

УДК 551.466.8

ВЛИЯНИЕ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ СКОРОСТИ В ОКЕАНЕ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

ОСТРОВСКИЙ Л. А., ТРОИЦКАЯ Ю. И.

Построена модель, описывающая влияние случайной тонкой структуры течений на распространение внутренних волн. При этом используется приближение, в котором случайные компоненты полей смещения и давления в волне малы по сравнению со средними, так что преобладают крупномасштабные по сравнению с масштабом тонкой структуры компоненты поля. В результате показано, что устойчивые случайные течения (даже с нулевым средним) существенно влияют на дисперсионные характеристики внутренних волн. Данная модель позволяет рассчитать скорость нарастания или затухания внутренних волн, имеющих критические слои с малыми значениями чисел Ричардсона, в зависимости от свойств функции распределения вероятности по скоростям в тонкой структуре течений. Обсуждается связь данной модели с развитым ранее кинетическим подходом к решению подобных задач.

Измерения течений в океане при вертикальном зондировании с высоким пространственным разрешением показывают, что поле скорости имеет слоистую структуру: на фоне мезомасштабного сдвига скорости с характерным масштабом порядка глубины океана наблюдается тонкая структура течений с вертикальным масштабом в $1 \div 10$ м [1, 2]. Мезомасштабный средний сдвиг скорости, как правило, мал, так что выполняется достаточное условие устойчивости Майлса — Ховарда $Ri > 1/4$ [3, 4], где Ri — число Ричардсона. Тонкоструктурный же сдвиг скорости значительно больше и в нем возможно выполнение условия $Ri < 1/4$, и в принципе становится возможным усиление волн. Тонкая структура течений (ТСТ), в которой числа Ричардсона, определяемые по локальному сдвигу и стратификации, меньше $1/4$, была обнаружена, например, в экваториальных противотечениях: в Тропической Атлантике (течение Ломоносова [5]), в Тихом океане (течение Кромвелла [6]). В [7] описаны наблюдения ТСТ в Индийском океане, в которой области сильного сдвига совпадали с перемешанными областями, что и обеспечивало выполнение условия $Ri < 1/4$.

В ТСТ поле скорости представляет собой случайную функцию вертикальной координаты z , поэтому для описания внутренних волн (ВВ), распространяющихся на ее фоне, необходимо использование аппарата статистического осреднения в той или иной форме. В работе [8] авторами было предложено использовать уравнение для одноточечной функции распределения вероятности скорости и плотности в стратифицированном потоке. При этом взаимодействие ВВ и ТСТ естественно интерпретируется как резонансный энергообмен волны с жидкими частицами (аналогичный затуханию Ландау в плазме [9]). Однако в [8] рассматривался частный вид функции распределения — гауссова функция с нулевым средним; при этом ВВ всегда затухает. Кроме того, при таком статистическом подходе остается неясным механизм взаимодействия ВВ с каждой отдельной реализацией поля скорости. В [10] рассмотрена

задача о распространении ВВ на фоне детерминированного пространственно-периодического течения, моделирующего реализацию ТСТ. Было показано, что взаимодействие волны с потоком может быть также интерпретировано как энергообмен в критических слоях, где скорость течения совпадает с фазовой скоростью волны. В данной работе рассматриваются эффекты резонансного усиления и затухания ВВ на произвольной случайной ТСТ при наличии критических слоев, а также влияние течения на дисперсионные свойства волны в их отсутствие. В конце статьи обсуждается связь со статистическим подходом, основанным на кинетическом уравнении.

1. **Осреднение уравнений для комплексных амплитуд ВВ на фоне случайно-неоднородной ТСТ.** Рассмотрим модель горизонтально-одно-родного океана с заданными частотой Брента-Вяйсяля $N(z)$ и скоростью горизонтального течения $U(z)$. Последняя имеет вид $\langle U \rangle(z) + U'(z)$, где $\langle U \rangle(z)$ — средний сдвиговый поток, а $U'(z)$ — случайная тонкоструктурная часть, характеризуемая вертикальным масштабом корреляции L_z и среднеквадратичной величиной пульсаций горизонтальной скорости U_0 . На фоне такой структуры распространяется линейная гармоническая плоская неоднородная ВВ, в которой гидродинамические поля имеют вид:

$$\varphi(x, z, t) = \Phi(z) \exp\{i(\omega t - kx)\}.$$

Из линеаризованных уравнений гидродинамики нетрудно получить уравнения для комплексных амплитуд возмущений давления $p(z)$ и смещения изопикны $q(z)$ в такой волне:

$$\frac{dq}{dz} = \frac{p}{\rho_0} \frac{k^2}{(\omega - Uk)^2}, \quad (1.1a)$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 q [N^2 - (\omega - Uk)^2]. \quad (1.1b)$$

Здесь ω и k — частота (вообще говоря, комплексная) и горизонтальное волновое число.

Рассматривая локальные свойства системы (1.1), можно показать (см. Приложение), что при выполнении условий $N^2 L_z^2 / U_0^2 \ll 1$ и $(L_z / \lambda_z) (U_0 / c_i)^{3/2} \ll 1$, где $c_i = k^{-1} \text{Im } \omega$, $\text{Im } \omega$ — мнимая часть частоты, на фоне ТСТ могут существовать волновые возмущения, в которых крупномасштабные средние компоненты полей давления p и смещения изопикны q (имеющие горизонтальный λ_x и вертикальный λ_z масштабы, много большие L_z) велики по сравнению с пульсационными (имеющими масштаб L_z). Возмущения других гидродинамических полей (например, вертикальной w и горизонтальной u скоростей) этим свойством не обладают.

Малость пульсационных компонент p и q по сравнению со средними следует уже из простых физических соображений. Действительно, в этом случае много (порядка λ_z / L_z) слоев ТСТ смещается синфазно. Это и означает, что на каждом из них изменение поля q мало (его относительная величина порядка L_z / λ_z). Перепад давлений на одном слое ТСТ в этом случае также мал, если отсутствуют резкие скачки плотности на масштабе корреляции поля скорости L_z .

В этом случае, как показано в Приложении, поля $p(z)$ и $q(z)$ могут быть представлены в виде сумм крупномасштабных P, Q и мелкомасштабных p_1, q_1 компонент:

$$p = P(z/\lambda_z) + p_1(z/L_z), \quad q = Q(z/\lambda_z) + q_1(z/L_z), \quad (1.2)$$

причем $|p_1| \ll |P|$, а $|q_1| \ll |Q|$.

Профиль скорости в ТСТ представляет собой случайную функцию z , поэтому для описания волновых возмущений на его фоне необходимо воспользоваться аппаратом статистического осреднения в той или иной

Профиль скорости $U(z)$	Функция распределения $F_0(u)$
1. Пространственно-периодический профиль с периодом a . На периоде $U(z) = U_0 \begin{cases} \frac{z}{a}, & 0 < z < \frac{a}{2}, \\ \frac{a-z}{a}, & \frac{a}{2} < z < a \end{cases}$	$F_0(u) = \begin{cases} \frac{1}{U_0}, & u < \frac{U_0}{2}, \\ 0, & u > \frac{U_0}{2} \end{cases}$
2. Пространственно-периодический профиль с периодом $2a$. На периоде $U(z) = \frac{4U_0}{a^2} \begin{cases} z(a-z), & 0 < z < a, \\ z(a+z), & -a < z < 0 \end{cases}$	$F_0(u) = \begin{cases} {}^{1/4}U_0^{-1/2}(U_0 - u)^{-1/2}, & u < U_0 \\ 0, & u > U_0 \end{cases}$
3. $U(z) = U_0 \left(\frac{N(z)}{N(0)} \right)^{1/2} \sin \frac{\kappa_0 N(z)}{N(0)} z$ поле горизонтальной скорости во внутренней инерционно-гравитационной волне в ВКБ-приближении; $N(z)$ — профиль частоты Брента — Вайсяля	$F_0(u, z) = \begin{cases} \pi^{-1} [U_0^2 (N(z)/N(0)) - u^2]^{-1/2}, & u < U_0 \sqrt{\frac{N(z)}{N(0)}} \\ 0, & u > U_0 \sqrt{\frac{N(z)}{N(0)}} \end{cases}$
4. Редко расположенные параболические струи на фоне случайного профиля скорости с функцией распределения $f_0(u)$	$F_0(u) = f_0(u) + (\alpha/2) [U_0(U_0 - u)]^{-1/2}$

вид:

$$\frac{d}{dz} \left[\left(\int \frac{F_0 du}{(\omega - uk)^2} \right)^{-1} \frac{d\langle q \rangle}{dz} \right] + k^2 \langle q \rangle [\langle N^2 \rangle - (\omega - \langle U \rangle k)^2 - \langle U'^2 \rangle k^2] = 0. \quad (1.8)$$

Прежде чем переходить к анализу дисперсионных свойств ВВ, рассмотрим несколько примеров профилей скорости и приведем выражения для функций распределения, соответствующих этим профилям по формуле (1.6). Заметим, что такая функция распределения может быть введена и для детерминированных, в том числе периодических, профилей скорости. При этом распределение по скоростям обусловлено распределением скорости по пространству в профиле $U(z)$ [13]. Примеры представлены в таблице.

2. Дисперсионные характеристики внутренних волн при наличии ТСТ.

Для определения дисперсионных свойств ВВ в натуральных условиях, как правило, пользуются сглаженными средними профилями частоты Брента — Вайсяля и скорости течений. Важно, однако, оценить влияние тонкоструктурных неоднородностей на дисперсионные характеристики ВВ. Для малых возмущений частоты Брента — Вайсяля такие оценки были проделаны в [14].

Мы рассмотрим влияние ТСТ на дисперсионные характеристики ВВ, распространяющейся на ее фоне. Будем сначала считать, что фазовая скорость волны в горизонтальном направлении настолько велика, что волна не имеет критических слоев. При этом доплеровский сдвиг частоты на потоке приводит лишь к изменению дисперсионных характеристик собственных волн. Выберем простейший вид функции распределения невозмущенного поля скорости — равномерное распределение в интервале $[-U_0, U_0]$, при этом $\langle U \rangle = 0$ (см. п. 1 таблицы). Тогда уравнение для $\langle q \rangle$ принимает вид:

$$\frac{d}{dz} \left[(\omega^2 - U_0^2 k^2) \frac{d\langle q \rangle}{dz} \right] + k^2 \left[N^2 - \omega^2 - \frac{U_0^2 k^2}{3} \right] = 0, \quad (2.1)$$

где U_0, N могут зависеть от z . Примем условия «твердой крышки» на дне и поверхности океана — $\langle q \rangle(0) = \langle q \rangle(H) = 0$. В частности, при не зависящих от z значениях N и U_0 дисперсионное уравнение для ВВ имеет вид: $\omega_n^2 = k^2(N^2 - \omega^2 - U_0^2 k^2/3)/(k^2 + \kappa_n^2)$, $\kappa_n = \pi_n/H$. Очевидно, что влияние ТСТ увеличивается с уменьшением фазовой скорости волны и особенно существенно для ВВ с большими значениями вертикальных и горизонтальных волновых чисел.

Рассмотрим более реалистичный случай, когда N и U_0 зависят от z . В ВКБ-приближении [15] получим уравнение:

$$\frac{\pi}{4} + k \int_0^h \left(\frac{N^2(z) - \omega^2 - U_0^2(z) k^2/3}{\omega^2 - U_0^2(z) k^2} \right)^{1/2} dz = \pi n. \quad (2.2)$$

Здесь h — координата каустики, удовлетворяющая уравнению: $N^2(h) - \omega^2 - U_0^2(h) k^2/3 = 0$.

Решение уравнения (2.2) было проведено нами на ЭВМ для модельного профиля частоты Брента — Вайсяля

$$N^2(z) = N^2(0) (1 - z/H)^2. \quad (2.3)$$

Заметим, что если ТСТ обусловлена наличием инерционно-гравитационной волны (как, например, в измерениях Сэнфорда [2]), то зависимость дисперсии горизонтальной скорости U_0^2 от z , соответствующая ВКБ-решению для такой волны, имеет вид: $U_0^2(z) = U_0^2(0) N(z)/N(0)$. В нашем случае, согласно (2.3), $U_0^2(z) = U_0^2(0) (1 - z/H)$. Дисперсионные кривые 5-й, 6-й, 10-й мод ВВ без учета ТСТ и величина сдвига квадрата частоты $\Delta\omega_n^2$, вызванного наличием ТСТ, для этих мод при значениях параметров гидрологии, близких к измеренным в [2] — $N = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $U_0 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$, $H = 1000 \text{ м}$, изображены на рис. 1. Величина $\Delta\omega_n^2$ составляет до 20% от ω_n^2 для 5-й моды, до 25% для 6-й и до 40% для 10-й моды. Таким образом, тонкоструктурные возмущения скорости, даже имеющие нулевое среднее, могут существенно изменять дисперсионные характеристики ВВ, имеющих масштабы, много большие вертикального радиуса корреляции ТСТ.

3. Резонансный энергообмен между ВВ и ТСТ. Рассмотрим случай, когда у ВВ, распространяющейся на фоне ТСТ, есть критические слои. При этом, как уже говорилось выше, крупномасштабные собственные волны (с вертикальными масштабами λ_z , много большими, чем радиус корреляции течения L_z) могут существовать, если $Ri = (NL_z/U_0)^2 \ll 1$.

Рассмотрим сначала простую модель, в которой $\langle N^2 \rangle$, $\langle u \rangle$, $F_0(u)$ не зависят от z . Тогда из (1.8) следует дисперсионное уравнение

$$-\kappa^2 \left[\int \frac{F_0 du}{(\omega - uk)^2} \right]^{-1} + k^2 (\langle N^2 \rangle - \omega^2 - U^2 k^2) = 0, \quad (3.1)$$

$$\kappa_n = \frac{\pi n}{H}.$$

Наличие критических слоев в течении соответствует наличию при $u = \omega/k$ полюса в интеграле, при обходе которого следует пользоваться правилом Ландау [9]. Если выполняется условие $\omega/k \ll U$, где U — дисперсия скорости, то решение уравнения (3.1) можно записать в виде:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1, \quad \omega_0 = kN/\sqrt{k^2 + \kappa_n^2}, \quad (3.2)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \frac{k}{N \sqrt{k^2 + \kappa_n^2}} \left[3U^2 \kappa_n^2 - k^2 U^2 + \frac{\kappa_n^2 N^4}{(k^2 + \kappa_n^2)^2} \pi i F_{0u} \left(\frac{\omega_0}{k} \right) \right].$$

Решение (3.2) справедливо при условии $F_{0u}(\omega_0/k) \ll (k^2 + \kappa_n^2)/\kappa_n^2 \pi N^2$. Из (3.2) видно, что знак $\text{Im} \omega$ определяется знаком $F_{0u}(\omega/k)$. Так, соб-

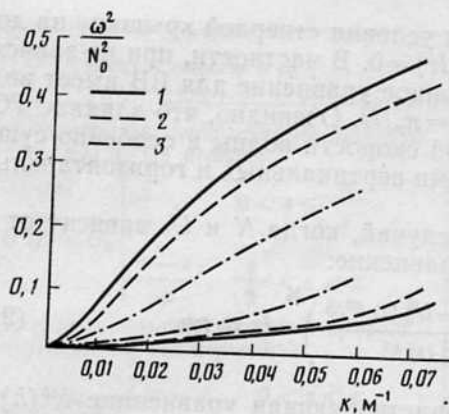


Рис. 1

Рис. 1. Невозмущенные дисперсионные характеристики $\omega_n^2(k)$ (1) и сдвиг частоты $\Delta\omega_n^2(k)$ (2), вызванный наличием ТСТ: 1 — для 5-й моды, 2 — для 6-й моды, 3 — для 10-й моды

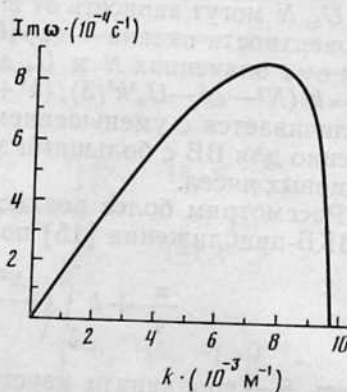


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость $\text{Im } \omega(k)$ для ВВ с максимальным инкрементом, нарастающей при взаимодействии с ТСТ

ственные волны, имеющие критические слои с функциями распределения пп. 2, 3 таблицы, могут быть только нарастающими, поскольку для них $F_{0n}(\omega_0/k) < 0$. Для функции распределения вида 1 $F_{0n} = 0$, поэтому волны с критическими слоями нейтрально устойчивы.

Резонансное взаимодействие ВВ с ТСТ можно рассматривать как механизм генерации цугов короткопериодных ВВ (КВВ). Как известно, КВВ в океане вызывают волновые возмущения с периодами от нескольких часов до нескольких минут [17]. Как показывают измерения, проведенные в различных районах Мирового океана [17], в этом диапазоне периодов спектральное распределение энергии ВВ близко к среднему к равновесному спектру Гаррета — Манка [18] или его модификациям [19]. Отклонения от этих спектров связаны в основном с прохождением интенсивных цугов ВВ, имеющих периоды 30–60 мин [17, 20]. Как отмечается в [17], прохождение цуга КВВ сопровождается возрастанием вертикальной длины когерентности от фонового значения 10 м до величины порядка 100 м. Еще одной особенностью КВВ является периодичность появления цугов, близкая к локальному инерционному периоду. При этом время появления цугов привязано к определенной фазе инерционных колебаний, при которой число Ричардсона в поле инерционной волны минимально [17]. Цуги КВВ наиболее часто наблюдаются во фронтальных зонах, где, как известно, максимальна интенсивность инерционных колебаний [21]. Ряд натуральных экспериментов показывает [2, 21], что ТСТ часто представляет собой поле скорости в инерционно-гравитационной волне. Все это дает возможность предположить, что цуги КВВ вызваны сдвиговой неустойчивостью ТСТ и могут быть описаны в рамках развиваемой модели¹.

Данные о профилях скорости в ТСТ довольно скудны, и из них сложно извлечь информацию о функции распределения скоростей, которая в нашей модели определяет дисперсионные свойства ВВ. При выборе модельного профиля скорости в ТСТ, развитие неустойчивости которого может вызвать генерацию КВВ, воспользуемся следующими качественными соображениями. Для неустойчивости ТСТ нужно, чтобы ее функ-

¹ Следует заметить, что в работах [22–24] рассматривался механизм генерации цугов КВВ при разрушении крупномасштабных волн, однако, на наш взгляд, целесообразно учесть специфику мелкомасштабной ТСТ, поскольку именно в ней достигаются максимальные, в том числе и неустойчивые сдвиги скорости.

ция распределения имела растущий участок. Это вполне реальная ситуация, такую функцию распределения имеет, например, синусоидальный профиль скорости (см. п. 3 таблицы). Однако существование профиля скорости с большим числом слоев, сдвиг скорости в которых неустойчив, маловероятно. Более реальной, на наш взгляд, выглядит следующая модель ТСТ: на фоне малых флуктуаций скорости (с устойчивыми сдвигами) имеются редко расположенные выбросы с максимальной скоростью U_0 , значительно превосходящей среднеквадратичные флуктуации скорости случайного профиля U . Сдвиги скорости на таких выбросах неустойчивы, так что $Ri \ll 1$. Функция распределения такого течения имеет вид, задаваемый формулой п. 4 таблицы, где α имеет смысл относительной толщины струйного выброса по сравнению с расстоянием между струями. Естественно считать, что $\alpha \ll 1$, $f_0(u)$ — функция распределения с характерным масштабом по u , равным $U \ll U_0$. Пренебрегая величинами порядка α при вычислении $\text{Re } \omega$, можно записать дисперсионное уравнение (3.1) с $F_0(u)$, задаваемой формулой п. 4 из таблицы, при условии $\omega/k \gg U$ в виде²:

$$\left[\left(1 + \frac{3U^2 k^2}{\omega^2} \right) (N^2 - \omega^2 - U^2 k^2) k^2 - \kappa^2 \omega^3 \right] (\omega - U_0 k)^{3/2} = \\ = i \frac{\alpha}{2} \frac{\pi \omega^2 k^2 (N^2 - \omega^2 - U^2 k^2)}{\sqrt{k} U_0}. \quad (3.3)$$

Максимальный инкремент при этом имеют волны, у которых фазовая скорость совпадает с U_0 . Для них:

$$\text{Re } \omega = U_0 N \left[1 - \kappa^2 U_0^2 / N^2 \left(1 + \frac{3U^2}{U_0^2} \right) \right]^{1/2} / \sqrt{U^2 + U_0^2}, \quad (3.4)$$

$$\text{Im } \omega = - \left(\frac{\alpha \pi}{4} \right)^{2/3} \sin \frac{3\pi}{5} U_0 k \left[\frac{1 - k^2 (U_0^2 + U^2) / N^2}{1 + 6U^2 / U_0^2 - 4U^2 k^2 / N^2} \right]^{2/3}.$$

Функция $\text{Im } \omega(k)$ имеет максимум при $k = (N/U_0) (\sqrt{5}/3) (1 - U^2/2U_0^2)$. При этом $\text{Re } \omega = N (\sqrt{5}/3) (1 - U^2/2U_0^2)$, а $\kappa = {}^{2/3} (N/U_0) (1 + 3U^2/2U_0^2)$.

В [17] описано наблюдение генерации цуга КВВ сдвиговой неустойчивостью течения. При этом перепад скоростей на вертикальном масштабе 10 м доходил до 50 см/с, частота Брента — Вьясяля составляла $5 \cdot 10^{-3} \div 7 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. При этом число Ричардсона равно 0,01—0,02 (т. е. $Ri \ll 1$). Примем в соответствии с [17] для оценок $N = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $U_0 = 5 \cdot 10^{-1} \text{ м/с}$, положим $U = 0,1 \text{ м/с}$ (аналогично [21]). Тогда наиболее неустойчивое возмущение имеет горизонтальную длину волны $\lambda_x = 860 \text{ м}$, период $T = 29 \text{ мин}$ и вертикальную длину волны $\lambda_z = 885 \text{ м}$. Измеренный период волны — 30 мин, что согласуется с теоретическими оценками. На рис. 2 изображена зависимость $\text{Im } \omega(k)$ при значениях N , U_0 , U , приведенных выше, и $\alpha = 0,1$. Максимальное значение $\text{Im } \omega = 8,6 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

В заключение оценим применимость рассматриваемого приближения. Согласно сказанному выше, должны выполняться условия $a = UL_z/U_0 \ll 1$ и $b = (L_z/\lambda_z) (U_0/c_i)^{1/2}$. Положим $L_z = 10 \text{ м}$ (типичное значение масштаба ТСТ). Тогда при заданных параметрах течения $a = 0,1$ и $b = 0,1$.

Таким образом, генерация цугов КВВ может быть объяснена развитием сдвиговой неустойчивости ТСТ, характеризующейся большими локальными сдвигами скорости. Заметим, что этот вывод носит предварительный характер. Для более детальных оценок требуются данные од-

² Заметим, что функция распределения пространственно-периодического потока с периодом L , рассмотренного в [10] и представляющего собой тонкие (толщиной αL) параболические струи на фоне покоящейся жидкости, также имеет вид п. 4 из таблицы, где $f_0(u) = (1 - \alpha) \delta(u)$. Дисперсионное уравнение для ВВ на фоне этого периодического потока совпадает с (3.3) при $U = 0$.

новременных измерений короткопериодных колебаний и профилей скорости и плотности с высоким пространственным разрешением.

4. О кинетическом описании ВВ на случайном поле течений. Используемые здесь уравнения были получены осреднением уравнений гидродинамики. В [8] с аналогичной целью было использовано кинетическое уравнение для одноточечной функции распределения вероятности скорости и плотности. Покажем, как соотносятся эти два подхода. По определению, одноточечная функция распределения по скорости и плотности равна: $f(\mathbf{v}, \lambda, \mathbf{r}, t) = \langle \delta(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}) \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \lambda) \rangle$. Здесь угловые скобки означают вероятностное осреднение. Уравнение для функции распределения (кинетическое уравнение) имеет вид [8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\langle \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \delta(\rho - \lambda) \right\rangle = 0. \quad (4.1)$$

В отсутствие волнового возмущения случайное стационарное горизонтально-однородное течение, рассматриваемое здесь, характеризуется функцией распределения вида:

$$f_0(u, w, \lambda, z) = \Phi_0(u, \lambda, z) \delta(w), \quad (4.2)$$

где u и w — горизонтальная и вертикальная скорости. Для невозмущенного течения, очевидно, справедливо гидростатическое соотношение $dp_0/dz + (\rho^{(0)} - \rho_0)g = 0$, где p_0 — невозмущенное давление, $\rho^{(0)}$ — невозмущенное тонкоструктурное распределение плотности (оба — случайные функции z). При наложении на это течение плоской неоднородной гармонической волны функция распределения, а также поля давления и плотности имеют вид: $(f, p, \rho) = (f_0, p_0, \rho_0) + (f_1(u, w, \lambda, z), p_1(z), \rho_1(z)) \cdot \exp[i(\omega t - kx)]$, а кинетическое уравнение (4.1) в линейном приближении можно записать в виде:

$$i(\omega - uk)f_1 + w \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial u} \langle ikp_1 \delta(U(z)x_0 - v) \delta(\rho^{(0)} - \lambda) \rangle - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial w} \left\langle \left(\frac{dp_1}{dz} + \rho_1 g \right) \delta(U(z)x_0 - v) \delta(\rho^{(0)} - \lambda) \right\rangle = 0. \quad (4.3)$$

Здесь $U(z)$ — тонкоструктурный профиль скорости. Как показано в Приложении, для крупномасштабных волновых возмущений с $\lambda_z \gg L_z$ пульсационные компоненты полей смещения изопокны и давления много меньше пространственно-осредненных. Для вероятностного осреднения справедливы те же неравенства. Из уравнений гидродинамики следует, что смещения изопокны связаны с полями давления и плотности уравнением

$$(\omega - Uk)^2 q_1 + \left(\frac{dp_1}{dz} + \rho_1 g \right) \frac{1}{\rho_0} = 0. \quad (4.4)$$

Используя (4.4) и учитывая малость пульсационных компонент p_1 и q_1 по сравнению со средними, можно переписать уравнение (4.3) в виде:

$$i(\omega - uk)f_1 + w \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{ik \langle \rho_1 \rangle}{\rho_0} \frac{\partial f_0}{\partial u} - (\omega - uk)^2 \langle q_1 \rangle \frac{\partial f_0}{\partial w} = 0. \quad (4.5)$$

Осредняя уравнение (4.4) с учетом малости $q_1 - \langle q_1 \rangle$ по сравнению с $\langle q_1 \rangle$, получим:

$$-\rho_0 \langle (\omega - Uk)^2 \rangle \langle q_1 \rangle + \frac{d \langle \rho_1 \rangle}{dz} + \langle \rho_1 \rangle g = 0. \quad (4.6)$$

Заметим, что по определению

$$\langle \rho_1 \rangle = \int \lambda f_1 du dw d\lambda, \quad (4.7)$$

а условие нормировки функции f_1 имеет вид

$$\int f_1 du dw d\lambda = 0. \quad (4.8)$$

Уравнения (4.5)–(4.8) образуют замкнутую систему. Аналогично [8] из уравнения (4.5) можно выразить f_i через $\langle p_i \rangle$ и $\langle q_i \rangle$:

$$f_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^n}{[i(\omega - uk)]^{n+1}} \frac{d^n}{dz^n} \left[-\frac{ik}{\rho_0} \langle p_i \rangle \frac{\partial f_0}{\partial u} + (\omega - uk)^2 \langle q_i \rangle \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right].$$

Отсюда с использованием (4.6)–(4.8) легко получить для $\langle q_i \rangle$ уравнение вида (1.8), в котором $F_0(u, z) = \int \Phi_0(u, \lambda, z) d\lambda$ — функция распределения горизонтальных скоростей, совпадающая по вероятности с функцией $F_0(u, z)$, даваемой формулой (1.6), в силу эргодической теоремы. Итак, оба подхода дают одно и то же уравнение.

Заметим, что дисперсионное уравнение для ВВ при нулевой средней скорости и постоянной частоте Брента — Вайсяля имеет вид (3.1). Оно несколько отличается от полученного в [8]. Дело в том, что в [8] предполагалось, что для случайных компонент возмущений давления p_i' и плотности ρ_i' выполняется квазигидростатическое соотношение: $dp_i'/dz + \rho_i'g = 0$ при $L_z k \ll 1$, где L_z — радиус корреляции ТСТ, а k — горизонтальное волновое число. Это соотношение, вообще говоря, справедливо только при $\kappa/k \gg 1$, κ — вертикальное волновое число среднего возмущения. При этом гидростатическое соотношение выполняется для полных волновых полей, и дисперсионное уравнение, полученное в [8], совпадает с (3.1).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что в крупномасштабных возмущениях ТСТ средние крупномасштабные составляющие полей p и q велики по сравнению с пульсационными. Для возмущений, не имеющих слоев совпадения с течением, в которых $c_{\Phi} = \text{Re } \omega/k = U(z_c)$, z_c — координата слоя совпадения, это утверждение может быть получено на основании простых оценок из системы (1.1). Рассмотрим более сложный случай, когда у волны есть один такой слой ($z_0 < z_c < z_1$). Очевидно, что если фазовая скорость волны порядка U_0 , то длина такого отрезка порядка L_z . Из системы (1.1) легко получить приближенное решение для q , справедливое локально на этом отрезке, которое с точностью до $(L_z/\lambda_z)^2 (L_z/\lambda_x)^2$ можно записать в виде:

$$q = B(1 + I_B) + AI_A, \quad I_B = -k^2 \int_{z_c}^z \frac{dy}{(\omega - Uk)^2} \int_{z_c}^y (N^2 - (\omega - Uk)^2) d\xi, \quad I_A = \int_{z_c}^z \frac{dy}{(\omega - Uk)^2}. \quad (\text{П.1})$$

Здесь B , A — константы; константа B имеет смысл крупномасштабной компоненты поля q , которая локально на отрезке $[z_0, z_1]$ практически постоянна. Величины BI_B и AI_A имеют смысл мелкомасштабных (с масштабом L_z) компонент поля q . Подставляя (П.1) в систему (1.1), получаем $B = q(z_c)$, $A = p(z_c)/\rho_0 k$. Учитывая связь p и q в ВВ и ее дисперсионное соотношение (из которого следует, что $\lambda_z \sim U_0/N$), можно показать, что $A \sim BU_0 N k^2$.

Оценим величину отдельных слагаемых в (П.1). Рассмотрим вначале случай, когда сдвиг скорости в слое совпадения отличен от нуля, т. е. $U'(z_c) \neq 0$. Тогда $I_A \sim U_{zz}/k^2 U_z^3 \sim L_z/k^2 U_0$, $I_B \sim N^2/U_{oz}^2 \sim N^2 L_z^2/U_0^2$. Отсюда с учетом выражения для A следует, что при $N L_z/U_0 \ll 1$ справедливы неравенства $BI_B \ll AI_A \ll B$.

Допустим теперь, что $U'(z_c) = 0$. Это особый случай, поскольку при этом $\text{Ri}(z_c) \rightarrow \infty$. Как известно [16], монохроматическая волна сильно взаимодействует с течением в окрестности слоя совпадения с $\text{Ri} > 1/4$; при этом ее вертикальный масштаб неограниченно уменьшается с приближением к этому слою. В рассматриваемом здесь случае ($N^2 L_z^2/U_0^2 \ll 1$) условие $\text{Ri} > 1/4$ может выполняться лишь в малой окрестности слоев с $U'(z_c) = 0$, имеющей ширину h порядка $L_z^2 N/U_0 \sim L_z^2/\lambda_z$. Рассмотрим нарастающую или затухающую волну с $\text{Im } \omega \neq 0$, тогда ширина ее спектра — порядка $\text{Im } \omega$. Каждая из спектральных компонент имеет свой слой совпадения, в результате область взаимодействия волны с течением имеет ширину H порядка $(c_t/U_{zz}(z_c))^{1/2} \sim L_z (c_t/U_0)^{1/2}$, где $c_t = \text{Im } \omega/k$. Если область h , в которой $\text{Ri} > 1/4$, много меньше H , то лишь малая часть спектра сильно взаимодействует с течением; для большей же части компонент спектра волны величина Ri в слое совпадения много меньше единицы. Поэтому можно считать, что волна с отличной от нуля $\text{Im } \omega$ будет взаимодействовать с течением так

же, как и в случае $Ri(z_c) \ll 1$. Условие $H \gg h$ можно переписать в виде $c_i/U_0 \gg (L_z/\lambda_z)^2$. В этом случае отдельные слагаемые в (П.1) имеют величины

$$I_A A \sim B \left(\frac{L_z}{\lambda_z} \right) \left(\frac{U_0}{c_i} \right)^{3/2}, \quad BI_B \sim \left(\frac{L_z}{\lambda_z} \right)^2 \left(\frac{U_0}{c_i} \right) B$$

и условие $B \gg I_A A \gg BI_B$ выполняется при $c_i/U_0 \gg (L_z/\lambda_z)^2$.

Итак, при выполнении условий $N L_z/U_0 \ll 1$ и $(L_z/\lambda_z)(U_0/c_i)^{1/2} \ll 1$ поле q можно, учитывая, что $\lambda_z \sim U_0/N$, представить в виде:

$$q = B [1 + O(L_z/\lambda_z) f_1(z/L_z) + O(L_z^2/\lambda_z^2) f_2(z/L_z)], \quad (\text{П.2})$$

где максимальные значения функций f_1 и f_2 соответственно равны $(U_0/c_i)^{1/2}$ и U_0/c_i , так что $f_1(L_z/\lambda_z) \ll 1$ и $f_2(L_z/\lambda_z)^2 \ll 1$ (с учетом $(L_z/\lambda_z)(U_0/c_i)^{1/2} \ll 1$).

Используя решение (П.1) и систему (1.1), можно показать, что

$$\rho = k^2 \rho_0 \left(A - k^2 B \int_{z_c}^z [N^2 - (\omega - Uk)^2] dy \right). \quad (\text{П.3})$$

Поскольку подынтегральное выражение (П.3) не имеет полюсов, то с учетом связи A , B и λ_z видно, что

$$\rho = k \rho_0 A \left(1 + O\left(\frac{L_z}{\lambda_z}\right) g\left(\frac{z}{L_z}\right) \right), \quad (\text{П.4})$$

где $g(z/L_z)$ — порядка единицы.

Из выражений (П.2), (П.4) видно, что поля ρ и q можно представить в виде суммы «средней» компоненты с масштабом, много большим L_z , и «пульсационной» составляющей с масштабом порядка λ_z , причем пульсационная мала по сравнению со средней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Федоров К. Н., Шевцов В. П. О вертикальной мезо- и микроструктуре океанических течений//Докл. АН СССР. 1973. Т. 208. № 4. С. 833—836.
2. Sanford T. B. Observations of the vertical structure of internal waves//J. Geophys. Res. 1975. V. 80. № 27. P. 3861—3871.
3. Miles J. W. On the stability of heterogeneous shear flows//J. Fluid Mech. 1961. V. 10. Pt 4. P. 496—509.
4. Howard L. N. Note on a paper of John W. Miles//J. Fluid Mech. 1961. V. 10. Pt 4. P. 508—514.
5. Овчинников И. М., Кривошея В. Г., Осадчий А. С. Некоторые особенности структуры и динамики гидрофизических полей в зоне течения Ломоносова на меридиане $18^\circ 30'$ з. д.//Изменчивость океана и атмосферы в экваториальной Атлантике. М.: Наука, 1982. С. 50—59.
6. Поздынин В. Д. Оценка эффективности генерации турбулентности сдвиговой неустойчивостью скорости течения//Морск. гидрофиз. журн. 1985. № 4. С. 22—28.
7. Федоров К. Н. Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеониздат, 1976. С. 118—119.
8. Николаева Ю. И., Островский Л. А. Резонансное затухание внутренних волн на слу- чайном поле течений в океане//Изв. АН СССР. ФАО. 1986. № 3. Т. 22. С. 310—317.
9. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
10. Троицкая Ю. И. Нарастающие возмущения пространственно-периодического сдви- гового потока стратифицированной жидкости//Морск. гидрофиз. журн. 1987. № 6. С. 13—21.
11. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966. С. 84—94.
12. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958. С. 154—155.
13. Фабрикант А. Л. Резонансное взаимодействие волн с плоскопараллельным потоком// Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 1. С. 107—114.
14. Миропольский Ю. З. О влиянии микроструктуры поля плотности в океане на рас- пространение внутренних гравитационных волн//Изв. АН СССР. ФАО. 1972. Т. 8. № 8. С. 891—894.
15. Найфе А. Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. С. 400—404.
16. Booker J. B., Bretherton F. P. The critical layer for internal gravity waves in a shear flow//J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt 4. P. 513—539.
17. Морозов Е. Г. Океанские внутренние волны. М.: Наука, 1985. С. 103—105.
18. Garrett C., Munk W. Space-time scales of internal waves//J. Geophys. Res. 1975. V. 80. № 3. P. 291—298.
19. Сабинин К. Д., Шулепов В. А. К модели частотного спектра внутренних волн в океане. Изв. АН СССР. ФАО. 1981. Т. 17. № 1. С. 67—75.
20. Самодуров А. С., Морозов Е. Г. Исследование цуговой структуры короткопериодных

- колебаний температуры//Океанологические исследования. М.: Сов. радио. 1979. № 30. С. 93—96.
21. *Kunze E., Sanford T. B.* Observations of near inertial waves in a front//*J. Phys. Oceanogr.* 1984. V. 14. P. 566—581.
 22. *Морозов Е. Г., Плахин Е. А., Самодуров А. С.* К вопросу о природе генерации цугов короткопериодных внутренних волн//*Гидрология Индийского океана.* М.: Наука, 1977. С. 136—139.
 23. *Самодуров А. С.* О генерации цугов внутренних волн//*Исследования изменчивости гидрофизических полей в океане.* М.: Наука, 1974. С. 99—108.
 24. *Самодуров А. С.* Критические режимы внутренних волн//*Океанологические исследования.* М.: Наука, 1975. № 28. С. 24—28.

Академия наук СССР
Ин-т прикладной физики

Поступила в редакцию
9.II 1987,
после доработки
3.VIII 1987

THE INFLUENCE OF THE VELOCITY FINE STRUCTURE IN THE OCEAN ON INTERNAL WAVE PROPAGATION

OSTROVSKY L. A., TROITSKAYA Yu. I.

A model which describes the influence of the velocity fine structure on propagation of internal waves is developed. An approximation is used where random components of pressure and displacement fields are small in comparison with averaged ones. It is revealed that stable random flows (also with zero average) essentially affect the dispersion relations of internal waves. The model permits to calculate the rate of growth or damping of internal waves with low Richardson number levels which is determined by the properties of probability distribution function of the velocity fine structure. Correlation of the model with a kinetic approach developed earlier for the same problems is discussed.