^2/8 + \left[(I_{+1} - I_{-1})/4 + (gh_1)^{1/2} \right]^2 - gh_1 = \\ = I_{+2}^2/8 + \left[I_{+2}/4 + (gh_2)^{1/2} \right]^2 - gh_2, \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$(I_{+1} + I_{-1}) \left[(I_{+1} + I_{-1})/4 + (gh_1)^{1/2} \right]^2 = I_{+2} \left[I_{+2}/4 + (gh_2)^{1/2} \right]^2. \quad (3.101)$$

Анализ решений этой системы, выполненный в работе [Mirchina, Pelinovsky, 1992], показал, что практически во всей области параметров отличия от формул линейной теории малы и в первом приближении достаточно использовать формулы Лэмба (3.85)–(3.86).

Тем не менее эффект трансформации волны даже в линейном приближении на уступе кардинально изменяет в нелинейно-дисперсионной теории свойства прошедшей и отраженной волн по мере их

удаления от уступа. Рассмотрим, например, подход солитона к уступу. Очевидно, что он не изменяет своей формы на глубине h_1 . После прохождения уступа ее форма в рамках приближения Лэмба сразу же после уступа описывается выражением

$$\eta_{\text{пр}} = \frac{2(h_1/h_2)^{1/2}}{1 + (h_1/h_2)^{1/2}} H_0 \operatorname{sech}^2(3H_0/4h_2)^{1/2} \frac{x}{h_1}. \quad (3.102)$$

Важно заметить, что временная длительность прошедшей волны совпадает с длительностью падающего солитона, а пространственная уменьшилась в $(h_1/h_2)^{1/2}$ раз. Но такая волна уже не является солитоном, поскольку ее длина не связана с амплитудой соответствующим образом. Дальнейшая эволюция волны легко рассчитывается с помощью метода обратной задачи рассеяния (см. разд. 2.2.2) и определяется параметром Урселла, который в этом случае легко подсчитывается:

$$U_{\Gamma} = 8(h_1/h_2)^2 (h_1/h_2)^{1/2} / [1 + (h_1/h_2)^{1/2}]. \quad (3.103)$$

Как видим, $U_{\Gamma} > 4$ ("солитонное" значение параметра Урселла) и, следовательно, волна будет трансформироваться в последовательность солитонов, амплитуды которых находятся из формулы (2.21) разд. 2.2.2 [Пелиновский, 1982]. Зависимость амплитуд вторичных солитонов от перепада глубин изображена на рис. 3.6. В пределе больших значений h_1/h_2 максимальная амплитуда солитона составляет $4H_0$, т. е. в два раза больше, чем это вытекает из формулы Лэмба. Таким образом, совместное влияние нелинейности и дисперсии проявляется не на самом уступе, а на некотором расстоянии от него, приводя к заметной трансформации волны цунами.

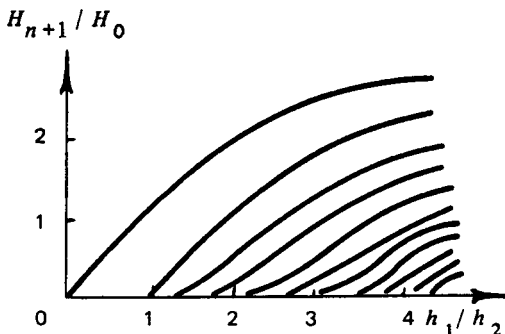


Рис. 3.6. Амплитуды солитонов, генерирующихся при трансформации волны на уступе

Аналогичный подход применим и в том случае, если падающая волна не является солитоном. В частности, для многих цунами в открытом океане $U_{\Gamma} \sim 10^2$ [Пелиновский, 1982]. При переходе волны со средней глубины 4 км на глубину 200 м параметр Урселла возрастает до 1–10 и, следовательно, на мелководье нелинейно-дисперсионная теория становится принципиальной. Заметим также, что отраженная от уступа волна имеет отличную от солитона

полярность и в процессе эволюции превращается в осциллирующий цуг с затухающей амплитудой.

Рассмотренный выше эффект существен не только для случая трансформации волны на уступе. Пусть, например, уклон материкового склона мал, в том смысле, что можно пренебречь отражением от склона, но по-прежнему его ширина мала по сравнению с длиной нелинейности. Тогда влиянием нелинейности на процесс трансформации волны на склоне снова можно пренебречь. Решение линейной задачи в этом случае хорошо известно, и оно приводилось во второй части: высота волны изменяется в соответствии с законом Грина, а длительность остается неизменной. При этом снова нарушается соотношение между длиной волны и ее амплитудой, характерное для солитона; волна в дальнейшем будет трансформироваться в последовательность солитонов. Параметр Урселла в этой задаче равен

$$U_r = 8(h_1/h_2)^{9/4}, \quad (3.104)$$

при большом перепаде глубин число вторичных солитонов может быть снова очень велико. Этот процесс для перепада глубин $h_1/h_2 = 2$ исследовался численно [Madsen, Mei, 1969]. После выхода волны на шельф происходил распад импульса на три солитона с относительными амплитудами 1,67; 0,75 и 0,16. Согласно теоретическим расчетам на основании формулы (2.117) разд. 2.2.2 и (3.104) относительные высоты равны 1,7; 0,65 и 0,08. Как видим, имеется очень хорошее согласие данных для первых двух солитонов. Имеющаяся разница в высоте третьего солитона, по-видимому, связана с тем, что процесс его формирования еще не закончился.

Итак, в окрестности материкового склона нелинейностью и дисперсией для типичных условий цунами можно пренебречь, однако эти эффекты принципиальны для волны, удаляющейся от склона, так как приводят к ее разбиению на солитоны в случае достаточно протяженного и ровного шельфа.

3.1.4. Резонансные эффекты при прохождении волной цунами материкового склона

В предыдущем разделе мы показали, что в предельных случаях медленного или скачкообразного изменения глубины форма волны на склоне практически не меняется, изменяются только амплитуда и характерная длина волны. Если, однако, ширина материкового склона сравнима с длиной волны, то ее форма может изменяться. Для демонстрации этого эффекта рассмотрим модельный рельеф дна, содержащий два скачка глубины h_2/h_1 и h_3/h_2 на расстоянии L друг от друга (рис. 3.7), и ограничимся рамками линейной теории мелкой воды. Пусть падающая волна представляет монохроматическую волну частоты ω . Тогда волновое поле на участках постоянной глубины имеет простой вид:

на глубине h_1

$$\eta_1 = H_0 \exp[i\omega(t - x/c_1)] + H_- \exp[i\omega(t + x/c_1)], \quad (3.105)$$

$$u_1 = (g/h_1)^{1/2} \{H_0 \exp[i\omega(t - x/c_1)] - H_- \exp[i\omega(t - x/c_1)]\}; \quad (3.106)$$

на глубине h_3

$$\eta_3 = H_{+3} \exp[i\omega(t - x/c_3)] + H_{-3} \exp[i\omega(t + x/c_3)], \quad (3.107)$$

$$u_3 = (g/h_3)^{1/2} \{H_{+3} \exp[i\omega(t - x/c_3)] - H_{-3} \exp[i\omega(t - x/c_3)]\}; \quad (3.108)$$

на глубине h_2

$$\eta_2 = H_2 \exp[i\omega(t - x/c_2)], \quad u_2 = (g/h_2)^{1/2} H_2 \exp[i\omega(t - x/c_2)], \quad (3.109)$$

где, как и ранее, $c_{1,2,3} = (gh_{1,2,3})^{1/2}$. При этом, естественно, в области с глубиной h_2 удерживаем только прошедшую волну.

На каждом из уступов должны выполняться условия непрерывности уровня и расхода воды:

$$\eta_1 = \eta_3, \quad h_1 u_1 = h_3 u_3 \quad (x = 0), \quad (3.110)$$

$$\eta_3 = \eta_2, \quad h_3 u_3 = h_2 u_2 \quad (x = L). \quad (3.111)$$

Четыре условия позволяют однозначно найти неизвестные функции: H_- , $H_{\pm 3}$ и H_2 . Приведем решение только для комплексной амплитуды прошедшей волны [Ивченко и др., 1992]:

$$\frac{H_2}{H_0} = \frac{2(h_1/h_2)^{1/2} \exp(i\omega L/c_2)}{\left[(h_2/h_3)^{1/2} + (h_1/h_3)^{1/2} \right] \cos\left(\frac{\omega L}{c_3}\right) + i \left[1 + \frac{(h_1/h_2)^{1/2}}{h_3} \right] \sin\left(\frac{\omega L}{c_3}\right)}. \quad (3.112)$$

В предельном случае очень длинных волн формула (3.112) переходит в формулу Лэмба, так что детальная структура рельефа дна не влияет на трансформацию достаточно длинных волн. Для более коротких волн фактор $\omega L/c_3$ оказывается решающим, приводя к немонотонной зависимости высоты волны от длины шельфа (резонанс).

Наличие резонансных эффектов существенно влияет на формирование колебаний уровня в прибрежной зоне при прохождении волны цунами, что неоднократно отмечалось (см., например, [Ефимов, 1985]). Уже на первом этапе изучения цунами было замечено, что форма колебаний уровня в одном пункте практически не зависит от параметров цунами, но она разная в различных пунктах, что и объясняется различием в резонансных частотах для каждой бухты и

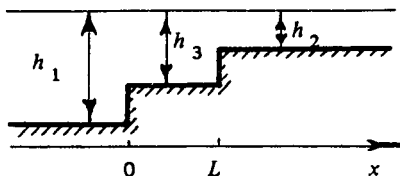


Рис. 3.7. Рельеф дна

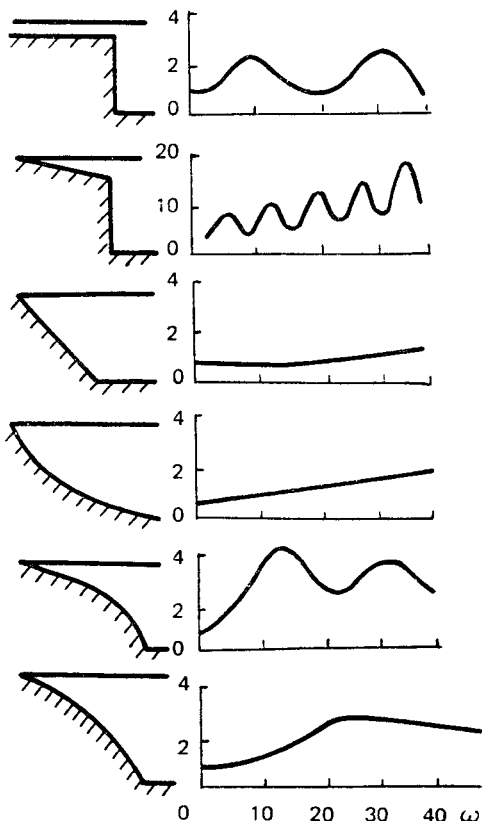


Рис. 3.8. Коэффициенты усиления волн на шельфах разной формы

резонансным их откликом на прохождение волны цунами. Каждая бухта в этом случае характеризуется спектральным коэффициентом усиления

$$K(\omega) = H_2/H_0. \quad (3.113)$$

Примеры расчетов для различных моделей шельфа, взятые из [Ивченко и др., 1992], приведены на рис. 3.8. Теория возбуждения бухт и заливов даже в рамках линейной теории мелкой воды не является тривиальной, если принять во внимание изрезанность берегов, сложный рельеф дна и условия связи бассейнов с открытым океаном; эти вопросы, однако, выходят за рамки книги, посвященной главным образом нелинейно-дисперсионной теории цунами.

3.2. НАБЕГАНИЕ НЕОБРУШЕННОЙ ВОЛНЫ ЦУНАМИ НА ПЛОСКИЙ ОТКОС

Рассмотрим теперь классическую постановку задачи в рамках нелинейной теории мелкой воды о накате длинной волны на откос постоянного уклона, так что $h = -\alpha x$ и $\alpha = \text{const}$, причем пренебрежем здесь диссипативными и дисперсионными эффектами.

3.2.1. Критерии подобия

Запишем еще раз уравнения нелинейной теории мелкой воды при $h = -\alpha x$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (3.114)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(-\alpha x + \eta) u] = 0. \quad (3.115)$$

Можно поставить задачу Коши, задавая начальные условия произвольного вида: $\eta_0(x)$ и $u_0(x)$ — такая ситуация моделирует генерацию цунами непосредственно на шельфе. Мы сосредоточимся на другом классе задач, когда уже сформировавшаяся волна входит на шельф, и будем считать, что при $x \rightarrow -\infty$ заданы параметры волны, распространяющейся в сторону $x > 0$: ее высота H_0 и длительность T . Естественно обезразмерить все переменные

$$\tilde{t} = t/T, \quad \tilde{x} = \alpha x/H_0, \quad \tilde{\eta} = \eta/H_0, \quad \tilde{u} = \alpha uT/H_0. \quad (3.116)$$

В этих переменных система (3.114), (3.115) принимает вид (тильды опущены)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\text{Br}} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (3.117)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(-x + \eta) u] = 0 \quad (3.118)$$

и определяется единственным безразмерным параметром [Кайстренко и др., 1985, 1991]:

$$\text{Br} = H_0/(g\alpha^2 T^2). \quad (3.119)$$

Существование единственного параметра, разумеется, связано с пренебрежением рядом факторов (дисперсией и диссипацией), которые будут учтены позднее. Ясно, что обезразмеривание уравнений может быть проведено по-разному. Так, если принять в качестве безразмерных переменных

$$\tilde{t} = \alpha t(g/H_0)^{1/2}, \quad \tilde{x} = \alpha x/H_0, \quad \tilde{\eta} = \eta/H_0, \quad \tilde{u} = u/(gH_0)^{1/2}, \quad (3.120)$$

то система (3.114), (3.115) сводится к (тильды опущены)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(-x + \eta) u] = 0, \quad (3.122)$$

которая вообще не содержит безразмерных параметров. Однако при этом параметр Br появляется в начальных условиях для функций η и u . Как будет видно далее, параметр Br имеет фундаментальное значение для определения критерия разрушения волны цунами, накатывающейся на плоский откос.

Экспериментально поиск определяющих параметров наката длительное время проводился на основе интуитивного перебора

больших массивов экспериментальных данных; считается, что наиболее точно накат характеризуется параметром Иребаррена [Battjes, 1988]:

$$\Gamma_r = \alpha / (H/\lambda)^{1/2} = \alpha (gT^2/2\pi H)^{1/2}, \quad (3.123)$$

где λ — длина волны на глубокой воде, определенная в соответствии с линейным дисперсионным соотношением. Показано, что этот параметр позволяет не только выяснить, разрушится ли волна, но и определить тип разрушения, если в выражение (3.123) подставить высоту волны в момент обрушения. В частности, переход от "вздымающегося" (*surging*) буруна к "ныряющему" (*plunging*) происходит при $\Gamma_r = 2$. Из сравнения (3.119) и (3.123) легко видно, что с точностью до численных коэффициентов параметры Γ_r и Γ_g связаны между собой:

$$\Gamma_g \sim \Gamma_r^{-2}. \quad (3.124)$$

Следовательно, развиваемая здесь теория позволяет объяснить существование эмпирического параметра обрушения.

3.2.2. Преобразование Кэрриера — Гринспана

Вернемся к системе (3.114), (3.115). Удобно ввести полную глубину

$$H = -\alpha x + \eta \quad (3.125)$$

и переписать исходную систему в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = -g\alpha, \quad (3.126)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Hu) = 0. \quad (3.127)$$

Обратим внимание, что система (3.126), (3.127) не содержит переменных коэффициентов. Для нее также можно ввести сохраняющиеся римановы инварианты [Стокер, 1959]:

$$I_{\pm} = u \pm 2(gH)^{1/2} + \alpha g t, \quad (3.128)$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial I_{\pm}}{\partial t} + c_{\pm} \frac{\partial I_{\pm}}{\partial x} = 0, \quad (3.129)$$

где характеристические скорости

$$c_{\pm} = (3/4) I_{\pm} + (1/4) I_{\mp} - \alpha g t. \quad (3.130)$$

Перепишем систему (3.129) в виде якобианов

$$\frac{\partial(I_{\pm}, x)}{\partial(t, x)} + c_{\pm} \frac{\partial(t, I_{\pm})}{\partial(t, x)} = 0, \quad (3.131)$$

что делает удобным применение преобразования годографа, т. е. переход от нелинейных уравнений для I_{\pm} к линейным уравнениям для x, t . Для этого умножим систему (3.131) на якобиан $\partial(t, x)/\partial(I_+, I_-)$, который предположительно не равен нулю (обсуждение этого вопроса будет проведено в разд. 3.3.3). В результате

$$\frac{\partial(I_{\pm}, x)}{\partial(I_+, I_-)} + c_{\pm} \frac{\partial(t, I_{\pm})}{\partial(I_+, I_-)} = 0 \quad (3.132)$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{\partial x}{\partial I_{\pm}} - c_{\pm} \frac{\partial t}{\partial I_{\pm}} = 0. \quad (3.133)$$

Полученная система уравнений осталась нелинейной, так, c_{\pm} содержит t , однако она легко приводится к линейной, если исключить x :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial I_+ \partial I_-} + \frac{3}{2(I_+ - I_-)} \left(\frac{\partial t}{\partial I_-} - \frac{\partial t}{\partial I_+} \right) = 0. \quad (3.134)$$

Это уравнение может быть сведено к уравнению Эйлера – Пуассона – Дарбу [Jeffrey, Majorana, 1985]. Вслед за Кэрриером и Гринпаном (1958) введем новые переменные

$$\lambda = (I_+ + I_-)/2 = u + \alpha g t, \quad (3.135)$$

$$\sigma = (I_+ - I_-)/2 = 2(gH)^{1/2}. \quad (3.136)$$

Тогда уравнение (3.134) принимает вид

$$\sigma \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 t}{\partial \sigma^2} \right) - 3 \frac{\partial t}{\partial \sigma} = 0. \quad (3.137)$$

Наконец, выражая из (3.135) время t и подставляя

$$u = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad (3.138)$$

перепишем (3.137) в окончательной форме:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0. \quad (3.139)$$

Необходимо определить через Φ все переменные, что легко может быть сделано:

$$t = \frac{1}{\alpha g} \left(\lambda - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right), \quad (3.140)$$

$$x = \frac{1}{2\alpha g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - u^2 - \frac{\sigma^2}{2} \right), \quad (3.141)$$

$$\eta = \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - u^2 \right). \quad (3.142)$$

Итак, исходная система нелинейных уравнений мелкой воды свелась к линейному волновому уравнению (3.139), и все физические переменные находятся через Φ с помощью простых операций. Основное преимущество такой записи исходных уравнений заключается в том, что линии подвижного уреза соответствуют $\sigma = 0$ (так как на ней полная глубина $H = 0$) и, следовательно, уравнение (3.139) решается в полупространстве $0 \leq \sigma < \infty$ с фиксированной границей, в отличие от исходных уравнений, которые должны решаться в области с заранее неизвестной движущейся границей. Представленные здесь формулы получены Кэрриером и Гринспаном (1958), эта теория описана также в книге [Mei, 1989]. Они позволяют в принципе по заданному решению уравнения (3.139) однозначно восстановить волновое поле всюду. Фактически это, однако, трудно сделать из-за неявности формул преобразования. Немногочисленные примеры расчета волнового поля с помощью данного метода содержатся в [Carrier, Greenspan, 1958; Spielfogel, 1975; Jeffrey, Majorana, 1985]. Трудности практических расчетов привели к тому, что преобразование Кэрриера – Гринспана, в сущности, не нашло должного применения в работах по накату волн цунами. Между тем существует весьма важная практическая ситуация, когда эти преобразования особенно эффективны. Речь идет о накате волны, которую вдали от побережья можно считать линейной. При этом, если интересоваться только динамикой подвижного уреза, то формулы преобразования Кэрриера – Гринспана становятся явными [Мазова и др., 1987; Пелиновский, 1989; Pelinovsky, Mazouza, 1992]. Обсудим эту ситуацию более подробно.

3.2.3. Динамика подвижного уреза

Рассмотрим сначала одно частное решение уравнения (3.139), отвечающее накату монохроматической волны

$$\Phi(\sigma, \lambda) = A J_0(l\sigma) \cos(l\lambda), \quad (3.143)$$

где A и l – произвольные константы и J_0 – функция Бесселя. Вдали от уреза ($\sigma \rightarrow \infty$), очевидно, Φ становится малым и волна является линейной. В этом случае можно воспользоваться приближенными выражениями, вытекающими из преобразований Кэрриера – Гринспана,

$$\eta = \frac{1}{2g} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \quad u = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad x = -\frac{\sigma^2}{4\alpha g}, \quad t = \frac{\lambda}{\alpha g} \quad (3.144)$$

и асимптотическим представлением для функции Бесселя. Тогда волновое поле имеет вид

$$\eta = a(x) \left\{ \sin \left[\omega \left(t - \int dx/c \right) - \pi/4 \right] + \sin \left[\omega \left(t + \int dx/c \right) + \pi/4 \right] \right\}, \quad (3.145)$$

где

$$a = (A/g) \{1/[4\pi(\alpha g|x|)^{1/2}]\}^{1/2}, \quad \omega = l g \alpha, \quad c = (gh)^{1/2}, \quad (3.146)$$

и оно представляет собой суперпозицию двух монохроматических волн частоты ω с переменной амплитудой $a(x)$ (из-за изменения глубины), распространяющихся в противоположных направлениях. Отметим сразу, что из (3.146) следует $a \sim |x|^{1/4}$, как это и должно вытекать из закона Грина. Амплитуду волны на расстоянии L от уреза обозначим H_0 и найдем константы A и l :

$$A = 2gH_0 [\pi g \alpha (g \alpha L)^{1/2} / \omega]^{1/2}, \quad l = \omega / g \alpha. \quad (3.147)$$

Решение (3.143) становится полностью определенным.

Рассмотрим теперь движение подвижного уреза. Ему соответствует $\sigma = 0$ и с помощью (3.140), (3.141) найдем параметрическое уравнение движения уреза:

$$\begin{aligned} x &= (2g\alpha)^{-1} \left[-Al \sin(l\lambda) - 4^{-1} l^4 A^2 \cos^2(l\lambda) \right], \\ t &= (g\alpha)^{-1} \left[\lambda + 2^{-1} l^2 A \cos(l\lambda) \right]. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Наиболее просто исследовать экстремум функции $x(t)$, определяющий максимум (минимум) горизонтального заплеска. Учитывая связь $h = -\alpha x$, можно вычислить вертикальный заплеск, максимальная высота подъема уровня воды R равна (в размерных переменных)

$$R/H_0 = 2\pi(2L/\lambda_0)^{1/2}, \quad (3.149)$$

где $\lambda_0 = 2\pi(gh_0)^{1/2}/\omega$ — длина волны на изобате h_0 , удаленной от берега на расстояние L . Аналогично находится скорость движения уреза

$$u = -(Al^2/2) \cos(l\lambda); \quad (3.150)$$

максимальная скорость наката (отката) есть (в размерных переменных)

$$U_{\max} = (\omega R)/\alpha. \quad (3.151)$$

Выше мы рассмотрели накат монохроматической волны. Накат волны произвольной формы легко исследуется с помощью фурье-суперпозиции решений (3.143), что можно сделать ввиду линейности уравнения (3.139):

$$\Phi(\sigma, \lambda) = \int d\omega A(\omega) J_0(\omega\sigma/g\alpha) \exp i(\omega\lambda/g\alpha), \quad (3.152)$$

причем из действительности Φ вытекает $A(-\omega) = A^*(\omega)$, эта функция определяется из начальных или граничных условий. Рассмотрим опять ситуацию, когда волна приходит из области, где она линейна. Аналогично (3.146) волновое поле вдали от уреза представимо в виде

$$\eta(x, t) = \eta_+ \left(t - \int dx/c \right) + \eta_- \left(t + \int dx/c \right), \quad (3.153)$$

$$u(x, t) = (g/h)^{1/2} (\eta_+ - \eta_-), \quad (3.154)$$

$$\eta_{\pm} = i(\pi g \alpha c)^{-1/2} \int d\omega A(\omega) (|\omega|)^{1/2} \text{sign} \omega \exp[i(\omega t \pm (\pi/4) \text{sign} \omega)]. \quad (3.155)$$

Зная форму падающей волны, из (3.155) с помощью обратного преобразования Фурье находится спектр $A(\omega)$ и тем самым решение (3.152) становится полностью определенным. В частности, максимальная дальность заплеска определяется формулой

$$R = (2\alpha g^2)^{-1} \max \left\{ \int i\omega A(\omega) \exp[i(\omega \lambda / g \alpha)] d\omega \right\}. \quad (3.156)$$

Для практических вычислений удобно параметризовать формулу (3.156). Пусть

$$\eta_+(t) = H_0 f(t/T), \quad (3.157)$$

где H_0 и T — амплитуда и длительность падающей волны. Тогда (3.156) записывается в обобщенном виде

$$R/H_0 = \rho (L/\lambda_0)^{1/2}, \quad (3.158)$$

где ρ — коэффициент формы

$$\rho = \max \left\{ (\pi)^{-1/2} \iint dt d\Omega f(\tau) (|\Omega|)^{1/2} \exp \left[i \left(\Omega (\lambda - \tau) + \frac{\pi}{4} \text{sign} \Omega \right) \right] \right\}. \quad (3.159)$$

Итак, зависимость высоты наката от длины и амплитуды волны, расстояния до берега является универсальной. В то же время конкретная величина высоты наката зависит от формы набегающей волны через параметр ρ .

В качестве примера рассмотрим накат импульсов следующей формы:

$$\eta_+(t) = [H_0 / (1 + 4t^2/T^2)] [\cos \theta - (2t/T) \sin \theta], \quad (3.160)$$

где θ — произвольный параметр, позволяющий менять форму импульса, не меняя энергии импульса. Проводя несложные вычисления, находим форм-фактор

$$\rho_+ = \pi^{1/2} \left\{ \cos[(2/5)(\theta - \pi/4)] \right\}^{5/2}, \quad (3.161)$$

характеризующий высоту наката, и аналогично

$$\rho_- = \pi^{1/2} \left\{ \cos[(2/5)(\pi - \theta)] \right\}^{5/2}, \quad (3.162)$$

характеризующий глубину отхода волны цунами. Отметим, что фаза отката волны, приводящая к осушению дна, имеет место, даже если накатывается только гребень ($\theta = 0$). При этом глубина осушения достигает почти 50 % высоты наката. На практике форма набегающей волны цунами обычно неизвестна, что приводит к необходимости параметризации ρ_+ и ρ_- ; для грубых предварительных расчетов принято $\rho_+ = 5$, соответствующие геофизические обоснования здесь опущены [Пелиновский, 1982; Вольцингер и др., 1989].

Опишем теперь динамику подвижного уреза при накате импульсной волны, что характерно для задач цунами. Удобно перейти к безразмерным переменным

$$\tilde{t} = t/T, \quad \tilde{x} = \alpha x/R, \quad \tilde{\eta} = \eta/R, \quad \tilde{u} = \alpha uT/R, \quad (3.163)$$

тогда параметр Вг оказывается равным

$$\text{Вг} = R/(g\alpha^2 T^2). \quad (3.164)$$

В этих переменных преобразования Кэрриера – Гринспана (3.140) и (3.141) при $\sigma = 0$ (для подвижного уреза) принимают вид (тильду опускаем)

$$x = \xi(\lambda) - 2^{-1} \text{Вг} u^2, \quad (3.165)$$

$$t = \lambda - \text{Вг} u, \quad (3.166)$$

где ξ и u при $\sigma = 0$ вычисляются через (3.152) и (3.155):

$$\xi = 2^{-1} \int \Omega \tilde{A}(\Omega) \exp(i\Omega\lambda) d\Omega, \quad \tilde{A} = A/\alpha T^2 g^2 R, \quad (3.167)$$

$$u = \frac{d\xi}{d\lambda}. \quad (3.168)$$

Формулы (3.165) и (3.166) задают параметрическое описание движущегося подвижного уреза $x(t)$.

Удобно дать другое представление этим формулам. Если формально положить $\text{Вг} = 0$, то получим явное выражение для динамики уреза:

$$x = \xi(t), \quad u = \frac{d\xi}{dt} = U(t). \quad (3.169)$$

Назовем этот прием "линеаризацией" задачи, однако сразу подчеркнем, что это формальный прием, так как мы не уменьшили амплитуду волны, а только зачеркнули слагаемое с Вг и по начальному возмущению $\eta_+(t)$ нашли $\xi(t)$ (возможность "настоящей" линеаризации нелинейной задачи будет обсуждаться в разд. 3.2.4). С помощью функций $\xi(t)$ и $U(t)$ теперь уже можно рассчитать динамику подвижного уреза при любом значении параметра Вг. Действительно, из (3.166) следует, что

$$u(t) = U(t + \text{Вг}u), \quad (3.170)$$

и, хотя (3.170) определяет u как неявную функцию времени, ее нахождение графически производится просто. С учетом этого из (3.165) находится выражение для заплеска:

$$x(t) = \xi(t + \text{Вг}u) - 2^{-1} \text{Вг} U^2(t + \text{Вг}u). \quad (3.171)$$

Подчеркнем, что в момент максимального заплеска $u = 0$ и $R = \max \xi(t)$, этот интеграл мы и вычисляем в (3.156).

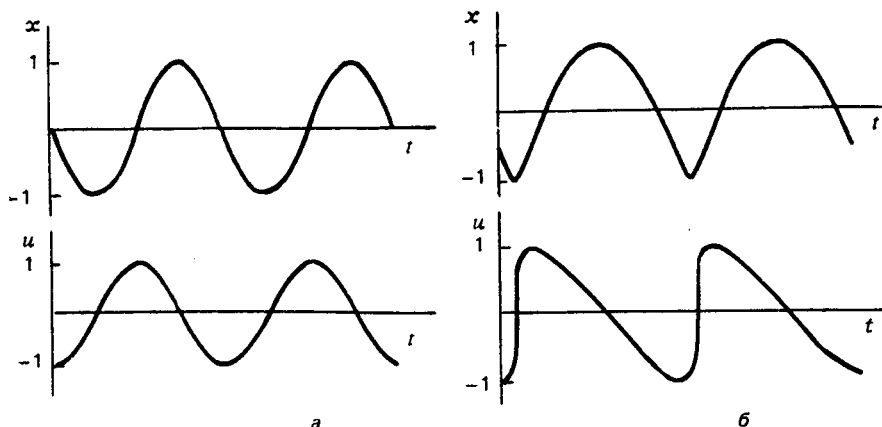


Рис. 3.9. Колебания подвижного уреза при $Br = 0$ (а), $Br = 1$ (б)

Итак, формулы (3.170), (3.171) вместе с выражением для ξ позволяют однозначно найти все характеристики наката в широких пределах изменения параметра Br . Результаты расчетов (рис. 3.9) показывают, что профиль скорости волны с увеличением Br приобретает характерную ударную форму (имеется полная аналогия с образованием ударной волны из простой в газовой динамике при замене в (3.170) параметра Br на координату z), а график $x(t)$ остается симметричным относительно вертикальной оси.

3.2.4. Роль линейного приближения в задачах наката волн цунами

Главным результатом решения нелинейной задачи о накате длинных волн на береговой откос является доказательство линейности связи характеристик заплеска с амплитудой падающей волны, если последняя задана достаточно далеко от уреза. Это обстоятельство наводило на мысль о возможности использования линейной теории для расчета характеристик заплеска, что было потом строго доказано [Shuto, 1967, 1972; Пелиновский, 1982; Kaistrenko et al., 1991].

Рассмотрим этот важный вопрос более подробно.

Будем исходить из линейного варианта теории мелкой воды

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (3.172)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (-\alpha x u) = 0 \quad (3.173)$$

и применим для ее решения линеаризованную версию преобразований Кэрриера – Гринспана:

$$\eta = \frac{1}{2g} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda_0}, \quad u = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \sigma_0}, \quad (3.174)$$

$$x = -\sigma_0^2/4g\alpha, \quad t = \lambda_0/g\alpha. \quad (3.175)$$

Тогда система (3.172), (3.173), естественно, сводится к линейному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \lambda_0^2} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \sigma_0} = 0. \quad (3.176)$$

Здесь $\sigma_0 = 0$ соответствует урезу воды. Как видим, уравнения для функций $\Phi(\sigma, \lambda)$ в нелинейной теории и $\Phi_0(\sigma_0, \lambda_0)$ в линейной теории оказываются одинаковыми. Вдали от уреза $\sigma = \sigma_0$ и $\lambda = \lambda_0$, так что асимптотики Φ и Φ_0 одинаковы и соответствуют одному и тому же начальному условию в области, где волна линейна. Но тогда оказываются одинаковыми функции $\Phi(\sigma, \lambda)$ и $\Phi_0(\sigma_0, \lambda_0)$ (с соответствующей заменой аргументов), а значит, одинаковы функции $\Phi(0, \lambda)$ и $\Phi_0(0, \lambda_0)$ и их экстремумы. Но если $\max \Phi(0, \lambda)$ определяет максимальную высоту заплеска в нелинейной теории, то $\max \Phi_0(0, \lambda_0)$ есть максимум подъема уровня воды на урезе ($x = 0$) в рамках линейной теории. Аналогичные результаты получаются и для скорости потока. Следовательно, решая линейную задачу и определяя максимум высоты волны и скорости потока на урезе, тем самым находим максимум подъема уровня воды на побережье и скорость потока в рамках точных нелинейных уравнений. Именно в этом смысле и можно говорить об обоснованности линейного подхода к расчету максимальных характеристик заплеска. Этот результат представляется исключительно важным, так как позволяет использовать накопленный опыт в решении линейных задач для волн в клине жидкости. Более того, как было показано в разд. 3.2.3, линейное решение является базовым для изучения динамики подвижного уреза при учете нелинейности, в частности, функция $\xi(t)$ и рассчитывалась в рамках линейной теории. В результате можно сформулировать поэтапный подход описания динамики подвижного уреза при накате волн цунами. На первом этапе необходимо решать линейную задачу в области $-\infty < x \leq 0$ и вычислить $\xi(t) = \eta(0, t)$ и $U(t) = d\xi/dt$. На втором этапе – применить формулы (3.170) и (3.171) и получить искомые выражения для координаты и скорости подвижного уреза. Наиболее "тяжелой" частью работы является ее линейная часть (вычисление интегралов и т. п.). С другой стороны, линейный подход может быть применен для более общего класса

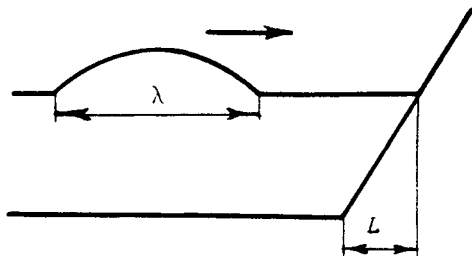


Рис. 3.10. Геометрия задачи

задач трансформации волны цунами не только на плоском откосе, например, для различных кусочно-линейных аппроксимаций глубины $h(x)$, лишь бы в этой области нелинейные эффекты не успевали накапливаться

(что возможно, если длина нелинейности больше расстояния до берега).

Рассмотрим здесь важную для приложений ситуацию наката волны на откос, сопряженный с ровным дном (рис. 3.10). В области ровного дна решение линейных уравнений, очевидно, имеет вид

$$\eta(x, t) = H_0 \exp[i(\omega t - kx)] + H_- \exp[i(\omega t + kx)], \quad (3.177)$$

где H_0 и H_- — амплитуды падающей и отраженной волн, $k = \omega/c$. На плоском откосе решение системы (3.172), (3.173) находится также элементарно:

$$\eta(x, t) = R J_0 \left(\left(\frac{4\omega^2 |x|}{g\alpha} \right)^{1/2} \right) \exp(i\omega t). \quad (3.178)$$

В месте сшивки непрерывны уровень воды и скорость потока (или $\partial\eta/\partial x$), что и позволит однозначно рассчитать R и H_- по заданной высоте падающей волны. Опуская тривиальные выкладки, приведем здесь выражение для высоты заплеска (фазовые множители опущены), см., например, [Mei, 1989]:

$$R/H_0 = 2 \sqrt{J_0^2(4\pi L/\lambda) + J_1^2(4\pi L/\lambda)}^{1/2}, \quad (3.179)$$

где J_1 — функция Бесселя, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны цунами над ровным дном. Как и при отсутствии излома, решение зависит от параметра L/λ и хорошо аппроксимируется простыми зависимостями:

$$\frac{R}{H_0} = \begin{cases} 2, & L < 0,05\lambda, \\ 2\pi(2L/\lambda)^{1/2}, & L > 0,05\lambda, \end{cases} \quad (3.180)$$

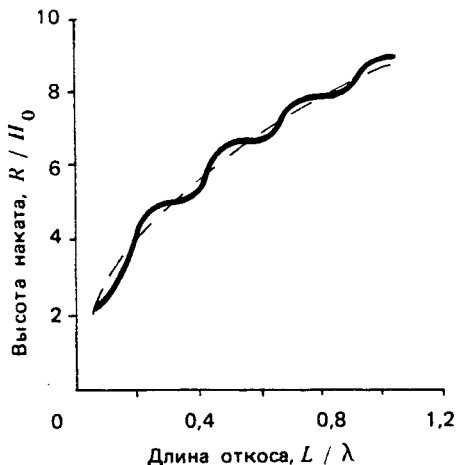
первая из которых соответствует накату на вертикальную стенку, а вторая — накату на откос постоянного уклона. Формулы (3.179) и (3.180) изображены на рис. 3.11. Отметим, что в точном решении заметны осцилляции, которые связаны с резонансными эффектами, относительно слабо выраженными для данной геометрии шельфа.

Аналогичные расчеты выполнены для наката импульсной волны [Mazova et al., 1992]. В рамках линейной теории колебания уровня на урзе описываются суперпозицией элементарных решений (3.178):

$$\xi(t) = \int \frac{2A(\omega) \exp\{i[\omega(t + L/c) - \arctanh(J_1/J_0)]\}}{[J_0^2(4\omega^2 L/g\alpha) + J_1^2(4\omega^2 L/g\alpha)]^{1/2}} d\omega, \quad (3.181)$$

Рис. 3.11. Накат монохроматической волны:

— по формуле (3.179),
 - - - по формуле (3.180)



где

$$A(\omega) = (1/2\pi) \int \eta_{пад}(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (3.182)$$

— спектр падающей волны. Результаты расчетов для падающей волны в форме полусинусоидального гребня приведены на рис. 3.12. Как видим, на крутых откосах форма колебаний уреза практически не отличается от исходной (как это и должно быть при отражении от вертикальной стенки), но на плавных откосах колебания уреза

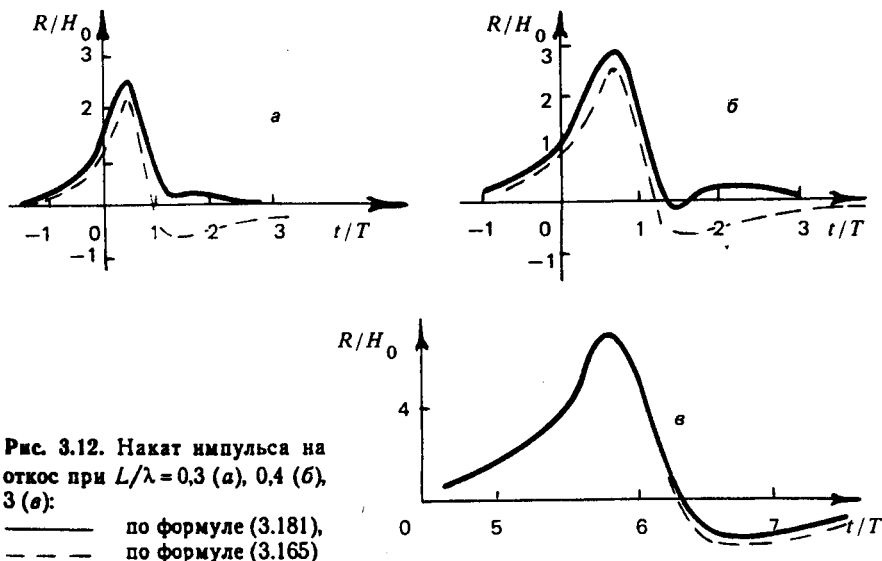


Рис. 3.12. Накат импульса на откос при $L/\lambda = 0,3$ (а), $0,4$ (б), 3 (в):

— по формуле (3.181),
 - - - по формуле (3.165)

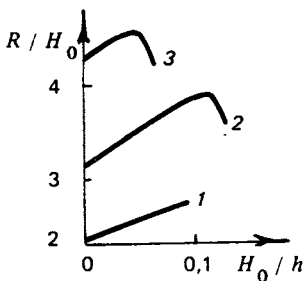


Рис. 3.13. Зависимость высоты наката от начальной амплитуды волны при $L/\lambda = 0,1$ (1), $0,3$ (2), $0,5$ (3)

становятся заметно знакопеременными. Высота наката описывается фактически той же зависимостью, что и для монохроматической волны (3.180), но с другим численным коэффициентом.

Моделирование наката импульса на откос, сопряженный с участком ровного дна, неоднократно проводилось в лабораторных условиях, выполнялось также численное моделирование этого процесса в рамках нелинейных бездисперсионных моделей. И выяснилось сразу, что результаты численных расчетов не соответствуют линейной теории (рис. 3.13), относительная высота наката R/H оказывается функцией амплитуды H/h . В принципе это кажется естественным: точное решение нелинейной задачи получается в исключительных случаях, рассматриваемая геометрия к нему не относится. Но тогда область применимости изложенной теории резко сужается и она скорее становится академической, чем важной для практики. На самом деле разгадка оказалась весьма простой [Осипенко, Пелиновский, 1992]: в типичной постановке начальные условия соответствуют волне, расположенной на участке ровного дна, так что максимум волны удален от откоса на расстояние половины длины волны. Если волна имеет значительную амплитуду (как во многих лабораторных и численных экспериментах), то к откосу подходит уже нелинейно-деформированная волна, обогащенная высшими гармониками, так что фактически ее длина, например длина переднего фронта, меньше первоначальной. Поскольку высота наката зависит от длины (как $\lambda^{-1/2}$), то она больше для деформированной волны, чем для волны первоначальной формы. Когда мы в численных экспериментах стали добиваться, чтобы на откос всегда входила волна одинаковой формы (но разной амплитуды), немедленно стали получать результаты, близкие к предсказаниям линейной теории, хотя амплитуда волны и не мала.

Таким образом, линейность связи между высотой наката и амплитудой волны, вытекающая из развитой теории, достаточно хорошо выполняется для шельфов более общей геометрии. С другой стороны, этот пример еще раз свидетельствует о важности знания формы волны цунами, а это как раз на практике пока еще свободный параметр!

3.2.5. Аналитические результаты для одномерных задач набегания волн цунами на берег

Для решения практических задач набегания волн цунами на берег, ввиду изрезанности береговой линии, необходимо учитывать двумерный и даже трехмерный характер волновых движений в приустьевой области. Аналитические возможности решения нелинейных задач, естественно, резко сужаются и, пожалуй, единственным примером здесь являются узкие бухты или каналы. Преимуществом подобного типа задач является возможность использования квазиодномерного приближения, что можно сделать для почти однородных в поперечном сечении длинноволновых потоков. Искомые уравнения для волн в этом случае могут быть получены усреднением уравнений нелинейной теории мелкой воды по поперечному сечению; этот прием активно используется в гидравлике речных потоков, и мы на нем останавливаться не будем. Соответствующие одномерные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g \frac{dh_0}{dx}, \quad (3.183)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Au) = 0, \quad (3.184)$$

где u — средняя скорость потока, $A(x, t)$ — площадь поперечного сечения потока, H — полная глубина бассейна на оси канала или бухты и h_0 — ее невозмущенное значение. Эта система не замкнута, недостающее уравнение $A(H)$ находится по заданной геометрии потока. Отметим полную аналогию с уравнениями газодинамики, если обозначить

$$\rho = A, \quad p = g \int A \, dH. \quad (3.185)$$

В частности, для канала или бухты прямоугольного сечения $A = bH$ (b — ширина канала), отсюда находим $p \sim H^2 \sim \rho^2$, т. е. гидродинамические движения на мелкой воде эквивалентны движениям газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$ [Стокер, 1959]. В случае канала с профилем

$$h(y) \sim |y|^m, \quad (3.186)$$

который будем называть "параболическим", согласно (3.185) эквивалентный показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{2m+1}{m+1} \quad (3.187)$$

меняется от 1 до 2, как и для реальных газов. Использование газогидродинамической аналогии позволяет привлечь многие результаты из газодинамики (см., например, [Jeffrey, 1976]) для интер-

претации "водных" процессов. Простейшей задачей, моделирующей накат, является взаимодействие волны с вертикальной преградой в канале. Она решается аналогично тому, как мы это сделали в разд. 3.1.1. Построим римановы инварианты системы (3.183), (3.184) при $h = \text{const}$:

$$I_{\pm} = u \pm \int_{h_0}^{h+\eta} \left(\frac{g}{A} \frac{dA}{dH} \right)^{1/2} dH, \quad (3.188)$$

которые сохраняются вдоль характеристик. В падающей волне

$$I_+ = 2 \int_h^{h+H_0} \left(\frac{g}{A} \frac{dA}{dH} \right)^{1/2} dH, \quad (3.189)$$

а на стенке

$$I_+ = \int_h^{h+R} \left(\frac{g}{A} \frac{dA}{dH} \right)^{1/2} dH. \quad (3.190)$$

Тогда связь между R и H_0 в общем виде задается интегральным уравнением

$$\int_h^{h+R} \left(\frac{g}{A} \frac{dA}{dH} \right)^{1/2} dH = 2 \int_h^{h+H_0} \left(\frac{g}{A} \frac{dA}{dH} \right)^{1/2} dH. \quad (3.191)$$

В частности, для "параболических" каналов (3.186), когда римановы инварианты находятся в явном виде

$$I_{\pm} = u \pm 2(m+1) m^{-1} \{ [g(h+\eta)]^{1/2} - (gh)^{1/2} \}, \quad (3.192)$$

решение (3.191) есть

$$R/h = 4 \left[1 + H_0/h - (1 - H_0/h)^{1/2} \right], \quad (3.193)$$

как и для волны в прямоугольном канале (ср. с формулой (3.19)). Итак, высота наката на вертикальную преграду в каналах "параболического" сечения не зависит от конкретной формы канала. С другой стороны, из условия "запирания" отраженной волны у стенки ($c_- = 0$ при $I_- = 0$) находим высоту волны, которая обязательно разрушается на стенке:

$$H_R^2/h \geq (3m + 8m + 4)/m^2, \quad (3.194)$$

здесь результат уже зависит от формы канала.

Изучим теперь накат волн цунами на берег в канале "параболического" сечения с постоянным уклоном дна: $h_0 = \alpha x$. В этом случае также существуют сохраняющиеся римановы инварианты

$$I_{\pm} = u \pm 2 \{ [(m+1)/m] gH \}^{1/2} + g\alpha x, \quad (3.195)$$

что позволяет снова применить технику преобразований Кэрриера — Гринспана. Соответствующие формулы получаются аналогично изложенному в разд. 3.2.2 и здесь их вывод опущен [Голинько, Пелиновский, 1988; Pelinovsky, 1992]. В частности, окончательные формулы обобщенного преобразования Кэрриера — Гринспана имеют вид

$$\eta = \frac{1}{2g} \left(\frac{m}{m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - u^2 \right), \quad u = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad (3.196)$$

$$x = \frac{1}{2g\alpha} \left(\frac{m}{m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - u^2 - \frac{m\sigma^2}{2m+2} \right), \quad t = \frac{1}{g\alpha} (\lambda - u). \quad (3.197)$$

С их помощью система нелинейных уравнений (3.183), (3.184) опять сводится к линейному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - \frac{m+2}{m} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0. \quad (3.198)$$

В результате удается полностью описать накат волн в канале параболического сечения, а также снова провести обоснование линейного подхода для нахождения экстремальных характеристик наката. В случае наката монохроматической волны частное решение (3.198) имеет вид

$$\Phi = A \left[J_{1/m}(l\sigma) / \sigma^{1/m} \right] \sin l\lambda, \quad (3.199)$$

где $J_{1/m}$ — функция Бесселя, и, в частности, максимальная высота наката есть

$$R/H_0 = 2\pi^{1/2} / [\Gamma(1 + 1/m)] (2\pi L/\lambda)^{1/2 + 1/m}, \quad (3.200)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. При $m \rightarrow \infty$ (плоская задача) формула (3.200), как и следовало ожидать, переходит в (3.149). С уменьшением m зависимость R от L становится более резкой, что может объяснять известное из наблюдений свойство цунами распространяться на большие расстояния в долинах рек. Отметим также, что формула (3.200) носит асимптотический характер ($L \gg \lambda$ или $R \gg H_0$), но, как и в аналогичных плоских задачах, ею можно пользоваться, начиная с $R > 2H_0$.

С помощью фурье-суперпозиции решений (3.199) можно рассмотреть накат импульсной волны цунами. Расчетная схема в соответствии с преобразованиями Кэрриера — Гринспана включает два этапа. На первом рассчитывается "линейная" часть заплеска:

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{2g} \frac{m}{m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \Big|_{\sigma=0}, \quad (3.201)$$

$$U(\lambda) = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = g \frac{d\xi}{d\lambda}, \quad (3.202)$$

на втором — динамика подвижного уреза:

$$u(t) = U(t + u/g\alpha), \quad (3.203)$$

$$x(t) = \xi(t + u/g\alpha) - (1/2g) U^2(t + u/g\alpha). \quad (3.204)$$

Если $A(\omega)$ – спектр набегающей волны, то

$$\xi(t) = -2\pi^{1/2}/[\Gamma(1 + 1/m)] (L/c)^{1/2 + 1/m} \times \\ \times \int A(\omega) |\omega|^{1/2 + 1/m} \exp\{i[\omega t + (\pi/2m + \pi/4) \text{sign}\omega]\} d\omega. \quad (3.205)$$

Для иллюстрации процесса трансформации формы волны примем $m = 2$ ("настоящий" параболический канал). Тогда формула (3.205) становится явной:

$$\xi(t) = -\frac{L}{c} \frac{d\eta_{\text{пад}}}{dt}. \quad (3.206)$$

Этот случай подробно рассмотрен в работе [Golinko, Malyzhenkova, 1990]. Кроме амплитудного усиления, шельф изменяет форму волны, и на урезе начальное возмущение дифференцируется (в рамках линейной задачи). На урезе происходит подъем уровня и его опускание, причем если падающая волна имела конечную длительность, то и весь процесс изменения уровня при накате занимает конечную длительность. Для сравнения укажем, что при накате на плоский откос (в прямоугольном канале) откат формально происходит за бесконечное время. Подчеркнем также, что нелинейность не сказывается на длительности процесса, она только деформирует профиль $\xi(t)$ в соответствии с римановой трансформацией (3.204).

При $m = 2/3$ формула (3.205) также упрощается:

$$\xi(t) = \frac{8}{3} \left(\frac{L}{c}\right)^2 \frac{d^2\eta_{\text{пад}}}{dt^2}, \quad (3.207)$$

в этом случае на берег придут два гребня, разделенные отрицательной фазой (понижением уровня), если падающая волна представляла собой только гребень. Для частного примера падающей волны в форме (3.160) при $\theta = 0$ отрицательная фаза становится превалирующей (ее амплитуда в четыре раза выше, чем у положительной). Эти простые примеры показывают, что неоднородные эффекты могут существенно повлиять на характеристики заплеска (число накатывающихся волн, соотношение между накатом и откатом) и их необходимо принимать во внимание при анализе реальной ситуации наката волн цунами в бухтах и заливах.

Вышеизложенные результаты получены спектральным методом. Обратим внимание, что при некоторых значениях m общее решение уравнения (3.198) выражается в рациональных функциях. Так, для "настоящего" параболического канала ($m = 2$) общее решение (3.198), ограниченное всюду, в том числе на урезе, имеет вид

$$\Phi(\sigma, \lambda) = \sigma^{-1} [F(\lambda - \sigma) - F(\lambda + \sigma)], \quad (3.208)$$

где F – произвольная функция (dF/dt с точностью до множителя определяет форму падающей волны). В этом случае решение линейной задачи легко исследуется для всех точек x . К сожалению, неясность преобразования Кэрриера – Гринспана не дает возможности так же легко представить себе решение нелинейной задачи, за исключением уреза, где уравнение (3.208) сводится к (3.206) и с помощью (3.204) дает полное описание динамики подвижного уреза в нелинейной задаче.

3.2.6. Отражение нелинейной волны от откоса

В вычислительном плане зона наката является традиционно трудной для рассмотрения и при анализе волновых процессов в прибрежной зоне, особенно в случае сложной геометрии, хотелось бы исключить приурезовую область из рассмотрения, заменив на эквивалентные граничные условия. Обычно в инженерной практике зону наката заменяют вертикальной стенкой на ближайшей к берегу изобате, но так чтобы высота волны на этой глубине была меньше самой глубины (10–20 м, это зависит от степени подробности батиметрических карт). Обоснование данной практики может быть получено с использованием приведенного выше точного решения задачи о накате длинной волны на берег.

Пусть сначала откос плоский. Для монохроматической волны с помощью преобразования Кэрриера – Гринспана было получено решение в явном виде – формула (3.143) – и ее асимптотическое представление вдали от уреза, которое здесь воспроизведем:

$$\eta = a(x) \left\{ \sin \left[\omega \left(t - \int dx/c \right) - \pi/4 \right] + \sin \left[\omega \left(t + \int dx/c \right) + \pi/4 \right] \right\}. \quad (3.209)$$

Зададимся каким-либо определенным положением $x_0 = \alpha L$. Как видно из (3.209), отраженная волна сдвигается относительно падающей на фазу

$$\theta = 2\omega \int_0^{x_0} dx/c + \pi/2, \quad (3.210)$$

амплитуда же ее не изменилась. Поскольку в рамках преобразования Кэрриера – Гринспана задача для волны вдали от уреза стала линейной и принцип суперпозиции выполняется, можно использовать соотношение (3.210) в соответствующих интегралах Фурье (мы уже делали эту процедуру в разд. 2.1.3 при изучении отражения от каустики), что ведет к преобразованию Гильберта [Pelinovsky, Mazoua, 1992]:

$$\eta_{\text{отр}}(t, x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_{\text{пад}}(\tau, x_0) d\tau}{\tau - t + 4(L/g\alpha)^{1/2}}. \quad (3.211)$$

Форма отраженной волны при этом существенно меняется (см. формулы разд. 2.1.3), в частности, если падающая волна представляла собой гребень, то в отраженной волне за гребнем следует ложбина. И здесь полученные формулы справедливы, когда волна расположена достаточно далеко от уреза, так что можно воспользоваться асимптотическим разложением функции Бесселя (3.209). Как видим, отражение от протяженного откоса не эквивалентно отражению от вертикальной стенки и граничное условие на некотором расстоянии от уреза является интегральным, причем оно пишется не для общего поля, а конкретно выражает связь между падающей и отраженной волнами.

В случае более типичной геометрии, когда откос сопряжен с участком ровного дна (мы рассматривали такую геометрию в разд. 3.2.4, рис. 3.10), соответствующее решение в рамках линейной задачи также может быть получено, и при протяженном шельфе оно, естественно, сводится к (3.211). В другом, предельном случае очень крутого откоса получаем вертикальную стенку и здесь

$$\eta_{отр} = \eta_{пад} \text{ или } u = 0. \quad (3.212)$$

Уточнение этой оценки для не совсем вертикальной стенки было сделано в работе [Sugimoto, Kakutani, 1984], где получено следующее граничное условие для первого члена разложения потенциала в ряд Тейлора по глубине (обозначения как в разд. 3.1.1, см. формулу (3.25)) при $x = 0$:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \mu^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \frac{1}{6} \mu^3 \frac{\partial^4 q}{\partial x^4}, \quad (3.213)$$

где $\mu = \beta^{1/2}/\text{tg}\theta$, θ — угол заложения откоса. (Более высокие приближения рассчитаны в [Jeffrey, Dai, 1988]). Естественно, что при $\theta = \pi/2$ (вертикальная стенка) из (3.213) следует

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (x = 0), \quad (3.214)$$

что и совпадает с (3.212). Мы уже говорили в разд. 3.1.1, что в рамках нелинейно-дисперсионной модели отражение от вертикальной стенки приводит к деформации профиля отраженной волны, в частности, к образованию ложбины, следующей за гребнем. Этот же эффект наблюдается и в численных экспериментах, выполненных Марчуком и др. (1983); Sugimoto и др. (1987), по отражению волны от откоса.

Если глубина океана в прибрежной зоне может быть аппроксимирована функцией

$$h(x, y) = -\alpha x + \text{const}|y|^m, \quad (3.215)$$

то при малых α совершенно аналогично (3.209) с помощью преобразования Кэрриера — Гринспана можно показать, что коэффициент отражения волны от откоса есть

$$K(\omega) = \exp \left[i \left(\pi/2 + (\pi/m) \operatorname{sign} \omega + 2\omega \int_0^{x_0} dx/c \right) \right] \quad (3.216)$$

и при $m \rightarrow \infty$ он соответствует отражению от плоского откоса. Рассматривая, например, подходящую волну в виде гребня

$$\eta_{\text{пад}}(t, x_0) = H_0/(1 + 4t^2/T^2), \quad (3.217)$$

легко найти спектр отраженной волны:

$$S_{\text{отр}}(\omega) = K(\omega) S_{\text{пад}}(\omega), \quad (3.218)$$

а затем с помощью обратного фурье-преобразования найти в явной форме отраженную волну:

$$\eta_{\text{отр}}(t', x_0) = - \frac{H_0}{1 + 4\rho^2/T^2} \left(\sin \frac{\pi}{m} + \frac{2t'}{T} \cos \frac{\pi}{m} \right), \quad t' = t - 2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{c}. \quad (3.219)$$

Как видим, результат существенно зависит от геометрии задачи: при $m = 2/3$ отраженная волна полностью повторяет форму падающей, а при $m = 2$ волна "переворачивается" — гребень отражается от берега впадиной. И здесь приводимые формулы справедливы для достаточно протяженных шельфов, когда "работают" асимптотики функции Бесселя. Если откос представляет собой вертикальную стенку в канале, то, конечно же, граничное условие на ней имеет вид (3.212) или близкое к нему, если стенка слабо наклонена.

Аналогичный подход может быть также использован для исключения зоны наката и в "чисто" пространственной задаче, если откос достаточно крутой; соответствующие граничные условия выписаны в [Jeffrey, Dai, 1989]) и они использованы для анализа процесса маховского отражения солитона от прибрежной зоны.

Таким образом, для протяженных откосов граничные условия сильно зависят от геометрии задачи и их трудно сделать универсальными, заменив, например, достаточно большой залив с многими бухтами на одну эквивалентную вертикальную стенку. В этом случае попытки получения приближенных граничных условий, "заменяющих" шельфовую зону, будут чисто академическими. В то же время для коротких шельфов приближение вертикальной стенки является достаточно хорошим.

3.3. ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ И ДИСПЕРСИИ НА НАКАТ ВОЛН ЦУНАМИ

Рассмотренная в разд. 3.2 модель является базовой для изучения наката волн цунами на берег. На практике, особенно в случае очень протяженных шельфов и на берегу, начинают сказываться и другие эффекты, такие как диссипация, обусловленная обрушением

и трением о дно, и дисперсия. Соответствующие математические модели рассмотрены ниже.

3.3.1. Критерии обрушения волн цунами

Полученная в рамках нелинейной теории мелкой воды картина набега волн на берег справедлива для необрушенных волн. Физически очевидно, что если характерная длина нелинейности меньше расстояния до берега, волна должна обрушиться. Математически обрушение волн, или градиентная катастрофа, приводит к нарушению однозначности связи x и t с λ и σ , что проявляется в обращении в нуль якобиана преобразования $\partial(t, x)/\partial(I_+, I_-)$. Рассмотрим сначала одномерную задачу наката волны цунами на плоский откос. Используя формулы (3.132) и (3.140), якобиан можно представить в следующей форме:

$$I = \frac{\partial(t, x)}{\partial(I_+, I_-)} = -\frac{\sigma}{2} \frac{\partial t}{\partial I_+} \frac{\partial t}{\partial I_-} = \frac{\sigma}{8g^2\alpha^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(1 - \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)^2 \right]. \quad (3.220)$$

Формально на самом урзе ($\sigma = 0$) $I = 0$, однако эта точка является особой и условие $I = 0$ для нее не характеризует обрушение. Фактически следует рассматривать (3.220) в области $\sigma > 0$. При малых амплитудах волны

$$I \approx -\sigma/(8g^2\alpha^2) \neq 0, \quad (3.221)$$

однако с увеличением амплитуды наступает момент, когда волна обрушится; из-за максимальности скорости потока на урзе первое обрушение произойдет также на урзе. Величину якобиана можно подсчитать для конкретной формы волны, в частности, для монохроматической волны. *Carrier* и *Grensban* (1958) получили, что волна обрушится, если высота наката будет больше некоторого критического значения, определяемого соотношением

$$Vg_* = (\omega^2 R)/(g\alpha^2) = 1. \quad (3.222)$$

Таким образом, характер процесса будет различным в зависимости от параметра Vg_* , выведенного в разд. 3.2.1 только из соображений размерности. Если $Vg_* < 1$, то решение остается непрерывным всюду и волна выходит на берег без обрушения — режим спокойного подтопления берега (наводнение). При $Vg_* > 1$ в рамках теории мелкой воды обязательно наступает обрушение. На практике влияние диссипации и дисперсии может замедлить этот процесс, что приведет к увеличению Vg_* . В частности, для ветровых волн $Vg_* = 1.5$. Этот факт свидетельствует в пользу развиваемой здесь теории для описания наката волн.

Сделаем некоторые оценки. Принимая $\alpha \sim 10^{-2}$ и $T \sim 10$ мин, из (3.222) получим $R_* \sim 9$ м, так что для приливных волн и волн цунами эффект обрушения встречается только для больших волн. В то же время для ветровых волн ($T \sim 6$ с) критическое значение $R_* \sim 1$ мм, так что для них процесс обрушения типичен.

Расчет якобиана для волны произвольной формы и определение условий обрушения волны не являются тривиальным делом, хотя и здесь получены некоторые общие утверждения [Meyer, 1986, a, b]. Однако условию обрушения можно придать очень наглядный вид, позволяющий легко сделать выводы для волны любой формы. Рассмотрим движение подвижного уреза, задаваемое формулой (3.170), которую здесь воспроизведем:

$$u(t) = U(t + \text{Br}u), \quad (3.223)$$

где $U(t)$ — скорость движения воды на урезе в рамках линейной теории. Уже говорилось, что первое обрушение должно произойти на урезе и оно обязано проявиться в решении (3.223). Вычислим для этого временную производную от скорости потока

$$\frac{du}{dt} = \frac{dU/dt}{1 - \text{Br} dU/dt}. \quad (3.224)$$

Отсюда вытекает, что если dU/dt — ограниченная функция, то du/dt становится неограниченным при достижении Br критического значения

$$\text{Br}_* = \left(\max \frac{dU}{dt} \right)^{-1}. \quad (3.225)$$

В размерных переменных условие (3.225) сводится к [Pelinovsky, Mazova, 1992]

$$\max \frac{d^2\xi}{dt^2} = g\alpha^2, \quad (3.226)$$

т. е. волна обрушится, если вертикальное ускорение на урезе в эквивалентной линейной задаче достигнет $g\alpha^2$. Если учесть, что $(d^2\xi/dt^2)/\alpha$ есть компонента ускорения вдоль откоса, то условие (3.226) становится очень физическим: волна обрушивается, когда ускорение в ней может превысить компоненту ускорения свободного падения вдоль откоса ($g\alpha$).

С другой стороны, в линейной задаче из формул (3.172) и (3.173) следует связь между пространственными и временными производными (обозначим ξ для линейной и η для нелинейной задач):

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + g\alpha \frac{\partial\xi}{\partial x} + g\alpha x \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0, \quad (3.227)$$

на урезе

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + g\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad (3.228)$$

что позволяет переписать условие (3.226) в виде

$$\left. \frac{d\xi}{dx} \right|_{x=0} = \alpha. \quad (3.229)$$

Условия (3.226) и (3.229) предлагались из эвристических соображений, развиваемая здесь теория математически обосновывает их.

Имеется еще один критерий обрушения, связанный с классом рассматриваемых функций. Из (3.224) ясно, что решение не существует, если dU/dt является неограниченной. Поскольку U обусловлено линейной трансформацией волны в шельфовую зону, то этот эффект не связан непосредственно с нелинейностью и может быть в рамках линейной теории. Выпишем здесь явную формулу для U , вытекающую из формулы (3.152) при $\sigma = 0$:

$$U(t) = -(2g^2\alpha^2)^{-1} \int \omega^2 A(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (3.230)$$

Для сходимости интеграла функция $A(\omega)$ должна спадать достаточно быстро. Спектр падающей же волны, как это видно из формулы (3.155), определяется множителем $|\omega|^{1/2} A(\omega)$. Для исходной волны, имеющей излом — разрыв производной (такое решение не противоречит уравнениям мелкой воды для постоянной глубины), спектр спадает на высоких частотах как ω^{-2} , т. е. $A(\omega) \sim \omega^{-5/2}$ и интеграл в (3.230) оказывается расходящимся, такая волна должна разрушиться еще до подхода к берегу [Greenspan, 1958]. Для сходимости же dU/dt на урезе необходимо, что спектр падающей волны спадал на высоких частотах быстрее, чем $\omega^{-7/2}$. Этому условию часто трудно удовлетворить в численных экспериментах (на концах импульса вторая производная должна быть непрерывна), поэтому результаты расчетов по разным моделям оказывались различными, причем физически более разумные цифры получались в грубых моделях, где "спасала" численная диссипация, сглаживающая форму волны.

Итак, получены два критерия обрушения: первый из них дает условие на амплитуду обрушенной волны, а второй — на форму начального импульса (его гладкость). Аналогичные условия могут быть и для волн, накатывающихся на берега узких бухт и каналов. Обратим внимание, что формула для подвижного уреза (3.203) не зависит от сечения канала и, следовательно, условия обрушения волны в форме (3.226) или (3.229) сохраняются. Однако условия гладкости dU/dt становятся более жесткими, в частности, из формулы (3.205) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} = & \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(1+1/m)} \left(\frac{L}{c}\right)^{1/2+1/m} \int A(\omega) |\omega|^{3/2+1/m} \times \\ & \times \exp\{i[\omega t + (\pi/2m + \pi/4) \text{sign}\omega]\} d\omega \end{aligned} \quad (3.231)$$

($A(\omega)$ — спектр падающей волны), т. е. чтобы волна не обрушилась, необходимо быстрое спадание спектра падающей волны на высоких частотах (быстрее, чем $\omega^{-(5/2+1/m)}$).

С увеличением амплитуды волна будет обрушиваться еще до подхода к берегу. Определение глубины обрушения волны цунами является важной практической задачей, поскольку при прочих равных условиях обрушенная волна сильнее воздействует на сооружения в гавани. В принципе, преобразования Кэрриера — Гринспана вместе с условием $I=0$ позволяют найти глубину разрушения, однако логично сначала модифицировать элементарное решение волнового уравнения, добавив второе линейно независимое решение с функцией Неймана, так как уже нет необходимости рассматривать прирезовую область (где волна разрушена) и требовать равенства амплитуд падающей и отраженной волн. Однако "вес" второго решения зависит от того, насколько разрушенная волна диссипировала при движении к берегу и какая ее часть отразится в море; эти характеристики априори неизвестны. При $B\gamma \gg 1$ обрушение происходит вдали от уреза, и эволюция падающей волны происходит независимо от отраженной. Учитывая малость уклонов дна, здесь можно воспользоваться уравнением простой волны, выведенным в разд. 2.3 — формулы (2.166) и (2.167), включающим эффекты переменной глубины, и рассчитать глубину обрушения из формулы (2.168), которая при нормальном падении сводится к

$$\int_0^{x_*} (h/h_0)^{-7/4} dx = L_n, \quad (3.232)$$

где длина нелинейности L_n для монохроматической волны равна

$$L_n = (h_0 \lambda_0) / (3\pi H_0). \quad (3.233)$$

В случае постоянного уклона дна из (3.232) находим глубину обрушения [Jeffrey, 1964; Jeffrey, Russo, 1987]

$$h_* = -\alpha x_* = h_0 \left[1 + (\alpha \lambda_0) / (2\pi H_0) \right]^{4/3} \quad (3.234)$$

и высоту волны в момент обрушения

$$H_* = H_0 \left[1 + (\alpha \lambda_0) / (2\pi H_0) \right]^{1/3}. \quad (3.235)$$

Эти формулы справедливы, конечно, если $h_* > \alpha \lambda_0$, т. е. обрушение происходит вдали от уреза и высота волны остается малой ($H_* \ll h_*$).

Для обрушенной волны малой амплитуды вдали от уреза также удастся дать аналитическое рассмотрение, поскольку волна представляет собой слабую ударную волну — бор. Скорость движения ударной волны легко может быть найдена интегрированием уравнения простой волны по малой толщине разрыва (этот прием

вытекает также из "правильной" дивергентной формы уравнений мелкой воды, см., например, [Jeffrey, 1976; Engelbrecht et al., 1988]:

$$c_s = (gh)^{1/2} \left[1 + (3/4) (\xi_+ + \xi_-) / h \right], \quad (3.256)$$

где ξ_{\pm} — значения поля до и после скачка. Вне фронта волна по-прежнему описывается римановым решением (разд. 2.3). Очевидно, что ξ_{\pm} принадлежат как простой волне, так и разрыву. Поэтому совместное решение этих уравнений ведет к следующим соотношениям для ξ_{\pm} :

$$(z/L_n) (\xi_+ - \xi_-) = H_0 \left[\eta_0^{-1}(\xi_+) - \eta_0^{-1}(\xi_-) \right], \quad (3.237)$$

$$\frac{1}{2L_n} (\xi_+ - \xi_-) \frac{dz}{d\xi_+} + \frac{z}{L_n} = H_0 \frac{d\eta_0^{-1}}{d\xi_+}, \quad (3.238)$$

где η_0^{-1} — функция, обратная η_0 . Решение системы (3.237), (3.238) в общем виде не существует. Точные решения удается найти для волны, состоящей в начальный момент из любого числа отрезков синусоиды. Для определенности будем говорить о двух типах волн: "симметричной" волне, состоящей из подошвы и следующего за ним гребня (к этому типу относится монохроматическая волна), и "импульсе" (только гребень). Для симметричной волны решение системы (3.237), (3.238) имеет вид ($\xi_s = \xi_+ = -\xi_-$)

$$\xi_s = H_0 \sin \left[(z\xi_s) / (H_0 L_n) \right], \quad (3.239)$$

откуда следует, что бор образуется на расстоянии L_n (это расстояние отсчитывается в эквивалентной координате z , связанной с x формулой (2.167)) вблизи спокойного уровня; величина разрыва нарастает до H_0 на расстоянии $\pi L_n / 2$ и далее убывает, причем на больших расстояниях по закону

$$\xi_s = \pi H_0 L_n / z. \quad (3.240)$$

Учитывая, что $L_n \sim H_0^{-1}$, из формулы (3.240) следует важный вывод: высота симметричного бора на больших расстояниях от очага не зависит от высоты волны цунами в очаге, т. е. происходит выравнивание цунами различных высот. Длительность ударной волны остается постоянной на всех стадиях. Скорость бора в данном случае есть $(gh)^{1/2}$ и не зависит от высоты волны.

Для импульса аналогично находим ($\xi_s = \xi_+$, $\xi_- = 0$)

$$\xi_s = 2H_0 \left[(L_n/z) (1 - L_n/z) \right]^{1/2}. \quad (3.241)$$

Бор также начинает формироваться при $z = L_n$, высота разрыва нарастает до H_0 на расстоянии $2L_n$, а затем убывает, причем на больших расстояниях по асимптотической формуле

$$\xi_s = 2H_0(L_n/z)^{1/2}. \quad (3.242)$$

Высота бора пропорциональна $(H_0)^{1/2}$ и выравнивание высот цунами, хотя и не полное, также имеет место. Длина импульсной волны растет при $z > L_n$ и на больших расстояниях

$$\lambda = \lambda_0(z/L_n)^{1/2}, \quad (3.243)$$

так как скорость бора, образуемого на переднем фронте волны, больше $(gh)^{1/2}$.

Формулы типа (3.239)–(3.243) описывают развитие и затухание бора в эквивалентных координатах (z, ξ) , связанных с (x, η) формулами из разд. 2.3. Приведем здесь окончательную формулу для высоты бора, образовавшегося из синусоидального гребня:

$$H = 2H_0 (h/h_0)^{1/4} [(L_n/z) (1 - L_n/z)]^{1/2},$$

$$z = \int_0^x (h/h_0)^{-7/4} dx, \quad L_n = (\lambda_0 h_0)/(3\pi H_0) \quad (z > 2L_n). \quad (3.244)$$

Изменение высоты волны цунами в данном случае обусловлено конкуренцией двух факторов: усилением из-за уменьшения глубины и ослаблением из-за диссипации энергии, связанной с разрушением волны, что и приводит к немонотонному изменению высоты волны в береговой зоне. В пределе малых глубин и плоского откоса асимптотические формулы выглядят следующим образом:

$$H = (2\alpha H_0 \lambda_0)^{1/2} (h/h_0)^{1/8}, \quad (3.245)$$

$$\lambda = (4\pi H_0 \lambda_0 / \alpha)^{1/2} (h/h_0)^{1/8}. \quad (3.246)$$

Интересно отметить, что с приближением к урезу крутизна склона волны стремится к малой константе

$$H/\lambda \sim \alpha(2\pi)^{-1/2}, \quad (3.247)$$

так что волна приобретает форму бора с плоской вершиной. Формально из (3.245) следует, что на урезу высота бора обращается в нуль, однако H/h становится неограниченной, и приближение слабой ударной волны здесь неприменимо.

Если начальная волна не является малой, удастся получить приближенные решения [Cumberbatsh, Wen, 1973; Varley et al., 1971], основанные опять же на применении римановых инвариантов, только в форме

$$I_{\pm} = u \pm 2 \{ [g(h + \eta)]^{1/2} - (gh)^{1/2} \}. \quad (3.248)$$

Тогда нелинейные уравнения мелкой воды переписываются в виде

$$\frac{\partial I_{\pm}}{\partial t} + c_{\pm} \frac{\partial I_{\pm}}{\partial x} = \mp \left(\frac{3}{4} I_{\pm} + \frac{1}{4} I_{\mp} \right) (g/h)^{1/2} \frac{dh}{dx},$$

$$c_{\pm} = \pm(gh)^{1/2} + (3/4) I_{\pm} + (1/4) I_{\mp}. \quad (3.249)$$

Очевидно, что если уклон дна мал, то в первом приближении отраженной волной I_{-} можно пренебречь. Тогда уравнение (3.249) для I_{+} может быть переписано в терминах скорости частиц воды

$$\frac{du}{dt} + \left[(gh)^{1/2} + \frac{3}{2} u \right] \frac{du}{dx} + \frac{3}{4} u (g/h)^{1/2} \frac{dh}{dx} = 0,$$

$$u = 2 \{ [g(h + \eta)]^{1/2} - (gh)^{1/2} \}, \quad (3.250)$$

которому соответствуют два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{du}{dh} = -\frac{3}{4} \frac{u(g/h)^{1/2}}{(gh)^{1/2} + 3u/2}, \quad (3.251)$$

$$\frac{dt}{dx} = \left[(gh)^{1/2} + \frac{3}{2} u \right]^{-1}, \quad (3.252)$$

первое из которых описывает изменение амплитуды волны, а второе — форму или время прихода в данную точку различных участков волны. Амплитудное уравнение решается точно:

$$h^5 D(j) = \text{const}, \quad D(j) = j^4(5 + 3j)^6,$$

$$j = u/(gh)^{-1/2} = 2 \{ (1 + H/h)^{1/2} - 1 \}. \quad (3.253)$$

Как видим, высота волны определяется только локальной глубиной океана и не зависит от пройденного пути и уклона дна — типичная ситуация при пренебрежении отражением. В случае малых высот волн из (3.253) немедленно следует закон Грина: $H \sim h^{-1/4}$. Интересным и неожиданным является то, что на урзе в рамках этого уравнения высота волны остается конечной и равной

$$H_{sh} = 0,46h^{1/5}H^{4/5}, \quad (3.254)$$

причем мы здесь приняли, что на глубине h_0 волна является почти линейной. Следует подчеркнуть, однако, что приближенное уравнение (3.250) несправедливо при $h \rightarrow 0$ (слагаемое с $(g/h)^{1/2} dh/dx$ в (3.249) описывает генерацию в приурезовой области большой отраженной волны).

Таким образом, аналитические методы позволяют хорошо описать динамику волны вдали от уреза. Значительно хуже обстоит дело с описанием процесса наката разрушенной волны на берег. Если считать, что частицы воды на фронте ударной волны подвержены только действию силы тяжести, то легко найти максимальную высоту заливания, при подъеме на которую вся кинетическая энергия частиц переходит в потенциальную [Shen, Meyer, 1963]:

$$R = u^2/2g. \quad (3.255)$$

Основные трудности в использовании (3.255) связаны с определением места "сшивки" с решением типа (3.245), здесь пока не удается найти надежных критериев. С другой стороны, использование закона сохранения энергии также, по-видимому, некорректно: на подъем частиц воды влияет сила трения; кроме того, частицы воды на фронте "подпираются" потоком. Вообще, описание бора, как волны с турбулентным течением на фронте, является тяжелейшей гидродинамической задачей, и здесь существует своя иерархия моделей (см., например, [Madsen, Svendsen, 1982; Svendsen, Madsen, 1984]). Поэтому теорию наката бора на откос надо еще по-настоящему создавать. С другой стороны, сейчас появилось много работ по численному моделированию процесса обрушения волн на воде [Peregrine, 1983; New et al., 1985], они дают весьма впечатляющие картины разрушения волн, но пока не ясно, как параметризовать эти эффекты для создания прикладных моделей наката разрушенных волн на берег.

3.3.2. Влияние диссипации на накат волн цунами

Ранее уже рассматривались (разд. 2.4) различные диссипативные эффекты, существенные для волн цунами. Учет совместного действия усиления волны за счет убывания глубины и ее диссипации в прирезовой области резко сужает возможности аналитического рассмотрения подобных задач. По существу, одну из них мы описали выше, анализируя развитие и затухание бора, однако это были весьма приближенные решения. Покажем некоторые более строгие решения.

Первой рассмотрим систему мелкой воды с нелинейной диссипацией:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(-\alpha x + \eta) u] = 0, \quad (3.256)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{\mu}{h + \eta} u |u|, \quad (3.257)$$

где коэффициент μ будем считать постоянным. Для нее удается построить автомодельное решение (в переменных u и $H = h + \eta$) [Гогодзе и др., 1985]:

$$-\alpha(x - ut) = H - (\mu u^2)/(g\alpha) \ln[1 + (g\alpha H)/(\mu u^2)], \quad u = \text{const.} \quad (3.258)$$

На фронте волны имеется корневая особенность $H \sim x^{1/2}$, а с удалением от уреза уровень воды медленно (логарифмически) растет. Хотя данное решение весьма модельно с физической точки зрения (волна бесконечной энергии), оно правильно отражает динамику языка наката и полезно в качестве тестового решения. Более того, оно в каком-то смысле оказывается важным и для проверки правильности выбора диссипативного слагаемого в (3.257). Действительно, для

этой системы не существует автомодельного решения, соответствующего откату волны. Если, однако, принять следующее выражение для силы сопротивления:

$$F = -\mu u |\mu| \begin{cases} 1/H, & H > z_0, \\ 1/z_0, & H < z_0, \end{cases} \quad (3.259)$$

где z_0 — высота шероховатостей донного рельефа, то система (3.256), (3.257) допускает существование автомодельного решения и для отката волны при условии слабости потока:

$$|\mu| < (\alpha g z_0)^{1/2} / \mu. \quad (3.260)$$

При больших скоростях сила трения как бы "отрывает" хвост потока от основной массы воды, стекающей по откосу. Заметим, что модификация (3.259) практически не сказывается на форме автомодельного решения в фазе наката. Конечно, с точки зрения физики, формула (3.259) предпочтительна (не приводит к бесконечной диссипации на подвижном урезе), примечательно, что здесь для его выбора использованы математические аргументы.

Другой класс диссипативных задач может быть рассмотрен в рамках линейного приближения. Доказано, что без диссипации линейная задача приводит к правильным результатам для характеристик заплеска. Применим этот же прием и при учете диссипации, заменив систему (3.256), (3.257) на линейную:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\delta u, \quad (3.261)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (-\alpha x u) = 0, \quad (3.262)$$

где δ — постоянное число, которое будем считать естественно малым. Элементарное решение данной системы, отвечающее накату монохроматической волны на берег, легко находится в явном виде [Мазова и др., 1990]:

$$\eta = R J_0 \left\{ (1 - i\delta/\omega) [(4\omega^2 |x|)/(g\alpha)]^{1/2} \right\} \exp(i\omega t). \quad (3.263)$$

Опуская промежуточные выкладки, полностью эквивалентные приведенным в разд. 3.2, выпишем окончательную формулу для высоты наката:

$$R/H_0 = 2\pi(2L/\lambda)^{1/2} \exp[-\delta(L/g\alpha)^{1/2}]. \quad (3.264)$$

Влияние диссипации привело к появлению экспоненциального фактора, уменьшающего заплеск, особенно на длинных трассах. Поэтому даже в отсутствие обрушения высота заплеска не может превышать определенного значения:

$$R_{\max} = [(2\pi 2^{1/2})/(e\delta)] [(g\alpha)/\lambda]^{1/2} H_0, \quad (3.265)$$

достигаемого на трассе

$$L_* = (g\alpha\lambda)^{1/2}/\delta. \quad (3.266)$$

В частности, при $\delta \sim 10^{-3}c^{-1}$, $\lambda \sim 1$ км, $\alpha \sim 10^{-3}$ из (3.265) получим $R_{\max} \sim 10H_0$. Таким образом, одно только трение может существенно ограничить высоту заплеска волны цунами на берег.

Третья модель учитывает вертикальную структуру водного потока в волнах цунами (см. разд. 2.4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.267)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 u \, dz = 0, \quad (3.268)$$

с граничными условиями

$$u = 0 \quad (z = -h), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (z = 0). \quad (3.269)$$

Аналитическое решение этой системы в случае $h = -\alpha x$ возможно, если

$$v = v_0 h^2 = v_0 \alpha^2 x^2. \quad (3.270)$$

Тогда данная система допускает разделение переменных для монохроматической волны частоты ω :

$$u(x, z, t) = U(x) W(\theta) \exp(i\omega t), \quad \theta = z/h, \quad (3.271)$$

причем вертикальная структура течения остается такой же, как и на ровном дне:

$$W(\theta) = 1 - (\cosh q\theta)/(\cosh q), \quad q = (i\omega/v_0)^{1/2}. \quad (3.272)$$

При этом $U(x)$ и $\eta(x)$ удовлетворяют системе уравнений мелкой воды

$$i\omega U + g \frac{d\eta}{dx} = 0, \quad (3.273)$$

$$i\omega \eta + \alpha p \frac{d}{dx} (xU) = 0 \quad (3.274)$$

с комплексным коэффициентом

$$p = \int_{-1}^0 W(\theta) \, d\theta = 1 - (\tanh q)/q. \quad (3.275)$$

В частности, при $v_0 \rightarrow 0$ получаем $p \rightarrow 1$, и из системы (3.273), (3.274) следуют все "невязкие" результаты, изученные нами в разд. 2.4. В случае произвольного p решение данной системы также находится в бесселевых функциях комплексного аргумента. Опуская промежуточные выкладки, приведем формулу для высоты наката:

$$R/H_0 = [(\pi\omega/\alpha) (h/g |p|)^{1/2}]^{1/2} \exp[-2\omega (h/g |p|)^{1/2} \sin(\varphi/2)], \quad (3.276)$$

где $|p|$ и φ — модуль и аргумент комплексного числа p . Эта формула похожа на (3.264). Тогда можно найти максимальную высоту наката:

$$R_{\max}/H_0 = [\pi/2\alpha e \sin(\varphi/2)]^{1/2}. \quad (3.277)$$

Некоторые другие решения, показывающие влияние вязкости жидкости на характеристики накатающейся волны, представлены в статье [Meyer et al., 1993]. Решения, приведенные выше, могут быть использованы для тестирования соответствующих численных схем, применяемых для расчета волн цунами в прибрежной зоне.

3.3.3. Эффекты дисперсии при накате волн цунами на берег

Критерии подобия. Рассмотрим сначала классическую постановку задачи наката волн цунами на берег в рамках гидродинамики идеальной жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3.278)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -q, \quad (3.279)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.280)$$

с граничными условиями на дне ($z = -h(x)$)

$$w + u \frac{dh}{dx} = 0 \quad (3.281)$$

и на свободной поверхности ($z = \eta(x, t)$)

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad p = p_{atm}. \quad (3.282)$$

Введем безразмерные переменные для случая $h = -\alpha(x)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \eta/R, & \tilde{u} &= \alpha u/\omega R, & \tilde{w} &= w/\omega R, & \tilde{t} &= \omega t, & \tilde{x} &= \alpha x/R, \\ \tilde{z} &= z/R, & \tilde{p} &= p/p_{atm} + \rho g(\eta - z) + \rho \omega^2 R^2 \tilde{p}, \end{aligned} \quad (3.283)$$

где, как и ранее, ω — частота и R — амплитуда волны (или высота наката). В этих переменных исходные уравнения переписываются в виде (тильды опускаем)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{Br} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha^2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3.284)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (3.285)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.286)$$

и граничные условия

$$w = u \quad (z = -x), \quad (3.287)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (z = \eta), \quad (3.288)$$

$$p = 0 \quad (z = \eta), \quad (3.289)$$

где снова возникает параметр обрушения $B_r = \omega^2 R / g \alpha^2$. Как видим, безразмерная система содержит два параметра — кроме знакомого нам параметра B_r , еще и уклон дна α . Уклон α возникает так же, при обезразмеривании уравнений нелинейно-дисперсионной теории, приведенных в разд. 2.1. Именно он и ответствен за проявление дисперсионных эффектов. Из физических соображений ясно, что дисперсия должна быть существенна, если волна проходит очень большие расстояния, что возможно при малых α .

Линейная потенциальная модель. Обсудим сначала роль дисперсии в линейном приближении. В этом случае удобно воспользоваться потенциальной формой уравнений гидродинамики и применить систему полярных координат r и θ с центром на урезе: $\theta = 0$ соответствует свободной поверхности, $\theta = -\alpha$ — положению дна (раньше ввиду малости α не делалось различий между углом и его тангенсом):

$$\Delta \varphi = 0, \quad (3.290)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - kr\varphi = 0 \quad (\theta = 0), \quad (3.291)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad (\theta = 0). \quad (3.292)$$

Свободная поверхность при этом находится из формулы

$$\eta = -(i\omega/g) \varphi \quad (\theta = 0). \quad (3.293)$$

Здесь $k = \omega^2/g$ и ω — частота волны. Структура граничного условия (3.291) такова, что дальнейшее разделение переменных невозможно и именно с этим связаны все трудности нахождения волнового поля у наклонного берега даже в линейной теории. Эти трудности преодолены для дискретного набора углов

$$\alpha = \pi/(2m), \quad (3.294)$$

где m — целое положительное число. Соответствующее решение можно найти, например, в книге *Стокера* (1959):

$$\varphi = \frac{ig}{\omega} A \sum_n^s b_n \{ \exp[-kr \cos(\theta + \alpha + \alpha_n)] \cos[kr \sin(\theta + \alpha + \alpha_n) + a_n] + \exp[-kr \cos(\theta + \alpha - \alpha_n)] \cos[kr \sin(\theta + \alpha - \alpha_n) - a_n] \}. \quad (3.295)$$

Здесь в случае нечетных m ($m = 2s + 1$) сумма начинается с $n = 0$ и $a_n = \pi n / 2$, $\alpha_n = 2n\alpha$, а в случае четных m ($m = 2s$) сумма начинается с $n = 1$ и $a_n = (2n - 1)\pi / 4$, $\alpha_n = (2n - 1)\alpha$. В формуле (3.295) коэффициенты b_n равны

$$b_n = 2 \prod_{j=1}^{s-n} \operatorname{ctg}(j\alpha) \quad (n \neq 0, s), \quad b_s = 2, \quad b_0 = \prod_{j=1}^s \operatorname{ctg}(j\alpha). \quad (3.296)$$

Константа A будет определена позже через начальную амплитуду волны. Нам в первую очередь интересует уровень воды, выражение для которого приобретает вид:

$$\eta = A \sum_n^s b_n \{ \exp[-kx \cos(\alpha + \alpha_n)] \cos[kx \sin(\alpha + \alpha_n) + a_n] + \exp[-kx \cos(\alpha - \alpha_n)] \cos[kx \sin(\alpha - \alpha_n) - a_n] \}. \quad (3.297)$$

Здесь ось x , в отличие от ранее рассмотренных задач, направлена в сторону моря.

Итак, решение (3.297) состоит из незатухающей волны ($n = s$) и затухающих компонент ($n < s$). Вдали от уреза волна описывается асимптотическим выражением

$$\eta = A \cos(kx + a_s), \quad (3.298)$$

причем оно справедливо как для четных, так и нечетных m . Отсюда ясен смысл константы A , она равна $2H_0$ как амплитуда стоячей волны. Тогда высота волны на урезе, которую в рамках линейной теории будем отождествлять с высотой заплеска, находится из (3.297)

$$R/H_0 = 4 \sum_n^s b_n \cos a_n, \quad (3.299)$$

эта формула хорошо аппроксимируется простой зависимостью

$$R/H_0 = 2(\pi/2\alpha)^{1/2}. \quad (3.300)$$

Итак, в отличие от длинных волн, высота наката не зависит ни от длины волны, ни от длины шельфа. Физически это можно объяснить следующим образом. На глубокой воде волна не "чувствует" дна и распространяется без изменений до тех пор, пока глубина не

сравнивается с длиной волны, когда волновой поток начинает "задевать" за дно. Далее волна усиливается, хотя ее длина сокращается (как $h^{1/2}$), но медленнее, чем уменьшающаяся глубина, так что волна становится длинной. Поэтому основное изменение параметров волны происходит на длине $L \sim \lambda/\operatorname{tg}\alpha$, и параметр L/λ , который является определяющим в теории длинных волн, равен, с точностью до константы, $1/\operatorname{tg}\alpha$ или $1/\alpha$ при малых углах, что и приводит к формуле (3.300). Фактически это означает, что формула (3.300) дает предельное значение для высоты наката волны цунами, если, конечно, обрушение не скажется раньше. Итак, мы получаем очень важный результат: процесс наката происходит на стадии длинных волн; здесь можно развивать различные поэтапные подходы, когда в области глубокой воды и в области промежуточных глубин действуют одни асимптотики, которые затем сшиваются с точными решениями нелинейной задачи наката. Но тогда очевидно, что и критерии обрушения волны, приведенные в разд. 3.3.1, остаются справедливыми для волн, приходящих из области любых глубин, а не только для мелководных. В сущности, в экспериментальных условиях они и получались для реальных морских волн, приходящих из зоны больших глубин, развиваемая здесь теория и с этой стороны объясняет, почему в критерии обрушения должны входить только параметры волны на стадии наката, когда волна является мелководной.

Накат солитона на откос, сопряженный с участком ровного дна. Рассмотрим теперь влияние дисперсии на накат уединенной волны на откос, сопряженный с участком ровного дна. При распространении над ровным дном солитон сохраняет свою форму и в этом случае мы можем избежать трудностей нелинейной трансформации волны на подходе к берегу, которые мы уже обсуждали в конце разд. 3.2.4. Солитон является достаточно длинной волной, поэтому на первом этапе естественно ожидать для него справедливости линейной теории мелкой воды на откосе, т. е. считать, что на не слишком пологих откосах нелинейность и дисперсия не успеют повлиять на характеристики наката. Тогда можно воспользоваться формулами линейной теории, приведенными в разд. 3.2.4. В частности, на очень крутых откосах высота наката будет равна удвоенной амплитуде солитона, а на относительно протяженных откосах можно воспользоваться асимптотической формулой (3.293), в которой коэффициент p вычислить по заданной начальной форме солитона. Но некоторые важные выводы можно сделать сразу. Длина солитона зависит от амплитуды, так что с точностью до коэффициентов цитируемая выше формула (3.293) принимает вид

$$R/H = q(H/h)^{1/4} \alpha^{-1/2}, \quad (3.301)$$

а численный коэффициент оказывается равным $q = 2,83$ [Synolakis, 1987]. Итак, в этом случае относительная высота наката является

функцией амплитуды волны, но это не является следствием нелинейности задачи, а только следствием жесткой связи между параметрами солитона. Полученное решение может рассматриваться как базовое, и на следующем шаге необходимо вычислять нелинейные и дисперсионные поправки к нему (при относительно малых отклонениях откоса от вертикальной стенки они вычислены [Jeffrey, Dai, 1988]). В задаче наката солитона на вертикальную стенку (разд. 3.1.1) уже отмечали, что соответствующие поправки относительно малы, это позволяет надеяться на хорошую применимость формулы (3.301). Многочисленные данные лабораторных исследований наката солитона на плоский откос хорошо аппроксимируются формулой

$$R/H = \tilde{q}(H/h)^m, \quad (3.302)$$

где эмпирические коэффициенты равны (при $\alpha > 0,2$)

$$\tilde{q} = 3\alpha^{-0,13}, \quad m = 1,15\alpha^{0,02} - 1. \quad (3.303)$$

Формулы (3.301) и (3.302) близки между собою, так что развиваемая теория правильно учитывает основные характеристики явления. В то же время полного совпадения нет, необходимы специальные исследования, чтобы понять, какие еще факторы здесь являются принципиальными, частично эти вопросы обсуждаются в обстоятельной статье [Zelt, 1991].

Трансформация солитона на плавном откосе. Поскольку линейная теория является недостаточной для описания процесса наката солитона на берег, а учет совместного действия нелинейности и дисперсии в процессе наката волны на берег в рамках точной трехмерной или упрощенной двумерной постановки является трудной задачей, то естественно рассмотреть стадию трансформации солитона на береговом откосе более внимательно. Очевидно, что совместное действие будет наиболее эффективным в случае очень малых уклонов дна, когда отражением можно пренебречь и волна стремится преобразоваться в солитон. Но если глубина меняется медленно, то энергия солитона должна сохраняться (мы доказывали это свойство для солитона малой амплитуды, но оно является очевидным из физических соображений). Энергия волн на воде складывается из кинетической и потенциальной:

$$E = \frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(g\eta^2 + \int_{-h}^{\eta} u^2 dz \right). \quad (3.304)$$

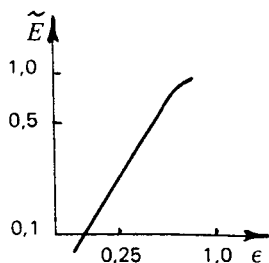
Для солитона малой амплитуды (в приближении уравнения Кортевега — де Вриза) интеграл в (3.304) легко вычисляется

$$E = 1,54\rho g(Hh)^{3/2} \quad (3.305)$$

и из сохранения E находим величину

$$H \sim h^{-1}, \quad (3.306)$$

Рис. 3.14. Зависимость энергии солитона от амплитуды



которую мы уже получали с помощью асимптотической техники в разд. 2.3.2. Для исследования трансформации уединенной волны произвольной амплитуды необходимо знать профиль волны и определить связь между энергией волны и ее высотой — такая задача не имеет аналитического решения. Поэтому здесь используются приближенные методы, связанные с разложением по параметру нелинейности $\epsilon = H/h$ и последующим суммированием на компьютере. Наиболее полные вычисления сделаны *Longuet-Higgins, Fenton*, (1974), см. также [*Buatt-Smith, Longuet-Higgins*, 1976; *Cokelet*, 1977; *Hunter, Vanden-Broeck*, 1983]. Зависимость $\tilde{E} = E/\rho gh^3$ от ϵ , взятая из работы [*Longuet-Higgins, Fenton*, 1974], изображена на рис. 3.14. В диапазоне $0,1 < \epsilon < 0,57$ для нее можно написать простую интерполирующую функцию

$$\tilde{E} = 1,86\epsilon^{1.57}, \quad (3.307)$$

в то время как для солитонов уравнения Кортевега — де Вриза

$$\tilde{E} = 1,54\epsilon^{1.5}. \quad (3.308)$$

Как видим, численные коэффициенты и степени в этих формулах близки между собой, так что описание солитонов в рамках уравнения Кортевега — де Вриза может быть распространено и на случай не малых высот волн. Неожиданным оказалось наличие максимума энергии при значении $\epsilon_* \approx 0,778$, которое меньше максимально допустимого для существования установившихся волн $\epsilon_1 \approx 0,833$ [*Williams*, 1981]. Наличие $\epsilon_* < \epsilon_1$ означает, что устойчивыми могут быть только волны с $\epsilon < \epsilon_*$, при $\epsilon > \epsilon_*$ волна обязательно разрушится, соответствующая теория развивается в работах [*Tanaka*, 1986; *Tanaka et al.*, 1987].

С помощью $\tilde{E}(\epsilon)$ нетрудно рассчитать теперь изменение высоты волны с глубиной. Если при малых ϵ зависимость H от h хорошо описывается (3.306), то при больших ϵ (в диапазоне 0,1—0,57) [*Pelinovsky, Talipova*, 1979]

$$H = H_0(h/h_0)^{-0.91}. \quad (3.309)$$

Наконец, при $\epsilon > 0,57$ высота волны быстро растет, волна достигает предельной формы и в дальнейшем разрушается. Однако при этом абсолютное изменение высоты волны по сравнению с уже достигнутой составляет не более 30 %. Тем не менее этих быстрых изменений достаточно, чтобы компенсировать более медленные изменения при

$0,1 < \epsilon < 0,57$, так что в целом точный закон изменения высоты солитона с глубиной можно считать близким к вытекающему из уравнения Кортевега — де Вриза. В среднем формула (3.306) хорошо описывает многочисленные данные численного и гидромоделирования трансформации солитона на плавном откосе — обсуждение этого вопроса достаточно подробно проводилось в книге [Пелиновский, 1982] и в статье [Synolakis, Skjelbreia, 1993]. При этом надо иметь в виду, что понятие плавности откоса для солитона не является тривиальным (это частично обсуждалось в разд. 3.1.3). Действительно, обычно в это понятие вкладывают "геометрический" смысл, на плавном откосе можно пренебречь отражением и использовать лучевые методы. В линейной теории этого обычно достаточно, чтобы говорить о сохранении формы волны и адиабатическом изменении ее амплитуды. Но для солитона этого недостаточно, поскольку его форма "держится" совместным действием нелинейности и дисперсии и неоднородность должна быть очень плавная. Мы уже использовали это в разд. 2.3.2, когда вводили малый параметр в модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза. Таким образом, условие отсутствия отражения может быть записано в виде

$$\alpha \ll 1, \quad (3.310)$$

а условие адиабатического изменения солитона более жесткое

$$\alpha \ll H/h. \quad (3.311)$$

В первом случае специфика солитона отсутствует, волна изменяется в соответствии с законом Грина $H \sim h^{-1/4}$ (как и волна любой другой формы), во втором — солитон сохраняет свою форму и его амплитуда изменяется в соответствии с (3.306) или (3.309). Более того, очень часто в экспериментальных условиях наблюдается вначале асимптотика типа закона Грина, а затем она сменяется асимптотикой типа (3.306) — экспериментаторы говорят о двух зонах трансформации: *gradual shoaling* (когда работает закон Грина) и *rapid shoaling* (когда справедлива адиабатическая асимптотика для солитона). Объяснение смены асимптотик очень простое, на первом этапе солитон имеет малую амплитуду и условие (3.311) не выполняется, но с возрастанием амплитуды глубина начинает изменяться адиабатически и амплитуда солитона выходит на асимптотику (3.306). Эти же результаты, естественно, получаются при численном моделировании модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза, полученного в разд. 2.1.2, на чем специально останавливаться не будем (см., например, [Егоров, Молотков, 1986, 1993]). Уже это рассмотрение, основанное на асимптотических решениях уравнения Кортевега — де Вриза, имеющих ясный физический смысл, показывает все трудности объяснения данных реальных экспериментов и неоднозначность их влияния.

Оценим теперь глубину океана h_* , на которой начинается разрушение одиночной волны цунами, и высоту волны в момент разру-

шения H_* , считая, что волна, по крайней мере в головной части, остается солитоном. Поскольку разрушению соответствует $\epsilon_* = 0,778$, то из равенства $E(\epsilon_*) = E/\rho gh_*^3$ следует

$$h_* = \left[E_0/\rho g \tilde{E}(\epsilon_*) \right]^{1/3} \sim E\sqrt[3]{}, \quad H_* = \epsilon_* h_* \quad (3.312)$$

Подчеркнем, что зависимость параметров волны при разрушении от энергии цунами сравнительно слабая. Удобно выразить энергию E_0 через высоту и длину начального возмущения, учитывая, что для описания волны цунами в очаге, как правило, справедлива линейная теория. Тогда формула (3.312) принимает вид

$$h_* = 1,15 (h_0 H_0)^{1/2}, \quad H_* = 0,9 (h_0 H_0)^{1/2} \quad (3.313)$$

Принимая $h_0 = 100$ м и $H_0 = 1$ м, получим $h_* = 11,5$ м и $H_* = 9$ м.

И здесь возникают проблемы с аналитическим описанием наката разрушающегося солитона на берег. Если угол откоса мал, то волна должна в среднем сохранять установившуюся форму за исключением вершины гребня. При этом следует ожидать образования в одиночной волне "расплескивающегося" буруна (*spilling*), когда срывается только часть вершины волны, и это подтверждается данными экспериментов. Поскольку разрушается только вершина волны, то характер изменения основной ее части должен оставаться таким же, как и без разрушения. Высота волны при этом не может превышать критического значения $\epsilon_* h$ и должна падать с уменьшением глубины. Сохранение относительной высоты солитона на стадии разрушения по типу *spilling* отмечается многими экспериментаторами (они называют эту зону *gradual decay*, см., например, [Synolakis, Skjebreia, 1993]), однако ее величина все-таки меньше ϵ_* (примерно 0,6).

Этот вывод может быть получен для амплитуды солитона в рамках адиабатического приближения из модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза с учетом квадратичной диссипации (этот тип диссипации обсуждался в разд. 2.4.2), соответствующая формула вытекает из решения уравнения (2.304) того же раздела [Miles, 1983].

Таким образом, получается парадоксальный вывод: одиночные волны имеют самое большое усиление в береговой зоне до обрушения и наиболее быстро теряют свою высоту после разрушения (примерно 80 % максимальной высоты).

На малых глубинах дисперсия "отключается", так как длина волны возрастает (по сравнению с глубиной), ее амплитуда также возрастает. В результате дисперсия не успевает конкурировать с нелинейностью, и волна в этом случае опрокинется. Формирование бора и его накат уже обсуждались выше (разд. 3.3.2).

3.3.4. Модифицированные дисперсионные модели наката волн цунами на берег

Мы уже говорили неоднократно, что нелинейно-дисперсионные модели могут различаться между собою в дисперсионном слагаемом и, это можно использовать для более точного описания волн на воде, возможно, в более широком диапазоне изменения волновых чисел. Такими свойствами, в частности, обладает нелинейно-дисперсионная модель с исправленным дисперсионным соотношением [Алешков, 1987; Madsen et al., 1991]. Однако автору не известны аналитические решения, основанные на этих моделях, поэтому в данной книге они не обсуждаются. Между тем, задача наката на берег волны, приходящей с глубокой воды, является слишком привлекательной, чтобы не попробовать решить ее в рамках упрощенных двумерных моделей. Для этого нам нужны модели с дисперсионным соотношением, хорошо соответствующим волнам как на глубокой воде, так и на мелкой воде. Рассмотрим одну из таких линейных моделей, названную дифференциальной [Пелиновский, 1987; Козлов, Пелиновский, 1989]. Будем стартовать из системы (3.278)–(3.282) в линейном приближении. Интегрируя уравнение (3.280) по глубине с учетом граничных условий (3.281) и (3.282), получаем первое уравнение модели

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hU) = 0, \quad (3.314)$$

где U – средняя скорость волнового потока

$$U = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 u \, dz. \quad (3.315)$$

Интегрируя теперь (3.279) по глубине с учетом граничного условия $p = p_{atm}$, получим

$$p = p_{atm} + \rho g(\eta - z) - \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_z^0 w \, dz \quad (3.316)$$

и, подставив это в (3.278), получим второе уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \int_z^0 \frac{\partial w}{\partial x} \, dz = 0. \quad (3.317)$$

Учитывая, что в потенциальном движении

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (3.318)$$

уравнение (3.317) трансформируется в следующее:

$$\frac{\partial u_{пов}}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (3.319)$$

где $u_{\text{пов}}$ — значения скорости потока на поверхности. Система уравнений (3.314) и (3.319) является незамкнутой, необходимо добавить связь между средним и "поверхностным" значениями скорости волнового потока. При малых углах наклона дна естественно ожидать, что вертикальная структура потока остается такой же, как и на ровном дне, что приводит к следующему соотношению для спектральных компонент:

$$u_{\text{пов}} = \frac{kh}{\tanh kh} U. \quad (3.320)$$

Применяя далее фурье-преобразование, можно найти искомую связь между $U(x, t)$ и $u_{\text{пов}}(x, t)$, но очевидно, что эта связь в общем виде является не дифференциальной, а интегральной. Решение интегродифференциальных уравнений, пожалуй, ничем не проще исходной краевой задачи. Поэтому попытаемся так аппроксимировать дисперсионное соотношение для волн на воде, чтобы интегральный слагаемых не возникало. Простейшей аппроксимацией такого рода является полиномиальное дисперсионное соотношение

$$c^2 k^2 = \omega^2 + \frac{h}{g} \omega^4, \quad (3.321)$$

которое в пределе длинных и коротких волн совпадает с точным, а в промежуточной области отличается от него не более, чем на 11 % (при $kh \sim 1,5$). С учетом этого соотношение (3.320) может быть переписано в виде

$$u_{\text{пов}}(\omega, k) = [1 + (h\omega^2)/g] U(\omega, k), \quad (3.322)$$

что и приводит к искомой связи

$$u_{\text{пов}}(x, t) = \left(1 - \frac{h}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U(x, t). \quad (3.323)$$

В результате получим замкнутую систему уравнений дифференциальной модели (напишем ее для двумерного в плане движения):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}(hU) = 0, \quad (3.324)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \nabla \eta - \frac{h(r)}{g} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} = 0. \quad (3.325)$$

Подчеркнем, что эта модель не может быть обоснована с помощью строгой математической процедуры (иначе мы смогли бы обосновать и полиномиальное дисперсионное соотношение для волн на воде). По существу, подобного рода модели являются феноменологическими (или, лучше сказать, эмпирическими) и их пригодность определяется путем сопоставления с данными натуральных и лабораторных экспериментов или на основании немногочисленных результатов трехмерных расчетов. В качестве одного из тестов может быть выбрана задача

о "линейном" накате волны произвольной длины на плоский откос, рассмотренная в предыдущем разделе (формула (3.300)). Система уравнений (3.324) и (3.325) для монохроматической волны сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2}{dx^2} (hU) + \frac{\omega^2}{g} \left(1 + \frac{\omega^2 h}{g} \right) U = 0, \quad (3.326)$$

его решение при $h = \alpha x$ определяется через функции Кулона. Опущая тривиальные математические выкладки [Козлов, Пелиновский, 1993], приведем сразу окончательную формулу для высоты наката

$$R/H_0 = \{4\pi / [\operatorname{tg} \alpha (1 - \exp(-\pi / \operatorname{tg} \alpha))]\}^{1/2}, \quad (3.327)$$

которая справедлива при любых углах, а не только при (3.294). Сопоставление формул (3.300) и (3.327) показывает, что дифференциальная модель завышает амплитуду наката примерно на 40 % и является довольно грубой. Однако такая точность в инженерной практике не является уж очень плохой, а возможности получения аналитических решений, позволяющих предвосхитить последующие более точные расчеты, являются столь обнадеживающими, что автор надеется на широкое применение данной модели.

Отметим также и другие модели того же плана (с интегрированием по вертикальной координате), с более точным моделированием дисперсионного соотношения, например, получившую большую популярность "рефракционно-дифракционную" модель [Mei, 1989; Jonsson, Skovgaard, 1979; Lozano, Liu, 1980; Radder, Dingemans, 1984; Dingemans, 1993]. Приведем здесь один из выводов данной модели. Будем стартовать из уравнений линейной потенциальной теории

$$\Delta \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (3.328)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi = 0 \quad (z = 0), \quad (3.329)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\nabla h \nabla \varphi \quad (z = -h). \quad (3.330)$$

Рассмотрим также функцию f , удовлетворяющую почти такой же системе уравнений

$$\Delta f + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \quad (3.331)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} f = 0 \quad (z = 0), \quad (3.332)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (z = -h), \quad (3.333)$$

в которой граничное условие (3.333) выбрано как на ровном дне. Ее решение тривиально:

$$f = [\cosh k(h+z)]/(\cosh kh), \quad \omega^2 = gk \tanh kh. \quad (3.334)$$

В случае постоянной глубины можно считать

$$\varphi = -[ig \eta(x, y, t)] \omega^{-1} f, \quad (3.335)$$

хотя смещение водной поверхности при этом есть монохроматическая волна.

$$\eta = a \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (3.336)$$

Рассматривая уравнение Лапласа (3.328) как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной z и применяя формулу Грина для φ и f , с учетом (3.329)–(3.333) получим

$$\int_{-h}^0 (k^2 \varphi f + f \Delta \varphi) dz = - (f \nabla h \nabla \varphi) \Big|_{z=-h}. \quad (3.337)$$

Пока все процедуры были точными. Будем считать теперь, что при малых уклонах дна формула (3.335) остается справедливой для произвольной функции η . Тогда входящие в (3.337) $\nabla \varphi$ и $\Delta \varphi$ равны

$$\nabla \varphi = -\frac{ig}{\omega} \left(f \nabla \eta + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \nabla h \right), \quad (3.338)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{ig}{\omega} \left(f \Delta \eta + 2 \frac{\partial f}{\partial h} \nabla \eta \nabla h + \eta \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} (\nabla h)^2 + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \Delta h \right). \quad (3.339)$$

С учетом этого уравнение (3.337) может быть переписано

$$\begin{aligned} \nabla \int_{-h}^0 f^2 \nabla \eta dz + \int_{-h}^0 k^2 f^2 \eta dz = - \eta (\nabla h)^2 f \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{z=-h} - \\ - \int_{-h}^0 \eta f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} (\nabla h)^2 dz - \int_{-h}^0 \eta f \frac{\partial f}{\partial h} \Delta h dz. \end{aligned} \quad (3.340)$$

Как видим, все члены в правой части этого уравнения пропорциональны малой величине ∇h и могут быть опущены в первом приближении. После интегрирования по глубине оставшееся уравнение принимает окончательный вид:

$$\operatorname{div}(c c_g \nabla \eta) + k^2 c c_g \eta = 0, \quad (3.341)$$

где c и c_g — фазовая и групповая скорости, вычисляемые из точного дисперсионного соотношения. Это уравнение также не содержит вертикальной координаты, и в этом его главное преимущество. С точки зрения асимптотической техники, его вывод также некорректен, как и вывод дифференциальной модели. Но, как уже гово-

рилось, простота расчетов, требуемая в инженерной практике, все искупает, и это уравнение уже нашло широкое применение для расчетов дифракции волн в прибрежной зоне. Аналитические возможности решения уравнения (3.341) в задачах наката волн на берег весьма ограничены, поскольку его коэффициенты — фазовая и групповая скорости — сложным образом зависят от глубины. Можно попытаться, однако, решить его приближенно. Вдали от уреза при малых градиентах дна справедливо лучевое приближение, в одномерном случае получим закон сохранения потока энергии:

$$c_g(x) H^2(x) = c_{g0} H_0^2, \quad (3.342)$$

где индексом 0 обозначены начальные значения этих функций. Этот же закон получается и в рамках точной трехмерной постановки, что обычно приводится как лишний аргумент математической обоснованности рефракционно-дифракционной модели. Вблизи уреза формула (3.342) несправедлива, однако в области малых глубин, где волна длинная, уравнение (3.341) сводится к обычному "правильному" волновому уравнению теории мелкой воды и, следовательно, можно воспользоваться линейной теорией наката волн на берег, в частности формулой (3.285), которую здесь перепишем

$$R/H = 2\pi (2L/\lambda)^{1/2}, \quad (3.343)$$

где H и λ отвечают уже длинной волне вдали от уреза. Их параметры можем связать с начальными формулой (3.342)

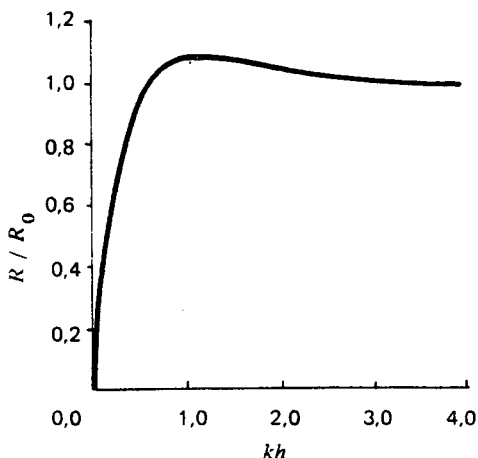
$$[gh(x)]^{1/2} H^2(x) = c_{g0} H_0^2 \quad (3.344)$$

и написать окончательную формулу для высоты наката монохроматической волны, приходящей из области с начальной (произвольной) глубиной h_0 :

$$R/H_0 = [(4\pi\omega c_{g0})/g\alpha]^{1/2}. \quad (3.345)$$

В частности, если волна приходит из области глубокой воды ($c_g = g/2\omega$), из (3.345) немедленно получаем предельную формулу (3.300). Интересным и неожиданным является немонотонная зависимость высоты наката от глубины места, где волна зародилась (рис. 3.15), и максимум наката получается, если волна приходит из области промежуточных глубин ($kh \sim 0,7$), впрочем этот результат обусловлен уже известной в литературе немонотонной зависимостью групповой скорости от глубины при постоянной частоте. Формула (3.345) получена здесь в рамках рефракционно-дифракционной модели (3.341), но, естественно, могла быть получена и без нее, поскольку использован физически правильный закон сохранения потока энергии и "правильная" асимптотически обоснованная теория мелкой воды. Тем не менее мы специально использовали один из вариантов двумерной модели, чтобы показать их потенциальные возможности и в какой-то степени преодолеть предубеждение "чис-

Рис. 3.15. Накат монохроматической волны на плоский откос произвольной глубины h . R_0 определена формулой (3.300)



тых" математиков против не очень-то хорошо обоснованных моделей, применяемых в океанологической практике зачастую из-за невозможности использовать полные модели; ведь одна из целей прикладной математики как раз и состоит в том, чтобы приблизить точные модели к уровню, когда их уже можно решать существующими методами. С другой стороны, здесь возможно использование нелокальных (псевдодифференциальных) операторов, учитывающих точное дисперсионное соотношение для волн на воде, и можно асимптотически строго получить нелокальные аналоги буссинесковского типа для поверхностных волн над неровным дном [Доброхотов, 1987], однако степень разработанности таких "чистых в математическом плане" моделей еще невелика.

3.4. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НАКАТА ВОЛН ЦУНАМИ НА БЕРЕГ

Обсудим несколько приложений развитой теории волн цунами на берег, которые интересны прежде всего постановкой ряда практических новых задач, нуждающихся в физическом и математическом осмыслении, а также сопоставлением с имеющимся фактическим материалом.

3.4.1. Оценки цунамириска и цунамирайонирование

Для проектирования возможного строительства в цунамиопасной зоне и выбора оптимальной стратегии страхования риска и жизни необходимо оценивать цунамириск, т. е. вероятность появления цунами с заданной высотой в течение определенного промежутка времени. Поскольку цунами представляет собой достаточно редкое событие, то описание должно базироваться на методах экстремальной статистики [Гумбель, 1965]. В простейшем случае можно использовать статистику Пуассона, в частности известную

формулу вероятности появления n редких событий за заданный интервал времени T :

$$P_n = [(vT)^n / (n!)] \exp(-vT), \quad (3.346)$$

где v — средняя частота появления события. В практике цунамирайонирования, как и в аналогичной практике сейсмрайонирования, используют вероятность появления хотя бы одного события в заданный промежуток времени (обычно это 100 лет), эта вероятность есть

$$P = 1 - \exp(-vT). \quad (3.347)$$

В теоретическом плане здесь все просто, однако на практике мы сталкиваемся с проблемой нахождения средней частоты появления цунами. Очевидно, что нас интересует не вообще вероятность появления цунами, а вероятность появления цунами определенной разрушительной силы, т. е. необходимо знать функцию $v(R)$. Теория экстремальной статистики подсказывает [Гумбель, 1965], что эта зависимость может быть экспоненциальной или степенной, следовательно из соображений размерности она должна иметь вид

$$v = v_0 f(R/R_0), \quad (3.348)$$

где v_0 и R_0 — два неизвестных параметра с размерностью частоты и высоты. В принципе видны несколько путей решения этой проблемы. Первый из них связан с анализом проявления цунами в заданном месте за достаточно большой срок — именно такая задача и решается в классической статистике экстремальных событий, например, в геофизике, для оценки вероятности появления катастрофических паводков, штормов, ураганов и т. п. К сожалению (и к счастью для населения), статистика цунами не очень-то большая, мы уже указывали во введении, что в этом столетии было около 250 цунами, из них почти 100 разрушительных, их географическое распределение довольно разнообразно. Поэтому для тех пунктов, которым "повезло" с цунами и где случаев наблюдения цунами достаточно много, задача нахождения частоты повторяемости цунами резко упрощается. На рис. 3.16 показан эмпирический график зависимости средней частоты v от высоты наката R для канадского пункта Тофино, где за 1906—1976 гг. имеется 31 запись цунами мареографами [Виген, 1984]. Как видим, эмпирические данные хорошо соответствуют степенному закону в полном соответствии с предсказаниями экстремальной статистики. В инженерной практике оценки цунамириска используют вероятность $P = 0,632$, и предсказываемая за период T высота цунами определяется из формулы

$$v_0 f(R/R_0) T = 1. \quad (3.349)$$

В частности, предсказываемая высота цунами для пос. Тофино на период в 100 лет составляет примерно 3 м, а на период в 200 лет порядка 6 м. Таким образом, задача определения цунамириска в

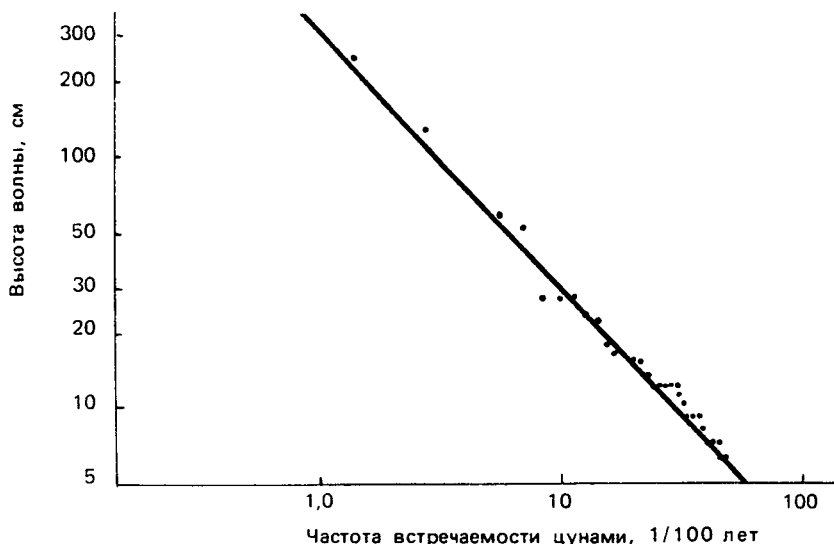


Рис. 3.16. Частота повторяемости цунами для пос. Тофино (Канада)

данном конкретном случае решается без привлечения какой-либо гидродинамической или сейсмологической теории. Но такая ситуация является чрезвычайно редкой. К сожалению, мы не можем набрать статистику цунами не только для конкретного пункта, но и зачастую для большого географического района. Например, в Черном море за последние сто лет отмечено только четыре случая цунами, в Каспийском море — один. А для Израиля известно много случаев цунами (всего 24 события) в Средиземном и Мертвом морях, а также в о. Кинерет [Amiran et al., 1994], но только для одного из них (30 октября 1759 г.) дается количественная информация о высоте цунами в 2–2,5 м. Даже там, где цунами происходят довольно часто, например в Тихом океане, из-за необжитости территорий имеется далеко не полная информация. Рассмотрим, например, ситуацию с оценкой цунамириска для Австралии, где после разрушительного цунами 2 июня 1994 г. серьезно взялись за проблему цунами, в частности, собраны данные об уже прошедших цунами. Как отмечено в [Rypl, 1994], по крайней мере 16 случаев цунами зарегистрированы и на западном, и на восточном побережьях. Данные по восточному побережью см. в табл. 3.1, пункты указаны на карте (рис. 3.17).

Имеющиеся данные использованы для вычисления частоты повторяемости цунами для восточного побережья Австралии [Pelinovsky, 1996], соответствующие значения (рис. 3.18) хорошо аппроксимируются экспоненциальным законом

$$v = 0,07 \exp(-1,48R), \quad (3.350)$$

где v — в 1/год и R в метрах. Отсюда вытекает, что один раз в 100 лет ($v = 0,01$ 1/год) высота цунами превысит 1,3 м. Конечно, это очень усредненная информация и для очень большого региона. Другой пример — полуостров Камчатка, протяженность побережья которого сравнима с протяженностью атлантического побережья всей Европы. Для Камчатки известно не более 20 событий цунами, да и то в некоторых случаях информация очень расплывчатая, например, высота волны в Усть-Камчатске во время цунами 14 апреля 1923 г. была 1–11 м [Го и др., 1986].

Таблица 3.1

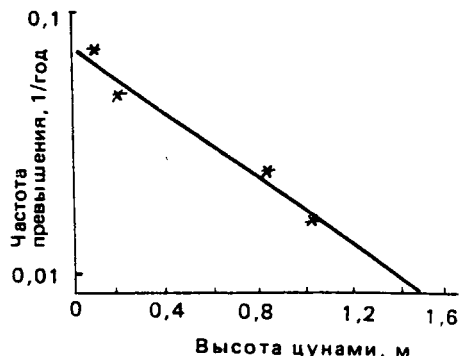
Цунами на восточном побережье Австралии

№	Дата	Район	Высота волны, м
1	13.08.1886	Ньюкастл, Сидней, Аделаида	1
2	10.05.1887	Брисбен, Ньюкастл, Сидней	0,5–1
3	10.11.1922	Сидней	0,2
4	26.06.1924	Сидней	0,1
5	17.06.1929	Сидней	0,1
6	03.02.1931	Сидней	0,2
7	22.05.1960	Брисбен, Ньюкастл, Сидней	1–2
8	21.04.1977	Таунсвилл, Брисбен	0,1
9	23.05.1989	Сидней — Хобарт	0,2



Рис. 3.17. Пункты на восточном побережье Австралии, где зафиксированы волны цунами

Рис. 3.18. Частота повторяемости цунами для восточного побережья Австралии



Во всех перечисленных ситуациях необходимо привлечение теоретических идей, позволяющих использовать небольшой (но надежный) эмпирический материал для расчетов цунамириска в районах, для которых информации явно недостаточно. Такие идеи разрабатываются с использованием гидродинамических и стохастических моделей [Go et al., 1985; Nakamura, 1987; Го и др., 1988].

Опишем здесь один из путей решения этой проблемы для цунами, генерируемых подводными землетрясениями (главном на сегодняшний день источнике цунами). В этом случае районирование по степени цунамиопасности и оценка цунамириска включают в себя широкий комплекс проблем: сейсморайонирование океанов и морей (выделение сейсмоактивных зон, определение повторяемости землетрясений и т. д.); нахождение гидродинамических характеристик очагов цунами (поле смещений водной поверхности и скоростей частиц воды); расчеты движения волн цунами в океане с реальной батиметрией с учетом нелинейности, дисперсии и диссипации; оценка интенсивности проявления волн цунами на берегу. В этом случае гидродинамическая теория становится важным компонентом проблемы оценки цунамиопасности. На первом этапе нам важен главный результат гидродинамической теории: батиметрия является основным источником изменчивости проявлений цунами на побережье, в открытом океане их характеристики должны изменяться более плавным образом. В частности, параметр ν_0 в (3.348), характеризующий, по существу, частоту появления цунамигенных землетрясений, является одинаковым как для побережья, так и для открытого океана.

Следовательно, частота повторяемости цунами в открытом океане подобно (3.348) выражается в виде

$$\nu = \nu_0 f(H/H_0), \quad (3.351)$$

где средняя высота цунами в открытом океане H_0 должна быть плавной функцией координат (как и ν_0) и фактически постоянной для больших географических районов (например, для Камчатки или Курильских островов). Однако данных о параметрах цунами в открытом океане явно недостаточно, чтобы судить о величинах ν_0 и H_0 . С другой стороны, гидродинамика позволяет нам связать пара-

метры цунами на берегу и в открытом океане, т. е. найти "передаточную" функцию, которую условно назовем K :

$$R = KH. \quad (3.352)$$

Конечно, величина K зависит от многих параметров, но и здесь гидродинамика позволяет нам высказать ряд предположений о ее величине. В частности, в среднем цунами набегает на берег без обрушения, а в этом случае нелинейная и линейная теории дают одинаковые результаты при вычислении максимальных характеристик наката (см. разд. 3.2), так что грубо можно считать K не зависящим от амплитуды волны цунами и рассчитывать его по линейной теории. Кроме того, зона наиболее опасных очагов цунами для каждого региона обычно известна, в частности, тихоокеанское побережье России страдает главным образом от цунами, зародившихся в Курило-Камчатском желобе, на расстоянии примерно 100 км от берега (рис. 3.19). Примерно ясен и размер очага, связанный с магнитудой землетрясения. С другой стороны, зависимость от длины волны (размера очага) в формулах для наката на плоский откос не очень-то и сильная (корневая). Таким образом, в качестве первого шага естественно выбрать линейную модель мелкой воды и "спрямить" геометрию прибрежной зоны для расчета передаточного коэффициента K . Тем самым получим окончательную формулу для средней частоты появления цунами в заданном пункте побережья



Рис. 3.19. Зона очагов цунами на Дальнем Востоке России

$$v = v_0 f(R/(KH_0)), \quad (3.353)$$

в которой нам по-прежнему не известны два параметра. Но теперь можно использовать натурные данные о проявлениях цунами для большого региона, малость данных для отдельного пункта (скажем, порядка пяти случаев) компенсируется большим числом пунктов (десять — двадцать). В результате, можно определить искомые два параметра. Такая работа проведена для тихоокеанского побережья России [Го и др., 1986, 1988], она подтвердила слабую изменчивость параметров v_0 и H_0 в пределах нескольких тысяч километров. Более того, она позволила дать оценки цунамириска для тех пунктов, где цунами вообще не наблюдалось (в большинстве случаев из-за необжитости этих районов). Оценки возможных высот цунами на период в 100 лет для ряда пунктов Тихоокеанского побережья России сведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Прогноз высот цунами на 100 лет
для ряда пунктов Дальнего Востока России

Пункт	Высота волны, м
о. Беринга (Командорские о-ва)	8,0
Усть-Камчатск	10,0
Петропавловск	2,5
Северо-Курильск (о. Парамушир)	18,0
о. Симушир	8,5
Курильск (о. Итуруп)	1,0
Буревестник (о. Итуруп)	7,5
Южно-Курильск (о. Кунашир)	4,5
Малокурильское (о. Шикотан)	7,0
б. Церковная (о. Шикотан)	13,0
Невельск (Сахалин)	1,0
Корсаков (Сахалин)	2,0
Владивосток	1,0

Таким образом, гидродинамическая теория позволила объединить весьма разнородные данные наблюдений, повысить точность предсказаний для тех пунктов, где данных было мало, и дать прогноз для освоения новых территорий. Конечно, это только первый шаг, и мы рассматриваем полученную схему цунамирайонирования как предварительную с масштабом усреднения более 10 км, так что многие реальные заливы и бухты "пропали" при таком анализе. Следующий шаг — отталкиваясь от данной схемы, провести расчеты передаточного коэффициента с более мелким масштабом (и, что важно, уже не от очага, а от изобаты в двадцать — тридцать метров)

в рамках более точной нелинейно-дисперсионной теории. Такое детальное цунамирайонирование уже проделано для ряда пунктов Дальнего Востока, в частности, для тихоокеанского побережья Камчатки [Карев и др., 1990], и мы не будем здесь на этом останавливаться.

3.4.2. Оценка характеристик цунами в открытом океане

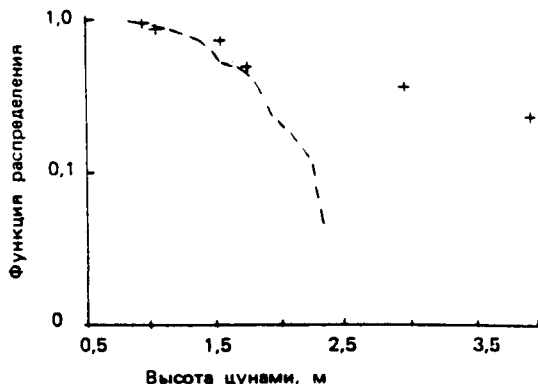
Выше уже говорилось, что изменчивость характеристик цунами в открытом океане должна быть относительно слабой по сравнению с изменчивостью в прибрежной зоне. Эти свойства проявляются во всех численных моделях цунами. К сожалению, экспериментальных данных в подтверждение этому получить не удастся, и ясно, что долго еще не удастся. Тем не менее, автор всегда хотел получить хотя бы косвенные данные в поддержку этой естественной гипотезы, и, по счастливой случайности, такая возможность представилась при анализе и интерпретации реальных данных, получаемых в ходе международных экспедиций за цунами. Работая в качестве приглашенного профессора в Сеульском национальном университете, я фактически напросился в экспедицию, организованную профессором Чоём сразу же после землетрясения (магнитуда 7,6) и цунами



Рис. 3.20. Положение очага Окусирского цунами 12 июля 1993 г.

Рис. 3.21. Функция распределения цунами на побережье Кореи:

— — — — 12 июля 1993 г.,
 + + + + 26 мая 1983 г.



12 июля 1993 г. в Японском море к западу от о. Хоккайдо (рис. 3.20), всего погибло 200 человек. Наибольший ущерб цунами нанесло о. Окусири, где высота волны достигла рекордной отметки в 30 м, поэтому его называют Окусиридским. Наша экспедиция уже на пятый день после цунами за короткий срок обследовала восточное побережье Кореи и измерила высоты волн в 27 пунктах, а также собрала свидетельства очевидцев [Choi et al., 1994a]. На побережье Кореи цунами было достаточно слабым и высота волны изменялась в пределах 0,8–2,6 м. В этом диапазоне интегральная функция распределения высот цунами на берегу (функция превышения уровня или функция обеспеченности) может быть представлена линейной регрессией

$$P = 1,65 - 0,69R, \quad (3.354)$$

где R — в метрах. В прошлом побережье Кореи также подвергалось атакам волн цунами. В частности, почти аналогичное цунами, зародившееся южнее, у северной оконечности побережья о. Хонсю при землетрясении 26 мая 1983 г. с магнитудой 7,7, принесло разрушения на побережье Кореи, и два человека погибло (оба цунами, 26 мая 1983 г. и 12 июля 1993 г., проявились также на дальневосточном побережье России, обсудим это несколько дальше). Было интересно сопоставить данные этих двух цунами и понять причину таких сильных различий [Choi et al., 1994b]. В частности, интегральная функция распределения высот волн цунами на побережье Кореи во время цунами 26 мая 1983 г. в диапазоне 0,9–4 м хорошо аппроксимируется экспоненциальной асимптотикой

$$P = 1,37 \exp(-0,44R). \quad (3.355)$$

Сопоставление этих кривых показано на рис. 3.21. Эти распределения должны объясняться в ходе численных экспериментов. Здесь хотелось бы остановиться на вопросе взаимосвязи характеристик цунами в открытом море и на побережье. Предполагая береговую линию и изобаты прямолинейными, наклон шельфа постоянным, в

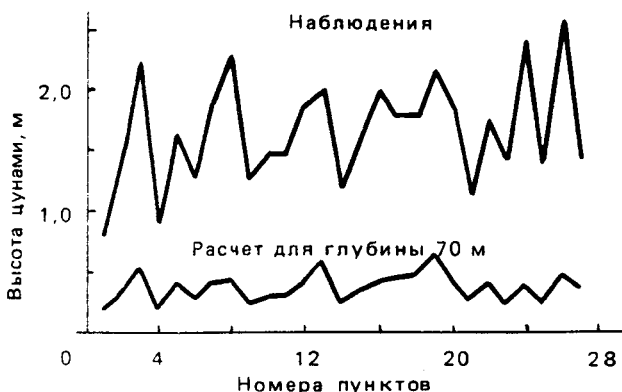


Рис. 3.22. Распределение высот цунами на побережье Кореи

качестве первого приближения воспользуемся формулой (3.158) этой части с коэффициентом $\rho = 5$ (это значение было использовано в схемах цунамирайонирования тихоокеанского побережья России):

$$R/H = 5(L/\lambda)^{1/2}. \quad (3.356)$$

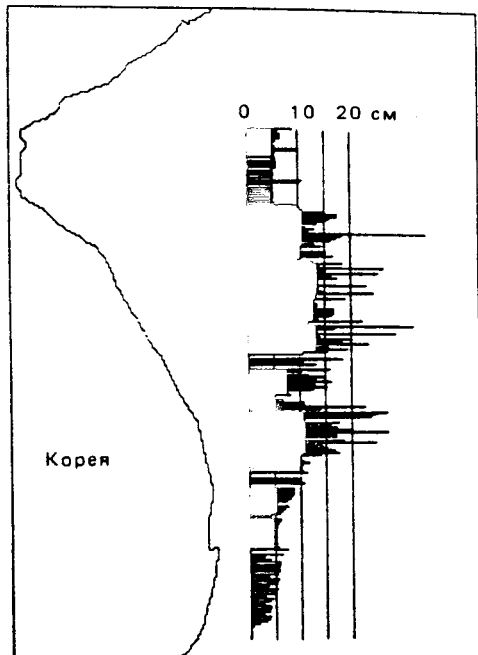
Мы выбрали изобату в 70 м как характеристику открытой части моря и период волны в 4 мин (по мареограмме). В результате, используя измеренные высоты заплеска R и удаленность 70-метровой изобаты от берега L (по батиметрическим картам), можно вычислить высоту волны в открытом море H . Данные вычислений по 27 пунктам представлены на рис. 3.22, из которого можно видеть, что амплитуда волны в открытом море изменяется более гладко (в пределах 20–60 см), что и ожидалось согласно теоретическим представлениям. Более того, интегральная функция распределения высот цунами в открытом море имеет экспоненциальную асимптотику

$$P = 7 \exp(-8,2H), \quad (3.357)$$

что также свидетельствует о большей однородности высот волн в открытом море. Конечно, это весьма грубые оценки, нуждающиеся в проверке с помощью математической модели. Такие расчеты выполнены моими корейскими коллегами и представлены в нашей совместной статье [Choi et al., 1994b]. Движение волны цунами через Японское море описывалось в рамках линейной теории мелкой воды с учетом сферичности Земли, в прибрежной зоне — в рамках нелинейно-дисперсионной теории с учетом квадратичного трения. Расчеты производились с помощью комплекса программ TIME (Tsunami Inundation Modelling Exchange), позволяющего, по существу, снимать видеофильм о движении волны цунами. Распреде-

Рис. 3.23. Высоты цунами на побережье Кореи, полученные в ходе численного моделирования

ние высот волн цунами вдоль побережья (без учета эффекта наката), полученное в ходе численного моделирования, представлено на рис. 3.23. Высота волны на подходе к берегу изменяется в пределах 10–30 см, что примерно в два раза меньше, чем полученное нами для изобаты 70 м из простой одномерной теории наката. Характер распределения высот волн вдоль побережья оказывается одинаковым в математической модели и по данным наблюдениям, а имеющиеся различия могут быть связаны с недостаточной точностью описания очага цунами.



Приведем также данные о высотах волн цунами в Приморском крае, зарегистрированные во время событий 12 июля 1993 г. и 26 мая 1983 г. (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Высоты заплесков (в метрах) на побережье Приморского края во время последних цунами в Японском море

Пункт	12.07.1993 г.	26.05.1983 г.
Находка	1,5	2,0
б. Ольга	1,5	2,0
б. Преображения	1,2	1,2
б. Валентина	4,0	3,0
Рудная Пристань	3,8	4,8
Каменка	2,8	5,0

Итак, приведенные выше результаты, основанные на простой аналитической теории и численном моделировании, подтверждают вывод об однородности характеристик цунами в открытом океане и ее сильной изменчивости в прибрежной зоне. Кроме того, они

показывают правомочность простых одномерных оценок высот цунами в море на основе решения обратной задачи теории наката.

3.4.3. Влияние нелинейности и дисперсии на воздействие цунами на берега и сооружения

Расчет воздействия волн цунами на берега и сооружения является важным и необходимым элементом анализа катастрофичности последствий цунами, такой анализ с инженерной точки зрения выполнен в [Кульмач, Филиппенок, 1984]. На его основе может быть оценена эффективность уже имеющихся защитных сооружений (дамб, волноломов) с целью ослабления волн цунами. Более того, в Японии для защиты зал. Офунато от цунами после разрушительного Чилийского цунами 1960 г. было начато строительство специальных молов на входе в залив (общая длина молов 740 м, при оставшейся ширине входа в залив около 200 м), способных противостоять волнам цунами до 6 м. Построенные в 1967 г., они продемонстрировали свою эффективность при цунами 16 мая 1968 г., снизив высоту волны в два раза (как показали специальные расчеты).

Не будем касаться специфических задач защиты от волн цунами, упомянем лишь те из них, где развиваемая в книге нелинейно-дисперсионная модель волн цунами оказывается эффективной. Рассмотрим, например, воздействие волны цунами на вертикальную стенку, частично эта задача (с точки зрения высоты наката) уже обсуждалась в разд. 3.1.1. До сих пор не использовалось выражение для давления, полученного в рамках нелинейно-дисперсионной теории, формула (2.14), которую здесь воспроизводим:

$$p = p_a + \rho g(\eta - z) + 2^{-1} \rho [z^2 + 2h(z - \eta) - \eta^2] W - \rho(\eta - z) Q. \quad (3.358)$$

Входящие сюда W и Q определены в том же разделе и здесь также воспроизводятся:

$$W = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u + (u \nabla) \operatorname{div} u - (\operatorname{div} u)^2, \quad (3.359)$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial t} \nabla h + (u \nabla) (u \nabla h). \quad (3.360)$$

Особый интерес для нас представляет негидростатическая часть давления p , показывающая влияние дисперсии (в общем случае нелинейной дисперсии). Для начала рассмотрим волну цунами на шельфе постоянной глубины и вычислим поправку к давлению на дно:

$$\tilde{p} = -\frac{1}{2} \rho (h^2 + 2h\eta + \eta^2) \left[\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u + (u \nabla) \operatorname{div} u - (\operatorname{div} u)^2 \right]. \quad (3.361)$$

В приближении волн малой амплитуды эта формула упрощается:

$$\tilde{p} = -\frac{1}{2} \rho h^2 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u. \quad (3.362)$$

Итак, в приближении малой амплитуды негидростатическая поправка к давлению, естественно, пропорциональна амплитуде волны и зависит от частоты волны. В случае плоской бегущей волны формула (3.362) может быть еще раз упрощена:

$$\tilde{p} = \frac{1}{2} \rho g h^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \quad (3.363)$$

Если падающая волна представляет собой одиночное возвышение (горб), то в максимуме волны поправка (3.363) отрицательна и стремится уменьшить гидростатическую часть давления. Еще более этот эффект заметен для волн большой амплитуды. На рис. 3.24 представлены результаты численных расчетов воздействия солитона на вертикальную стенку, полученные в рамках нелинейно-дисперсионной теории [Железняк, 1985]. Как видим, хронограмма возвышения свободной поверхности на стенке является всегда одnogорбой, а хронограмма давления при больших амплитудах приобретает значительный провал, и использование гидростатики приведет к большим величинам, а следовательно, и к значительному удорожанию строительства цунамизащитной стенки. Аналогичные результаты получаются при вычислении силы динамического воздействия на вертикальную стенку

$$F = \rho g (h + \eta)^2 \{ 2^{-1} [(1 + \eta/h)^2 - 1] - 3^{-1} (1 + \eta/h)^3 [(h + \eta) W/g] \} \quad (3.364)$$

и опрокидывающего момента относительно ее подошвы

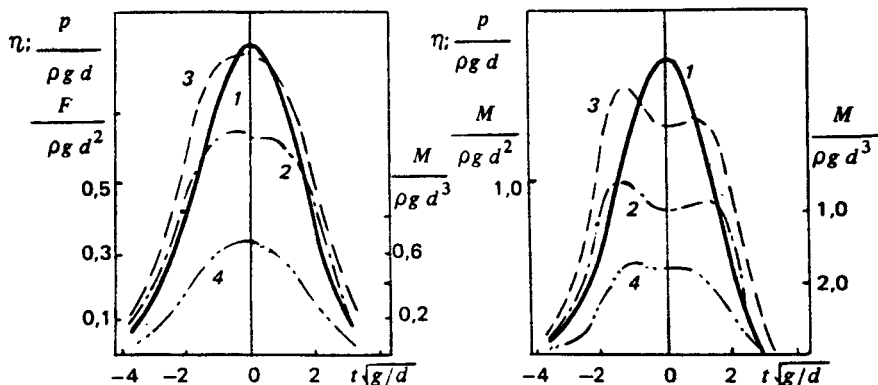


Рис. 3.24. Высота волны (1), давление (2), сила (3) и опрокидывающий момент (4) на вертикальную стенку при $H/h = 0,4$ (а), $H/h = 0,7$ (б)

$$M = \rho g (h + \eta)^3 \{ 6^{-1} [(1 + \eta/h)^3 - 1] - 8^{-1} (1 + \eta/h)^4 [(h + \eta) W/g] \}, \quad (3.365)$$

на чем специально останавливаться не будем. Таким образом, учет дисперсионных поправок в задачах силового воздействия цунами на берега и сооружения является принципиальным, здесь нелинейно-дисперсионная теория позволяет упростить соответствующие вычисления.

Другой важный класс задач связан с воздействием волн цунами на морское дно и берега. Обусловленные этим размывы зачастую бывают более опасными для сооружений, чем лобовой удар, и автор встречался с такими случаями при анализе катастрофического цунами на о. Сулавеси (Индонезия) 1 января 1996 г. Для учета воздействия волн на морское дно необходимо включить в теоретическую модель уравнение баланса наносов, имеющего вид уравнения сохранения концентрации седиментного вещества

$$(1 - n_p) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \text{div} q = 0, \quad (3.366)$$

где z_b — вертикальное смещение (толщина) донного слоя осадков, отсчитываемое от невозмущенного профиля h_0 (рис. 3.25), n_p — пористость морских осадков и q — удельный поток транспорта наносов. Для замыкания модели необходимо задать связь удельного потока транспорта наносов с волновыми характеристиками. Эта часть, однако, является наиболее сложной, и проблема перемещения песка в турбулентном нестационарном потоке над неровным размываемым дном еще далека от решения. Многочисленные лабораторные эксперименты позволили определить характеристики размыва в стационарных одномерных течениях, так частицы мелкозернистого песка (диаметр 0,2 мм) начинают трогаться при скоростях потока примерно 40 см/с. Что же касается волновых потоков, то здесь существует большой "разнобой", и коллекция различных эмпирических формул приводится в книге [Sleath, 1984]. В волне при прочих равных условиях напряжения существенно выше и критическая скорость трогания частиц уменьшается примерно до 5–10 см/с (для мелкозернистого песка). Правда, эти результаты относятся к высо-

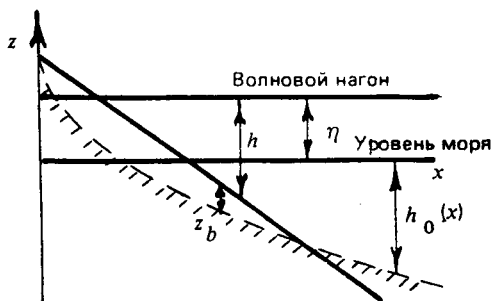


Рис. 3.25. Геометрия задачи

кочастотным волнам с периодом несколько секунд и непосредственно к волнам цунами они применяться не могут. Ввиду отсутствия подходящих аппроксимаций в первом приближении можно воспользоваться имеющимися формулами для ветровых волн как оценками "сверху" для транспорта наносов. Наиболее распространенной аппроксимацией для мгновенного значения удельного потока транспорта наносов является формула Байларда [Baillard, 1981; Baillard, Inman, 1981]

$$q = (c_f \varepsilon_b) [(\rho_s/\rho - 1) g \operatorname{tg}\varphi]^{-1} |u|^2 u, \quad (3.367)$$

где u — мгновенное значение орбитальной скорости вблизи дна (выше придонного пограничного слоя), $c_f = 0,01$ — коэффициент сопротивления дна, $\varepsilon_b = 0,13$ — эффективный фактор, φ — внутренний угол трения ($\operatorname{tg}\varphi = 0,78$) и $\rho_s/\rho = 2,64$ — относительная плотность мелкозернистого песка. С использованием этой аппроксимации система уравнений для волн и глубины бассейна становится замкнутой. Добавочное уравнение (3.366) является нелинейным, и из него видно, что влияние волн на изменение морского дна является существенным для волн большой амплитуды.

Сделаем сначала оценку вариаций морского дна в поле заданной бегущей длинной волны. В этом случае уравнение (3.366) легко решается

$$(\delta h)/h = (c_f \varepsilon_b) [(1 - n_p) (\rho_s/\rho - 1) \operatorname{tg}\varphi]^{-1} (H/h)^3 \quad (3.368)$$

и коэффициент пропорциональности в (3.368) равен 0,002 для мелкозернистого песка. Отсюда видно, что вариации глубины в прибрежной зоне внутри одного волнового цикла очень малы и эффект может накопиться за достаточно долгое время при буре (поэтому для ветровых волн используются усредненные по периоду волны выражения для потока транспорта наносов). При волнах цунами обычно не бывает такого количества волн, как при штормах, поэтому дно вряд ли перестраивается под действием цунами (мы не обсуждаем здесь проблему близких цунами, когда само землетрясение происходит в прибрежной зоне). В то же время на побережье может выбрасываться значительное количество песка. Полный поток песка на берег в случае наката одиночной волны (на единицу длины береговой линии) есть

$$Q = (c_f \varepsilon_b) [(\rho_s/\rho - 1) g \operatorname{tg}\varphi]^{-1} U^3 T, \quad (3.369)$$

где U — амплитуда скорости потока в волне цунами и T — длительность волны цунами. Если это количество песка равномерно рассыпается на побережье шириной L , то толщина слоя песка будет [Pelinovsky, Talipova, 1994]

$$\delta = Q/L. \quad (3.370)$$

В частности, для волнового потока со скоростью 1 м/с в течение

20 мин на побережье шириной 100 м толщина слоя песка может достигать 1 см. Разумеется, это грубые оценки, необходимы специальные численные эксперименты.

Описанный здесь эффект засыпания побережья морским песком во время цунами неоднократно наблюдался в Индонезии при обследовании побережья после цунами. В центральной части Индонезии пониженная штормовая активность и следы цунами сохраняются достаточно долго и не маскируются намывами во время штормов. Автор располагает фотографиями таких участков на о. Яве (цунами 2 июня 1994 г.) и на о. Сулавеси (цунами 1 января 1996 г.). Поиск таких участков может оказаться весьма полезным при идентификации древних цунами (палеоцунами). Следы слоев, состоящих из морского песка, погребенных более свежими наслоениями, обнаружены в Японии [Minoura, Nakaya, 1991], США [Atwater, Moore, 1992], а сейчас и у нас на Камчатке и на Курильских островах.

Воздействие цунами на побережье (его заносимость и размывы) ведет к изменению рельефа местности. Естественно считать, что сильные волны приводят к сглаживанию рельефа. В частности, материалы обследования цунами 4 ноября 1952 г. на о. Парамушир показали, что почва местами смыта на глубину до 1,5 м, так что ранее врытые в землю двухметровые бетонные доты после цунами были почти полностью обнажены. Изменения структурных характеристик рельефа наблюдались и в других местах вблизи г. Северо-Курильска, наиболее пострадавшего во время этого цунами. В работе [Иванов, Симонов, 1983] выполнено сравнение различных рельефов побережья как в зоне затопления, так и вне ее. Анализ показал, что средний радиус корреляции рельефа в зоне затопления примерно в 5 раз больше, чем на незатопленных территориях, а среднеквадратичная высота неровностей рельефа соответственно в 4 раза меньше. Интересно получить такие же сведения для других регионов, чтобы исключить влияние естественных различий в рельефах приурезовой и более удаленной местности.

3.4.4. Воздействие цунами на динамику примесей в прибрежной зоне

Рассмотрим динамику примесей в прибрежной зоне под действием волны цунами, такие задачи чрезвычайно важны для предсказания экологических последствий стихийных бедствий. Методы вычисления концентрации примесей и других загрязняющих веществ хорошо известны. Они базируются на уравнении диффузии для концентрации примесей или на стохастических уравнениях для координат трассеров (маркеров) с последующим усреднением их плотностей. Главное экологическое применение таких уравнений связано с расчетом диффузии примесей от локальных источников, моделирующих источники загрязнений. Здесь обсудим другой ас-

пект проблемы, на наш взгляд более актуальный для проблемы цунами, а именно, влияние динамики волн цунами на уже сформировавшееся поле примесей.

Будем исходить из трехмерного диффузионного уравнения без учета растворимости примеси

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(cu) + \frac{\partial}{\partial z}(cw) = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \operatorname{div}(K_h \nabla c), \quad (3.371)$$

где c — концентрация примесей, а K_z и K_h — коэффициенты вертикальной и горизонтальной диффузии, которые могут быть произвольными функциями координат. Здесь, как и ранее, операторы div и ∇ действуют в горизонтальной плоскости.

Интегрируя уравнение (3.371) по глубине от дна $z = -h(x, y)$ до свободной поверхности $z = \eta(x, y, t)$ и используя кинематические граничные условия (они приводились в разд. 1.1.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_h^\eta c \, dz + \operatorname{div} \int_{-h}^\eta cu \, dz = \operatorname{div} \int_{-h}^\eta K_h \nabla c \, dz + F, \quad (3.372)$$

где

$$F = \left[K_z \frac{\partial c}{\partial z} - K_h \nabla c \times \nabla \eta \right] \Big|_{z=\eta} - \left[K_z \frac{\partial c}{\partial z} - K_h \nabla c \times \nabla H \right] \Big|_{z=-h} \quad (3.373)$$

представляет собой поток примеси через морскую поверхность и дно. Уравнение (3.372) является точным. Поскольку волны цунами являются длинными, можно использовать однородность потока по глубине, что позволяет преобразовать второй член в (3.372):

$$\int_{-h}^\eta cu \, dz = u \int_{-h}^\eta c \, dz \quad (3.374)$$

и ввести усредненный коэффициент горизонтальной диффузии μ

$$\int_{-h}^\eta K_h \nabla c \, dz = \mu(x, y) \nabla \int_{-h}^\eta c \, dz. \quad (3.375)$$

В результате для интегральной по глубине характеристики (двумерной концентрации примеси)

$$G(x, y, t) = \int_{-h}^\eta c \, dz \quad (3.376)$$

получается уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \operatorname{div}(Gu) = \operatorname{div}(\mu \nabla G) + F, \quad (3.377)$$

которое описывает влияние волн цунами (и других баротропных движений) на концентрацию примесей в прибрежной зоне. Подчеркнем, что уравнение (3.377) справедливо при произвольной амплитуде волны.

Рассмотрим вначале простейшую ситуацию, когда поток примеси отсутствует и $\mu = \text{const}$. Если к тому же в начальный момент времени $G(x, y, t_0 = 0) = G_0 = \text{const}$, то масштабы изменения поля примесей будут определяться только характеристиками волн, и в этом случае легко показать, что диффузионные эффекты будут слабыми (их временной масштаб обычно исчисляется часами). В результате уравнение (3.377) сводится к простому уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \text{div}(Gu) = 0, \quad (3.378)$$

совпадающему с уравнением для полной глубины в уравнении неразрывности в рамках как нелинейной теории мелкой воды, так и в рамках нелинейно-дисперсионной теории. Поэтому в рамках данных приближений получим инвариантное соотношение

$$G \sim h + \eta, \quad (3.379)$$

справедливое вдоль траектории жидких частиц. Физический смысл (3.379) очевиден: примесь "вморожена" в гидродинамическое поле и распространяется вместе с ней. На практике, однако, использование инварианта (3.379) затруднительно, поскольку расчеты концентрации обычно производятся в эйлеровых координатах. Дадим здесь несколько точных решений уравнения (3.378), демонстрирующих влияние волн на вариации примесей.

Первый пример связан с распространением бегущей длинной волны в бассейне постоянной глубины, когда для волны можно использовать линейное приближение

$$\eta = a \sin(kx - \omega t), \quad \omega = ck, \quad c = (gh)^{1/2}, \quad u = (g/h)^{1/2} \eta. \quad (3.380)$$

Точное решение уравнения (3.378) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} G/G_0 = & (1 - \varepsilon^2) / [1 - \varepsilon (1 - \cos \beta \omega t) \sin(kx - \omega t) + \\ & + \sin \beta \omega t \cos(kx - \omega t) - \varepsilon^2 \cos \beta \omega t], \end{aligned} \quad (3.381)$$

где $\varepsilon = a/h$ и $\beta = (1 - \varepsilon^2)^{1/2}$. Видно, что изменение концентрации примесей для каждой фиксированной фазы волны происходит периодически, причем период изменения концентрации в $1/\beta$ больше периода длинной волны. На рис. 3.26 приведено распределение концентрации примеси вдоль длинной монохроматической волны. Оно несимметрично с ярко выраженным максимумом над гребнем волны. Максимальный перепад концентрации достигает

$$G/G_0 = 4\varepsilon/\beta^2 \quad (3.382)$$

Рис. 3.26. Распределение концентрации примесей вдоль бегущей волны

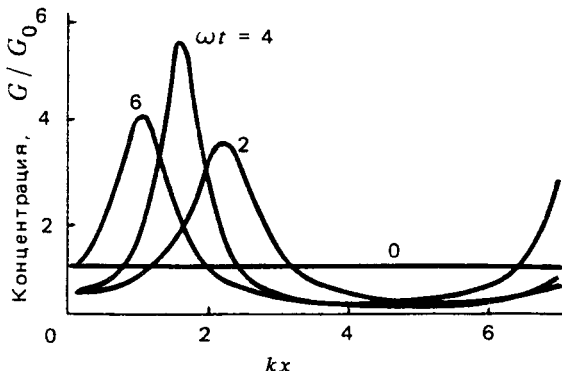
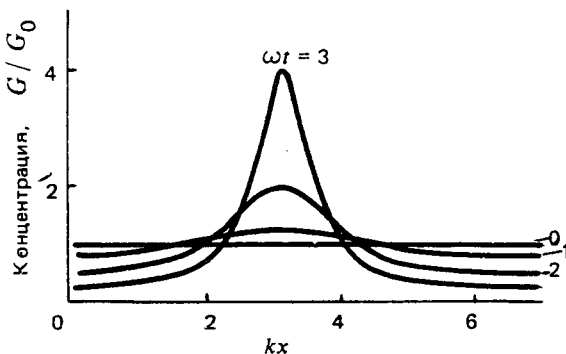


Рис. 3.27. Распределение концентрации примесей вдоль стоячей волны



и может быть весьма значительным в волнах на мелководье, когда $\varepsilon \rightarrow 1$, а $\beta \rightarrow 0$. Следует, правда, отметить, что волны большой амплитуды несинусоидальны, поэтому формула (3.381) имеет оценочный характер.

Другой пример, более интересный для проблемы цунами, связан со стоячими волнами, возникающими при отражении цунами от берега и шельфа. Представляя волну в виде

$$\eta = a \cos kx \cos \omega t, \quad (3.383)$$

находим точное решение (3.381)

$$G/G_0 = \{ \cosh[2\varepsilon \sin^2(\omega t/2)] + \cos kx \sinh[2\varepsilon \sin^2(\omega t/2)] \}^{-1}. \quad (3.384)$$

Концентрация достигает своего максимального значения в пучности волны (рис. 3.27):

$$G_{\max}/G_0 = \exp(2\varepsilon). \quad (3.385)$$

Сравнивая (3.382) и (3.385), видим, что максимум изменения концен-

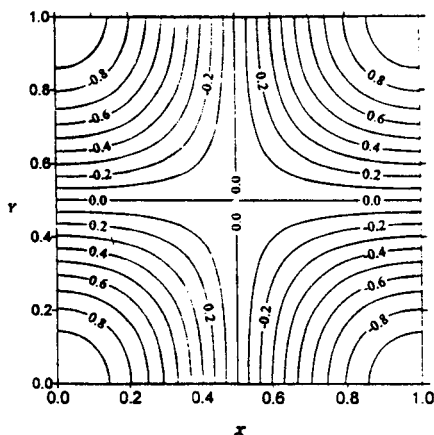


Рис. 3.28. Распределение концентрации в поле первой моды колебаний. Однородное начальное распределение.

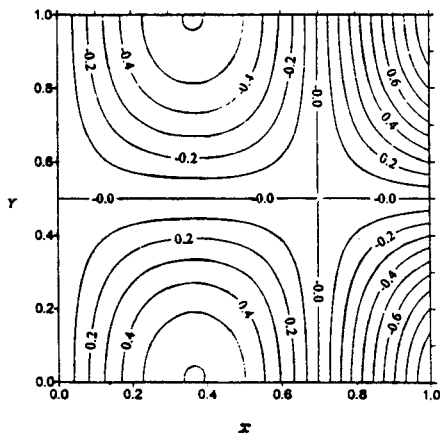


Рис. 3.29. То же, что и на рис. 3.28. Неоднородное начальное распределение

трации в стоячей волне меньше, чем в бегущей, и эта разница увеличивается с ростом амплитуды волны.

В общем случае решение диффузионного уравнения с учетом диффузии приходится находить численно. Если, однако, волновые возмущения малы, то они ведут также к малым вариациям невозмущенной концентрации примесей. Последняя должна удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div}(\mu \nabla G_0) + F = 0. \quad (3.386)$$

Тогда удастся найти приближенное решение уравнения (3.377) для волн малой амплитуды

$$G = G_0 - \int_0^t \operatorname{div}(G_0 \mu) dt. \quad (3.387)$$

На рис. 3.28 и 3.29 приведены результаты расчетов вариации примесей в поле собственных колебаний мелководного бассейна [Ivanov et al., 1993]:

$$\eta = a \cos k_x x \cos k_y y \sin \omega t, \quad \omega^2 = gh(k_x^2 + k_y^2), \\ k_x = \pi n / L_x, \quad k_y = \pi m / L_y, \quad (3.388)$$

где L_x и L_y — размеры бассейна, n и m — собственные числа. Если невозмущенная концентрация была однородна, то вариации примеси отслеживают уровень воды (см. рис. 3.28). Если же начальная концентрация изменяется вдоль оси x , например, как $G_0 = qx$, то вариации концентрации описываются формулой

$$G = G_0 + (qa)/h \left[x \cos k_x x + k_x (k_x^2 + k_y^2)^{-1} \sin k_x x \right] \cos k_y y \sin \omega t \quad (3.389)$$

и распределение концентрации уже не будет симметричным (см. рис. 3.29).

Как видим, приближение длинных волн и здесь позволяет упростить диффузионное уравнение для концентрации примесей, что облегчает его решение и анализ экологических последствий цунами.

Особенно важно оценить транспорт различного рода веществ химического и биологического происхождения на сушу волнами цунами. В частности, транспорт соли на сушу влияет на свойства растительного покрова, прекращая или замедляя его развитие. Кроме того, водный поток ломает деревья и размывает корневую систему. В работе [Иванов, Симонов, 1983] на основе экспедиционных исследований в 1982 г. дан анализ подобных следов цунами в прибрежной зоне Второго Курильского пролива (между островами Парамушир и Шумшу). В частности, на отдельных участках побережья, подвергшихся воздействию цунами 4 ноября 1952 г., встречаются остатки мертвого леса. Имеются и другие, менее выраженные, следы цунами в растительном мире. Даже выжившие деревья хранят память о цунами в толщинах годовых колец, которые становятся уже после цунами. В упоминавшейся работе приводится фотография среза ольхи камчатской, растущей на высоте 5 м над уровнем моря. Этот район затопливался дважды в последнее время волнами цунами: в 1952 г. до отметки 10–13 м и в 1960 г. до отметки 3–6 м. Оба события явно заметны на толщинах годовых колец, причем у такой же ольхи, растущей на высоте 30 м над уровнем моря, таких изменений не видно. Другой фактор — предельный возраст для некоторых сортов деревьев (ива сахалинская), совпадающий с временем последнего катастрофического цунами, такие деревья не могут пережить цунами. Перечисленные явления могут быть использованы при поиске следов цунами в необжитых местах.

Влияние цунами на растительный покров оказывается весьма важным при проведении обследования территории, подвергшейся атаке волн цунами, в относительно короткий срок после цунами, поскольку позволяет быстро "глазами" ооконтурить затопленную зону и найти уже затем на ее границе "вещественные доказательства" затопления в виде различного рода морских предметов: морской травы, остатков рыболовных сетей, плавников и т. д. В результате сокращается время обследования и можно успеть осмотреть больше участков побережья при обычно имеющемся дефиците экспедиционного времени. Автор хранит образцы трав, взятых как выше, так и ниже границы затопления, и даже сейчас, спустя два года после Шикотанского цунами 5 октября 1994 г., эти травы сильно различаются.

3.4.5. Дистанционное зондирование цунами

Традиционные методы предупреждения о цунами основаны в первую очередь на сейсмической информации, получаемой немедленно после землетрясения, и гидродинамическом моделировании времени прихода волны и ее амплитуды. Однако эффективность таких методов снижается отсутствием данных о параметрах цунами в очаге и возрастает уровень ложных тревог. Так, во время цунами 4 октября 1994 г. на о. Шикотан, явившегося катастрофическим для Южных Курил и о. Хоккайдо, международная служба дала предупреждение на Гавайские острова о возможном подходе сильного цунами с высотой несколько метров. Тысячи людей были эвакуированы, хотя высота цунами была мала (около 0,5 м). В этих условиях использование дистанционных методов с космических аппаратов позволило бы получать необходимую информацию непосредственно в момент землетрясения или сразу после него.

Другое приложение дистанционных методов связано с обследованием территории, подвергшейся атаке волн цунами, особенно в труднодоступных местах. Например, международная экспедиция, направленная на о. Шикотан после цунами 4 октября 1994 г., смогла обследовать только 15 % территории острова. Таким образом, проблема дистанционного зондирования цунами представляется весьма интересной.

Первое применение дистанционных методов для изучения следов цунами было сделано американскими специалистами при обследовании Окусирского цунами в Японском море 12 июля 1993 г. [Gonzales, Ballerini, Reutebuch, 1994]. Они использовали стереофотографические изображения побережья с масштабом 1:8000 и сопоставили их с более ранними (1976 г.) снимками, сделанными в масштабе 1:15000, и топографическими картами масштаба 1:5000. Предварительный анализ показал существование различий, связанных с цунами, причем граница зоны затопления на этих снимках хорошо коррелирует с имеющимися прямыми измерениями зоны затопления.

В нашей экспедиции обследования Шикотанского цунами 4 октября 1994 г. удалось получить черно-белые фотографические снимки части о. Кунашир, сделанные с борта вертолета, которые также показали изменение яркости и контрастности в затопляемых зонах. Специальное обследование этой территории показало хорошее согласие размеров затопленной зоны на снимках и в натуре [Гусяков и др., 1996]. Физическая причина появления особенностей на изображениях очевидна и связана с процессами транспорта различных веществ на сушу (увлажнение почвы, гибель травы и т. д.), выше обсуждались соответствующие теоретические модели. Тем не менее предстоит еще очень большая работа по оценке чувствительности дистанционных методов. Главное же, что такие методы являются эффективными и, по существу, должны предшест-

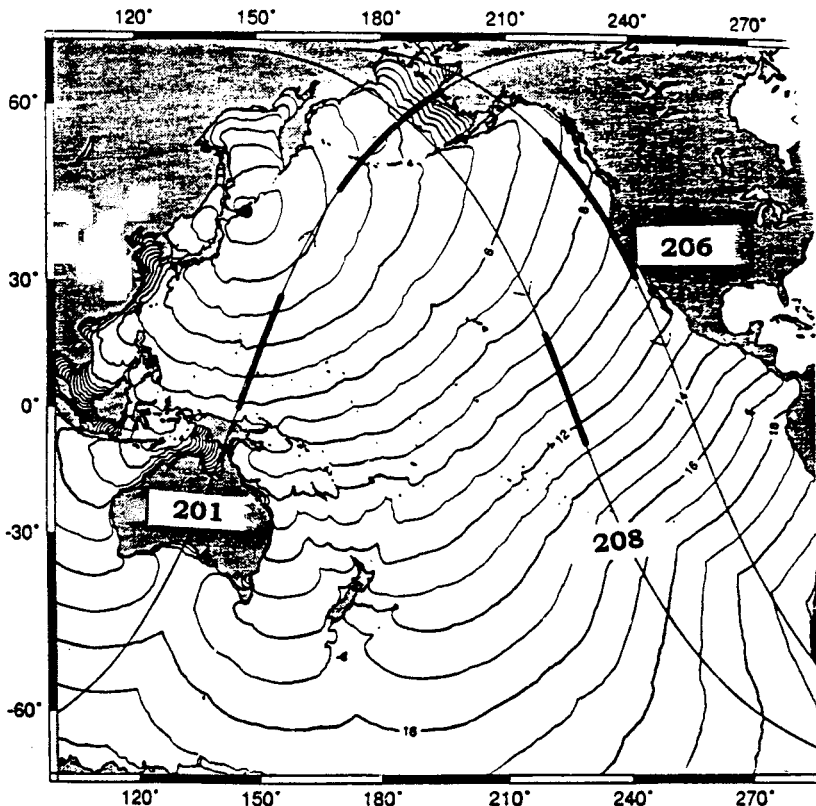


Рис. 3.30. Изохроны Шикотанского цунами и трассы спутников (жирная линия – участки измерений)

водить экспедиции, помогая ее лучше спланировать с учетом дефицита времени, отпускаемого на экспедиции.

Очень важно было бы использовать дистанционные методы для обнаружения цунами в открытом океане. Поскольку частота появления сильных цунами в последнее время возрастает, для этой цели можно было бы использовать уже имеющиеся данные. Задачу выделения следов цунами из данных спутниковой альтиметрии, получаемых в ходе экспериментов ТОПЕКС–ПОСЕЙДОН, поставили перед собой *Gallahan, Daffer (1994)*. Они изучили сигналы, "привязанные" по времени к трем сильнейшим цунамигенным землетрясениям: Окусирское цунами 12 июля 1993 г., Явское цунами 2 июня 1994 г. и Шикотанское цунами 4 октября 1994 г. Записи, сделанные после землетрясений, подвергались корреляционному анализу. Авторы утверждают, что крупномасштабные смещения уровня океана высотой 3–5 см должны быть выделены таким

анализом, однако они не обнаружили следов цунами на всех записях. В принципе, это может быть связано с тем, что запись начиналась не в момент землетрясения, например, для Шикотанского цунами запись была сделана спустя 1 ч после землетрясения (на рис. 3.30 отмечена трасса пролета спутника, а также показаны изохроны для этого цунами через каждый час). Не исключено также, что диаграмма направленности очень узкая (мы обсуждали теоретические модели формирования узкой диаграммы направленности в первой части книги) и нет волн в направлениях, анализируемых со спутников. Поэтому вопрос о возможности регистрации цунами в открытом океане остается нерешенным.

3.5. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБСЛЕДОВАНИЯ ЦУНАМИ 1994–1995 гг.

Долгие годы, занимаясь теорией цунами и оценками цунамириска, автор был по ряду обстоятельств лишен возможности непосредственно участвовать в обследовании реальных событий. Очевидна роль личного участия в натурных исследованиях, позволяющая лучше понять механизмы проявления цунами, выявить недостатки имеющихся теоретических методов, поставить новые задачи. Начиная с 1992 г. (цунами в Никарагуа), укоренилась хорошая практика международных экспедиций по цунами, что способствовало установлению единых стандартов и, главное, скорейшему и всеохватывающему обсчету реальных событий с разных сторон (сейсмология, океанология, прикладная математика). Автору посчастливилось принять участие уже в трех международных экспедициях. Детальный анализ цунами 4 октября 1994 г. на Южных Курилах и 1 января 1996 г. в Индонезии приведен ниже.

3.5.1. Цунами на о. Шикотан 4–5 октября 1994 г.

5 октября 1994 г. в 0.23 часа (4 октября в 13.23 по Гринвичу) сильное землетрясение с магнитудой 8 (по данным Обнинского сейсмического центра) произошло в южной части Курильских островов (рис. 3.31). Его эпицентр локализован вблизи о. Шикотан, так что интенсивность землетрясения была необычайно высока, 9–10 баллов по модифицированной шкале Меркалли. Через 90 минут было сообщено о цунами на о. Хоккайдо с высотой 1,8 м в Немуру, международная служба предупреждения о цунами объявила тревогу на Гавайских островах и западном побережье США и Канады. На Южных Курилах 11 человек погибло и 242 было ранено. На о. Хоккайдо 1 человек погиб и 140 было ранено. Непосредственно от цунами жертв не было. Отметим, что число пострадавших оказалось мало для такого сильного землетрясения, что, по-видимому, связано

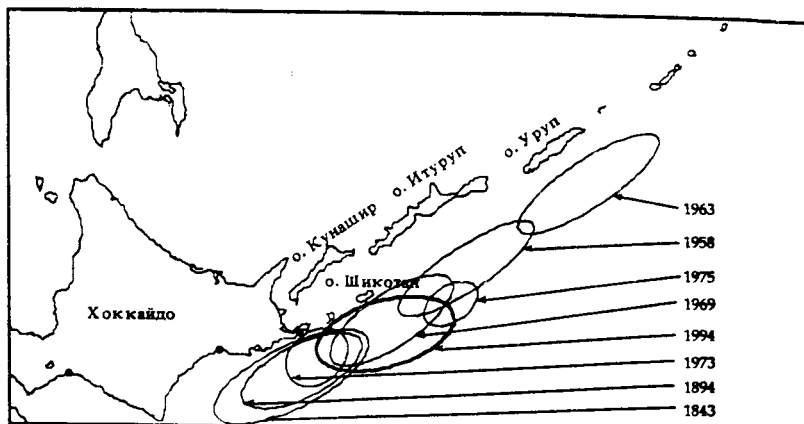


Рис. 3.31. Эпицентр Шикотанского землетрясения 1994 г. и очаги цунамигенных землетрясений в этом районе

с тем, что землетрясение произошло глубокой ночью и большинство жителей находилось в деревянных домах, причем отопление не включалось ввиду теплой погоды и не послужило причиной возможных пожаров. Следует отметить также, что землетрясения и цунами часты на Южных Курилах и люди в какой-то степени подготовлены к этому типу стихийных бедствий. В результате землетрясения на о. Шикотан образовалось много трещин и разрывов в грунте, один из больших разрывов шириной 60–80 м и длиной до 1 км протянулся вблизи п. Малокурильское, произошло разрушение ряда нефтяных резервуаров, приведшее к загрязнению территории.

Для изучения последствий землетрясения и цунами на Южных Курилах Министерством чрезвычайных ситуаций, Академией наук и Российским фондом фундаментальных исследований было направлено несколько экспедиций. Одна из них была международной (в ней участвовали специалисты из США и России*). Результаты этой экспедиции описаны ниже [Гусяков и др., 1996; Yeh et al., 1995].

Землетрясение и его афтершоки. Данное землетрясение произошло в одной из активных сейсмических зон Курило-Камчатского региона. Для Южных Курил известно по крайней мере 27 цунамигенных землетрясений, часть из которых приведена в табл. 3.4, а их очаги показаны на рис. 3.31.

* Японские специалисты не смогли получить разрешение на визит от своего министерства ввиду политического спора о государственной принадлежности Южных Курил.

Таблица 3.4

Цунами, вызванные землетрясениями на Южных Курилах

Дата	Магнитуда	Высота цунами, м
25.04.1843	8,2	4,5
03.06.1893	6,6	1,5
22.03.1894	7,9	4,0
06.11.1958	8,2	5,0
12.11.1958	7,4	1,0
12.02.1961	7,0	1,0
13.10.1963	8,1	5,0
20.10.1963	7,4	15,0
11.08.1969	8,2	5,0
17.06.1973	7,9	1,5
24.06.1973	7,4	1,2
10.06.1975	7,1	5,5
23.03.1978	7,6	0,2
23.03.1978	7,8	0,3
24.03.1978	7,9	0,6
04.10.1994	8,0	9,0

Первое и, возможно, самое значительное произошло 25 апреля 1843 г., когда землетрясение ощущалось на большой территории от о. Уруп на севере до Кусиро в Японии на юге. К сожалению, данные о высоте волны на Южных Курилах отсутствуют, хотя в Кусиро отмечены волны с высотой 4,5 м. Следующее большое цунами было 22 марта 1894 г. с максимальной высотой заплеска 4 м в Мияко (Япония). После этого было относительно затишье на 64 года для сильных землетрясений (с магнитудой в 7,9 и выше), а следующее сильное землетрясение с магнитудой 8,2 случилось в 1958 г. вблизи о. Итуруп. Высота волны на восточном берегу о. Итуруп достигла 5 м. В 1963 г. в течение недели произошло еще два сильных землетрясения в этом же районе. Следующее цунами 1969 г. вызвало заплеск на восточном побережье о. Шикотан в 5 м.

Сильное землетрясение в ночь с 4 на 5 октября 1994 г. произошло в том же районе, что и землетрясение 1969 г. Области афтершоков для этих событий также перекрываются. Пространственное распределение афтершоков последнего землетрясения, основное на данных центра предсказания землетрясений Хоккайдовского университета, показано на рис. 3.32. Из карты видно, что землетрясение произошло на континентальном склоне.

Предварительные расчеты цунами. На основании распределения афтершоков очаг цунами определен в размере 120 на 100 км. Данные о смещении дна в очаге найдены с использованием сейсмического решения Гарвардского университета. Сейсмический момент получился равным $2,1 \cdot 10^{28}$ дин·см. Расчеты по сейсмической модели

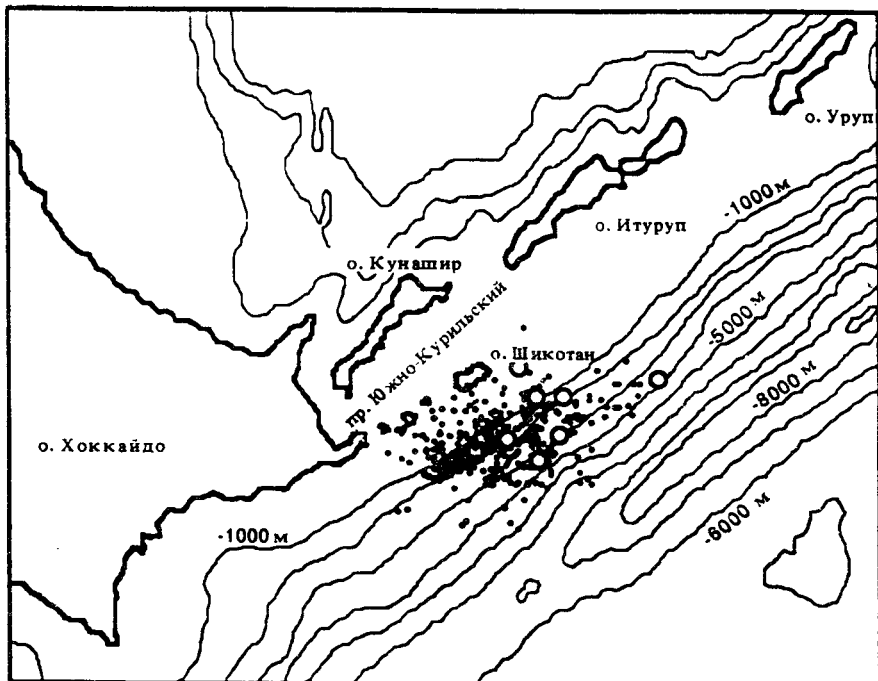


Рис. 3.32. Распределение афтершоков в течение первой недели после землетрясений

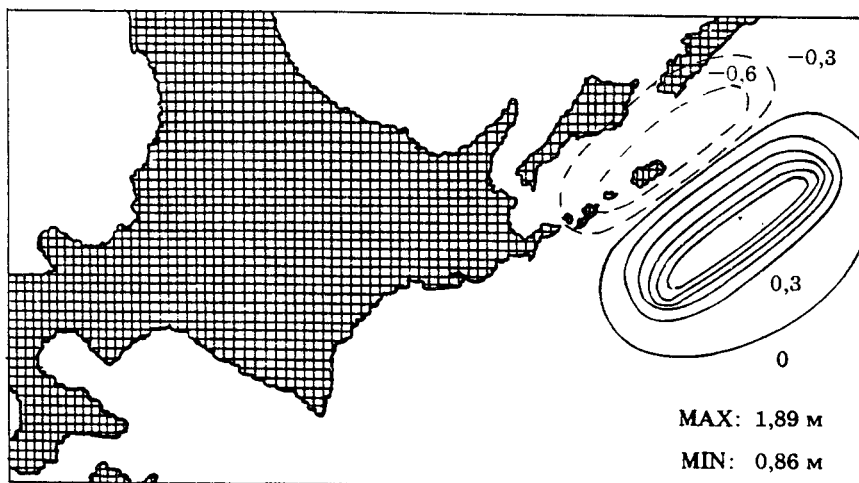


Рис. 3.33. Остаточное смещение морского дна во время землетрясения

показали, что дно поднялось в глубоководной части максимально на 1,9 м и опустилось на 70 см в мелководной части (рис. 3.33). В результате о. Шикотан как целое должен погрузиться в океан примерно на 60 см (ниже обсудим этот вопрос специально). Рассчитанное смещение дна в очаге было использовано уже в первые дни после землетрясения (задолго до экспедиции) для расчета характеристик цунами несколькими независимо работающими группами. На рис. 3.34 показаны результаты расчетов в рамках теории мелкой воды, выполненные В. Храмушиным в Институте морской геологии и геофизики ДВО РАН, г. Южно-Сахалинск (справа цифрами указаны максимальное и минимальное смещения уровня океана в волне цунами). Максимальная высота цунами ожидается на тихоокеанской стороне о. Шикотан (примерно 5 м). Интересная особенность рассчитанных мареограмм — их многоволновость и то, что не всегда первая волна является максимальной в группе. Аналогичные расчеты, основанные на нелинейной теории мелкой воды, выполнены в Университете Южной Калифорнии В. Титовым (рис. 3.35). И в этих расчетах максимум заплеска приходится на о. Шикотан и может достигать 8 м. Учитывая, что измеренный максимум заплеска на о. Шикотан оказался равным 9 м, следует сказать, что существующие теоретические модели позволили с хорошей точностью предсказывать наблюдаемые высоты волн. Более того, численные расчеты предсказали существование локального усиления высоты заплеска до 3 м в п. Петрова на о. Кунашир (13 км на северо-восток от Южно-Курильска), и это также подтвердилось прямыми измерениями.

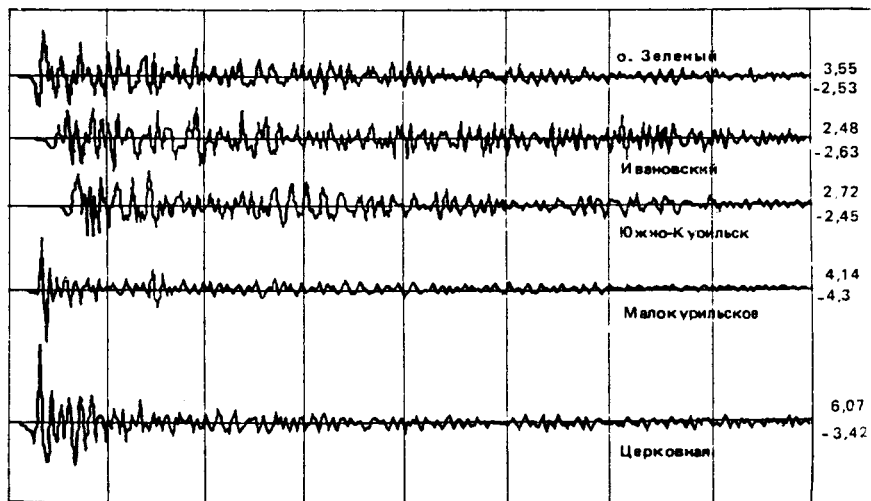


Рис. 3.34. Расчетные мареограммы цунами на Южных Курилах

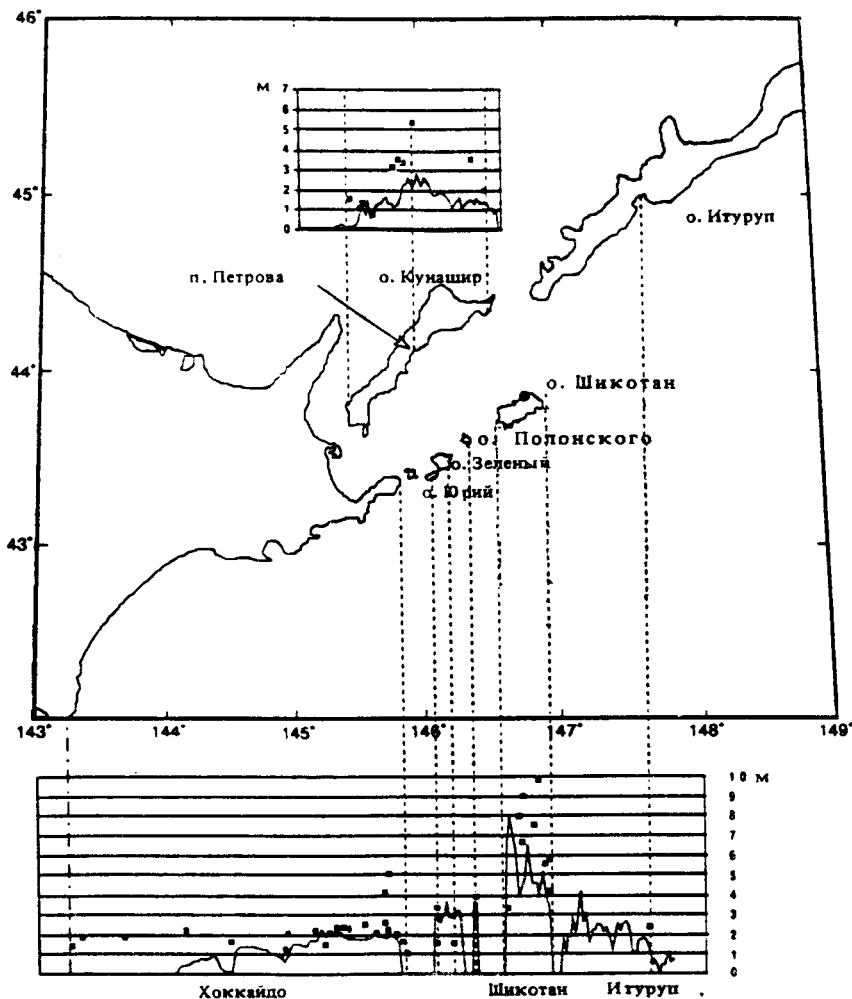


Рис. 3.35. Расчеты высот заплесков (сплошная линия) и данные наблюдений

ями (5,3 м). Данная часть о. Кунашир находится в тени о. Шикотан по отношению к эпицентру землетрясения (см. рис. 3.35) и, на первый взгляд, цунами здесь должно ослабляться. Однако уже простейшие расчеты в рамках лучевой теории показывают, что именно в п. Петрова встречаются лучи, огибающие о. Шикотан с двух сторон, приводя здесь к усилению волнового поля.

Таким образом, предварительное численное моделирование должно быть необходимым элементом подготовки экспедиции, позволяя

выделить наиболее затопленные места, что имеет важное значение при дефиците экспедиционного времени и труднодоступности многих участков побережья. По существу, в последнее время такие расчеты всегда выполняются при подготовке международных экспедиций, и, хотя не всегда удается получить хорошее количественное совпадение, качественная картина распределения высоты волн цунами вдоль побережья, находящаяся с помощью численного моделирования, оказывается верной. Приятно отметить также, что такие предвычисления стали выполняться и в нашей стране.

Измерения высот заплеска волн цунами. Высоты заплесков цунами в нашей экспедиции были измерены на островах Шикотан, Кунашир, Итуруп и островах Малой Курильской гряды (о-ва Полонского, Зеленый, Юрий). Координаты пунктов точно измерены только на о. Шикотан с помощью спутниковой системы навигации, в других случаях использовались детальные карты побережья. Все измерения корректировались на время прихода волн цунами и приливная компонента исключалась из рассмотрения. Измерения высот заплесков цунами и дальности затопления на побережье не вызвали особых затруднений, поскольку в большинстве случаев граница затопления отчетливо выделялась по остаткам морской травы, пониженной растительности, всякого рода морским предметам и т. д. Особенно хотелось бы отметить часто наблюдавшееся изменение цветности растительного покрова в затопленной зоне под действием морской воды, что позволяло быстро оконтурить затопленную область. Этот эффект побуждает более внимательно рассмотреть проблему транспорта веществ на сушу волнами цунами, которая обычно не изучается в связи с цунами; некоторые соответствующие оценки обсуждаются в разд. 3.4.3. В этой экспедиции также впервые использованы данные аэрофотосъемки о. Кунашир, которые позволили оценить глубину затопления сразу на всей протяженности побережья и грубо оценить (по топографическим данным) высоты волн. В дальнейшем эти данные использовались для планирования и сопоставления с геодезическими измерениями. Использование аэрофотосъемки должно стать необходимым элементом экспедиционных работ (разд. 3.4.5).

На о. Кунашир наибольший ущерб от наводнения проявился в районе старой части пос. Южно-Курильск, расположенной вдоль пологого берега в низине. Высота водного потока на берегу здесь составляла 2,5–3 м, он проникал на 200–250 м, а в пойме реки более 500 м. Практически все сооружения, попавшие в зону затопления, были повреждены, а некоторые разрушены. Вдоль реки разрушены полностью два моста и один поврежден, смыто три дома, один из них, находившийся вблизи устья реки, сорван с фундамента и перенесен вверх по течению на 300 м. На 100 м была унесена легковая машина. Повреждены все причалы в центральной части Южно-Курильска. Выброшено на берег пять плашкоутов, два судна

(типа МРС) и несколько ботов. Официальная тревога цунами не была объявлена на о. Кунашир (не работала связь между Сахалином и Кунаширом), однако местные руководители, знакомые с цунами, успели оповестить население, и обошлось без жертв и ранений.

На о. Шикотан измерения были проведены в 85 различных пунктах. Необходимо заметить, что примерно 80 % береговой линии приходится на вертикальные скалы и здесь измерения невозможны. Измеренные высоты заплесков показаны на рис. 3.36. Отметим, что представленные значения не есть все индивидуальные измерения, они представляют собой только локальные максимумы в бухтах. Типичный пример многочисленных локальных измерений в одной бухте (б. Церковная) показан на рис. 3.37. Вариации высот заплеска вдоль побережья относительно малы. Средняя высота волн на его океанской (южной) стороне составляет 6,1 м со средним квадратичным отклонением 1,8 м, а на северной стороне 2,5 м с отклонением в 0,2 м. Такое распределение подтверждает, что волна атаковала остров с океанской стороны, а его северная сторона находится в тени зоны распространения цунами. Значительная разница в высотах свидетельствует также о том, что длина волны не превышала размеров острова (20 км), в противном случае высоты волн на



Рис. 3.36. Измеренные высоты заплеска волн цунами на о. Шикотан

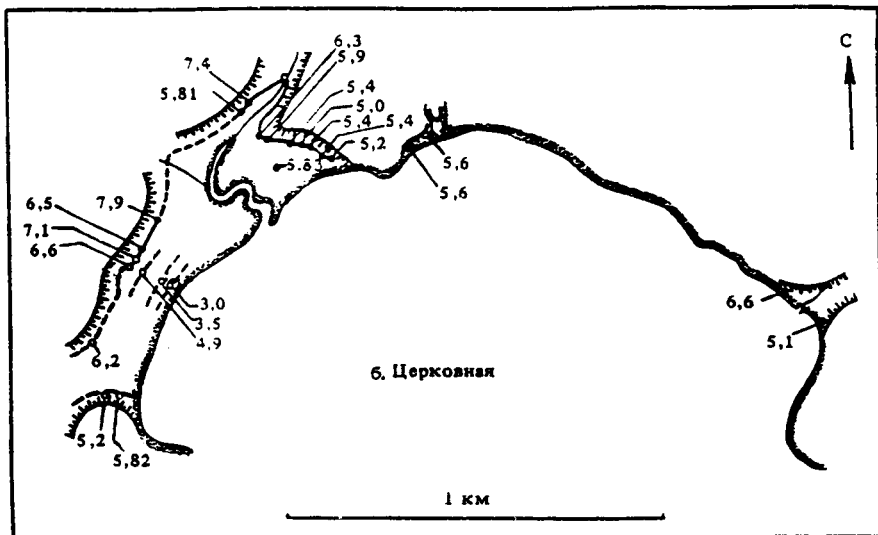


Рис. 3.37. Распределение заплесков цунами в б. Церковная (о. Шикотан)

противоположных сторонах острова были бы близки. Учитывая, что глубина воды здесь примерно 50 м, получаем оценку периода волны цунами в 23 мин или меньше. С другой стороны, однородность высоты заплеска в бухтах означает, что ее длина превышает размеры бухт. Оценивая последние в 3 км и глубину в них 30 м, получим нижнюю оценку на период волны цунами в 6 мин. Численные эксперименты дают период волны в 20 мин, и приводимые данные измерений не противоречат этой оценке.

Населенные пункты о. Шикотан (Малокурульское и Крабозаводское) находятся на его северной части, поэтому ущерб от цунами не такой уж большой. В Крабозаводском затоплена одна из улиц (Заречная), жители которой были отселены за несколько лет до этого в соответствии с рекомендациями специалистов по цунами. Была затоплена также территория консервных заводов, но люди успели покинуть их до подхода цунами. Тревога цунами не была объявлена, однако люди, работающие в ночную смену, ощутив сильные толчки и разрушения, начали спасаться как от землетрясения, так и от цунами, поэтому не было жертв и ранений. Более сильное воздействие цунами оказало на корабли в бухтах, обсудим этот вопрос несколько ниже.

На океанской стороне о. Шикотана (не населенной) следы цунами производят сильное впечатление: морская трава — на вершинах деревьев и кустарников, на значительной территории трава полегла по направлению движения водного потока, его высота здесь

достигала 4–5 м над уровнем земли. В бухте Церковная мы нашли четыре явных следа цунами на высотах 3,0, 3,5, 4,9 и 7,1 м, отмеченных на рис. 3.37. Это означает, что цунами представляло собой группу волн, число которых превышает 4, причем очевидно, что более слабые волны, оставившие следы на побережье, пришли позднее более сильных. По-видимому, это первое инструментальное доказательство групповой структуры накатывающихся волн цунами, оно известно было ранее из рассказов очевидцев.

Суммарные данные о высотах заплеска на Южных Курилах приведены на рис. 3.35, здесь же показаны вычисленные Синолакисом и Титовым высоты волн. Как видим, качественное, а во многих местах и количественное, согласие имеется между данными измерений и результатами вычислений.

Колебания уровня океана. Уникальная запись цунами в бухте Малокурильская была получена мареографом, она представлена на рис. 3.38 (к сожалению, прибор зашкаливал и нельзя было определить максимальный подъем уровня воды во время цунами). Находившийся почти в эпицентре сильнейшего землетрясения, мареограф остался невредимым (для сравнения укажем, что мареограф на о. Кунашир, находившийся дальше от эпицентра, вышел из строя) и позволил более тщательно проанализировать временную историю землетрясения и цунами. Бухта Малокурильская имеет почти круглую форму (диаметр приблизительно 800 м) с узким входом (шириной 350 м). Резонансная частота этой бухты равна 18,5 мин [Gumagaliev, Rabinovich, 1993], поэтому колебания такого периода хорошо представлены в записи. Сейшевые колебания прослеживаются на мареограмме в течение трех суток после землетрясения. Ясно видно чернильное пятно, образовавшееся на мареограмме в момент землетрясения. Первый максимум подъема уровня воды приходится на 40 мин после главного толчка (за такое же время

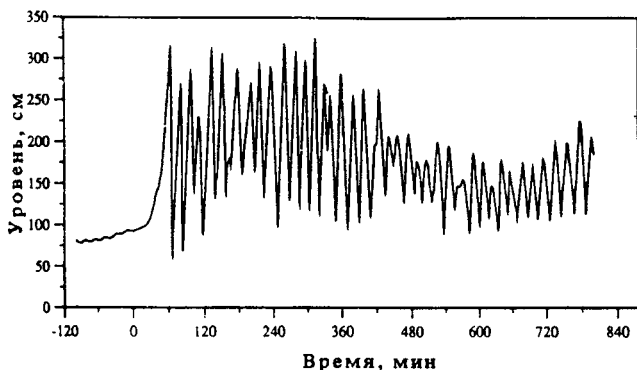


Рис. 3.38. Запись цунами в б. Малокурильская (о. Шикотан)

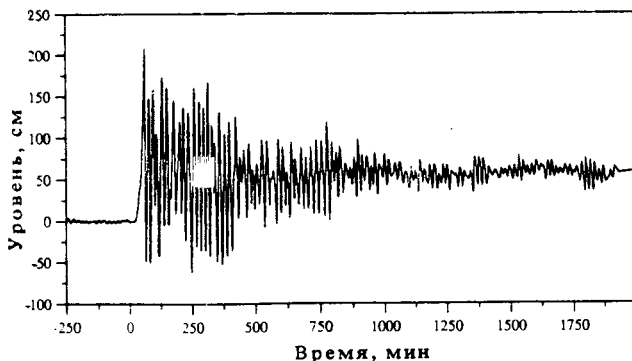


Рис. 3.39. Запись цунами в б. Малокурильская после фильтрации прилива

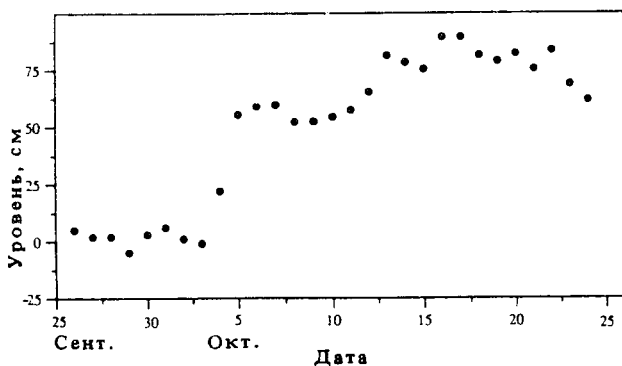


Рис. 3.40. Усредненная за день запись уровня воды в б. Малокурильская

волна пришла и на о. Хоккайдо). Согласно численным расчетам время прибытия волны должно быть 30 мин, полученное расхождение пока еще не объяснено. Цунами пришло почти в момент отлива, в противном случае оно могло быть более разрушительным. Очищенная от прилива мареограмма показана на рис. 3.39. Из нее видно, что средний уровень воды поднялся на 53 см после землетрясения, что означает погружение острова на такую же величину. Эти же эффекты видны из усредненного (за день) уровня воды [Гусева и др., 1994], он показан на рис. 3.40. На фоне медленных вариаций уровня моря ясно виден его скачок во время землетрясения.

Во время землетрясения много кораблей находилось в бухтах. Сильная тряска кораблей во время землетрясения (это же отмечалось и судами в открытом море — эффект моретрясения, теория которого обсуждалась в первой части книги) была продолжительной.

и экипажи не имели времени подготовиться к приходу цунами. Поскольку колебания уровня моря были значительны (при первом же опускании уровня несколько кораблей легли на дно), многие из них снялись с якоря и стали игрушкой воли, некоторые из них получили повреждения из-за столкновений друг с другом. Ни один из них не смог преодолеть течение в узком входе в б. Малокурульская, чтобы выйти в открытое море (зато это удалось сделать многим судам в б. Крабовозовская, существенно более открытой). По оценкам капитанов, скорость течения в волнах цунами составляла 6 м/с, а глубина в центре бухты изменялась с 5 до 8 м (по эхолоту). Такие скорости соответствуют оценкам скоростей течения в волнах амплитудой 3–4 м). Значительные знакопеременные течения наблюдались в течение 3–5 ч после землетрясения (этот период соответствует значительным волнам на мареограмме цунами).

Регистрация цунами в других странах. Волны цунами, генерированные Шикотанским землетрясением, распространились по всему бассейну Тихого океана. На рис. 3.30 представлены рассчитанные изохроны этого цунами. Как видим, волна цунами уже в течение первого часа пришла на о. Хоккайдо, через 7 ч — на Гавайские острова, через 10–12 ч — в Австралию. Наибольшей высоты она достигла в Японии, в частности в г. Немуро, — 1,7 м. На Гавайских островах высота волны составляла 50 см, на Аляске 15 см. Особо хотелось бы выделить измерения уровня океана на островах, находящихся в южной части Тихого океана (Папуа — Новая Гвинея, Западное Самоа, Фиджи, Вануату, Тонга). Развернутая там система регистрации под руководством австралийских специалистов является эффективной для регистрации многих природных явлений, в том числе цунами. На рис. 3.41 представлены очищенные от приливов записи Шикотанского цунами в этом районе Тихого океана. Высоты волн здесь не превышают 30 см. Хотя тревога цунами и была объявлена Международной службой предупреждения о цунами на Гавайских островах и западном побережье США и Канады, она оказалась ложной, что лишний раз свидетельствует о трудностях предсказания высот цунами на больших акваториях. Для получения достоверной информации о приближающемся цунами хорошо бы иметь сведения о ее характеристиках в открытом океане. В разд. 3.4.5 мы уже описывали попытки выделения сигналов, связанных с цунами, из данных спутниковой альтиметрии. И хотя высота цунами превышает порог обнаружения (5 см), эти сигналы не были получены. В прибрежной зоне были зарегистрированы высоты волн в несколько десятков сантиметров, в открытом океане они могут быть меньшими на порядок, поэтому вполне возможно, что высоты волн цунами при Шикотанском землетрясении были действительно малы и недостаточны для обнаружения.

Долгосрочный прогноз цунами. При анализе пространственно-временного распределения эпицентров землетрясений Курильского

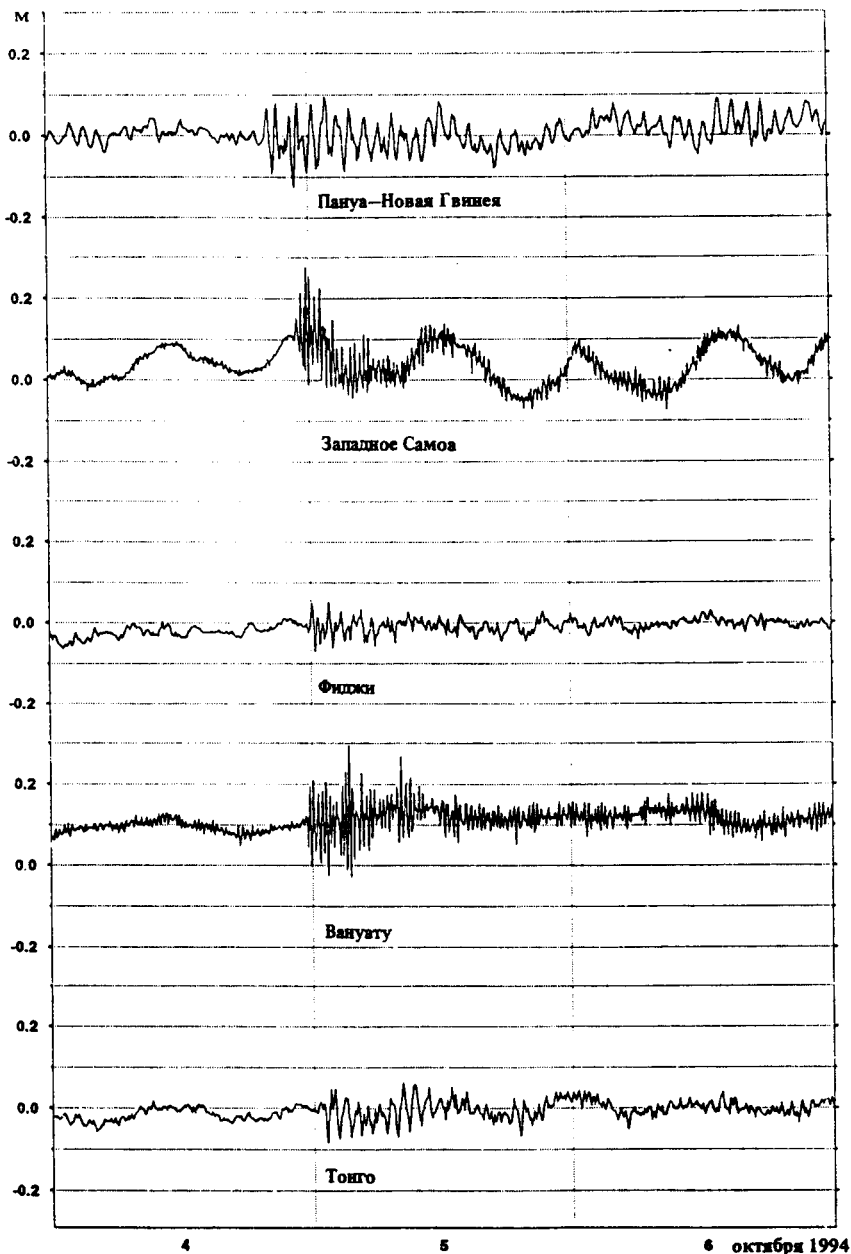


Рис. 3.41. Записи цунами на островах в южной части Тихого океана

региона уже достаточно давно была выделена зона сейсмического затишья к юго-востоку от о. Хоккайдо. В данной зоне находятся очаги ряда крупных землетрясений и цунами в прошлом: 25 апреля 1843 г., 22 февраля 1894 г., 17 апреля 1973 г. [Бондаренко и др., 1985]. На этой основе еще в 1985 г. указывалось на вероятность возникновения сильного землетрясения с магнитудой, большей 8, на Южных Курилах, причем назывался срок 1985–1986 гг. Эта информация была использована для выдачи прогноза появления сильного цунами в этом районе [Го и др., 1985]. Методика прогноза землетрясений, основанная на регистрации предвестникового изменения сейсмичности, непрерывно совершенствовалась, и в июле 1992 г. был выдан прогноз о возможности катастрофического землетрясения с магнитудой 7,5–8,5 в течение 1992–1997 гг. на Южных Курилах [Кособоков и др., 1994]. Такой прогноз основан на бифуркационной теории динамических систем: фоновые возмущения становятся интенсивнее, их концентрация возрастает и усиливается реакция на возбуждения [Keilis-Borok, Kosobokov, 1990]. Интегральные оценки этих характеристик составляют основу алгоритмов среднесрочного прогноза землетрясений, разрабатываемого в кооперации с американскими специалистами. В последний раз такой прогноз был выдан в августе 1994 г. на период до декабря 1994 г., он показан на рис. 3.42, взятом из работы [Кособоков и др., 1994]. Здесь же показан эпицентр Шикотанского землетрясения, которое и произошло в районе, где в первую очередь следует ожидать землетрясения с магнитудой 7,5–8,5.

Долгосрочный прогноз цунами для этого региона составлялся на основе имеющихся данных об исторических цунами и гидродинамических расчетов, описание идей оценки цунами риска дано в разд. 3.4.1. В табл. 3.5 приведены оценочные высоты волн на период в 100 лет и наблюдаемые высоты во время Шикотанского цунами.

Таблица 3.5

Сравнение измеренных и предсказанных высот цунами на Южных Курилах

Пункт	Высота волны, м	
	прогноз	измерение
Буревестник (о. Итуруп)	7,5	2,5
Южно-Курильск (о. Кунашир)	4,5	3,5
Головнино (о. Кунашир)	2,5	1,5
Малокурильское (о. Шикотан)	7,0	3,0
б. Димитрова (о. Шикотан)	8,0	9,5
б. Церковная (о. Шикотан)	13,0	7,9
о. Юрий	3,0	3,5
о. Зеленый	7,0	1,5
о. Полонского	5,0	4,0

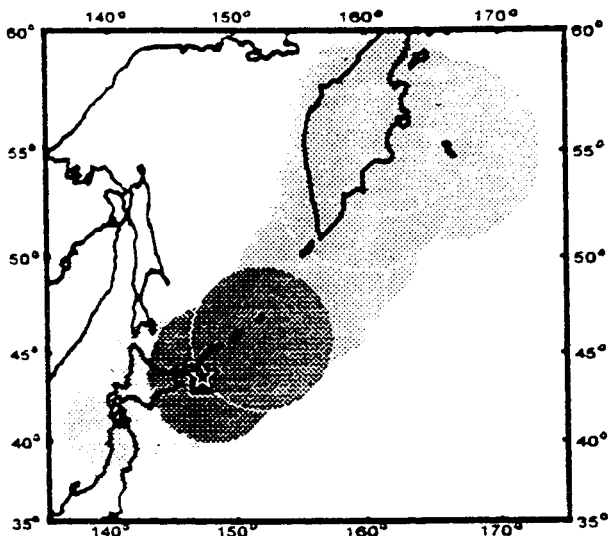






Рис. 3.42. Долгосрочный прогноз землетрясения для Курило-Камчатской зоны:

-  — территория, где ведется мониторинг;
-  — область тревоги: магнитуда 7,5–8,5 ожидается до июля 1997 г.;
-  — район, где в первую очередь следует ожидать землетрясение с магнитудой 7,5–8,5;
-  — эпицентр землетрясения 4 октября 1994 г.

В целом, предсказанные на 100 лет высоты цунами оказываются выше измеренных, следовательно, развитая схема цунамирайонирования может использоваться для прогноза волн цунами. В то же время для оценки цунамириска в этом регионе еще слабо использовалась гидродинамическая теория, что, по-видимому, и послужило причиной занижения высоты волны, например, в б. Димитрова.

3.5.2. Цунами на о. Сулавеси (Индонезия) 1 января 1996 г.

1 января 1996 г. в 16.05 местного времени (8.05 гринвичского времени) в центральной части о. Сулавеси в Индонезии, примерно 180 км к северу от г. Палу (рис. 3.43), произошло сильное землетрясение (этот район отмечен на карте звездочкой). По оценке специалистов Индонезийского геофизического и метеорологического агентства его магнитуда по шкале Рихтера составила $M = 7$, эпицентр

находился в Макасарском проливе в точке с координатами: $0,6^{\circ}$ с. ш. и $119,92^{\circ}$ в. д. на глубине 39 км. Интенсивность землетрясения в ближайших к эпицентру поселках составила 6 баллов по модифицированной шкале Меркалли. Согласно официальным источникам, 9 человек погибло и 63 ранено в результате цунами высотой 2 м в пос. Тонгголобиби, более 400 домов разрушены и стали непригодны для жилья. Цунами носило локальный характер и проявилось на побережье с общей длиной береговой линии примерно в 100 км. Международная служба цунами определила магнитуду землетрясения в 7,7, а координаты в 0° ш. и 120° в. д. и, основываясь на этом, не объявила тревоги цунами в Тихом океане. Данных о регистрации волн цунами вне о. Сулавеси также не поступало.

Для количественного изучения характеристик цунами и анализа цунамиопасности данного региона в соответствии с существующей практикой была сформирована международная экспедиция, состоящая из двух индонезийских и одного российского специалистов. Командировка российского специалиста (Е. Н. Пелиновского) была поддержана частично Российским фондом фундаментальных исследований и Исследовательским центром цунами Индонезии. С индонезийской стороны в экспедиции участвовали Dede Yuliadi из гидрографического управления военно-морских сил и Rahman Hidayat из исследовательского центра цунами, входящего в состав лаборатории морской гидротехники политехнического университета Джакарты. Организовал экспедицию руководитель исследовательского центра цунами Gegar Prasetya. Полевые работы были проведены в период 21–30 января 1996 г., три недели спустя после цунами. Методика измерений высот волн цунами и опросов населения здесь та же, что и при Шикотанском цунами 5 октября 1994 г. Результаты экспедиционных исследований (измерения высот заплеска цунами на побережье и анализ свидетельств очевидцев) приведены ниже. Обсуждаются также данные исторических цунами в этом районе и на основании уже имеющейся информации и теории, представленной в разд. 3.4.1, дан прогноз цунамиопасности центральной части о. Сулавеси.

Исторические данные о цунами. Последнее время в Индонезии цунами отмечаются ежегодно: о. Флорес (12 декабря 1992 г., высота наката 20 м, погибло 2000 человек) [Yeh et al., 1993], о. Ява (2 июня 1994 г., высота волн около 13 м, погибло 200 человек, цунами отмечалось в Австралии высотой до 4 м) [Foley, 1994], восточная часть о. Тимор (14 мая 1995 г., высота волны 4 м, погибло 8 человек) [Prasetya, Jumadi, 1995] и, наконец, событие 1 января 1996 г. на о. Сулавеси*. Большинство из них обследовано международными экспедициями, что способствовало выработке единых требований и

* Отметим, что 17 февраля произошло еще одно землетрясение и цунами в Индонезии на о. Ириан Ява, погибло 110 человек. Высота цунами достигла 7,7 м, оно докатилось до Японии, где зарегистрированы волны до 1 м.

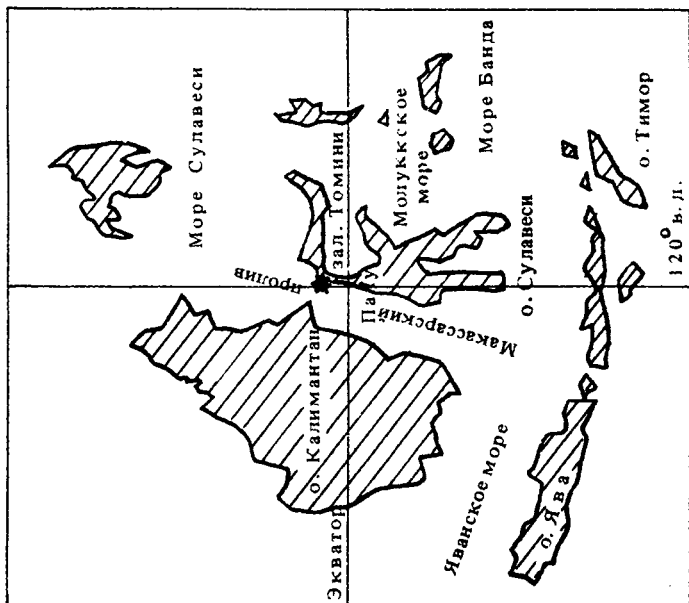


Рис. 3.43. Район Индонезии, где произошло землетрясение и цунами 1 января 1966 г.

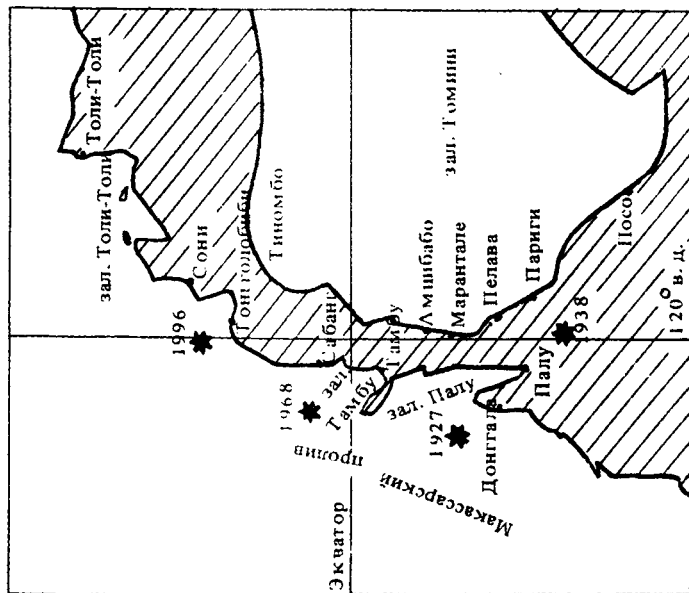


Рис. 3.44. Эпицентры цунамигенных землетрясений этого столетия в центральной части о. Сулавеси

методик анализа данных о цунами, сформулированных в рекомендациях международной комиссии по цунами.

Цунами неоднократно отмечались на о. Сулавеси. Согласно каталогам [Соловьев, Го, 1974; Соловьев, Го, Ким, 1986] за период 1820–1982 гг. на о. Сулавеси всего зарегистрировано 14 случаев цунами, т. е. примерно одно цунами в 11 лет. Для центральной части о. Сулавеси, где произошло исследуемое цунами, отмечены четыре разрушительных цунами этого столетия. Их параметры приведены в табл. 3.6 (все даты — согласно гринвичскому времени), а эпицентры землетрясений показаны на рис. 3.44. Обращает внимание очень сильное цунами с высотой заплеска до 15 м, возбужденное при относительно слабом сейсмическом событии (магнитуда 6,3) в 1927 г., однако проверить первоисточники, на которые ссылаются в каталоге, сейчас не удается. Подчеркнем также, что эпицентры всех этих землетрясений расположены практически у береговой черты.

Таблица 3.6

Характеристики землетрясений и цунами
в центральной части о. Сулавеси

Год	Дата	Широта	Долгота (в. д.)	Магнитуда, М	Высота волны, м
1927	01.12	0,7° (ю.ш.)	119,7°	6,3	15
1938	19.05	1° (ю.ш.)	120°	7,6	3
1968	14.08	0,2° (с.ш.)	119,8°	7,4	10
1996	01.01	0,83° (с.ш.)	120,01°	7,7	3,4

Дадим описание этих событий, взятое из каталогов.

1 декабря 1927 г. в 12.37 местного времени (4.37 гринвичского) произошло сильное землетрясение в районе бухты Палу*. Землетрясение хорошо ощущалось повсюду на западе центральной части острова Сулавеси в радиусе 230 км. В г. Палу (областном центре) на базаре полностью развалились три больших павильона и в той или иной степени пострадали все остальные строения. Главная дорога, ведущая к майсовому базару, была очень повреждена, а несколько второстепенных улиц, расположенных позади базара, осели примерно на 50 см. В Боровару были полностью уничтожены рыночные павильоны и очень повреждено здание окружного управления. В пос. Донггала, расположенном на входе в бухту Палу, частично обрушилась галерея конторы местного чиновника. Во время землетрясения в бухте Палу появилась приливная волна, продолжавшаяся 30 с и имевшая высоту до 15 м. Волна разрушила расположенные в прибрежной полосе хижины; 14 человек погибло,

* Большинство географических названий, данных в этом разделе, указаны на рис. 3.44.

а 50 было ранено. В Тализе была полностью смыта пристань с трапом, а море стало на 12 м глубже. Последующие толчки землетрясения ощущались 1, 2, 3, 5 и 17 декабря в Палу, Париги (в 35 км к востоку от Палу, на побережье залива Томини), Тализе.

20 мая 1938 г. в 1 ч местного времени (19 мая в 17.08 по гринвичскому времени) произошло разрушительное землетрясение с очагом в заливе Томини*. Ощущалось почти на всем о. Сулавеси и на востоке о. Калимантан. Наибольшей силы достигло в районе Париги. Здесь в 34 деревнях развалилось 942 дома (более 50 %) и было повреждено 184. В селе Пелава (8 км к северу от Париги, также на побережье) вырывало деревья с корнями. В селе Марантале (30 км к северу от Париги, также на побережье) на кокосовой плантации почва была разбита трещинами и разворочена; дом с окружающими его банановыми насаждениями сдвинут на 25 м. Дороги были покрыты многочисленными трещинами длиной до десятков метров и шириной до 50 см; кое-где из них изливалась грязь; отдельные участки грунта осели. В Париги обрушились школа и кирка; большинство же сооружений из дерева, бетона и кирпича не пострадало. В районе Палу и Донггала ущерб был незначительным, а в районах Тиномбо (150 км северней Палу, вблизи очага землетрясения 1 января 1996 г.) и Посо (110 км к востоку от Палу, на побережье залива) вообще не было никакого ущерба, несмотря на сильные сотрясения. Было много афтершоков. Вслед за землетрясением на побережье залива Томини, примерно от Париги на юге до Торибулу (60 км на север), нахлынула приливная волна высотой, по некоторым данным, до 2–3 м. В Торибулу море внезапно отошло от побережья на 80 м, а затем с силой вернулось опять. Местами волна проходила вглубь берега на 40–80 м. От волны пострадало 14 деревень, 17 человек утонуло: один в Ампибабо (15 км к югу от Торибулу), а остальные в Париги. В Париги была смыта пристань, повреждены склады и навигационные сигналы. Было смыто много скота и кокосовых орехов. Колебания уровня океана с размахом 8 см были записаны мареографом в Санта-Монике (штат Калифорния, США).

15 августа 1968 г. в 6.14 местного времени (14 августа в 22.14 по гринвичскому времени) произошло сильное землетрясение у северо-западного побережья о. Сулавеси. В районе бухты Тамбу, между Манимбахом (этот мыс ограничивает залив Тамбу с юга) и Сабангом (на севере этого залива) смещения по разломам привели к оседанию побережья на 2–3 м. Возникло разрушительное цунами. На побережье в районе пос. Донггалы (вход в бухту Палу) обрушились волны высотой 9–10 м, они прошли в глубь суши до 500 м. Погибло 160 человек, пропало без вести 40 и было ранено 58. Разрушено 800 прибрежных домов, затоплены большие площади кокосовых плантаций. Особенно пострадали деревни Тамбу (в вер-

* Приводимые, однако, в каталоге координаты этого землетрясения (см. табл. 3.7) приходятся на сушу (15 км на восток от Палу, примерно столько же от зал. Томини).

шине бухты Тамбу) и Мапага (7 км к северу от Тамбу). Последняя в результате опускания суши частично оказалась под водой и даже сейчас, спустя почти 30 лет, эта картина производит впечатление. Таким образом, уже простой анализ имеющейся информации о проявлениях цунами свидетельствует о высоком уровне опасности цунами для центральной части о. Сулавеси. При этом все цунами возникают практически одновременно с землетрясениями, что приводит к объективным трудностям создания региональной службы предупреждения о цунами и использования уже имеющейся международной службы.

Землетрясение 1 января 1996 г. и его проявления. Для оценки очага цунами крайне важно иметь данные о механизме землетрясения и геометрии его очага. Как известно, Индонезия находится на пересечении трех литосферных плит: тихоокеанской, азиатской континентальной и индийско-австралийской. В результате частота землетрясений здесь достаточно высока. Индонезийское метеорологическое и геофизическое агентство определило для землетрясения 1 января 1996 г. магнитуду по открытой шкале Рихтера, равную $M = 7$, и координаты эпицентра: $0,6^\circ$ с. ш. и $119,92^\circ$ в. д., глубина фокуса 39 км. Рассчитанный эпицентр землетрясения близок к зоне максимальных разрушений от землетрясения и цунами в пос. Тонгголобиби (расстояние до эпицентра 14 км). Согласно оценке Гарвардского университета, полученной по 24 станциям, землетрясение имело магнитуду по поверхностным волнам $M_s = 7,7$ и $M_w = 7,8$, по объемным волнам $M_b = 6,4$; координаты: $0,83^\circ$ с. ш., $120,01^\circ$ в. д. (он удален от пос. Тонгголобиби на 38 км), глубина 15 км. Сейсмический момент оценивается в $5,5 \cdot 10^{27}$ дин·см. В очаге, согласно решению Гарвардского университета, могла реализоваться одна из двух возможных плоскостей разрыва:

- 1) углы падения 8° , подвижки 69° и простираия 44° ;
- 2) углы падения 83° , подвижки 93° и простираия 244° .

По мнению В. К. Гусякова, в данном случае реализовывался второй вариант, т. е. имела место вбросовая подвижка практически без сдвиговой компоненты по крутой (83°) плоскости разрыва, ориентированной по азимуту N64E.

Землетрясение сопровождалось (1 января в 9.14 по Гринвичу, спустя час после основного толчка) относительно сильным афтершоком с магнитудой 5,7 по шкале Рихтера в море в точке с координатами $0,551^\circ$ с. ш., $119,897^\circ$ в. д., по оценке Гарвардского университета (по данным Индонезийского метеорологического и геофизического агентства, землетрясение произошло на суше в точке с координатами $0,7^\circ$ с. ш., $120,3^\circ$ в. д.). Если использовать оценки Гарвардского университета для плоскости разрыва и координаты первого афтершока, разрыв в первый час шел именно по направлению к Тонгголобиби, что и обусловило максимальную сотрясаемость в этом поселке.

Табл. 3.7 содержит все афтершоки (их координаты показаны на рис. 3.45) в районе центральной части о. Сулавеси за январь 1996 г. (данные американского информационного центра землетрясений получены от F. Gonzalez), они характеризуют сейсмическую активность региона.

Таблица 3.7

Данные афтершоков за январь 1996 г.

Дата	Время по Гринвичу	Координаты	Магнитуда
1 января	08.05	0,83N; 120,01E	7,8
1 января	09.10	0,55N; 119,9E	5,7
7 января	01.34	0,3N; 120,5E	4,8
11 января	19.45	0,49N; 119,5E	5,3
13 января	04.27	0,3N; 119,4E	4,8
13 января	17.52	0,77N; 120,2E	4,7
27 января	19.14	0,98N; 120,2E	5,2
31 января	17.46	0,53N; 119,65E	4,7

Положение и ориентация очага цунами обычно отождествляется с очагом цунамигенного землетрясения. Его эквивалентный радиус (в километрах) может быть оценен с помощью регрессионной зависимости [Ida, 1963]

$$\log R = 0,5M - 2,2 \quad (3.390)$$

и для $M = 7,7$ получим $R = 45$ км. Эффективное смещение водной поверхности (или морского дна) в очаге цунами также может быть оценено по эмпирической формуле [Ida, 1963; Пелиновский, 1982]

$$\log H_e = 0,8M - 5,6 \quad (3.391)$$

где H_e — в метрах. Смещение морского дна в очаге для $M = 7,7$ составляет 3,6 м. Таким образом, в очаге цунами с радиусом примерно 45 км могут быть изменения морского дна на 3,5 м. При таких размерах очаг землетрясения и цунами простирается на сушу, что и подтверждается разрушениями домов в пос. Тонгголобиби и в других местах (интенсивность землетрясения максимальна в прибрежной зоне, она оценивается в 6 баллов по международной шкале Меркали). Кроме того, в районе западнее от пос. Тонгголобиби местные жители отмечают опускание суши почти на 1 м, что также соответствует приведенным выше оценкам.

Измерения наката волн цунами. Инструментальные измерения максимальных высот наката волн цунами были сделаны в 16 пунктах на участке побережья длиной почти 100 км между о. Пангаласанг и пос. Симунту. Координаты каждого пункта измерений

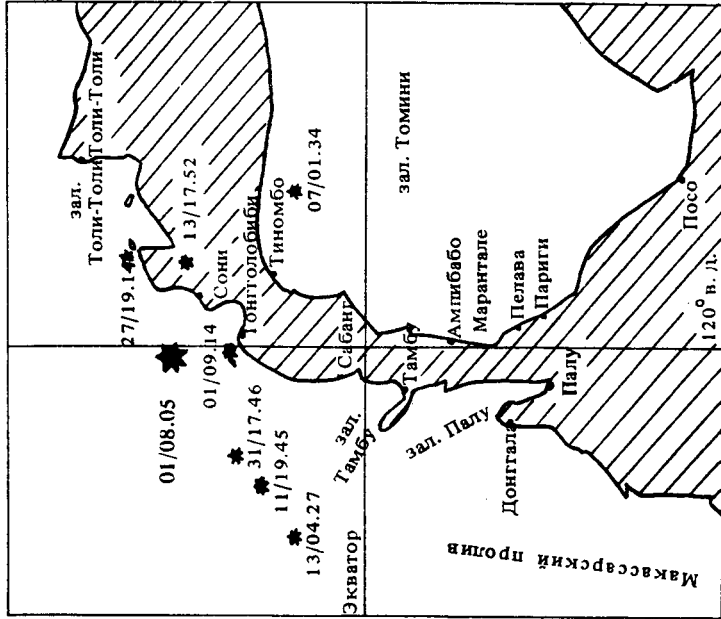


Рис. 3.45. Распределение афтершоков землетрясения 1 января 1996 г.

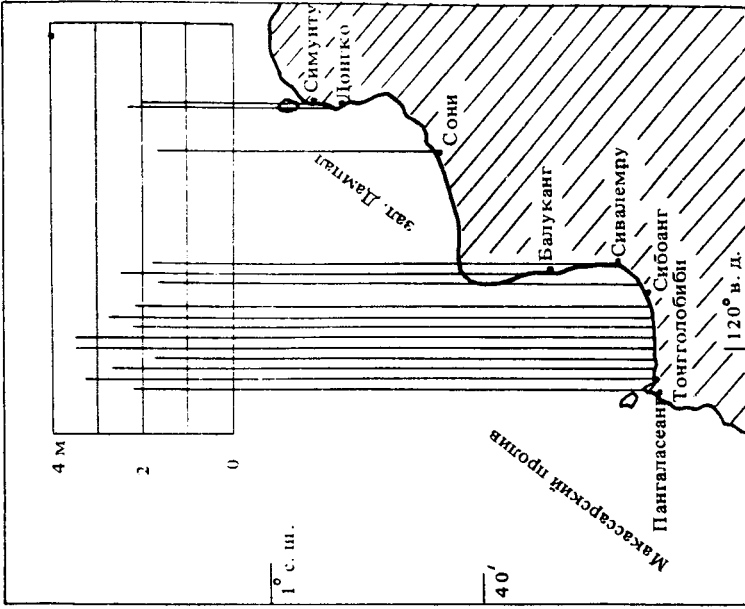


Рис. 3.46. Измеренные высоты заплесков цунами

были определены с помощью спутниковой системы навигации GPS (*global position system*). Практически всюду измерения высот заплеска проводились на основе ясно видимых следов цунами на стенах домов или ясно видимой границе разбросанных предметов: травы, деревьев, кусков стен. Все высоты заплесков корректировались на предвычисленную высоту прилива на момент измерений, которая, естественно, не учитывала возможного опускания берега в результате землетрясения (использовались таблицы приливов гидрографического управления Индонезийских военно-морских сил). Результаты измерений сведены в табл. 3.8 и представлены на рис. 3.46.

Таблица 3.8

Максимальные высоты заплеска волн цунами
(над средним уровнем моря)

Северная широта	Восточная долгота	Пункт	Высота, м
00°28'57,8"	119°54'25,1"	Пангаласеанг	2,28
00°28'34,2"	119°55'50,9"	Мунге	3,17
00°28'26,4"	119°56'51,9"	Лимбосу	2,81
00°28'33,5"	119°57'27,8"	Тонгголовиби	1,82
00°28'45,2"	119°58'35,6"	Тонгголовиби	3,37
00°28'51,4"	119°58'41,3"	Тонгголовиби	3,43
00°28'58,8"	119°59'30,0"	Тайпах (устье реки)	2,48
00°28'58,4"	119°59'51,4"	Тайпах	3,19
00°28'58,8"	119°59'52,0"	Тайпах	3,25
00°29'03,4"	120°00'11,9"	Тайпах	2,40
00°29'59,6"	120°01'38,8"	Сибоанг	1,78
00°33'03,6"	120°02'19,9"	Сивалемпу	1,62
00°34'52,8"	120°02'13,0"	Балуканг	2,52
00°45'57,2"	120°11'27,7"	Сони	1,79
00°49'15,3"	120°14'41,6"	Донгко	2,39
00°53'42,2"	120°14'14,6"	Симунту	2,00

Как видим, максимальная высота цунами в различных пунктах изменяется в пределах от 1,62 до 3,43 м над уровнем моря. Наибольшей высоты цунами достигло в пос. Тонгголовиби и к западу от него, т. е. в районе, отождествляемом с очагом цунами. Плотность функции распределения высот заплеска вдоль побережья практически постоянна, и интегральная функция распределения в диапазоне 1,62–3,43 м аппроксимируется линейным законом

$$P = 1,73 - 0,47H. \quad (3.392)$$

Средняя высота наката на всем участке побережья составляет $H = 2,5$ м с стандартным отклонением в 0,6 м. Последнее позволяет

оценить интенсивность цунами, определяемую по формуле [Соловьев, 1972]

$$I = 0,5 + \log_2 H, \quad (3.393)$$

равной $I = 1,8$. Следует отметить, что Соловьев, анализируя исторические данные, указывает максимальное значение интенсивности для о. Сулавеси и о. Калимантан в $I = 2$, и наше значение для цунами 1 января 1996 оказывается близким к нему. К сожалению, в нашем распоряжении пока еще отсутствуют мареографные данные (в частности, в бухте Палу и на о. Калимантан), которые позволили бы дополнить сделанные измерения характеристик цунами на суше.

Важно отметить, что цунами пришло в момент максимального прилива (на время землетрясения его предвычисленное значение составило 59 см над средним уровнем моря). В литературе очень часто исключают приливную компоненту в момент землетрясения, давая высоту наката волны цунами "в чистом виде". С учетом такой коррекции максимальная высота цунами изменяется в пределах от 1,03 до 2,84 м (среднее значение 1,93 м, что примерно в два раза меньше оцениваемого значения высоты цунами в очаге; это различие не противоречит известным гидродинамическим теориям эволюции начального возмущения). Следует, однако, иметь в виду, что процесс взаимодействия волны цунами с приливной волной, вообще говоря, носит нелинейный характер, особенно в приурезовой области, поэтому точность различных корректирующих значений высот заплеска не может быть очень высокой.

В районе пос. Тайпах мы нашли на стене дома три четко видимые линии — следы цунами, расстояние между которыми 1 и 15 см. Это означает, что цунами представляло собой по крайней мере три волны, что подтверждается показаниями очевидцев.

Для практических целей важно сопоставить измеренные высоты наката волн цунами с приводимыми данными в различного рода документах и сводках на региональном уровне (визуальные оценки, неучитывание прилива). Результаты сравнения представлены в табл. 3.9. Как видим, измерения дают большие значения высот волн, чем визуальные оценки. Коэффициент пропорциональности равен примерно 1,4 с отклонением $\pm 0,4$. Крайне важно сделать такое же сравнение и для других цунами, чтобы определить степень доверия к визуальным измерениям высот волн цунами.

Свидетельства очевидцев. Опрос очевидцев позволил собрать дополнительные сведения о характеристиках волн цунами, в частности о времени прихода волны, количестве волн, номере волны максимальной амплитуды, периода волн, характере наката волн, отступления моря перед приходом волны и т. п. Имеющиеся данные собраны в табл. 3.10.

Таблица 3.9

Измеренные высоты волн и визуальные оценки

Пункт	Визуальная оценка высоты, м	Измеренная высота, м
Тонголобиби	2	2,87 (в среднем)
Сибоанг	1,5	1,78
Сивалемпу	1,5	1,62
Балуканг	1,25	2,52

Таблица 3.10

Характеристики волн цунами по свидетельствам очевидцев

Пункт	Число волн	Номер волны макс. ампл.	Время прихода, мин	Период волны, мин	Отступление моря	Обрушение волны
Пангаласеанг			10			—
Мунте	3	2			+	—
Лимбосу	3	1				
Тонголобиби	3		5-7			
Тайпах (устье реки)	3					
Тайпах	3	2	5-7	1	+	—
Сибоанг	7	1			—	
Сивалемпу	3	3	5		+	+
Балуканг	4	1 или 2	5	2-3		+
Сони	3	1	1-5	1		+
Донгко	3	2	10			
Симунту	3	2				

Таким образом, в среднем на населенные пункты накатились три волны цунами с периодом 1-3 мин, причем первая или вторая волна была максимальной. Волна пришла через 5-10 мин после землетрясения. В трех случаях отмечено, что цунами предвещалось отступлением моря от побережья. Обрушение волны происходило, как правило, на косе, ограждающей поселки со стороны моря. Волна стояла около 15 мин (в низменных местах). Отметим также, что во время цунами шел сильный дождь. Сделаем некоторые оценки на основе имеющихся данных. Глубина воды в эпицентре землетрясения превышает 200 м (эпицентр располагается на свале глубин между изобатами 200 и 1400 м). Считая, что период и длина волны

(размер очага) связаны формулой линейной теории длинных волн

$$T = R/(gh)^{1/2} \quad (3.394)$$

(g – ускорение свободного падения), и принимая среднюю глубину в очаге $h = 800$ м, из (3.394) найдем оценку периода волны цунами: $T = 4$ мин, что близко к наблюдаемому значению. Время прихода волны цунами больше периода волны из-за более медленного распространения волны на мелководье и имеет порядок 5–10 мин, что также близко к значениям, даваемым очевидцами цунами.

Характер наката волн цунами зависит от параметра обрушения [Пелиновский, 1982]

$$B\gamma = (\omega^2 H)/(g\alpha^2), \quad (3.395)$$

где α – уклон берега, ω – частота волны. Если $B\gamma > 1$, то волна обрушится. Принимая $H = 3$ м, период волны в 100 с и уклон дна $1/20$, получим из (3.395) $B\gamma = 0,5$, что близко к переходному значению. Следовательно, обрушение волны возможно на плавных откосах, что и подтверждают свидетельства очевидцев.

Воздействие цунами на берега и сооружения. Как правило, прибрежные поселки отделены от моря естественными песчаными дамбами, высота которых может достигать 1–2 м. Принимая на себя удар волн цунами, рельеф приурезовой области изменяется в процессе цунами, в частности, очевидцы цунами утверждают, что высоты естественных дамб уменьшились после цунами примерно на 1 м. К сожалению, невозможно разделить процессы опускания суши в результате землетрясения и эрозии песчаного материала естественных дамб. Только на о. Пангаласеанг описываемое очевидцами вертикальное смещение кораллового волнолома на 70 см можно связать в чистом виде с эффектами опускания суши. Можно предположить, что изменение высоты песчаных дамб сверх 70 см на 30–50 см связано с процессами эрозии морского берега волнами цунами. Следует отметить, что на о. Сулавеси, как и в большей части Индонезии, практически отсутствуют ветровые волны (главный фактор эрозии морского берега в других регионах), поэтому Индонезия – уникальный полигон для изучения процессов передвижения наносов волнами цунами. Нами обнаружен засыпанный свежим морским песком участок берега в районе пос. Пангаласеанг. Этим процессам сейчас уделяется большое внимание в связи с изучением следов палеоцунами [Minoura, Nakaya, 1991], разрабатываются также тематические модели явления [Pelinovsky, Talipova, 1994] (соответствующие оценки см. в разд. 3.4.3). Другим примером транспорта наносов в волнах цунами является размыв песка вблизи фундамента здания, приведшее к разрушению бетонной стены здания в пос. Тайпах во время отливной волны цунами (по рассказам очевидцев).

Разрушительная сила цунами, естественно, зависит от рельефа местности, в частности, в долинах рек цунами проникло на большие

расстояния (порядка 200 м), оно перенесло несколько рыболовных ботов на сушу. Такие явления отмечаются практически во всех цунами. На суше наиболее сильно цунами проявилось совместно с землетрясением в пос. Тонгголобиби, разрушив все дома на одном участке и вызвав человеческие жертвы. В других местах высота водного потока на берегу была порядка $H = 1$ м, судя по отметкам на стенах домов. Скорость его перемещения может быть оценена по формуле [Мурти, 1981]

$$c = (1 + 2)(gH)^{1/2}, \quad (3.396)$$

и она не превышает 5 м/с. Такая скорость позволяла убежать от волны цунами, что и успели сделать многие очевидцы цунами.

И наконец, относительно небольшая высота водного потока во многих населенных пунктах заставляет более внимательно рассмотреть роль приливов для оценки зоны затопления побережья волнами цунами. Волна цунами пришла в момент высокой воды (59 см над средним уровнем моря) и привела к большим разрушениям. В момент низкой воды уровень моря опускается на 1,3 м, т. е. перепад уровня воды составляет 1,89 м. Это означает, что если бы землетрясение случилось в момент отлива, то цунами было бы практически незаметным всюду в населенных пунктах, за исключением долин рек и участка пос. Тонгголобиби.

Оценка цунамиопасности центральной части о. Сулавеси. Полученная в ходе данной экспедиции информация о параметрах цунами совместно с историческими данными, приведенными в табл. 3.6, позволяет сделать грубую оценку цунамириска центральной части о. Сулавеси. Она основана на построении частоты превышения высоты цунами: количества случаев наблюдения цунами с максимальной высотой, большей заданной к периоду наблюдений. В нашем случае — четыре цунами за 100 лет, соответствующие значения частот превышения представлены на рис. 3.47. Эти данные неплохо аппроксимируются пуассоновской кривой

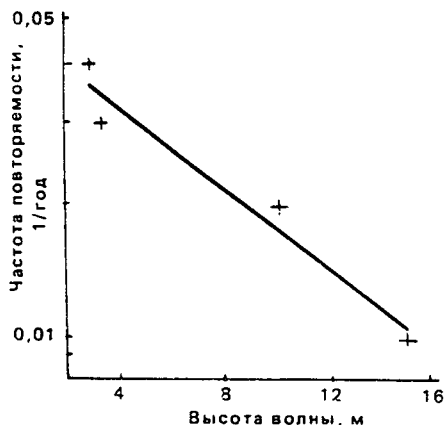
$$f = 0,05 \exp(-0,1H), \quad (3.397)$$

где H — в метрах и f — в 1/г. Простые оценки, впрочем, они очевидны из табл. 3.6, показывают, что каждые 25 лет можно ожидать цунами высотой около 2 м и раз в 100 лет — цунами высотой 15 м.

Сопоставление с Шикотанским цунами 5 октября 1994 г. Хотелось бы провести сопоставление условий Индонезийского и Шикотанского цунами, а также условий проведения экспедиций. Разница в магнитуде этих землетрясений составила 0,5, а Шикотанское землетрясение и цунами были более грандиозным явлением [Yeh et al., 1995]. Между тем есть и общие черты этих событий.

1. Оба землетрясения произошли в непосредственной близости от побережья, так что цунами пришло практически одновременно. Это обстоятельство не дает возможности предупредить население о

Рис. 3.47. Частота повторяемости цунами для центральной части о. Сулавеси



цунами. Как известно, на Южных Курилах отсутствует собственная служба предупреждения о цунами, они получают предупреждение из Южно-Сахалинска. Во время цунами 5 октября 1994 г. такое предупреждение поступило только 8 ч спустя после землетрясения из-за разрушения приемной антенны во время землетрясения, и только по счастливой случайности никто не пострадал от цунами. На о. Кунашир, куда волна

пришла значительно позднее, тревога была объявлена местными руководителями, знакомыми с явлением цунами. На о. Шикотан цунами пришло одновременно с землетрясением и его предупредить было уже невозможно. Ситуация на о. Сулавеси (в центральной части) в этом смысле абсолютно идентична: все цунами произошли одновременно с землетрясением и их предупредить стандартными способами (уже после начала землетрясения) невозможно. Единственный путь здесь обучать население выживанию при таких экстремальных ситуациях, что и рекомендуется международной комиссией по цунами. Однако, по существу, настоящего обучения с тренировками не происходит как у нас, так и в Индонезии.

2. Крайне важно отметить необходимость сейсмостойкого строительства с надлежащим качеством работ. Обследование зон, подвергшихся разрушению, показывает, что наибольший ущерб терпят ветхие дома. Многие дома на о. Сулавеси строятся на сваях, что, с одной стороны, помогает при малой высоте волны цунами (таких случаев выявлено много при обследовании), а с другой стороны, их качество недостаточное и дома разрушаются при землетрясении или при размывах земли волнами цунами. Цунами происходят относительно редко (раз в 25 лет), поэтому, по существу, нет планирования деревень на случай затопления, многие дома стоят в потенциально опасной зоне. Некоторый опыт такого планирования имеется в России, где создана предварительная карта цунамирайонирования Дальнего Востока, этот опыт может быть использован и для Индонезии.

3. Условия экспедиции на о. Сулавеси были близки к традиционным условиям экспедиций на Курильских островах (хотя и приходится признать, что качество научного снаряжения — средств навигации и измерения — в этой экспедиции было лучше, чем в

Шикотанской). В частности, во время зимнего сезона дождей многие дороги становятся непроходимыми и перекрываются оползнями, поэтому были проблемы с транспортировкой: ожидание самолета в течение нескольких дней, невозможность посещения ряда мест из-за оползневой опасности. Для передвижения использовались автомашины, мотоциклы и боты; ночевать приходилось в недостаточно приспособленных домах. Помощь официальных властей и армии зачастую оказывалась решающей для успешного обследования, это продемонстрировала и данная экспедиция.

4. С точки зрения долгосрочного прогноза, цунами о. Сулавеси имеет те же значения предсказываемых высот волн, что и Курильские острова. Так, прогнозируемые на 100 лет высоты волн для о. Шумшу и о. Парамушир равны 9–17 м [Го и др., 1988], в то время как для о. Сулавеси – 15 м. Высокая частота цунамигенных землетрясений на о. Сулавеси (не только для его центральной части) дала возможность С. Л. Соловьеву (1972) выделить Сулавеси в отдельную зону при сопоставлении данных о землетрясении и цунами в различных частях Тихого океана. Первая российская экспедиция в Индонезию позволила уточнить ряд данных о параметрах цунами и землетрясений, содержащихся в российских источниках, а также получить детальные карты и другие материалы, которые нужны для анализа фактического материала.

5. Важнейшая проблема, с которой встретились обе экспедиции, заключается в учете смещения суши во время цунамигенного землетрясения. Эта характеристика измерялась в ходе Шикотанского цунами (остров опустился на 65 см) специальной экспедицией. В практике обследования цунами используются визуальные оценки такого смещения, точность которых очень мала. В результате высокая точность измерения высот волн с учетом приливов "смазывается" низкой точностью измерения смещения суши. Этот вопрос необходимо рассматривать специально, поскольку соответствующие измерения требуют другой техники и значительно больших финансов. Он, однако, является принципиальным для численного моделирования цунами и выбора наиболее адекватных моделей.

6. Наконец, важно отметить, что обе экспедиции проводились по одной методике и по одним требованиям, что, конечно же, способствует сопоставлению результатов. С другой стороны, индонезийская экспедиция показала, что опыт Шикотанского цунами 5 октября 1994 г., когда работало сразу несколько экспедиций, неприменим к большинству обследований цунами, выполняемых малым числом сотрудников. В частности, проблема определения остаточных деформаций побережья требует своего специального рассмотрения.

Литература

- Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983.
- Александров В. Е., Басов Б. И., Левин Б. В., Соловьев С. Л. О формировании диссипативных структур при моретрясениях // ДАН СССР. 1986. Т. 289, № 5. С. 1071—1074.
- Алешков Ю. З. Полная модель процесса распространения длинных волн и их взаимодействия с преградами // Исследования цунами. 1987. № 2. С. 113—122.
- Антонец М. А., Шерстнева Л. В. Сейсмические "медленные" нормальные волны // Коледания и волны в жидкости. Горький: ГПИ, 1988. С. 19—25.
- Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотическая теория коротких волн. М.: Наука, 1972.
- Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны. Л.: ЛГУ, 1985.
- Басов Б. И., Дорфман А. А., Левин Б. В., Харламов А. А. О возмущениях поверхности океана, возбуждаемых извержением подводного вулкана // Вулканология и сейсмология. 1981. № 1. С. 93—98.
- Белберова Д. Э., Козлов С. И., Массель С. Р., Пелиновский Е. Н. Полиномиальные аппроксимации модели Беркгофа для волн в бассейне переменной глубины // Морской гидрофизический журнал. 1992. № 2. С. 3—9.
- Белоконь В. И., Гой А. А., Резник Б. Л., Смаль Н. А., Харитонский П. В. Возбуждение цунами диспергирующим пакетом сейсмических волн // Исследования цунами. 1986. № 1. С. 28—36.
- Бенилов Е. С., Пелиновский Е. Н. К теории распространения волн в нелинейных флукутирующих средах без дисперсии // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 1. С. 175—185.
- Бенилов Е. С., Пелиновский Е. Н. Нелинейные волны в случайных средах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 8. С. 760—766.
- Бондаренко Г. А., Иващенко А. И., Ким Ч. У. Долгосрочный прогноз возникновения сильных землетрясений в Курильском регионе // Количественная сейсмология и сейсмостойкое строительство на Дальнем Востоке. Южно-Сахалинск, 1985. С. 13—14.
- Бурмынская Р. Н., Левин Б. В., Соловьев С. Л. Кинематический критерий цунамигенности подводного землетрясения // ДАН СССР. 1981. Т. 261, № 6. С. 1325—1330.
- Виген С. Проблема цунами и ее значение для жизни и деятельности человека на побережье Тихого океана / Тр. ДВНИГМИ. 1984. Вып. 103. С. 3—7.
- Войт С. С., Лебедев А. Н., Себекин Б. И. Влияние вращения Земли на энергетические характеристики волн цунами // Исследования цунами. 1986. № 1. С. 15—20.
- Вольцингер Н. Е. Длинные волны на мелкой воде. Л.: Гидрометеиздат, 1985.
- Вольцингер Н. Е., Клеванный К. А., Пелиновский Е. Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеиздат, 1989.
- Галкин В. М., Голинько В. И., Пелиновский Е. Н. Аналитическая теория наката длинных волн на берег в каналах переменного сечения // Гидрофизические процессы в реках, водохранилищах и окраинных морях. М.: Наука, 1989. С. 155—162.
- Галкин В. М., Голинько В. И., Малыженкова В. И., Пелиновский Е. Н. Восстановление характеристик волн цунами в очаге по прибрежным записям // Исследования цунами. 1993. № 5. С. 106—111.
- Гардер О. И., Долина И. С., Пелиновский Е. Н., Поплавский А. А., Фридман В. Е. Генерация волн цунами гравитационными литодинамическими процессами // Исследования цунами. 1993. № 5. С. 50.
- Го Ч. Н., Кайстренко В. М., Симонов К. В., Соколова С. Е. О прогнозе сильного цунами на Южных Курильских островах // Тез. совещания "Состояние исследований и разработок по созданию единой автоматизированной системы цунами". Обнинск, 1985. С. 119—122.
- Го Ч. Н., Кайстренко В. М., Пелиновский Е. Н., Симонов К. В. Количественная оценка цунамиопасности и схема цунамирайонирования тихоокеанского побережья

- СССР // Тихоокеанский ежегодник / ДВО АН СССР. Владивосток, 1988. С. 9–17.
- Го Ч. Н., Кайстренко В. М., Пелиновский Е. Н., Симонов К. В. Прогноз цунамиопасности для побережья Камчатки // Метеорология и гидрология. 1986. № 7. С. 74–81.
- Гой А. А., Умников А. Ю. Деформация земной поверхности при землетрясениях // Исследования цунами. 1986. № 1. С. 28–36.
- Гогодзе И. К., Попов Ю. П., Хуцишвили В. В. Непрерывные автомодельные и периодические решения уравнений мелкой воды // Накат цунами на берег / ИПФАН СССР. Горький, 1985. С. 64–74.
- Голинько В. И., Пелиновский Е. Н. Накат длинных волн на берег в каналах переменного сечения // Метеорология и гидрология. 1988. № 9. С. 107–112.
- Головачев Е. В., Кочергин И. Е., Пелиновский Е. Н. Эффект фазы Эйри на распространение краевых волн // Морской гидрофизический журнал. 1991. № 1. С. 3–7.
- Гриншору Р., Пелиновский Е. Н. Взаимодействие уединенных поверхностных и внутренних волн с бегущими возмущениями // Докл. РАН. 1995. Т. 344, № 3. С. 394–396.
- Гудялис В. К., Вовярис А. Ю., Шичкус Б. К. Гидродинамические характеристики потока заплеска в условиях отлогого песчаного берега юго-восточного сектора Балтийского моря (2. Особенности мгновенных скоростей движения фронта поток заплеска) // Труды АН Литовской ССР, сер. Б. 1989. Т. 4. С. 121–126.
- Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965.
- Гусева Т. В., Галаганов О. Н., Яковлев Ф. Л. и др. Результаты геологического обследования и спутниковых геодезических измерений на острове Шикотан 18–30 октября 1994 г. // Федеральная система сейсмологических наблюдений и прогноза землетрясений: Инф.-анал. бюлл. 1994. Экстренный выпуск. С. 23–31.
- Гусяков В. К. Обзор работ по проблеме возбуждения волн цунами // Методы расчета возникновения и распространения цунами. М.: Наука, 1978. С. 18–29.
- Гусяков В. К. Об оценке цунамиопасности подводных землетрясений по спектральным характеристикам рэлеевских волн // Генерация цунами и выход волн на берег. М.: Радио и связь, 1984. С. 84–95.
- Гусяков В. К. и др. Шикотанское цунами 5 октября 1994 г. // Докл. РАН. 1996.
- Долина И. С., Пелиновский Е. Н. Дифракция поверхностных гравитационных волн на подводном препятствии // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1992. Т. 28, № 2. С. 204–208.
- Дорфман А. А., Пелиновский Е. Н., Степанянц Ю. А. Цилиндрические и сферические волны конечной амплитуды в слабодиспергирующих средах // ЖПМТФ. 1981. № 2. С. 78–85.
- Дорфман А. А. Уравнения приближенной нелинейно-дисперсионной теории длинных гравитационных волн, вызванных перемещениями дна бассейна // Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. М.: Наука, 1977. С. 18–25.
- Доценко С. Ф., Сергеевский Б. Ю., Черкесов Л. В. Генерация пространственных волн цунами подвижками дна конечной родолжительности // Исследования цунами. 1987. № 2. С. 27–34.
- Доценко С. Ф., Сергеевский Б. Ю., Черкесов Л. В. О длинных волнах от осесимметричных начальных смещений свободной поверхности жидкости // Эволюция цунами от очага до выхода на берег. М.: Радио и связь, 1982. С. 30–34.
- Доценко С. Ф., Сергеевский Б. Ю., Черкесов Л. В. Пространственные волны цунами, вызванные знакопеременным смещением поверхности океана // Исследования цунами. 1986. № 1. С. 7–14.
- Доценко С. Ф., Соловьев С. Л. Сравнительный анализ возбуждения цунами "поршневыми" и "мембранными" подвижками дна // Исследования цунами. 1990. № 4. С. 21–27.
- Ефимов В. В. и др. Волны в пограничных областях океана. Л.: Гидрометеоздат, 1985.

Егоров Ю. А. Гидродинамическая модель генерации волн цунами извержением подводного вулкана // Природные катастрофы и стихийные бедствия в Дальневосточном регионе / ДВО АН СССР. Владивосток, 1990. Т. 1. С. 82–93.

Егоров Ю. А., Молотков И. А. Асимптотическое и численное исследование длинных нелинейных поверхностных волн // Исследования цунами. 1987. № 2. С. 72–80.

Егоров Ю. А., Молотков И. А. Эволюция высоты и крутизны уединенной волны цунами в прибрежной зоне // Исследования цунами. 1993. № 5. С. 71–73.

Езерский А. Б., Рабинович М. И., Реутов В. П., Старобинец И. М. Пространственно-временной хаос при параметрическом возбуждении капиллярной ряби // ЖЭТФ. 1986. Т. 91, № 6. С. 2070–2082.

Жарков В. Н. Внутреннее строение земли и планет. М.: Наука, 1983.

Железняк М. И. Воздействие длинных волн на сплошные вертикальные преграды // Накат цунами на берег / ИПФАН СССР. Горький, 1985. С. 122–139.

Железняк М. И., Пелиновский Е. Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег / ИПФАН СССР. Горький, 1985. С. 8–33.

Жмур В. В. Поверхностные явления над очагами сильных подводных землетрясений // Исследования цунами. 1987. № 2. С. 62–71.

Загрядская Н. Н., Иванова С. В., Нуднер Л. С., Шошин А. Н. Действие длинных волн на вертикальную преграду // Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. 1980. Т. 138. С. 94–101.

Заякин Ю. А. Цунами на Дальнем Востоке России. Петропавловск, 1996.

Иванов В. В., Симонов К. В. Следы цунами в прибрежной зоне Второго Курильского пролива // Оперативный и долгосрочный прогноз цунами / ДВО АН СССР. Владивосток, 1983. С. 163–170.

Иванов В. В., Королев Ю. П. Волны цунами, возбуждаемые извержением подводного вулкана // Исследования цунами. 1986. № 1. С. 45–48.

Иванов В. В., Гардер О. И. Длительность процесса землетрясения // ДАН СССР. 1985. Т. 283, № 5. С. 1149–1152.

Ивченко В. О. и др. Практикум по динамике океана. Санкт-Петербург: Гидрометеоздат, 1992.

Кайстренко В. М. Исследование направленности источника цунами в зависимости от вида начального возмущения // Параметры очагов цунамигенных землетрясений и особенности цунами. Владивосток: ДВНЦ, 1980. С. 10–16.

Кайстренко В. М. Обратная задача на определение источника цунами // Волны цунами / Труды СахКНИИ. 1972. № 29. С. 82–92.

Кайстренко В. М. Продолжение волнового поля применительно к определению источника цунами // Генерация цунами и выход волн на берег. М.: Радио и связь, 1984. С. 26–40.

Кайстренко В. М., Пелиновский Е. Н., Симонов К. В. Накат и трансформация волн цунами на мелководье // Метеорология и гидрология. 1985. № 10. С. 68–75.

Карев В. Ю., Симонов К. В., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами: детальное цунамирайонирование тихоокеанского побережья Камчатки // Исследования цунами. 1990. № 4. С. 64–84.

Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.

Керчман В. И., Лобковский Л. И. Моделирование сейсмоструктурного процесса в активных переходных зонах по клавишной схеме сильнейших землетрясений // ДАН СССР. 1986. Т. 291, № 5. С. 1086–1091.

Клеваный К. А., Пелиновский Е. Н. Диссипация цунами в придонном пограничном слое — модель с постоянным коэффициентом обмена // Исследования цунами. 1986. № 1. С. 80–88.

Кононкова Г. Е., Показеев К. В. Динамика морских волн. М: МГУ, 1985.

Кособок В. Г., Шебаляин П. Н., Тихонов И. Н., Хили Дж. Х., Дьюи Дж. У. Заблаговременный среднесрочный прогноз Шикотанского землетрясения 4 октября 1994 г. // Федеральная система сейсмологических наблюдений и прогноза землетря-

сеней: Инф.-анал. бюлл. 1994. Экстренный выпуск. С. 71–73.

Костицына О. В., Носов М. А., Шелковников Н. К. Исследование нелинейности в процессе генерации волн цунами подвижками морского дна // Вестник Московского университета. Сер. Физика, Астрономия. 1992. Т. 33, № 4. С. 87–90.

Кочергин И. Е., Пелиновский Е. Н. Нелинейное взаимодействие триады краевых волн // Океанология. 1989. Т. 29, № 6. С. 889–903.

Кочергин И. Е., Пелиновский Е. Н. Распространение цунами вдоль берега на большие расстояния // Колебания и волны в жидкости / ГПИ. Горький, 1988. С. 11–19.

Козлов С. И., Пелиновский Е. Н. Приближенный метод описания поверхностных волн в бассейне переменной глубины // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25, № 12. С. 1321–1325.

Коул Р. Подводные взрывы. М.: ИЛ, 1950.

Кульмач П. П., Филиппенко В. З. Воздействие цунами на морские гидротехнические сооружения. М.: Транспорт, 1984.

Курин В. В., Немцов Б. Е., Эйдман В. Я. Предвестник и боковые волны при отражении импульсов от границы раздела двух сред // УФН. 1985. Т. 147, № 1. С. 157–180.

Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане: В 2 т. М.: Мир, 1981.

Левин Б. В., Сасорова Е. В. Замечания об ударноволновом представлении механизма возбуждения цунами // Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. М.: Наука, 1977. С. 37–40.

Левин Б. В., Трубников Б. А. Фазовые переходы в решетке параметрических волн на поверхности колеблющейся жидкости // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44, № 7. С. 311–315.

Макеев С. В., Павлов В. И. Об оценке влияния хаотических подвижек дна на средний уклон поверхности океана // Вестник МГУ. Сер. Физика. 1991. Т. 32, № 5. С. 100–102.

Мамрадзе Г. П., Гвелесиани Т. Л., Джинджихашвили Г. Я. Прогнозирование волн в водохранилищах при сейсмических воздействиях. М.: Энергоатомиздат, 1991.

Марчук А. Г., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И. Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, 1983.

Мазова Р. Х., Пелиновский Е. Н., Поплавский А. А. К физической интерпретации закона повторяемости высот цунами // Вулканология и сейсмология. 1986. № 1. С. 85–90.

Мазова Р. Х., Пелиновский Е. Н., Соловьев С. Л. Статистические данные о характере наката волн цунами // Океанология. 1983. Т. 23, № 6. С. 932–937.

Мазова Р. Х., Осипенко Н. Н., Пелиновский Е. Н. Влияние нелинейности на характеристики длинных волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1987. Т. 23, № 9. С. 950–955.

Мазова Р. Х., Осипенко Н. Н., Пелиновский Е. Н. Диссипативная модель наката длинных волн на берег // Океанология. 1990. Т. 30, № 1. С. 40–42.

Мирчина Н. Р., Пелиновский Е. Н. Дисперсионное усиление волн цунами // Океанология. 1987. Т. 27, № 1. С. 35–40.

Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965.

Мурти Т. Сейсмические морские волны – цунами. Л.: Гидрометеоздат, 1981.

Новикова Л. Е., Островский Л. А. Об акустическом механизме возбуждения волн цунами // Океанология. 1982. Т. 22, № 5. С. 693–697.

Носов М. А. Сравнительный анализ возбуждения цунами поршневой и бегущей подвижками дна // Вулканология и сейсмология. 1995. № 6. С. 70–75.

Носов М. А., Шелковников Н. К. Об эффекте дисперсионного усиления цунами // Исследования цунами. 1993. № 5. С. 117–121.

Носов М. А., Шелковников Н. К. Генерация цунами бегущей подвижкой дна // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, Астрономия. 1995. Т. 36, № 4. С. 96–101.

Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.

Ньюмен Дж. Морская гидродинамика. Л.: Судостроение, 1985.

- Осипенко Н. Н., Пелиновский Е. Н. Нелинейная трансформация и накат длинных волн на берег // *Океанология*. 1992. Т. 32, № 4. С. 640–646.
- Островский Л. А. Нелинейные внутренние волны во вращающейся жидкости // *Океанология*. 1978. Т. 18, № 2. С. 181–191.
- Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. Трансформация волн на поверхности жидкости переменной глубины // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1970. Т. 6, № 9. С. 934–939.
- Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. Рефракция нелинейных морских волн в береговой зоне // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1975. Т. 11, № 1. С. 68–75.
- Островский Л. А., Шрира В. И. Неустойчивость и саморефракция солитонов // *ЖЭТФ*. 1976. Т. 71, № 4. С. 1412–1420.
- Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика: в 2 т. М.: Мир, 1984.
- Пелиновский Е. Н. Нелинейная динамика волн цунами / ИПФАН СССР. Горький, 1982.
- Пелиновский Е. Н. О поглощении нелинейных волн в диспергирующих средах // *ЖПМТФ*. 1971. № 2. С. 68–71.
- Пелиновский Е. Н. Очередное цунами: где и когда его ждать? // *Наука в СССР*. 1988. № 1. С. 18–27.
- Пелиновский Е. Н. Спектральный анализ простых волн // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1976. Т. 19, № 3. С. 373–383.
- Пелиновский Е. Н. "Дифференциальная" модель волн на воде // *ДАН СССР*. 1988. Т. 300, № 5. С. 1231–1234.
- Пелиновский Е. Н., Трошина Е. Н. Генерация длинных волн случайными источниками // *Морской гидрофизический журнал*. 1991. № 2. С. 3–7.
- Пелиновский Е. Н., Трошина Е. Н. Распространение длинных волн в проливах // *Морской гидрофизический журнал*. 1993. № 1. С. 47–52.
- Пелиновский Е. Н., Степанянц Ю. А. Цилиндрические волны цунами // *Распространение и набегание на берег волн цунами*. М.: Наука, 1981. С. 104–117.
- Подъяпольский Г. С. Возбуждение цунами землетрясением // *Методы расчета возникновения и распространения цунами*. М.: Наука, 1978. С. 30–87.
- Полякова А. М. Цунами в Приморье 26 мая 1983 года и его последствия / ТОИ. Владивосток, 1988.
- Рабинович А. Б. Длинные гравитационные волны в океане: захват, резонанс, излучение. Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 1993.
- Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Колебания и волны в линейных и нелинейных системах. М.: Наука, 1987.
- Селезов И. Т., Сидорчук В. Н., Яковлев В. В. Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа. Киев.: Наукова Думка, 1983.
- Соловьев С. Л., Го Ч. Н. Каталог цунами на западном побережье Тихого океана. М.: Наука, 1974.
- Соловьев С. Л., Го Ч. Н. Каталог цунами на восточном побережье Тихого океана. М.: Наука, 1975.
- Соловьев С. Л., Го Ч. Н., Ким Х. С. Каталог цунами в Тихом океане. 1969–1982 гг. М.: Межведомств. геофиз. комитет, 1986.
- Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
- Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: ИЛ, 1959.
- Шокин Ю. И., Чубаров Л. Б., Иарчук А. Г., Симонов К. В. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. Новосибирск: Наука, 1988.
- Шрира В. И. О длинных существенно нелинейных волнах во вращающемся океане // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1986. Т. 22, № 4. С. 395–405.
- Шрира В. И. Нелинейная рефракция солитонов // *ЖЭТФ*. 1980. Т. 79, № 1. С. 87–98.
- Щетников Н. А. Цунами на побережье Сахалина и Курильских островов по мареографным данным 1952–1968 гг. / ДВО АН СССР. Владивосток, 1990.
- Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

- Черкесов Л. В. Гидродинамика волн. Киев: Наукова Думка, 1980. 259 с.
- Хуцишвили В. В. Расчет наката длинных монохроматических волн на откос // Исследования цунами. 1987. № 2. С. 106–112.
- Эббот М. Б. Гидравлика открытого потока. М.: Энергоатомиздат, 1983.
- Abdulaev S. S. Chaos and dynamics of rays in waveguide media // Gordon & Breach Sci. Publ. London – N.Y., 1991.
- Abdullaev F. Theory of solitons in inhomogeneous media // J. Wiley, 1994.
- Abe K. Size of great earthquakes of 1837–1974 inferred from tsunami data // J. Geophys. Res. 1979. V. 84, № B4. P. 1561–1568.
- Ablowitz M. J., Clarkson P. A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge Univ. Press, 1991.
- Akylas T. R. On excitation of long nonlinear water waves by a moving pressure distribution // J. Fluid Mech. 1984. V. 141. P. 455–466.
- Amiran D. H. K., Arieh E., Turcotte T. Earthquakes in Israel and Adjacent Areas: Macroscopic Observations since 100 B. C. E. // Israel Exploration J. 1994. V. 44. P. 261–305.
- Atwater F. A., Moore A. L. A tsunami about 1000 years ago in Puget Sound, Washington // Science. 1992. V. 258. P. 1614–1617.
- Bartholomeusz E. F. The reflection of long waves at a step // Proc. Camb. Phil. Soc. 1958. V. 54. P. 106–118.
- Bailard J. A. An energetics total loadsediment transport model for a plane sloping beach // J. Geoph. Res. 1981. V. 86, № C11. P. 10938–10954.
- Bailard J. A., Inman D. L. An energetics bedload model for plane sloping beach: local transport // J. Geoph. Res. 1981. V. 86, № C3. P. 2035–2043.
- Battjes J. A. Surf-zone dynamics // Ann. Rev. Fluid Mech. 1988. V. 20. P. 257–293.
- Bell T. H. Statistical features of seafloor topography // Deep-Sea Research. 1975. V. 22. P. 883–892.
- Benilov E. S. On the surface waves in a shallow channel with an uneven bottom // Stud. Appl. Math. 1992. V. 87. P. 1–14.
- Benjamin T. B. The stability of solitary waves // Proc. R. Soc. London. 1972. V. A328. P. 153–183.
- Benjamin T. B., Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion // Proc. R. Soc. London. 1954. V. A225. P. 505–515.
- Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. L. On model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Phil. Trans. R. Soc. London. 1972. V. A272. P. 47–102.
- Bona J. L. On the stability theory of solitary waves // Proc. R. Soc. London. 1975. V. A349. P. 363–374.
- Bona J. L., Pritchard W. S., Scott L. R. An evaluation of a model equation for water waves // Phil. Trans. R. Soc. London. 1981. V. 302. P. 457–510.
- Boczar-Karakiewicz B., Bona J. L., Cohen D. L. Interaction of shallow-water waves and bottom topography // Dynamical Problems in Continuum Physics. Springer. 1987. P. 131–176.
- Bourret R. C. Stochastically perturbed fields with application to wave propagation in random media // Nuovo Cimento. 1962. V. 26, № 1. P. 1–31.
- Braddock P. D., Van den Dresse P., Peady G. W. Tsunami generation // J. Fluid Mech. 1970. V. 59, № 4. P. 817–828.
- Buatt-Smith J. B. An integral equation for unsteady surface waves and a comment of the Boussinesq equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 49. P. 625–633.
- Buatt-Smith J. B. The reflection of a solitary wave by a vertical wall // J. Fluid Mech. 1988. V. 197. P. 503–521.
- Buatt-Smith J. B., Longuet-Higgins M. S. On the speed and profile of step solitary waves // Proc. R. Soc. London. 1976. V. A350. P. 175–189.
- Callahan P. S., Daffer W. H. Search for the earthquake effects in TOPEX/POSEIDON Data // EOS. 1994. V. 75, № 44. P. 357.
- Camassa R., Wu T. Y. Stability of forced steady solitary waves // Phil. Trans. R. Soc. London. 1991. V. A337. P. 429–466.

- Camfield F. E. Tsunami effects on coastal structures // *J. Coastal Research*. 1994. № 12. P. 177–187.
- Carrier G. F., Greenspan H. P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach // *J. Fluid Mech.* 1958. V. 4, № 1. P. 97–109.
- Carrier G. F., Noiseux L. F. The reflection of obliquely incident tsunamis // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 133. P. 147–160.
- Chang P., Melville W. K., Miles J. W. On the evolution of a solitary wave in a gradually varying channel // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 95. P. 401–414.
- Chen Y., Liu P. Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 288. P. 351–381.
- Choi B. H., Lee H. J., Imamura F., Shuto N. Computer Animation of Marine Process – Tsunami Events // *J. Korean Soc. Coastal and Ocean Engn.* 1993. V. 5, № 1. P. 19–24.
- Choi B. H., Pelinovsky E., et al. Tsunami runup survey at East Coast of Korea due to the 1993 Southwest of the Hokkaido Earthquake // *J. Korean Soc. Coastal and Ocean Engn.* 1994a. V. 6, № 1. P. 117–128.
- Choi B. H., Wo S. B., Pelinovsky E. A numerical simulation of the 1993 East Sea Tsunami // *J. Korean Soc. Coastal and Ocean Engn.* 1994b. V. 6, № 5. P. 404–412.
- Chwang A. T., Wu T. Y. Cylindrical solitary waves // *Lect. Notes Phys.* 1977. V. 64. P. 80–90.
- Cokelet E. D. Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth // *Phil. Trans. R. Soc. London*. 1977. V. A286. P. 183–230.
- Cole S. L. Transient waves produced by flow past a bump // *Wave Motion*. 1985. V. 7. P. 579–587.
- Cumberbatch E., Wen S. Some results on the approach of a slowly-varying gravity wave to a beach // *Geoph. Fluid Dyn.* 1973. V. 5. P. 313–328.
- Dingemans M. W. Water wave propagation over uneven bottoms // *World Sci. Singapore*, 1996.
- Djumagaliev V. A., Rabinovich A. B. Long wave investigation at the shelf and in the bays of South Kuril Islands // *J. Korean Soc. Coastal and Ocean Engn.* 1993. V. 5, № 4. P. 318–328.
- Drazin P. G., Johnson R. S. Solitons: an introduction. Cambridge University Press, 1989.
- Dunbar D., LeBlond P., Murty T. S. Evaluation of tsunami amplitudes for the Pacific coast of Canada // *Prog. Oceanogr.* 1991. V. 26. P. 115–177.
- Dyatlov A. I., Pelinovsky E. N. Surface wave scattering in a basin with stochastically irregular bottom // *Archiwum Hydrotechniki*. 1990. V. 37, № 1–2. P. 11–17.
- Elgar S., Guza R. T., Freilich M. H. Dispersion, nonlinearity, and viscosity in shallow-water waves // *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engn.* 1993. V. 119, № 4. P. 351–366.
- Elter J. F., Molyneux J. E. The long-distance propagation of shallow water waves over an ocean of random depth // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 53. P. 1–15.
- Engelbrecht J. K., Fridman V. E., Pelinovsky E. N. Nonlinear Evolution Equations. London: Longman Scientific and Technical Groups, 1988.
- Fenton J. D., McKee W. D. On calculating the lengths of water waves // *Coastal Engn.* 1990. V. 14. P. 499–513.
- Freilich M. H., Guza R. T. Nonlinear effects on shoaling surface gravity waves // *Phil. Trans. R. Soc. London*. 1984. V. A311. P. 1–41.
- Fridman V. E. Selfrefraction of small amplitude shock waves // *Wave Motion*. 1982. V. 4. P. 151–161.
- Fujima K., Goto C., Shuto N. Accuracy of nonlinear dispersive long wave equations // *Coastal Engn. Japan*. 1985. V. 28. P. 15–30.
- Furumoto A. S. Source Parameters of destructive tsunamis // *Natural Hazards*. 1991. V. 9, № 2. P. 95–113.
- Galkin V. M., Golinko V. I., Malishenkova V. I., Mirchina N. R., Pelinovsky E. N.

- Propagation of Tsunami Waves Generated by Elliptical Sources // *Sci. Tsunami Hazards*. 1986. V. 4, № 3. P. 149–152.
- Gaponov-Grekhov A. V., Rabinovich M. I. *Nonlinearities in Action*. Springer – Verlag, 1992.
- Garsia A. W., Houston J. R. Tsunami runup predictions for southern California coastal communities USA // *Bull. R. Soc. New Zealand*. 1976. № 15. P. 5–18.
- Gilman O. A., Grimshaw R., Stepanyants Yu. A. Dynamics of internal solitary waves in a rotating fluid // *Dyn. Atm. Oceans*. 1996. V. 23. P. 403–411.
- Gonzalez F., Kulikov Y. Tsunami dispersion observed in the deep ocean // *Tsunamis in the World*. Kluwer, 1993. P. 7–16.
- Gonzalez F. I., Ballerini M., Reutebuch S. E. Stereo photo estimates of Okushiri tsunami runup // *EOS*. 1994. V. 75, № 44. P. 357.
- Gorschkov K. A., Ostrovsky L. A. Interactions of solitons in nonintegrable systems: direct perturbation method and applications // *Physica D*. 1981. V. 3. P. 428–438.
- Gorschkov K. A., Ostrovsky L. A., Pelinovsky E. N. Some problems of asymptotic theory of nonlinear waves // *Proc. IEEE*. 1974. V. 62. P. 1151–1157.
- Greenspan H. P. On the breaking of water waves of finite amplitude on a sloping beach // *J. Fluid Mech.* 1958. V. 4, № 3. P. 330–334.
- Grilli S. T., Subrahmanya R., Svendsen I. A., Veeramony J. Shoaling of solitary waves on plane beaches // *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div.* 1994. V. 120, № 6. P. 609–628.
- Grimshaw R. The solitary waves in water of variable depth. I // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 42. P. 639–656.
- Grimshaw R. The solitary waves in water of variable depth. II // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 46. P. 611–622.
- Grimshaw R. Slowly varying solitary waves. I. Korteweg – de Vries equation // *Proc. R. Soc. London*. 1979. V. A368. P. 359–375.
- Grimshaw R., Pelinovsky E., Tian Xian, Interaction of a solitary wave with an external force // *Physica D*. 1994. V. 77. P. 405–433.
- Grimshaw R., Pelinovsky E., Sakov P. Interaction of a solitary wave with an external force moving with variable speed // *Stud. Appl. Math.* 1996.
- Gupta N. An analytical solution describing the motion of a bore over a sloping beach // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 253. P. 167–172.
- Gurtin M. E. On the breaking of water waves on a sloping beach of arbitrary shape // *Quart. Appl. Math.* 1975. V. 33. P. 187–189.
- Gurevich V., Jeffrey A., Pelinovsky E. A method for obtaining evolution equations for nonlinear waves in a random medium // *Wave Motion* 1993. V. 17, № 5. P. 287–295.
- Hammack J. L. A note on tsunamis: their generation and propagation in an ocean of uniform depth // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 60, № 4. P. 769–799.
- Hammack J. L., Segur H. The Korteweg – de Vries equation and water waves. II. Comparison with experiments // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 65. P. 289–311.
- Hammack J. L., Segur H. The Korteweg – de Vries equation and water waves. III. Oscillatory waves // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 84. P. 337–358.
- Hammack J. L., Segur H. Modelling criteria for long water waves // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 84, № 2. P. 359–373.
- Harbitz C. B. Model simulations of tsunamis generated by the Storegga Slides // *Marine Geology*. 1992. V. 105. P. 1–21.
- Hatori T. Vertical displacement in a tsunami source area and topography of the sea bottom // *Bull. Earthq. Res. Inst.* 1966. V. 44. P. 1449–1487.
- Heinrich P. Nonlinear water waves generated by submarine and aerial landslides // *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div.* 1992. V. 118, № 3. P. 249–266.
- Hibberd S. Peregrine D. H. Surf and runup // *Lect. Notes Phys.* 1977. V. 64. P. 114–120.
- Hibberd S. Peregrine D. H. Surf and runup on a beach: a uniform bore // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 95. P. 323–345.
- Hirota R. Exact N – soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow

water and in nonlinear lattices // *J. Math. Phys.* 1973. V. 14, № 7. P. 810–814.

Holloway G., Murty T., Fok E. Effects of bathymetric roughness upon tsunami travel time // *J. Tsunami Soc.* 1986. V. 4, № 3. P. 165–172.

Hunter J. K., Vanden-Broeck J. M. Accurate computations for steep solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 136. P. 63–71.

Iida K. A relation of earthquake energy to tsunami energy and the estimation of the vertical displacement in a tsunami source // *J. Earth Sci. Nagoya Univ.* 1963. V. 11, № 1. P. 49–67.

Imamura F., Shuto N., Ide S., Yoshida Y., Abe K. Estimate of tsunami source of the 1992 Nicaraguan earthquake from tsunami data // *Geophys. Res. Letters.* 1993. V. 20, № 14. P. 1515–1518.

Infeld E., Rowlands G. *Nonlinear waves, solitons and chaos.* Cambridge University Press, 1990.

Ishii H., Abe K. Propagation of tsunami on a linear slope between two flat regions. I. Eigenwave // *J. Phys. Earth.* 1980. V. 28. P. 531–541.

Ivanov V., Pelinovsky E., Talipova T. Long wave variation of dispersed material in the coastal zone // *Ocean Modelling.* 1993. V. 96. P. 2–3, 12.

Jeffrey A. *Quasilinear hyperbolic systems and waves.* Pitman, 1976.

Jeffrey A., Kakutani T. *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory.* Pitman, 1980.

Jiang L., LeBlond P. Three-dimensional modeling of tsunami generation due to a submarine mudslide // *J. Phys. Oceanogr.* 1994. V. 24. P. 559–572.

Johnes A. T., Mader C. L. Modelling of tsunami propagation directed at wave erosion on southeastern Australia coast 105,000 years ago // *J. Tsunami Soc.* 1995. V. 13, № 1. P. 45–52.

Johnson R. S. Some numerical solutions of a variable – coefficient Korteweg – de Vries equation (with applications to soliton wave development on a shelf) // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 54. P. 81–91.

Johnson R. S. On an asymptotic solution of the Korteweg – de Vries equation with slowly varying coefficients // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 60, № 4. P. 813–824.

Johnson R. S. Water waves and Korteweg – de Vries equations // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 97. P. 701–719.

Johnson R. S. Solitary wave, soliton and shelf evolution over variable depth // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 276. P. 125–138.

Jonsson J. G., Skovgaard O. A mild slope equation and its application to tsunami calculations // *Marine Geodesy.* 1979. V. 2. P. 41–58.

Kajiura K. The leading wave of a tsunami // *Bull. Earthq. Res. Inst.* 1963. V. 41. P. 535–571.

Kajiura K. Tsunami Source, Energy and the Directivity of Wave Radiation // *Bull. Earthq. Res. Inst.* 1970. V. 48. P. 835–869.

Kajiura K. Local behaviour of tsunamis // *Lect. Notes in Phys.* 1977. V. 64. P. 72–79.

Kaistrenko V. M., Mazova R. Kh., Pelinovsky E. N., Simonov K. V. Analytical Theory for Tsunami Run Up on a Smooth Slope // *J. Tsunami Soc.* 1991. V. 9, № 2. P. 115–127.

Kakutani T. Effect of an uneven bottom on gravity waves // *J. Phys. Soc. Japan.* 1971. V. 30. P. 272–276.

Karpman V. I. Soliton evolution in the presence of perturbation // *Physica Scripta.* 1979. V. 20. P. 462–478.

Katsis C. K., Akylas T. R. On the excitation of long nonlinear water waves by a moving pressure distribution. Pt. 2. Three – dimensional effects // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 177. P. 49–65.

Kaup D. J., Newell A. C. Solitons as particles, oscillators, and in slowly changing media: a singular perturbation theory // *Proc. R. Soc. London.* 1978. 361A. P. 412–446.

Kawahara T. Derivative – expansion method for nonlinear waves on a liquid layer of slowly varying depth // *J. Phys. Soc. Japan.* 1975. V. 38, № 4.

- Keillis-Borok V. I., Kosobokov V. G. Premonitory activation of seismic flow: algorithm M8 // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1990. V. 61. P. 73–83.
- Khangaonkar T. P., Le Mehaute B. Extended KdV equation for transient axisymmetric water waves // *Ocean Engng.* 1991. V. 18, № 5. P. 435–450.
- Kienle J., Kowalik Z., Murty T. S. Tsunami generated by eruptions from Mount St. Augustine Volcano, Alaska // *Science.* 1987. V. 236. P. 1442–1447.
- Kit E., Pelinovsky E. Dynamical models for cross-shore transport and equilibrium bottom profiles // *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.* 1996.
- Ko K., Kuehl H. H. Korteweg – de Vries soliton in a slowly varying medium // *Phys. Rev. Lett.* 1978. V. 40. P. 233–236.
- Kobayashi N., Karjadi E. A. Surf-similarity parameters for breaking solitary-wave runup // *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div.* 1994. V. 120, № 6. P. 645–650.
- Kodama Y., Ablowitz M. Perturbations of solitons and solitary waves // *Stud. Appl. Math.* 1981. V. 64. P. 225–245.
- Konotop V. V., Vazquez L. Nonlinear random waves. World Sci., 1994.
- Korsunsky S. V. Soliton solutions for a second-order KdV equation // *Phys. Lett. A.* 1994. V. 185. P. 174–176.
- Kowalik Z., Murty T. Numerical Modelling of Ocean Dynamics // World Sci. 1993.
- LeBlond P. H., Jones A. T. Underwater landslides ineffective at tsunami generation // *J. Tsunami Soc.* 1995. V. 13, № 1. P. 25–26.
- Le Mehaute B. Theory of explosion – generated water waves // *Advances in Hydroscience.* 1971. V. 7. P. 1–79.
- Lewis C. L., Adams W. M. Development of a tsunami – floodig model having versatile formulation of moving boundary conditions // *The Tsunami Society Monograph Series.* 1983. № 1.
- Long R. R. Scattering of surface waves by an irregular bottom // *J. Geophys. Res.* 1973. V. 78. P. 7861–7870.
- Longuet-Higgins M. S., Fenton J. On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave // *Proc. R. Soc. London.* 1974. V. A337. P. 1–13.
- Longuet-Higgins M. S., Fenton J. On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave II // *Proc. R. Soc. London.* 1974. V. A340. P. 471–493.
- Longuet-Higgins M. S. Bubbles, breaking waves and hyperbolic jets at a free surface // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 127. P. 103–121.
- Longuet-Higgins M.S. Highly-accelerated free-surface flows // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 248. P. 449–475.
- Lozano C. J., Liu P. L. F. Refraction-diffraction model for linear surface waves // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 101. P. 705–720.
- Maddocks J. H., Sachs R. L. On the stability of KdV multi-solitons // *Comm. Pure Appl. Math.* 1993. V. XLVI. P. 867–901.
- Mader Ch. L. Numerical Modelling of Water Waves. California Univ. Press, Berkeley, California. 1988.
- Madsen O. S., Mei C. C. The transformation of a solitary wave over an uneven bottom // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 39. № 4. P. 781–791.
- Madsen P. A., Svendsen I. A. Turbulent bores and hydraulic jumps // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 129. P. 1–25.
- Madsen P. A., Murray R., Sorensen O. R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics // *Coastal Eng.* 1991. V. 15. P. 371–388.
- Mazova R. Kh., Osipenko N. N., Pelinovsky E. N. Solitary Wave Climbing a Beach without Breaking // *Rozprawy Hydrotechniczne.* 1991. № 54. P. 71–80.
- Massel S. Hydrodynamics of Coastal Zones. Elsevier, Amsterdam, 1989.
- McKee W. D. Water wave propagation across a shear current // *Wave Motion.* 1987. V. 9. P. 209–215.
- McKee W. D. Reflection of water waves by a weak rapidly varying shearing current // *Wave Motion.* 1994. V. 20. P. 143–149.
- Mei C. C. The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. Advanced Series on Ocean Engineering / World Scientific. Singapore, 1989. V. 1.

- Melville W. K. On the Mach reflection of a solitary wave // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 98, № 2. P. 285–297.
- Miles J. W. Damping of weakly nonlinear shallow water waves // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 76. P. 251–257.
- Miles J. W. Solitary waves // *Annual Review Fluid Mech.* 1980. V. 12. P. 11–44.
- Miles J. W. The Korteweg – de Vries equation. A historical essay // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 106. P. 131–147.
- Miles J. W. Diffraction of solitary waves // *Z. Angew. Math. Phys.* 1977. V. 28. P. 889–902.
- Miles J. W. Obliquely interacting solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 79. P. 157–169.
- Miles J. W. Resonantly interacting solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 79. P. 171–179.
- Miles J. W. Solitary wave evolution over a gradual slope with turbulent friction // *J. Phys. Ocean.* 1983. V. 13, № 2. P. 551–553.
- Miloh T., Striem H. L. Tsunami effects at coast sites due to offshore faulting // *Tectonophysics.* 1978. V. 46. P. 347–356.
- Minoura K., Nakaya S. Tracers of tsunamis preserved in inter-tidal lacustrine and march deposits: some examples from Northeast Japan // *J. Geology.* 1991. V. 99. P. 265–287.
- Minoura K., Nakaya S., Uchida M. Tsunami deposits in a lacustrine sequence of the Sanriku coast, northeast Japan // *Sedimentary Geol.* 1994. V. 89. P. 25–31.
- Minzoni A. A. Nonlinear edge waves and shallow water theory // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 79. P. 369–374.
- Mirchina N. R., Pelinovsky E. N. The dependence of tsunami wave period on the source dimensions // *Marine Geodesy.* 1981. V. 5, № 3. P. 201–208.
- Mirchina N. R., Pelinovsky E. N. Nonlinear and dispersive effects for tsunami waves in the open ocean // *J. Tsunami Soc.* 1982. V. 2, № 4. P. D1–D9.
- Mirchina N. R., Pelinovsky E. N. Solitons in the tsunami problem // *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics.* Acad. Publ. 1984. V. 2. P. 973–978.
- Mirchina N. R., Pelinovsky E. N. Estimation of underwater eruption energy based on tsunami wave date // *Natural Hazards.* 1988. V. 1. P. 277–283.
- Mirchina N. R., Pelinovsky E. N., Shavratsky S. Kh. Parameters of tsunami waves in the source // *Int. J. Tsunami Soc.* 1982. V. 2, № 4. P. B1–B7.
- Mirchina N., Pelinovsky E. Nonlinear transformation of long waves at a bottom step // *J. Korean Soc. Coastal and Ocean Eng.* 1992. V. 4, № 3. P. 161–167.
- Miura R. M. The Korteweg – de Vries equation – a survey of results // *SIAM Rev.* 1976. V. 18. P. 412–459.
- Monaghan J. J., Bicknell P. J., Humbe R. J. Volcanes, tsunamis and the demise of the Minoans // *Physica D.* 1994. V. 77. P. 217–228.
- Murty T. Storm surges-Meteorological ocean tides. *Can. Bull. of Fisheries*, 212. Ottawa, 1984.
- Murty T. S., Saxena N. K., Sloss P. W., Lockridge P. A. Accuracy of tsunami travel-time charts // *Marine Geodesy.* 1987. V. 11, № 2–3. P. 89–102.
- Nakamura S. A numerical tracking of the 1885 Krakatoa tsunami // *J. Tsunami Soc.* 1984. V. 2, № 1. P. 41–55.
- New A. L., McIver P., Peregrine D. H. Computations of breaking waves // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 150. P. 233–251.
- Noiseux C. F. The form of tsunamis generated in coastal regions // *Dyn. Atmosph. Oceans.* 1985. V. 9. P. 39–48.
- Novikova L. E., Ostrovsky L. A. Excitation of Tsunami Waves by a Traveling Displacement of the Ocean Bottom // *Marine Geodesy.* 1978. V. 2, № 4. P. 365–380.
- Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation // *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div.* 1993. V. 119, № 6. P. 618–638.
- Oh I. S., Rabinovich A. B. Manifestation of Hokkaido southwest (Okushiri) tsunami, 12 July, 1993, at the coast of Korea // *J. Tsunami Soc.* 1994. V. 12, № 2. P. 93–116.

- Onkuma K., Wadati M. The Kadomtsev – Petviashvili equation, the trace method and the soliton resonance // *J. Phys. Soc. Japan*. 1983. V. 52. P. 749–760.
- Ostrovsky L. A., Stepanyants Yu. A. Nonlinear surface and internal waves in rotating fluids // *Nonlinear Waves*, Pt. 3. Springer – Verlag. Berlin, 1990. P. 106–128.
- Ostrovsky L. A., Pelinovsky E. N. Nonlinear Evolution of Tsunami Waves // *Bull. R. Soc. New Zeland*. 1976. V. 15. P. 203–211.
- Patoine A., Warn T. The interaction of long, quasi-stationary baroclinic waves with topography // *J. Atm. Sci.* 1982. V. 39. P. 1018–1025.
- Pedersen G. Three-dimensional wave patterns generated by moving disturbances at transcritical speeds // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 196. P. 39–63.
- Pedersen G. Nonlinear modulations of solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 267. P. 83–106.
- Pedersen G., Gjevik B. Run-up of solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 142. P. 283–299.
- Pelinovsky E. N. Nonlinear Theory of Sea Wave Run-up // *Res. Reports in Physics. Nonlinear Waves*. V. 2. Dynamics and Evolution. Springer, 1989. P. 128–135.
- Pelinovsky E. N. Tsunami Climbing a Beach and Tsunami Zonation // *J. Tsunami Soc.* 1989. V. 7, № 2. P. 117–123.
- Pelinovsky E. Criteria of sea wave breaking in a basins of complex topography // *J. Korean Soc. Coastal Ocean Engrn.* 1992. V. 4, № 2. P. 59–62.
- Pelinovsky E. Nonlinear hyperbolic equations and runup of huge sea waves // *Applicable Analysis*. 1995. V. 57. P. 63–84.
- Pelinovsky E. N. Models of Tsunami Waves // *Computational Techniques and Application*. World Sci., 1996. P. 473–478.
- Pelinovsky E., Choi H. A mathematical model for nonlinear waves due to moving disturbances in a basin of variable depth // *J. Korean Soc. Coastal and Ocean Engrn.* 1993. V. 5, № 3. P. 191–197.
- Pelinovsky E. N., Talipova T. G. Change of Height of the Solitary Wave of Large Amplitude in the Beach Zone // *Marine Geodesy*. 1979. V. 2, № 4. P. 313–321.
- Pelinovsky E., Mazova R. Exact Analytical Solutions of Nonlinear Problems of Tsunami Wave Run-up on Slopes with Different Profiles // *Natural Hazards*. 1992. V. 6, № 3. P. 227–249.
- Pelinovsky E., Talipova T. Sediment transport model for tsunami waves // *EOS*. 1994. V. 75, № 44. P. 356.
- Pelinovsky E. N., Stepanjants J. A. Cylindrical Solitons Passing through a Focus // *J. Tsunami Soc.* 1982. V. 2, № 4. P. F1–F4.
- Peregrine D. H. Breaking waves on beaches // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1983. V. 15. P. 149–178.
- Peregrine D. H., Smith R. Nonlinear effects upon waves near caustics // *Phil. Trans.* 1979. V. A 1392. P. 341–370.
- Peregrine D. H., Rylie S. C. Anomalous refraction and conjugate solutions of finite-amplitude water waves // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 134. P. 91–101.
- Peregrine D. H. Water jumps and caustics in the propagation of finite amplitude water waves // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 136. P. 435–452.
- Peregrine D. H. Long waves on a beach // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. Pt. 4. P. 815–827.
- Peregrine D. H. Equations for water waves and approximations behind them // *Waves on Beaches* (Ed. R. Meyer). N. Y. Academic Press. 1972. P. 95–122.
- Rabinovich A. B., Monserrat S. Meteorological tsunamis near the Balearic and uril Islands: descriptive and statistical analysis // *Natural Hazards*. 1996. V. 13, № 1. P. 55–90.
- Rabinovich M. I., N.F.Rul'kov. The mechanism of vertical displacements in a dynamical model of earthquakes // *Physics Letters A*. 1991. V. 154, № 7. P. 8–11.
- Radder A. C., Dingemans M. W. Canonical equations for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves // *Wave Motion*. 1985. V. 7. P. 473–485.
- Renouard D., Seabra Santos F., Temperville A. Experimental study of the

- generation, damping, and reflection of a solitary wave // *Dyn. Atmosph. Oceans*. 1985. V. 9. P. 341–358.
- Riecker M. M., Fenton J. D. A Fourier approximation for steady water waves // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 104. P. 119–137.
- Rubino A., Backhaus J. O., Pierini S. Tsunamis generated by mud-slides. *Int. Symp. "Waves-Physical and Numerical Modelling"*. Vancouver, Canada, 1994. P. 466–475.
- Rynn J. M. Tsunamis and their effect on Australia. *National Tsunami Workshop*. Brisbane, 1994. P. 20–24.
- Satsuma J. N-soliton solution of the two-dimensional Korteweg – de Vries equation // *J. Phys. Soc. Japan*. 1976. V. 40. P. 286–290.
- Segur H. The Korteweg – de Vries equation and water waves. Solution of the equation. Pt. 1. // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 59. P. 721–736.
- Shen M. C. Ray method for surface waves on fluid of variable depth // *SIAM Rev.* 1975. V. 17, № 1. P. 38–56.
- Shen M. C., Keller J. B. Ray method for nonlinear wave propagation in a rotating fluid of variable depth // *Phys. Fluids*. 1973. V. 16, № 1. P. 108–112.
- Shen M. C., Meyer R. E. Climb of a bore on a beach. III Run-up // *J. Fluid Mech.* 1963. V. 16, № 1. P. 113–125.
- Shuto N. Nonlinear waves in a channel of variable section // *Coast. Eng. Japan*. 1974. V. 17. P. 1–12.
- Shuto N. Shoaling and deformation of nonlinear long waves // *Coastal Eng. Japan*. 1973. V. 16. P. 1–12.
- Shuto N. The Nihonkai-Chubu Earthquake Tsunami on the North Akita Coast // *Coastal Eng. Japan*. 1985. V. 28. P. 255–264.
- Shuto N., Goto C., Imamura F. Numerical simulation as a means of warning for near-field tsunamis // *Coast. Eng. Japan*. 1990. V. 33, № 2. P. 173–193.
- Sigimoto N., Kakutani T. Reflection of a shallow-water soliton. Pt. 1. Edge-layer theory for shallow water waves // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 146. P. 369–382.
- Sigimoto N., Kakutani T. Reflection of a shallow-water soliton. Pt. 2. Numerical evaluation waves // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 178. P. 99–117.
- Sleath J. F. A. *Sea bed Mechanics* // John Wiley & Son. 1984.
- Slingerland R., Voight B. Evaluating hazard of landslide-induced water waves // *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div.* 1982. V. 108. P. 504–512.
- Smith M. S., Shepherd J. B. Potential Cauchy – Poisson waves generated by submarine eruptions of kick'em Jenny Volcano // *Natural Hazards*. 1995. V. 11, № 1. P. 75–94.
- Spielfogel L. O. Run-up of a single waves om a sloping beach // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 74, № 4. P. 685–694.
- Stiassnie M., Peregrine D. H. Shoaling of finite-amplitude surface waves on water of slowly-varying depth // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 97. P. 783–805.
- Stepanyants Yu. A. Experimental investigation of cylindrically diverging solitons in an electric lattice // *Wave Motion*. 1981. V. 3. P. 335–341.
- Svendsen I. A., Madsen P. A. A turbulent bore on a beach // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 148. P. 73–96.
- Su G. H., Gardner C. S. Korteweg – de Vries equation and generalization. III. Derivation of KdV and Burgers equation // *J. Math. Phys.* 1969. V. 10, № 3. P. 536–539.
- Synolakis C. E. The runup of solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 185. P. 523–545.
- Synolakis C. E. Tsunami runup on steep slopes: how good linear theory really is // *Natural Hazards*. 1991. V. 4. P. 221–234.
- Synolakis C. E., Skjelbreia J. E. Evolution of maximum amplitude of solitary waves om plane beaches // *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engr.* 1993. V. 119, № 3. P. 323–342.
- Tadepalli S., Synolakis C. The runup of N-waves on sloping beaches // *Proc. R. Soc. London*. 1994. V. A445. P. 99–112.

- Talipova T., Pelinovsky E., Kit E. Wind wave simulation in coastal zone // *Coastal Dynamics'95 / Proc. Int. Conf. on Coastal Research in Terms of Large Scale Experiments*. ASCE. 1996. P. 105–115.
- Tanaka M. The stability of solitary waves // *Phys. Fluids*. 1986. V. 29. P. 650–655.
- Tanioka Y., Satake K., Ruff L. Total analysis of the 1993 Hokkaido Nansei-oki earthquake using seismic wave, tsunami, and geodetic data // *Geophys. Res. Letters*. 1995. V. 22, № 1. P. 9–12.
- Tappert F. D., Zabusky N. J. Gradient-induced fission of solitons // *Phys. Rev. Lett.* 1971. V. 27. P. 1774–1776.
- Teng M., Wu T. Evolution of long water waves in variable channels // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 266. P. 303–317.
- Tinti S. *Tsunami in the world*. Kluwer Acad. Press. 1993.
- Tinti S., Vannini C. Theoretical investigation on tsunamis induced by seismic faults near ocean islands // *Marine Geodesy*. 1994. V. 17. P. 193–212.
- Troschina E. N. *Tsunami Waves Generated by Mt. St. Augustine Volcano, Alaska*. M. Sc. Thesis, Fairbanks, Alaska, 1996.
- Tsukabayashi I., Yagishita T. Propagation of circular solitary wave on shallow water // *J. Phys. Soc. Japan*. 1979. V. 46. P. 1401–1402.
- Van Dorn W. G. Some tsunami characteristics deducible from tide records // *J. Phys. Oceanogr.* 1984. V. 14, № 2. P. 353–363.
- Varley E., Venkataraman R., Cumberbatch E. The propagation of large amplitude tsunamis across a basin of changing depth. I. Off-shore behaviour // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 49, № 4. P. 775–801.
- Warn T., Brasnett B. The amplification and capture of atmospheric solitons by topography: a theory of the onset of regional blocking // *J. Atmos. Sci.* 1983. V. 40. P. 28–38.
- Weidman P. D., Zakhem R. Cylindrical solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 191. P. 557–573.
- Whitham G. B. Nonlinear effects in edge waves // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 74, № 2. P. 353–368.
- Williams J. M. Limiting gravity waves in water of finite depth // *Phil. Trans. R. Soc. London*. 1981. V. A302. P. 139–188.
- Wu T. Y. Generation of upstream advancing solitons by moving disturbances // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 184. P. 75–99.
- Wu T. Y. On tsunami propagation-evaluation of existing models // *Tsunamis*. Ed.: L. S. Hwang, Y. K. Lee. Pasadena, 1979. P. 110–143.
- Zabusky N. J., Galvin C. J. Shallow water waves, the Korteweg – de Vries equation and solitons // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 47. P. 811–824.
- Yalciner A. C., Kuran U., Akyarlı A., Imamura F. An investigation on the propagation of tsunamis in the Aegean Sea by mathematical modeling // *Tsunami: Progress in Prediction, Disaster Prevention and Warning*. Kluwer, 1995. P. 55–70.
- Yeh H., Liu P., Briggs M., Synolakis C. Propagation and amplification of tsunamis at coastal boundaries // *Nature*. 1994. V. 372. P. 353–355.
- Yeh H., Titov V., Gusiakov V., Pelinovsky E., Khrumushin V., Kaistrenko V. The 1994 Shikotan earthquake tsunamis // *PAGEOPH.* 1995. V. 144, № 3/4. P. 855–874.
- Young R. W., Bryant E. A. Catastrophic wave erosion on the southeastern coast of Australia: impact of the Lanai tsunamis 105 ka? // *Geology*. 1992. V. 20. P. 199–202.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Введение</i>	3
<i>Часть 1. Модели генерации волн цунами</i>	11
1.1. Гидродинамические модели возбуждения цунами подвижками дна	11
1.1.1. Основные уравнения модели	11
1.1.2. Поршневая модель генерации волн цунами	15
1.1.3. Генерация волн цунами вертикальными подвижками дна ...	25
1.1.4. Генерация волн цунами горизонтальными подвижками дна .	33
1.1.5. Восстановление очага цунами по мареографным данным ...	40
1.2. Сейсмоакустические механизмы генерации волн цунами при подводных землетрясениях	42
1.2.1. Сейсмическая модель генерации волн цунами при землетрясениях	42
1.2.2. Акустические механизмы образования волн цунами	49
1.3. Генерация цунами при извержениях подводных вулканов	53
1.3.1. Гидродинамическая модель генерации волн цунами	53
1.3.2. Эксплозивная модель генерации волн цунами	56
1.4. Возбуждение цунами атмосферными возмущениями	59
1.4.1. Генерация цунами флуктуациями атмосферного давления ..	59
1.4.2. Генерация цунами касательными напряжениями поля ветра	64
<i>Часть 2. Распространение волн цунами в открытом океане</i>	67
2.1. Лучевые методы расчетов волн цунами в океане переменной глубины	67
2.1.1. Уравнения нелинейно-дисперсионной теории волн цунами ..	68
2.1.2. Лучевой метод с учетом нелинейности и дисперсии	72
2.1.3. Трансформация волны цунами на каустике	77
2.1.4. Нелинейное эволюционное уравнение для волн цунами над шероховатым дном	80
2.2. Нелинейные эволюционные уравнения и волны цунами	83
2.2.1. Приближенные решения уравнения Кортевега – де Вриза ..	83
2.2.2. Точные решения задачи Коши для уравнения Кортевега – де Вриза	90
2.2.3. Оценки нелинейности и дисперсии для волн цунами	95
2.2.4. Учет влияния вращения Земли на нелинейную динамику волн цунами	98
2.3. Трансформация волн цунами в океане переменной глубины ...	102
2.3.1. Рефракция волн цунами	102
2.3.2. Рефракция медленно изменяющихся солитонов	109
2.3.3. Саморефракция нелинейных волн	113
2.3.4. Дифракция волн цунами в бассейне переменной глубины ..	117
2.3.5. Захваченные волны	120
2.4. Затухание волн цунами	122
2.4.1. Диссипация цунами в придонном пограничном слое – модель с постоянным коэффициентом обмена	122
2.4.2. Гидравлическая модель диссипации волн цунами	126
2.4.3. Рассеяние энергии цунами неровностями дна	128
2.4.4. Затухание солитонов	132

2.5. Усиление цунами движущимися возмущениями	135
2.5.1. Вывод упрощенной модели взаимодействия солитона с атмосферными возмущениями	135
2.5.2. Взаимодействие солитона с движущимся возмущением	138
<i>Часть 3. Накат волн цунами на берег</i>	<i>142</i>
3.1. Трансформация волн цунами на материковом склоне	143
3.1.1. Взаимодействие длинных волн с вертикальной стенкой	143
3.1.2. Взаимодействие солитона с вертикальной преградой (пространственная задача)	150
3.1.3. Трансформация волны на уступе	156
3.1.4. Резонансные эффекты при прохождении волной цунами материкового склона	160
3.2. Набегание необрушенной волны цунами на плоский откос	162
3.2.1. Критерии подобия	162
3.2.2. Преобразование Кэрриера — Гринспана	164
3.2.3. Динамика подвижного уреза	166
3.2.4. Роль линейного приближения в задачах наката волн цунами	170
3.2.5. Аналитические результаты для неоднородных задач набегания волн цунами на берег	175
3.2.6. Отражение нелинейной волны от откоса	179
3.3. Влияние диссипации и дисперсии на накат волн цунами	181
3.3.1. Критерии обрушения волн цунами	182
3.3.2. Влияние диссипации на накат волн цунами	189
3.3.3. Эффекты дисперсии при накате волн цунами на берег	192
3.3.4. Модифицированные дисперсионные модели наката волн цунами на берег	200
3.4. Приложения теории наката волн цунами на берег	205
3.4.1. Оценки цунамириска и цунамирайонирование	205
3.4.2. Оценка характеристик цунами в открытом океане	212
3.4.3. Влияние нелинейности и дисперсии на воздействие цунами на берега и сооружения	216
3.4.4. Воздействие цунами на динамику примесей в прибрежной зоне	220
3.4.5. Дистанционное зондирование цунами	226
3.5. Результаты обследования цунами 1994—1995 гг.	228
3.5.1. Цунами на о. Шикотан 4—5 октября 1994 г.	228
3.5.2. Цунами на о. Сулавеси (Индонезия) 1 января 1996 г.	242
<i>Литература</i>	<i>257</i>

CONTENTS

<i>Introduction</i>	3
<i>Part 1. Models of tsunami waves generation</i>	11
1.1. Hydrodynamic models of tsunami excitation by bottom deformation	11
1.1.1. Main equations of the model	11
1.1.2. Piston model of tsunami waves generation	15
1.1.3. Tsunami waves generation by vertical bottom deformation ...	25
1.1.4. Tsunami waves generation by horizontal bottom deformation .	33
1.1.5. Reconstruction of the tsunami centre by mareographic data ..	40
1.2. Seismoacoustic mechanisms of tsunami waves generation due to underwater earthquakes	42
1.2.1. Seismic model of tsunami waves generation due to earthquakes	42
1.2.2. Acoustic mechanisms of tsunami waves generation	49
1.3. Tsunami generation due to underwater volcanic eruptions	53
1.3.1. Hydrodynamic model of tsunami waves generation	53
1.3.2. Explosive model of tsunami waves generation	56
1.4. Tsunami excitation by atmospheric perturbations	59
1.4.1. Tsunami generation by atmospheric pressure fluctuations ...	59
1.4.2. Tsunami generation by the tangential stress of the wind field	64
<i>Part 2. Tsunami waves propagation in the open ocean</i>	67
2.1. Ray methods of computing tsunami waves in the ocean with variable depth	67
2.1.1. Equations of nonlinear-dispersion theory of tsunami waves ...	68
2.1.2. Ray method taking into account nonlinearity and dispersion .	72
2.1.3. Tsunami waves transformation on caustics	77
2.1.4. Nonlinear evolution equation for tsunami waves above a rough bottom	80
2.2. Nonlinear evolution equations and tsunami waves	83
2.2.1. Approximated solutions of Korteweg-de Vries equation	83
2.2.2. Exact solutions of Cauchy problem for Korteweg-de Vries equation	90
2.2.3. Estimates of nonlinearity and dispersion for tsunami waves ..	95
2.2.4. Taking into account the Earth rotation effect on nonlinear dynamics of tsunami waves	98
2.3. Tsunami waves transformation in the ocean with variable depth .	102
2.3.1. Tsunami waves refraction	102
2.3.2. Refraction of slowly varying solitons	109
2.3.3. Self-refraction of nonlinear waves	113
2.3.4. Tsunami wave diffraction in a basin of variable depth	117
2.3.5. Trapped waves	120
2.4. Tsunami waves damping	122
2.4.1. Tsunami waves dissipation in a bottom boundary layer - a model with a constant exchange coefficient	122
2.4.2. Hydraulic model of tsunami waves dissipation	126
2.4.3. Tsunami energy scattering by bottom inhomogeneity	128

2.4.4. Soliton damping	132
2.5. Tsunami amplification by moving perturbations	135
2.5.1. Derivation of a simplified model of the soliton interaction with atmospheric perturbations	135
2.5.2. Soliton interaction with moving perturbation	138
<i>Part 3. Tsunami climbing a beach</i>	<i>142</i>
3.1. Tsunami waves transformation on the continental slope	143
3.1.1. Interaction of long waves with a vertical wall	143
3.1.2. Soliton interaction with a vertical obstacle (a three-dimensional problem)	150
3.1.3. Wave transformation on a step	156
3.1.4. Resonance effects caused by the tsunami wave transition of a continental slope	160
3.2. Run-up of a non-collapsed tsunami wave on a flat slope	162
3.2.1. Similarity criteria	162
3.2.2. Carrier-Greenspan transform	164
3.2.3. Dynamics of a migratory water edge	166
3.2.4. Role of linear approximation in the problems of tsunami waves run-up	170
3.2.5. Analytical results for non-one-dimensional problems of tsunami waves climbing a beach	175
3.2.6. Refraction of a nonlinear wave from a slope	179
3.3. Dissipation and dispersion effect on tsunami waves run-up	181
3.3.1. Criteria of tsunami waves collapse	182
3.3.2. Dissipation effect on tsunami waves run-up	189
3.3.3. Dispersion effects caused by tsunami waves climbing a beach	192
3.3.4. Modified dispersion models of tsunami waves climbing a beach	200
3.4. Applications of the theory of tsunami waves climbing a beach ..	205
3.4.1. Tsunami risk evaluation and tsunami zonation	205
3.4.2. Estimate of characteristics of tsunamis in the open ocean ...	212
3.4.3. Influence of nonlinearity and dispersion on the tsunami effect on coast and constructions	216
3.4.4. Tsunami effect on impurity dynamics in the coastal zone ...	220
3.4.5. Tsunami remote probing	226
3.5. Results of investigation of tsunami of 1994-1995	228
3.5.1. Tsunami on Shikotan Island occurred on October 4-5, 1994 ..	228
3.5.2. Tsunami on Sulawesi Island (Indonesia) occurred on January 1, 1996	242
<i>References</i>	<i>257</i>

E. N. Pelinovsky

TSUNAMI WAVES HYDRODYNAMICS

Abstract

The book is dedicated to the theory of hydrodynamics of tsunami waves at all the stages: from the zone of waves generation to waves climbing a beach. Various mechanisms of tsunami waves generation by bottom deformation (piston, membrane and running), seismic processes, underwater volcanic eruptions, moving atmospheric perturbations are considered. Tsunami waves propagation is studied from the viewpoint of the ray theory including effects of waves trapping by bottom inhomogeneity and nonlinear effects. At the stage of the tsunami waves transformation in the coastal zone and their climbing a beach, the nonlinear effects become determining and various approximated theories are described in the book. The data of theoretical models are used for the analysis and interpretation of the available data on tsunami waves. Particular attention is paid to recent tsunamis, in particular, Okushiri tsunami of 1993, Shikotan tsunami of 1994 and the tsunami on the Sulawesi Island (Indonesia) of 1996, in the expedition research of which the author took part. The problems of remote tsunami diagnostics and the sediment transport in tsunami waves are also discussed.

The book is intended for specialists in geophysics and oceanology, as well as for the students of the corresponding speciality.