

ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ФОНТАНОМ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Цель работы – прямое численное и теоретическое моделирование динамики фонтана в жидкости со стратификацией плотности в виде пикноклина. Фонтан формируется при проникновении вертикальной струи сквозь пикноклин. В численном моделировании струйное течение инициируется с помощью постановки граничного условия в виде направленного вертикально вверх ламинарного потока жидкости нейтральной плавучести с осесимметричным гауссовым профилем скорости.

Расчеты показывают, что при числе Фруда Fr , превышающем некоторое критическое значение, течение становится неустойчивым, и фонтан совершает автоколебания, сопровождающиеся генерацией внутренних волн в пикноклине. В зависимости от Fr можно различать две моды автоколебаний. При достаточно малых Fr фонтан совершает круговые движения в горизонтальной плоскости в окрестности центра струи, сохраняя почти неизменную форму. При этом излучаются внутренние волны, имеющие вид раскручивающихся спиралей. При достаточно больших Fr доминирует другая мода, когда верхушка фонтана хаотически “блуждает” в окрестности центра струи и периодически обрушается, генерируя пакеты внутренних волн, распространяющихся к периферии области счета. В обоих случаях основной пик в частотном спектре внутренних волн совпадает с частотой колебаний верхушки фонтана, которая монотонно уменьшается с ростом Fr . Зависимость амплитуды колебаний верхушки фонтана от Fr в численном моделировании хорошо согласуется с предсказанием теоретической модели конкуренции взаимодействующих мод в режиме мягкого самовозбуждения.

Ключевые слова: стратификация, затопленная плавучая струя, пикноклин, автоколебания, внутренние волны.

Фонтаном называют струю тяжелой жидкости, имеющую начальный импульс, направленный вверх, и распространяющуюся в легкой жидкости. Струя тормозится под действием силы плавучести (силы тяжести) и достигает максимальной высоты (точки поворота), а затем жидкость движется вниз от точки поворота, формируя противоток, и радиально растекается на уровне своей плавучести. Динамика фонтанов привлекает интерес благодаря многочисленным практическим приложениям в гидродинамике и геофизике, это течение изучалось в лабораторных физических экспериментах и в численном моделировании [1–4]. Результаты этих исследований показывают, что динамика струи определяется значениями чисел Фруда и Рейнольдса ($Fr = U/(g'D)^{1/2}$ и $Re = UD/\nu$), где U и D – осевая скорость и диаметр струи, $g' = g\Delta\rho/\rho$ – скачок плавучести, ν – кинематическая вязкость жидкости. При малых Fr и Re фонтан представляет собой стационарное течение, которое с ростом этих параметров теряет устойчивость. В зависимости от Fr и Re возможно самовозбуждение различных неустойчивых мод колебаний фонтана. Так в лабораторных экспериментах [3] при увеличении скорости истечения фонтана вначале наблюдался режим, при котором его верхушка двигалась по окружности в горизонтальной плоскости в окрестности центральной оси струи. При дальнейшем увеличении чисел Рейнольдса и Фруда этот режим сменялся периодическим обрушением верхушки фонтана.

Течение, подобное фонтану, может формироваться в жидкости со стратификацией, близкой к двухслойной, когда легкая жидкость вносится в нижний слой жидкости на некотором расстоянии от скачка плотности (пикноклина). Тогда даже при отсутствии начального импульса, под действием силы плавучести жидкость ускоряется и приобретает положительный вертикальный импульс. В случае турбулентного фонтана вовлечение окружающей жидкости приводит к тому, что при подходе к пикноклину всплывающая жидкость имеет плотность, близкую к плотности жидкости в нижнем слое. Таким образом, формируется струя нейтральной (по отношению к жидкости в нижнем слое) плавучести, имеющая ненулевой вертикальный импульс. Если ее скорость достаточно велика, то струя тяжелой жидкости проникает в область выше пикноклина, формируя фонтан. Подобные фонтаны могут возникать, например, при всплывании струй сбросовых вод в океане в окрестности подводных коллекторов при наличии сезонного термоклина [5, 6]. Другим важным примером таких фонтанов являются струи, состоящие из газовых пузырьков, и выходящие из разломов земной коры на дне океана. Можно ожидать существования подобного явления вблизи подводных источников пресной воды.

Можно предположить, что описанные выше колебания фонтанов будут излучать внутренние волны, если их частоты ниже частоты плавучести. В свою очередь, можно ожидать проявлений этих внутренних волн на поверхности воды, что делает возможной дистанционную диагностику подводных плавучих струй. Экспериментальные указания на возможность поверхностных проявлений внутренних волн, связанных с подводным коллектором сточных вод, приводятся в [7]. В работе [8] внутренние волны, вызванные взаимодействием плавучей струи с пикноклином, обнаружены в лабораторном эксперименте, в котором выполнялось условие масштабного моделирования по числу Fg для типичной прибрежной сбросовой системы. Результаты указывают на то, что при воздействии всплывающих струй возможна генерация внутренних волн в пикноклине. Заметим, что аналогичная ситуация может возникнуть в случае выхода затопленного фонтана на свободную поверхность. Например, лабораторный эксперимент [9] показывает, что возможна генерация поверхностных волн плоским затопленным фонтаном.

Целью настоящей работы является прямое численное и теоретическое моделирование динамики фонтана, образующегося при проникновении вертикальной струи сквозь пикноклин в стратифицированной жидкости.

1. Основные уравнения и описание численного метода. Рассматривается жидкость с устойчивой стратификацией плотности со скачком плотности (пикноклином), расположенным на некотором горизонте $Z = Z_0$. Профиль плотности задается в виде

$$R_0(z) = \rho_0(1 + 0.5\Delta\rho/\rho_0[1 - \text{th}2(Z - Z_0)/D_0])$$

На нижней границе, при $Z = 0$, вертикально вверх втекает струя с профилем скорости

$$u(x, y) = U_0 \exp(-4(X^2 + Y^2)/D_0^2) \quad (1.1)$$

Под действием сил плавучести струя тормозится в окрестности пикноклина, прогибает его и проникает в верхний слой менее тяжелой жидкости на некоторую конечную высоту (до точки поворота). Далее, подобно течению в обычном фонтане, жидкость в струе движется вниз от точки поворота, формируя противоток, и затем радиально растекается в плоскости на горизонте нейтральной плавучести.

Безразмерные переменные определяются как

$$(x, y, z) = \frac{(X, Y, Z)}{D_0}, \quad U_i = u_i/U_0, \quad \rho = \frac{R - R_0(z)}{\Delta\rho}$$

где u_i – компоненты вектора скорости ($i = x, y, z$), R – плотность жидкости. Уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска и условие несжимаемости жидкости в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{\delta_{iz}}{\text{Fr}^2} \rho \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$$

Уравнение для плотности жидкости записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + U_z \frac{d\rho_{ref}}{dz} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j^2} \quad (1.3)$$

В уравнении (1.1) δ_{ij} – символ Кронекера, и исходный профиль безразмерной плотности в (1.3) имеет вид

$$\rho_{ref}(z) = 1 + 0.5[1 - \text{th}2(z - z_0)] \quad (1.4)$$

где $z_0 = Z_0/D_0$ – горизонт залегания пикноклина. В уравнении (1.3) пренебрегается изменением $\rho_{ref}(z)$, обусловленным молекулярной диффузией. Числа Рейнольдса Re и Фруда Fr в (1.2) определяются как

$$\text{Re} = \frac{U_0 D_0}{\nu}, \quad \text{Fr} = \frac{U_0}{N_0 D_0}, \quad N_0 = \left(-\frac{g}{\rho_0} \frac{dR_0}{dZ} \right)^{1/2} = \left(\frac{g \Delta \rho}{\rho_0 D_0} \right)^{1/2}$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости, N_0 – размерная частота плавучести в центре пикноклина. Из (1.2)–(1.4) следует, что безразмерная частота плавучести в центре пикноклина равна $N_m = 1/\text{Fr}$.

Уравнения (1.2), (1.3) решаются в прямоугольной области с размерами $-15 \leq x \leq 15, -15 \leq y \leq 15$ и $0 \leq z \leq 30$. На боковых вертикальных границах области счета, в плоскости (y, z) при $x = \pm 15$, и на верхней горизонтальной границе, в плоскости (x, y) при $z = 30$, ставятся условия (Неймана) нулевого сдвига для всех переменных. На нижней границе, в плоскости (x, y) при $z = 0$, для скорости ставится условие, соответствующее направленной вертикально вверх струе нейтральной плавучести (относительно окружающей жидкости) с гауссовым профилем (1.1), на который накладываются малые (с амплитудой 0.1%) флуктуации, в виде

$$U_i^b(x, y, t) = \exp(-4(x^2 + y^2))(\delta_{iz} + U_{fi}(x, y, t)) \quad (1.5)$$

Поле флуктуаций U_{fi} задается в виде суммы независимых Фурье-гармоник со случайными фазами и однородным, широким амплитудным пространственно-временным спектром. Для плотности ставится граничное условие Неймана. Значение z_0 в (1.4), определяющее горизонт залегания пикноклина, полагается достаточно большим (равным 20 в безразмерных единицах длины), таким что переходные процессы, связанные с установлением течения в струе, создаваемого граничным условием (1.5), не влияют на ее взаимодействие с пикноклином.

Уравнения (1.2), (1.3) дискретизируются с помощью метода конечных разностей второго порядка точности на однородной разнесенной (“шахматной”) сетке, состоящей из $200 \times 200 \times 200$ узлов по координатам x, y and z , соответственно [10–12]. Интегрирование осуществляется с использованием метода Адамса–Башфорфа [12] второго по-

рядка точности с шагом по времени $\Delta t = 0.015$. Используется метод расщепления [11], и уравнение Пуассона для давления решается с помощью косинус – преобразования по координатам x и y (с использованием быстрого преобразования Фурье) и метода Гаусса по координате z .

2. Результаты численного моделирования. Численное моделирование проводилось для $0 < Fr < 9$, $Re = 400$ при одинаковых граничных условиях, обсуждаемых выше. Число Прандтля Pr полагалось равным единице (его выбор связан с ограниченным разрешением сетки). В начальный момент времени поля скорости и плотности $U(x, y, z)$ и $\rho(x, y, z)$ полагались равными нулю. Затем адиабатически (пропорционально множителю $(1 - \exp(-t))$ где t – время) “включалось” граничное условие для скорости (1.5). Переходные процессы заканчивались и статистически стационарное распределение полей скорости и плотности достигалось к моменту времени $t \approx 120$. С этого момента времени проводилось вычисление усредненных по времени полей и среднеквадратичных флуктуаций и накопление данных для вычисления временных спектров пульсаций. Вычисления проводились на временном интервале, включающем не менее 5–6 периодов внутренних волн, генерируемых в пикноклине.

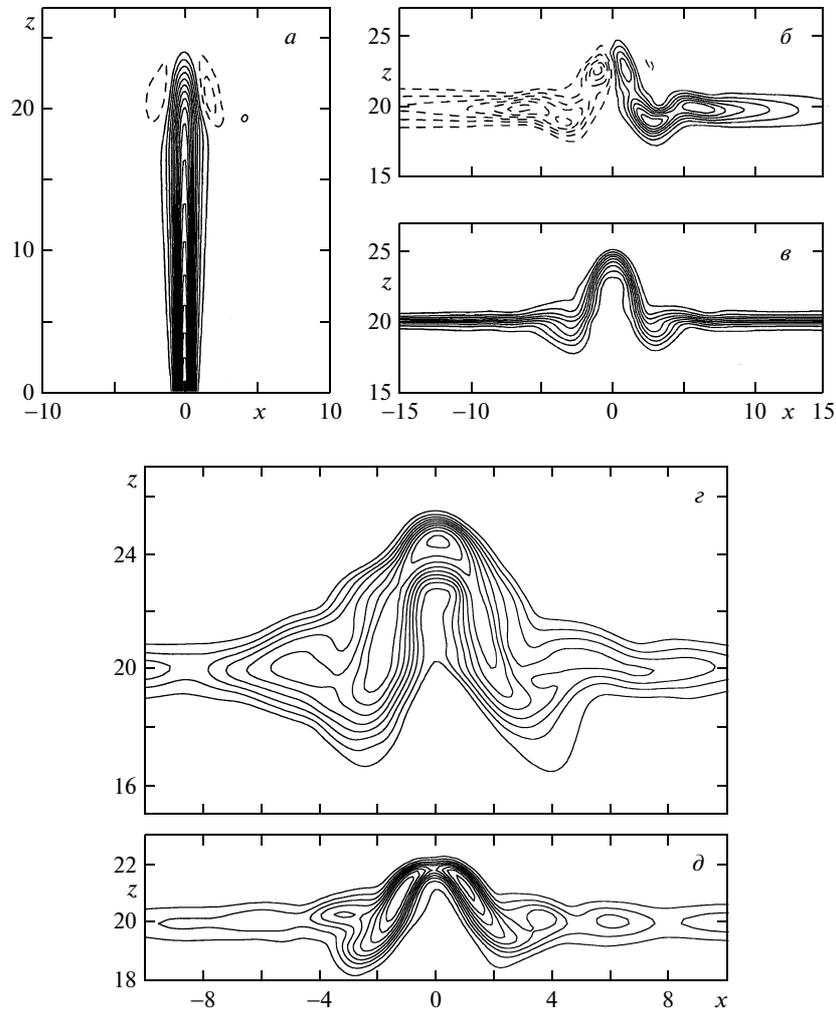
Под действием стратификации струя тормозится в окрестности пикноклина, проникает в верхний слой жидкости на некоторую высоту Z_m до точки поворота (фиг. 1, а). От точки поворота жидкость в струе движется вниз, образуя противоток относительно восходящего потока, и далее растекается в горизонтальной плоскости на уровне пикноклина z_0 . Таким образом, в области $z_0 < z < Z_m$ формируется фонтан.

Результаты вычислений показали, что при достаточно малых числах Фруда ($Fr < 2$) течение стационарно и осесимметрично относительно вертикальной оси струи. При увеличении Fr стационарный режим теряет устойчивость, и фонтан начинает совершать автоколебания, которые в свою очередь генерируют внутренние волны в пикноклине. На фиг. 1 автоколебания проявляются в наличии значительных флуктуаций плотности в области верхушки фонтана.

Важно отметить, что в случае достаточно больших чисел Фруда ($Fr = 7$, фиг. 1, з) флуктуации плотности максимальны в центре фонтана, в то время как при малых Fr максимумы ρ' расположены на флагнах верхушки фонтана ($Fr = 4$, фиг. 1, д). Результаты, представленные на фиг. 1 показывают, что можно различать два качественно разных режима динамики течения в фонтане в случае малых и достаточно больших чисел Фруда.

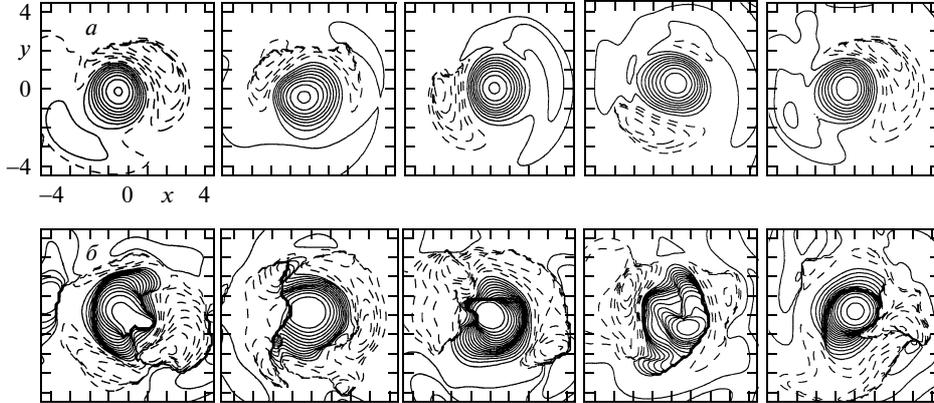
Различие двух режимов наиболее наглядно проявляется в динамике изопикнической поверхности ($Z_{\rho=1.5}(x, y) - z_0$) с значением плотности, соответствующем центру невозмущенного пикноклина $\rho_{ref}(z_0) = 1.5$ (фиг. 2). Видно, что в случае малых чисел Фруда ($Fr = 4$) фонтан совершает круговые движения в окрестности центра струи ($x = 0, y = 0$), сохраняя свою форму. В случае достаточно больших чисел Фруда ($Fr = 7$) фонтан “блуждает” в окрестности центра струи и периодически обрушается.

Различие двух режимов проявляется также в распределениях завихренности ($\omega_y = \partial_z U_x - \partial_x U_z$) в центральной вертикальной плоскости (x, z) и пульсаций плотности $\rho(x, y)$ на горизонте пикноклина $z = z_0$ (фиг. 3, 4). Круговое движение фонтана в случае $Fr = 4$ проявляется в его периодическом смещении в плоскости (x, z) вдоль горизонтальной оси относительно центра $x = 0$. Смещения фонтана приводят к генерации внутренних волн, распространяющихся в пикноклине и имеющих форму раскручивающихся от центра спиралей (фиг. 3). В случае $Fr = 7$ обрушения фонтана генерируют пакеты внутренних волн в пикноклине, имеющих довольно сложную (неупорядоченную) пространственную структуру, распространяющихся от центра к границам области счета (фиг. 4).

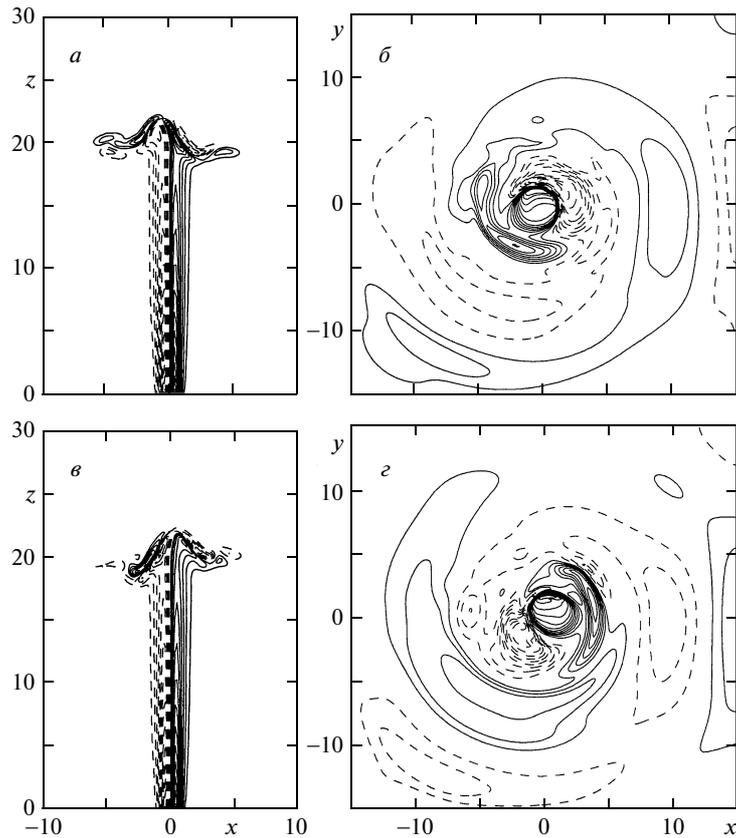


Фиг. 1. Распределение средних вертикальной (а) и горизонтальной (б) компонент скорости, $\langle U_z \rangle$ и $\langle U_x \rangle$, плотности $\langle \rho \rangle$ (в) для числа Фруда $Fr = 7$ и среднеквадратичных флуктуаций плотности ρ' в центральной плоскости (x, z) для $Fr = 7$ (г) и $Fr = 4$ (д). Инкремент изолиний: 0.05 (а); 0.01 (б), 0.1 (в), 0.04 (г, д). Штриховые линии соответствуют отрицательным значениям

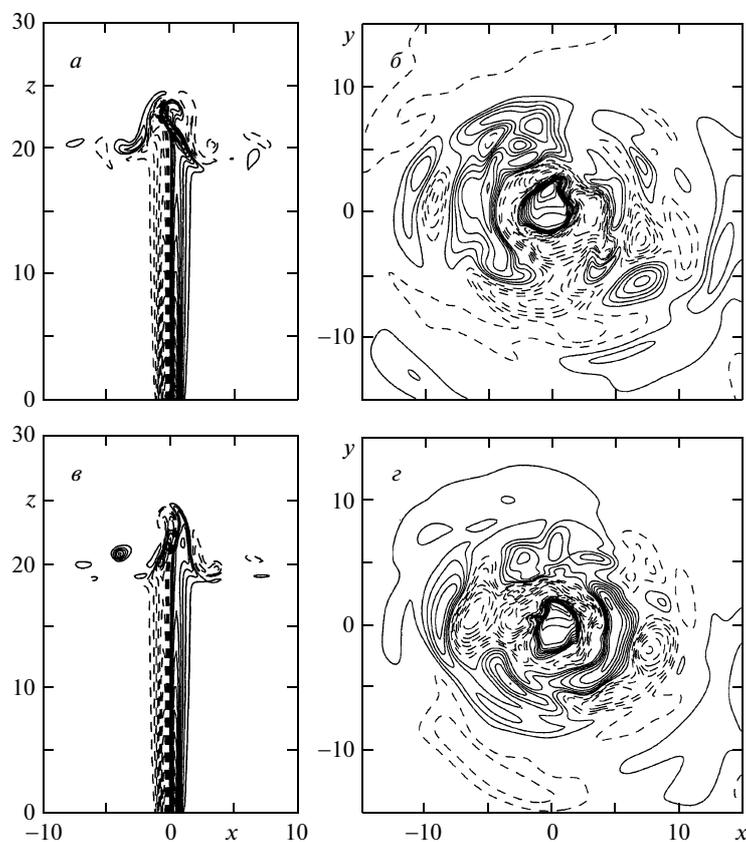
В численном моделировании рассчитывались пространственно-осредненные частотные спектры осцилляций изоповерхности плотности в области фонтана $Z_{\rho=1.5}$ и спектры внутренних волн. Спектры $Z_{\rho=1.5}$ осреднялись по 10 точкам, эквидистантно расположенным на горизонтальной оси в интервале $-2 < x < 2$ при $y = 0$. Спектры внутренних волн осреднялись по 4 точкам с координатами $(x = \pm 10, y = 0)$ и $(x = 0, y = \pm 10)$ на горизонте пикноклина $z = z_0$. Результаты на фиг. 5 показывают, что в обоих случаях основной пик в спектре внутренних волн совпадает по частоте с пиком в спектре осцилляций интерфейса плотности $Z_{\rho=1.5}$ ($\omega/N \approx 0.5$ при $Fr = 4$ и $\omega/N \approx 0.4$ при $Fr = 7$).



Фиг. 2. Изопикническая поверхность ($Z_p(x, y) - z_0$) с $\rho = 1.5$ $Fr = 4$ (а): $t = 342, 354, 366, 378, 390$; $Fr = 7$ (б): $t = 420, 444, 468, 492, 516$. Инкремент изолиний: 0.2 (а); 0.25 (б)



Фиг. 3. Распределение компоненты завихренности ω_y в центральной плоскости (x, z) (а, в) и пульсаций плотности ρ в горизонтальной плоскости (x, y) (б, г) при $z = 20$ для $Fr = 4$ при $t = 342$ (а, б), 366 (в, г). Инкремент изолиний: 0.1 (а, в), 0.05 (б, г). Штриховые линии соответствуют отрицательным значениям



Фиг. 4. То же, что и на фиг. 3 для $Fr = 7$, $t = 420$ (а, б), 468 (в, з)

Для того чтобы выяснить, каким образом основные характеристики течения, такие как высота фонтана, дисперсия и частота осцилляций верхушки фонтана, и амплитуда внутренних волн, зависят от числа Фруда, вычисления проводились для $2.5 \leq Fr \leq 9$ (фиг. 6).

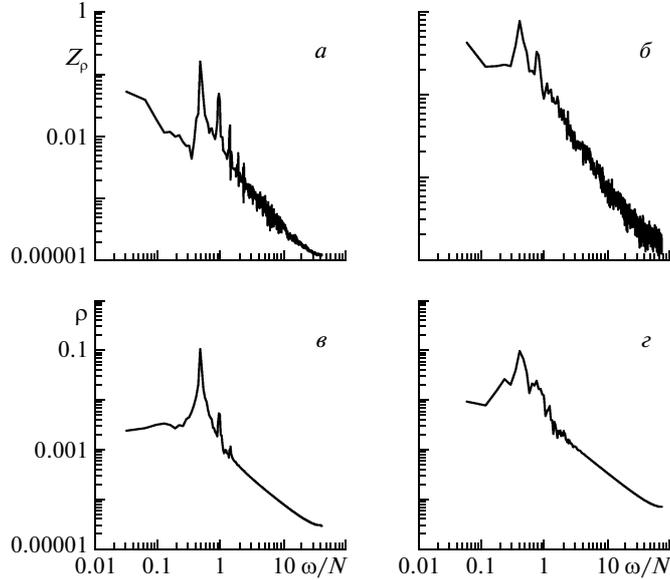
Высота фонтана Z_m определялась как максимальное вертикальное отклонение изопикны $Z_{\rho=1.5}(x, y = 0)$ относительно исходного уровня пикноклина z_0 , усредненное по времени. Видно, что высота фонтана растет с увеличением числа Фруда как $Z_m \sim Fr^{3/2}$.

Безразмерная высота турбулентного фонтана, согласно [1], определяется потоками импульса и плавучести в виде

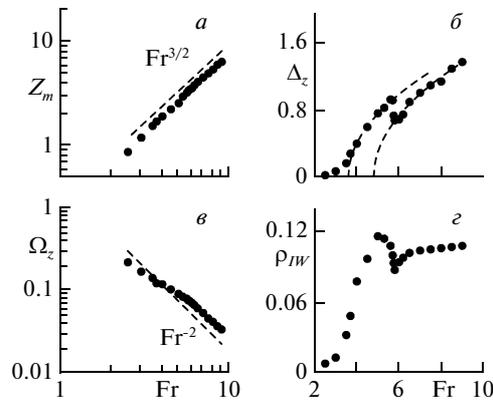
$$Z_m^t \sim (U^2 D^2)^\alpha (UD^2 \Delta\rho/\rho)^\beta D^{-1}, \quad \alpha = 3/4, \quad \beta = -1/2 \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует $Z_m^t \sim Fr$. С другой стороны, высота ламинарного фонтана в невязком случае определяется скоростью и скачком плавучести в виде

$$Z_m^l \sim \frac{U^2 D}{g \Delta\rho/\rho} \sim Fr^2 \quad (2.2)$$



Фиг. 5. Пространственно-осредненные спектры колебаний вертикального отклонения изопикны $Z_{\rho=1.5}$ в области фонтана и пульсаций плотности ρ на горизонте пикноклина $z = z_0$ на расстоянии 10 безразмерных единиц от центра фонтана для $Fr = 4$ (а, в), 7 (б, г)



Фиг. 6. Зависимости от числа Фруда: высоты фонтана Z_m (а), дисперсии смещения изопикны $Z_{\rho=1.5}$ в области верхушки фонтана Δ_z (б), частоты Ω_z основного спектрального пика колебаний изопикны $Z_{\rho=1.5}$ (в), и амплитуды внутренних волн ρ_{IW} (г)

Наблюдаемую в рассматриваемом случае асимптотику $Z_m \sim Fr^{3/2}$, по-видимому, можно отнести к переходному режиму, где течение в фонтане нестационарно и в то же время не является турбулентным [2].

Дисперсия осцилляций верхушки фонтана Δ_z определялась по осцилляциям изопикны $Z_{\rho=1.5}(x, y = 0)$ и осреднялась по 10 точкам. Дисперсия Δ_z и амплитуда внутрен-

них волн ρ_{IW} растут с увеличением числа Фруда при $Fr < 5$, т.е. в режиме круговых колебаний фонтана (фиг. 6). Далее Δ_Z и ρ_{IW} уменьшаются скачком в переходной области $5 < Fr < 6$ и снова растут при $Fr > 6$.

Поведение дисперсии Δ_Z довольно неплохо аппроксимируется стационарным решением уравнения Ландау [13], описывающего рост амплитуды возмущения в режиме мягкого самовозбуждения при малой надкритичности в виде

$$\Delta_Z = \left(\frac{2\gamma}{\alpha} (Fr - Fr_c) \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

где $2\gamma/\alpha = 0.4$ и $Fr_c = 3.6$ при $Fr < 5$ и $2\gamma/\alpha = 0.45$ и $Fr_c = 4.8$ при $Fr > 6$ (штриховые линии на фиг. 6). Результаты указывают на то, что стационарное осесимметричное течение теряет устойчивость благодаря бифуркации Андронова-Хопфа, приводящей к развитию двухмодового нестационарного решения. В области $3 < Fr < 5$ доминирует мода, отвечающая круговым движениям верхушки фонтана, в то время как при $Fr > 6$ доминирующей является мода, соответствующая режиму обрушений. Ниже в разд. 3 обсуждается теоретическая модель взаимодействия двух мод в режиме малой надкритичности, предсказания которой сравниваются с численными результатами.

Из фиг. 6 видно, что частота, отвечающая главному пику в спектре колебаний интерфейса $Z_{p=1.5}$ в области верхушки фонтана (совпадающая также с частотой внутренних волн), монотонно уменьшается с ростом числа Фруда пропорционально Fr^{-2} . Эта асимптотика получается, если предположить что частота осцилляций верхушки фонтана определяется масштабом скорости U и скачком плавучести $g\Delta\rho/\rho$. Тогда для безразмерной частоты осцилляций находим

$$\Omega_Z \sim \frac{Dg\Delta\rho}{\rho U^2} \sim Fr^{-2} \quad (2.4)$$

Такая же асимптотика для частоты осцилляций верхушки фонтана в однородной жидкости наблюдается в эксперименте [3].

3. Конкуренция мод колебаний осциллирующего фонтана. Для теоретического анализа взаимодействия мод колебаний верхушки фонтана воспользуемся подходом, развитым Ландау для описания развития возмущений в гидродинамических системах с малой надкритичностью [14], а также феноменологической моделью, предложенной в [15] для описания автоколебаний в многочастотных системах.

Рассмотрим поле скорости течения в фонтане в виде суммы стационарного осесимметричного решения $U_0(x, y, z)$ и малых возмущений, соответствующих двум различным модам,

$$U_i(x, y, z, t) = A_0 U_{0i}(x, y, z) + \text{Re} \{ A_1(t) U_{1i}(x, y, z) + A_2(t) U_{2i}(x, y, z) \} \quad (3.1)$$

где $i = x, y, z$, $\text{Re} \{ \}$ обозначает вещественную часть выражения в скобках, и

$$A_{1,2}(t) \equiv A_{1,2}(\beta_{1,2} t) \exp(-i\omega_{1,2} t) \quad (3.2)$$

Здесь $A_{1,2}$ и $\omega_{1,2}$ – комплексные амплитуды и собственные (вещественные) частоты мод. Инкремент каждой моды линейно зависит от управляющего параметра, числа Фруда $\beta_{1,2} = \gamma_{1,2}(Fr - Fr_{1,2})$, где $\gamma_{1,2}$ – положительные константы и $Fr_{1,2}$ – пороговые значения числа Фруда генерации 1-й и 2-й мод соответственно. В согласии с результатами численного моделирования, изложенными в разд. 2, будем рассматривать $Fr_1 < Fr_2$.

Система уравнений для амплитуд мод может быть выведена подстановкой разложения (3.1) в исходные уравнения движения, линеаризацией по малым возмущениям и дальнейшим усреднением уравнения для амплитуд по периодам частот $\omega_{1,2}$ [14]. Будем считать, что в случае малой надкритичности выполняются условия $\omega_{1,2} \gg \beta_{1,2}$ и $|\omega_1 - \omega_2| \gg \beta_{1,2}$. Тогда с учетом нелинейного взаимодействия мод система укороченных уравнений для амплитуд принимает вид [14, 15]

$$\frac{d|A_i|^2}{dt} = 2\gamma_i(Fr - Fr_i)|A_i|^2 - \alpha_i|A_i|^4 - r_i|A_1|^2|A_2|^2, \quad i = 1, 2 \quad (3.3)$$

Второе и третье слагаемые в правой части (3.3) – нелинейные поправки, вызванные самовоздействием мод и их перекрестным взаимодействием. Предположим, что коэффициенты α_i и r_i нелинейного взаимодействия и самовоздействия мод в системе (3.3) положительны (что типично для неконсервативного взаимодействия мод, имеющих один источник энергии [15]).

Рассмотрим случай $Fr > Fr_1$, когда можно ввести новые неотрицательные неизвестные функции m_1 и m_2 и “медленное” время τ , определяемые следующими выражениями:

$$|A_i|^2 = \frac{2\gamma_1}{\alpha_i}(Fr - Fr_1)m_i, \quad i = 1, 2, \quad \tau = 2\gamma_1(Fr - Fr_1)t \quad (3.4)$$

Тогда из системы (3.3) с учетом (3.4) получим

$$\frac{dm_i}{d\tau} = \mu_i m_i - m_i^2 - R_i m_1 m_2, \quad i = 1, 2, \quad (3.5)$$

$$R_{1,2} = \frac{r_{1,2}}{\alpha_{2,1}}, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 \equiv \mu = \frac{\gamma_2(Fr - Fr_2)}{\gamma_1(Fr - Fr_1)} \quad (3.6)$$

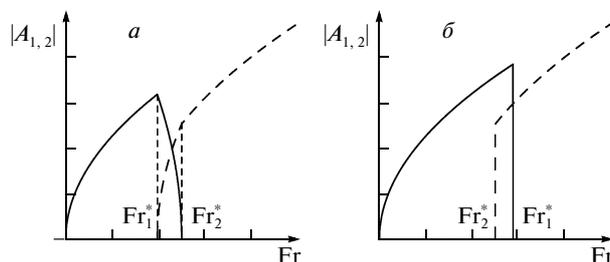
Здесь μ – новый управляющий параметр задачи. Из (3.6) видно, что при $Fr > Fr_1$ параметр μ монотонно растет с увеличением Fr , так что $-\infty < \mu \leq \gamma_2/\gamma_1$ при $Fr_1 \leq Fr < \infty$.

Легко показать, что система (3.5) имеет 4 состояния равновесия, и найти условия их устойчивости. Соответствующие решения вид:

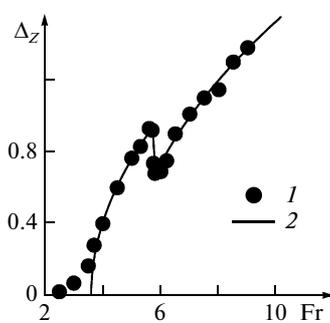
$$(m_1, m_2) = (0, 0), \quad (m_1, m_2) = (1, 0), \quad (m_1, m_2) = (0, \mu) \quad (3.7)$$

$$(m_1, m_2) = \left(\frac{1 - \mu R_1}{1 - R_1 R_2}, \frac{\mu - R_2}{1 - R_1 R_2} \right) \quad (3.8)$$

Решение (0,0) описывает стационарное течение в фонтане, неустойчивое при $Fr > Fr_1$. В случае $R_1 R_2 < 1$, или “слабой” связи мод, реализуются следующие режимы автоколебаний. При $\mu < R_2$ устойчивым является состояние равновесия (1, 0), т.е. возбуждается только 1-я мода. При $R_2 < \mu < 1/R_1$ устойчиво состояние равновесия (3.8), т.е. наблюдается двухмодовый режим. При $\mu > 1/R_1$ устойчиво состояние равновесия (0, μ), т.е. возбуждается только 2-я мода. Легко построить зависимости амплитуд мод $|A_{1,2}|$ от числа Фруда, которое однозначно связано с μ формулой (3.6) (рис. 7, а). Дисперсия колебаний определяется суммой квадратов амплитуд мод $\Delta_Z = (|A_1|^2 + |A_2|^2)^{1/2}$, и в рассматриваемом случае “слабой” связи мод в зависимости $\Delta_Z(Fr)$ нет разрывов, и присутствуют лишь изломы.



Фиг. 7. Зависимости амплитуд мод от числа Фруда для случаев “слабой” (а) и “сильной” (б) связей мод; $Fr_1^* = Fr(\mu = R_2)$, $Fr_2^* = Fr(\mu = 1/R_1)$



Фиг. 8. Зависимость дисперсии смещения изопикны $Z_{\rho=1.5}$ верхушки фонтана Δ_Z от числа Фруда в численном моделировании (1) и теоретическая аппроксимация (2)

В случае $R_1 R_2 > 1$, или “сильной” связи мод, реализуются следующие режимы автоколебаний. Состояние равновесия (3.8), соответствующее двухмодовому режиму, оказывается неустойчивым. При $\mu < 1/R_1 < R_2$ состояние равновесия (1, 0) устойчиво, т.е. возбуждается 1-я мода. При $\mu > R_2 > 1/R_1$ устойчиво состояние равновесия (0, μ), т.е. возбуждается 2-я мода. При $1/R_1 < \mu < R_2$ состояния равновесия (1, 0) и (0, μ) оба устойчивы, т.е. реализуется бистабильный режим, когда в зависимости от начальных условий развивается либо 1-я, либо 2-я моды. Зависимости амплитуд $|A_{1,2}|$ от числа Фруда Fr в рассматриваемом случае “сильной” связи мод на рис. 7, б показывают, что дисперсия $\Delta_Z(Fr)$ определяется амплитудой либо 1-й, либо 2-й моды и меняется скачком при смене режима автоколебаний.

Поскольку в зависимости $\Delta_Z(Fr)$, полученной в численном моделировании (фиг. 6, б), присутствуют лишь изломы, ясно, что в численном моделировании реализуется случай “слабой” связи мод. По зависимости $\Delta_Z(Fr)$ на фиг. 5, б коэффициенты и значения чисел Фруда в (3.3)–(3.5) определяются методом наименьших квадратов в виде $2\gamma_1/\alpha_1 \approx 0.41$, $2\gamma_2/\alpha_2 \approx 0.45$, $Fr_1 \approx 3.6$ и $Fr_2 \approx 4.8$. Параметры $R_1 \approx 2$ и $R_2 \approx 0.47$ определяются из условия наилучшего согласия теоретической аппроксимации с численными результатами в интервале $R_2 < \mu < 1/R_1$. Сравнение на фиг. 8 показывает хорошее соответствие теоретической зависимости с результатами численного моделирования.

В рамках рассмотренной выше модели учитываются только энергетические эффекты взаимодействия мод и не рассматриваются эффекты, связанные с возможным ча-

стотным синхронизмом между модами. С другой стороны, результаты численного моделирования на фиг. 6, *в* показывают, что частоты мод, вообще говоря, могут иметь близкие значения, так как частота колебаний верхушки фонтана изменяется достаточно плавно в области критического значения числа Фруда $Fr \approx 5$. Согласие предсказаний модели с результатами численного моделирования на фиг. 8 однако указывает на то, что эффекты, связанные с частотным синхронизмом мод, в рассматриваемом случае незначительны.

Заключение. Прямое численное и теоретическое моделирование динамики фонтана, образующегося при проникновении вертикальной струи сквозь пикноклин в стратифицированной жидкости, показало, что при числе Фруда Fr , превышающем некоторое критическое значение, течение становится неустойчивым, и фонтан совершает автоколебания, сопровождающиеся генерацией внутренних волн в пикноклине. В зависимости от Fr выделены две различные моды автоколебаний. В обоих случаях частота внутренних волн совпадает с частотой колебаний верхушки фонтана и уменьшается с ростом числа Фруда. Зависимость амплитуды колебаний верхушки фонтана от числа Фруда в численном моделировании хорошо согласуется с предсказанием теоретической модели конкуренции мод в режиме мягкого самовозбуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-05-00779, 09-05-97012).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Turner J.S.* Jets and plumes with negative or reversing buoyancy // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 26. Pt 4. P. 779–792.
2. *Kaye N.B., Hunt G.R.* Weak fountains // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 558. P. 319–328.
3. *Williamson N., Srinarayana N., Armfield S.W., McBain G.D., Lin W.* Low-Reynolds-number fountain behaviour // *J. Fluid Mech.* 2008. V. 608. P. 297–317.
4. *Lin W., Armfield S.W.* Direct simulation of weak axisymmetric fountains in a homogeneous fluid // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 403. P. 67–88.
5. *Koh R.C.Y., Brooks N.H.* Fluid Mechanics of waste-water disposal in the ocean. // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1975. V. 7. P. 187–211.
6. *Бондур В.Г., Журбас В.М., Гребенюк Ю.В.* Математическое моделирование турбулентных струй глубинных стоков в прибрежные акватории // *Океанология.* 2006. Т. 46. № 6. С. 805–820.
7. *Keeler R., Bondur V., Gibson C.* Optical satellite imagery detection of internal wave effects from a submerged turbulent outfall in the stratified ocean // *Geophys. Res. Letters.* 2005. V. 32. P. L12610.
8. *Троицкая Ю.И., Сергеев Д.А., Ежова Е.В., Соустова И.А., Казаков В.И.* Автогенерация внутренних волн всплывающими струями в стратифицированном бассейне // *Докл. РАН.* 2008. Т. 419. № 5. С. 691–695.
9. *Карликов В.П., Трушина О.В.* Об автоколебаниях плоских затопленных фонтанов // *Докл. РАН.* 1998. Т. 361. № 3. С. 340–344.
10. *Карликов В.П., Трушина О.В.* О возможной классификации автоколебательных режимов фонтанирования плоских вертикальных затопленных струй тяжелой жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2009. № 3. С. 23–35.
11. *Дружинин О.А.* Коллапс и автомодельность турбулентной струи в пикноклине // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2003. Т. 39. № 5. С. 697–711.
12. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 519 с.
13. *Флетчер Г.К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. М.: Мир, 1991. 504 с.
14. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
15. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.