

УДК 551.466

## РЕЗОНАНСНОЕ УСИЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

Ю. И. Троицкая, А. Л. Фабрикант

Аналитически и численно решается задача об отражении и преломлении внутренних гравитационных волн в стратифицированном потоке. Методом сращиваемых асимптотических разложений найдены коэффициенты отражения и преломления волн в тонком слое сдвига. Показано, что резонансное усиление (поглощение) волн в критическом слое определяется конкуренцией эффектов усиления волны обгоняющими частицами и поглощения отстающими частицами потока. Найдены аналитические решения для линейного и параболического профилей скорости. Численно рассчитаны диапазоны параметров и характерные величины усиления внутренних волн в слое сдвига.

Одной из важнейших проблем теории распространения внутренних гравитационных волн (ВГВ) в атмосфере и океане является исследование возможности усиления и поглощения энергии волн в сдвиговых гидродинамических течениях [1, 2]. Известны два механизма взаимодействия волн с гидродинамическим потоком идеальной жидкости [3]. Первый из них определяется взаимодействием волн с энергией различных знаков на границе движущейся среды. Уходящая в движущуюся среду преломленная волна с отрицательной энергией может обеспечить усиление волн, отражающихся от, например, тангенциального разрыва скорости. Для ВГВ такой эффект «сверхотражения» рассмотрен впервые в работе [4]. Другой механизм взаимодействия волн с потоком — резонансный — реализуется в потоках с непрерывным профилем скорости  $U(y)$  при наличии критического слоя, где скорость потока совпадает с фазовой скоростью волны. Здесь фундаментальную роль играет значение числа Ричардсона  $Ri = N^2 / (U'_y)^2$  (где  $N = (-g\rho_{0y}/\rho_0)^{1/2}$  — частота Брента—Вяйсяля), взятое в критической точке  $y_c$ . При  $Ri_c \equiv Ri(y_c) > 1/4$  энергия волны поглощается в критическом слое [5]. Интерпретация этого результата основана на использовании метода ВКБ при  $Ri \gg 1/4$  в окрестности критического слоя, где волновой пакет с уменьшающейся длиной волны бесконечно долго приближается к критической точке.

В то же время при  $Ri < 1/4$  волны могут усиливаться в критическом слое. В частности, при отсутствии стратификации ( $N=0$ ,  $Ri=0$ ) вблизи критического слоя знак диссипации энергии возмущений определяется кривизной профиля скорости: усиление будет при  $(U''_{yy}) < 0$  (см. [6]). Небольшое число работ [7–10], где рассматривалась возможность резонансного усиления ВГВ, основано на использовании модельных (кусочно-линейных и т. п.) профилей скорости, численных методов либо некоторых частных решений.

Представляет интерес детальное исследование резонансного усиления ВГВ в сдвиговых потоках, включающее в себя поиск аналитических решений для течений с гладкими профилями скорости, физическую интерпретацию механизма резонансного взаимодействия ВГВ с потоком и численные оценки этого эффекта в различных ситуациях. Этой цели посвящена настоящая работа.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим двумерную задачу о распространении в вертикальной плоскости монохроматических ВГВ в сдвиго-

вом потоке, скорость которого  $\mathbf{v}_0 = \{U(y), 0\}$ . В приближении Буссинеска амплитуда гармонического  $\exp(-i\omega t + ikx)$  возмущения функции тока  $\Psi$  удовлетворяет уравнению Тейлора—Гольдштейна (см. [1]):

$$\frac{d^2 \Psi}{dy^2} - k^2 \Psi - \frac{U_{yy}}{U - \omega/k} \Psi + \frac{N^2}{(U - \omega/k)^2} \Psi = 0. \quad (1)$$

Будем полагать, что в сдвиговом течении  $U(-\infty) = U_- = 0$ ,  $U(+\infty) = U_+ > 0$ , а волна падает из неподвижной среды, так что для решения (1) имеем

$$\begin{aligned} \Psi(y \rightarrow -\infty) &= A \{ \exp(iq_- y) + R \exp(-iq_- y) \}, \\ \Psi(y \rightarrow +\infty) &= T \exp(iq_+ y), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $R$  и  $T$  — комплексные коэффициенты отражения и прохождения. Отражение и преломление ВГВ рассматривается в линейном приближении. Это справедливо, если амплитуды падающей ( $A$ ), отраженной ( $AR$ ) и прошедшей ( $AT$ ) волн достаточно малы. При этом величины коэффициентов  $R$  и  $T$  могут быть, вообще говоря, любыми.

Значения вертикальных компонент волновых векторов  $q_{\pm} = k[N_{\pm}^2 / (\omega - kU_{\pm})^2 - 1]^{1/2}$  определяют кинематику процесса отражения. В однородно движущейся среде дисперсионное уравнение и выражение для вертикальной компоненты групповой скорости ВГВ имеют вид

$$(\omega - kU)^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + q^2}, \quad v_{гpy} = - \frac{N^2 k^2 q}{(\omega - kU)(k^2 + q^2)^2}. \quad (3)$$

Волна, падающая на течение из неподвижной среды, с волновым вектором  $\mathbf{k}_0 = (k, q) = k_0(\sin \theta, \cos \theta)$  и частотой  $\omega = N_- \sin \theta$  имеет  $v_{гpy} > 0$ , и, следовательно, в (2) необходимо полагать  $q_- < 0$ . В движущейся среде ( $y \rightarrow +\infty$ ) при  $(\omega - kU_+)^2 > N_+^2$  происходит полное отражение падающей волны ( $\text{Re } q_+ = 0$ ), а в случае  $(\omega - kU_+)^2 < N_+^2$  условие излучения  $v_{гpy} > 0$  определяет знак  $q_+$ . При  $\omega - kU_+ < 0$  имеем  $q_+ > 0$ . В этом случае преломленная волна имеет отрицательную энергию, что при отсутствии резонансного поглощения приводит к сверхотражению ВГВ ( $|R| > 1$ ) [4].

Динамику отражения характеризуют коэффициенты  $R$  и  $T$ , получаемые из решения краевой задачи (1), (2). Наиболее просто эта задача решается для тангенциального разрыва скорости, граничные условия на котором позволяютшить решения (2) на разрыве и найти  $R$  и  $T$  [4].

Для непрерывного профиля скорости произвольной формы можно найти приближенное решение, если в задаче имеется малый параметр. Естественным параметром течения является относительная толщина профиля скорости  $\mu = k_0 l$ , которая мала для узких профилей и длинных волн. Ниже мы найдем с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений по параметру  $\mu$  коэффициенты  $R$  и  $T$  для течений с произвольной формой профиля  $U = U_0 \Phi(y/l)$ . При учете стратификации вблизи критического слоя поправки к решению, как мы увидим ниже, имеют порядок числа Ричардсона в критическом слое  $\text{Ri}_c \sim N^2 l^2 / U_0^2$ , где  $U_0$  — характерная скорость потока, а  $N$  — частота Брента—Вяйсяля в области сдвига, вообще говоря, не совпадающая с  $N_{\pm}$ . Соответствующие поправки в выражениях для  $R$  и  $T$  будут соизмеримы с поправками порядка  $\mu$ , возникающими в нестратифицированной среде для узкого профиля скорости (см. [11]), если  $\text{Ri}_c \gtrsim \mu$ . Очевидно, что резонансное взаимодействие ВГВ с потоком возможно, лишь если относительная фазовая скорость  $c = \omega/kU_0 = N_-/k_0U_0 < 1$  и, следовательно,  $\text{Ri}_c \sim (N/N_-)^2 \mu^2 (N_-/k_0U_0)^2 \ll \mu^2 (N/N_-)^2$ . Условие  $\text{Ri}_c \gtrsim \mu$  может быть выполнено в том случае, если  $(N/N_-)^2 \sim \mu^{-1}$ , т. е. профиль  $N^2(y)$  имеет в области сдвигового течения пик порядка  $\mu^{-1}$ . При этом профиль плот-

ности (или потенциальной температуры [1]) содержит перепад в слое сдвига толщины  $l$ . При отсутствии такого перепада влиянием стратификации в узком сдвиговом течении можно было бы пренебречь.

**2. Метод сращиваемых асимптотических разложений.** Рассмотрим течение, близкое к тангенциальному разрыву, — узкий слой сдвига, для которого

$$U = U_0 \varphi(\xi), \quad N^2 = N_0^2(\xi) + N_1^2(\xi), \quad \xi = y/l, \quad (4)$$

$$f(\xi) = N_0^2/k_0^2 U_0^2 \sim 1, \quad g(\xi) = k_0 l (N_1^2/k_0^2 U_0^2) \sim 1.$$

Для нахождения коэффициентов  $R$  и  $T$  воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений [11]. Как обычно, будем обозначать индексами  $i$  и  $e$  внутреннее и внешнее разложения по параметру  $\mu$ , а цифрами — порядок этих разложений.

Будем считать, что при  $y \rightarrow \pm\infty$  параметры течения экспоненциально стремятся к соответствующим константам:

$$\varphi \rightarrow \varphi_{\pm} \quad (\varphi_+ = 1, \quad \varphi_- = 0), \quad f \rightarrow f_{\pm}, \quad g \rightarrow 0, \quad N_0 \rightarrow N_{\pm}, \quad N_1 \rightarrow 0.$$

В этом случае выражение (2) дает внешнее разложение с экспоненциальной точностью. Выразив (2) через внутреннюю переменную  $\xi$ , возьмем приближение второго порядка по  $\mu$ :

$$(\Psi_{e1}^+)_{i2} = T + i\mu\xi (q_+/k_0) T - \mu^2 \xi^2 (q_+^2/2k_0^2) T, \quad (5)$$

$$(\Psi_{e1}^-)_{i2} = 1 + R + i\mu\xi (q_-/k_0) (1 - R) - \mu^2 \xi^2 (q_-^2/2k_0^2) (1 + R).$$

Теперь запишем (1) во внутренней переменной  $\xi$ :

$$\frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} - \frac{\varphi \xi \xi}{\varphi - c} \Psi = -\mu \frac{g}{(\varphi - c)^2} \Psi + \mu^2 \left[ \sin^2 \theta - \frac{f}{(\varphi - c)^2} \right] \Psi. \quad (6)$$

С помощью метода последовательных приближений нетрудно найти внутреннее разложение второго порядка (ср. [11]):

$$\begin{aligned} \Psi_{i2} = & A(\varphi - c) \left\{ 1 - \mu \int_0^{\xi} \frac{d\zeta}{(\varphi - c)^2} \int_0^{\zeta} \left[ g (1 - \mu \int_0^{\chi} \frac{d\tau}{(\varphi - c)^2} \int_0^{\tau} g d\theta) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \mu (\sin^2 \theta (\varphi - c)^2 - f) \right] d\chi \right\} + \mu B \int_0^{\xi} \frac{d\zeta}{(\varphi - c)^2} \left[ 1 - \mu \int_0^{\zeta} g d\chi \int_0^{\chi} \frac{d\tau}{(\varphi - c)^2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Выразим это внутреннее разложение через внешнюю переменную  $\sigma = \mu\xi$  и оставим приближение второго порядка:

$$\begin{aligned} (\Psi_{i2})_{e2}^{\pm} = & A(\varphi_{\pm} - c) \left[ 1 - \mu V_{\pm 2}^{\pm} - \mu \frac{D^{\pm} \xi - G^{\pm}}{(\varphi_{\pm} - c)^2} + \frac{\mu^2 \xi}{(\varphi_{\pm} - c)^2} \left( W_{\pm 2}^{\pm} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2M^{\pm} - D^{\pm} G^{\pm}}{(\varphi_{\pm} - c)^2} + D^{\pm} V_{\pm 2}^{\pm} - N_{\pm 2}^{\pm} \right) \right] + \mu B(\varphi_{\pm} - c) \left[ W_{\pm 2}^{\pm} + \frac{\xi}{(\varphi_{\pm} - c)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\mu \xi}{(\varphi_{\pm} - c)^2} \left( \frac{G^{\pm}}{(\varphi_{\pm} - c)^2} + D^{\pm} W_{\pm 2}^{\pm} - V_{\pm 2}^{\pm} \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$D^{\pm} = \int_0^{\pm\infty} g(\xi) d\xi, \quad G^{\pm} = \int_0^{\pm\infty} \xi g(\xi) d\xi, \quad W_{\pm 2}^{\pm} = \int_0^{\pm\infty} [(\varphi - c)^{-2} - (\varphi_{\pm} - c)^{-2}] d\xi,$$

$$W_{\pm}^{\pm} = \int_0^{\pm\infty} \{\sin^2 \theta [(\varphi - c)^2 - (\varphi_{\pm} - c)^2] - (f - f_{\pm})\} d\xi,$$

$$V_{-2}^{\pm} = \int_0^{\pm\infty} [(\varphi - c)^{-2} - (\varphi_{\pm} - c)^{-2}] d\xi \int_0^{\xi} g d\chi,$$

$$M_{\pm} = \int_0^{\pm\infty} \xi g d\xi \int_0^{\xi} g d\chi, \quad N_{\pm 2} = \int_0^{\pm\infty} [(\varphi - c)^{-2} - (\varphi_{\pm} - c)^{-2}] d\xi \left( \int_0^{\xi} g d\chi \right)^2.$$

Теперь «сращиваем» внутреннее и внешнее разложения, т. е. просто приравниваем выражения (5) и (8)\*. Найденные таким образом коэффициенты  $R$  и  $T$  позволяют найти величину относительного усиления  $\Pi = |R|^2 + \frac{\text{Re} q_+}{q_-} |T|^2 - 1$  (более подробный расчет см. в [12]):

$$\Pi = -4\mu \frac{q_-}{k_0} (\varphi - c)^2 \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{\text{Im}[(q_+/k_0)^2 (\varphi_+ - c)^4 W_{-2} + \hat{N}_{-2}]}{[(\varphi - c)^2 q_-/k_0 + (\varphi_+ - c)^2 q_+/k_0]^2 + D^2} & \text{при } \text{Im} q_+ = 0 \\ \frac{\text{Im}[|q_+/k_0|^2 (\varphi_+ - c)^4 W_{-2} + \hat{N}_{-2} - 2|q_+/k_0| (\varphi_+ - c)^2 \hat{V}_{-2}]}{[(\varphi_+ - c)^2 |q_+/k_0| - D]^2 + (\varphi - c)^4 (q_-/k_0)^2} & \text{при } \text{Re} q_+ = 0 \end{cases} \quad (9)$$

где  $W_{-2} = W_{-2}^+ - W_{-2}^-$ ,  $\hat{N}_{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} [(\varphi - c)^{-2} - (\varphi - c)^{-2}] d\xi \left( \int_{\xi}^{\infty} g(\chi) d\chi \right)^2$ ,

$\hat{V}_{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} [(\varphi - c)^{-2} - (\varphi - c)^{-2}] d\xi \int_{\xi}^{\infty} g(\chi) d\chi$ , а начало координат

выбрано так, чтобы  $D^+ = -D^- = D/2$ .

Величина  $\Pi$  представляет собой относительное увеличение плотности потока энергии при отражении и преломлении в сдвиговом слое и характеризует резонансное усиление волн в потоке. В пределе  $\mu = 0$ , когда слой сдвига превращается в тангенциальный разрыв, величина усиления  $\Pi = 0$ , что соответствует сохранению энергии волн при отражении от разрыва [3, 4]. При  $\mu \neq 0$  величина  $\Pi$  определяется мнимой частью интегралов  $W_{-2}$ ,  $\hat{V}_{-2}$ ,  $\hat{N}_{-2}$ , которые необходимо вычислять с учетом правила обхода Линия полюсов  $\varphi(\xi_c) = c$  (см. [11]):

$$\text{Im} W_{-2} = -\pi \left[ \frac{\varphi \xi \xi}{(\varphi \xi)^3} \right] \Big|_{\xi = \xi_c},$$

$$\text{Im} \hat{N}_{-2} = -\pi \left[ \frac{\varphi \xi \xi}{(\varphi \xi)^3} \left( \int_{\xi}^{\infty} g d\chi \right)^2 + \frac{2g}{(\varphi \xi)^2} \int_{\xi}^{\infty} g d\chi \right] \Big|_{\xi = \xi_c}, \quad (10)$$

$$\text{Im} \hat{V}_{-2} = -\pi \left[ \frac{\varphi \xi \xi}{(\varphi \xi)^3} \int_{\xi}^{\infty} g d\chi + \frac{g}{(\varphi \xi)^2} \right] \Big|_{\xi = \xi_c}.$$

\* Заметим, что для вычисления коэффициентов отражения и преломления достаточно точно знать лишь асимптотику решения (7) при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , где метод последовательных приближений применим. При этом сшивку решений при  $\xi \rightarrow +\infty$  и  $\xi \rightarrow -\infty$  рез область, где находится особенность коэффициентов уравнения (6) ( $\varphi = c$ ), проводят по правилу обхода Линия, справедливому для линейной задачи.

С учетом (10) выражение для относительного усиления принимает вид

$$\Pi = 4\pi\mu \frac{q_- (\varphi_- - c)^2}{k_0 \varphi_\xi^2|_{\xi=\xi_c}} \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{\left\{ (\varphi_{\xi\xi}/\varphi_\xi) \left[ (q_+/k_0)^2 (\varphi_+ - c)^4 + \left( \int_\xi^\infty g d\chi \right)^2 \right] + 2g \int_\xi^\infty g d\chi \right\} |_{\xi=\xi_c}}{[(\varphi_- - c)^2 q_- / k_0 + (\varphi_+ - c)^2 q_+ / k_0]^2 + D^2} \\ \text{при } \text{Im } q_+ = 0, \\ \frac{\left\{ (\varphi_{\xi\xi}/\varphi_\xi) \left[ \int_\xi^\infty g d\chi - |q_+/k_0| (\varphi_+ - c)^2 \right]^2 + 2g \left[ \int_\xi^\infty g d\chi - |q_+/k_0| (\varphi_+ - c)^2 \right] \right\} |_{\xi=\xi_c}}{(\varphi_- - c)^4 (q_- / k_0)^2 + [(\varphi_+ - c)^2 |q_+/k_0| - D]^2} \\ \text{при } \text{Re } q_+ = 0. \end{cases} \quad (11)$$

При  $\Pi > 0$  резонансное взаимодействие волны с потоком в критическом слое приводит к ее усилению.

**3. Физическая интерпретация.** Условие резонансного усиления можно записать в одном и том же виде как при наличии прошедшей волны, так и при ее отсутствии. В самом деле, нетрудно показать, что формулы (11) приводят к одному и тому же критерию усиления ( $\Pi > 0$ ):

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{|p|^2}{\varphi_\xi} \right) \Big|_{\xi=\xi_c} > 0, \quad (12)$$

если для амплитуды давления

$$p = -\rho_0 \left( U - \frac{\omega}{k} \right)^2 \frac{d}{dy} \left[ \Psi \left( U - \frac{\omega}{k} \right) \right] \quad (13)$$

использовать асимптотическое разложение первого порядка по параметру  $\mu$ , полученное из (7),

$$p(\xi) = -\mu \rho_0 U_0 A \left( B/A - \int_0^\xi g d\chi \right). \quad (14)$$

Величину  $B/A$  в первом приближении по  $\mu$  можно получить, сравнивая выражения (5) и (8), откуда следует

$$B/A = i(\varphi_+ - c)^2 \frac{q_+}{k_0} + \int_0^\infty g(\chi) d\chi. \quad (15)$$

Теперь, подставляя (14) с учетом (15) в критерий (12), мы получим выражения, пропорциональные числителем в формуле (11), в зависимости от того, действительной или мнимой является величина  $q_+$ .

Критерий (12) получает простой физический смысл, если учесть, что величина  $f = U_y^{-1}$  является функцией распределения частиц сдвигового потока по скоростям [13]. В нестратифицированном потоке  $(p_\xi)|_{\xi=\xi_c} = 0$ ; в этом случае величина усиления или поглощения волны пропорциональна производной  $df/dU = -U_{yy} (U_y)^{-3}$ , взятой в критической точке  $y_c$ . Направление обмена энергией между волной и потоком определяется, таким образом, разностью чисел частиц, обгоняющих волну и отстающих от нее в окрестности резонанса. Здесь была отмечена плазменно-гидродинамическая аналогия: сходство резонансного взаимодействия в гидродинамических потоках и кинетических резонансных эффектов типа затухания Ландау плазменных волн [13, 14].

При наличии существенной стратификации ( $N_1 \neq 0$ ,  $Ri_c \geq \mu$ ) интенсивность волнового поля (в первом приближении по  $\mu$ ) становится неоднородной:  $(|p|^2)_y|_{y=y_c} \neq 0$ . Эта неоднородность, очевидно, определяется градиентом амплитуды колебаний гидростатического давления, возникающих при периодическом смещении слоя жидкости с переменной

плотностью:  $\rho = \Delta \rho_0 g \eta = \rho_0 \int_y^\infty N_1^2 dy \eta$ , где  $\eta$  — смещение изопикнической

поверхности. Вследствие неоднородности поля волны ее взаимодействие с обгоняющими и отстающими частицами происходит с разной эффективностью: направление энергообмена определяется теперь, согласно критерию (12), производной величины  $|p|^2 f(U)$ .

Такая интерпретация резонансного взаимодействия как результата конкуренции поглощения и усиления при воздействии на возмущение со стороны отстающих и обгоняющих частиц позволяет объяснить известный эффект поглощения ВГВ в критическом слое с большим числом Ричардсона [5]. В этом случае волна поглощается отстающими частицами потока, в то время как до обгоняющих частиц, способных усиливать волну, доходит лишь незначительная часть волнового поля.

Если узкий слой сдвига не содержит пика частоты Брента—Вайсяля ( $N_1=0$ ), то число Ричардсона  $Ri_c = \mu^2 f(\xi_c) \leq \mu^2$ . В этом случае энергообмен волны с потоком определяется в первом приближении по  $\mu$  так же, как и при отсутствии стратификации: поглощение или усиление в критическом слое пропорционально величине  $U_{yy}$ .

При не слишком малых числах Ричардсона  $\mu \leq Ri_c \ll 1$  направление энергообмена волны с потоком зависит как от распределения частиц потока в критическом слое (величины  $df/dy \sim U_{yy}$ ), так и от интенсивности волнового поля и ее градиента, взятых в этой точке. В этом случае условие усиления является нелокальным, т. е. зависит не только от деталей профилей параметров потока в критической точке, но и от свойств волнового поля, поведение которого в критической точке определяется всем течением и граничными условиями при  $y \rightarrow \pm \infty$ .

Можно получить более общее, чем (12), условие усиления, которое справедливо при произвольных числах Ричардсона. Для этого достаточно перейти от уравнения (1) к уравнению для давления, производя замену переменной (13):

$$(d/dy) (p_y/\Phi) - k^2 p (U - \omega/k)^{-2} = 0, \quad (16)$$

где  $\Phi = (U - \omega/k)^2 - N^2/k^2$ . Домножив (16) на  $p^*$ , проинтегрируем и возьмем мнимую часть полученного равенства, определяемую полюсом  $y_c$ :

$$\text{Im} \left[ \frac{p^* p_y}{(U - \omega/k)^2 - N^2/k^2} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 |p|^2 dy}{(U - \omega/k)^2}.$$

Подставляя сюда граничные условия (2) с учетом (13), получим

$$\Pi = \frac{1}{\rho_0 g} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p|^2 dy}{(U - \omega/k)^2}. \quad (17)$$

Условие усиления имеет, таким образом, следующий вид:

$$\text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p|^2}{(U - \omega/k)^2} dy < 0. \quad (18)$$

Полученный выше методом сращиваемых асимптотических разложений критерий (12) при  $\mu \ll 1$  с очевидностью следует из (18), если в подынтегральном выражении использовать асимптотическое разложение для давления по параметру  $\mu$ .

Условие (18) для произвольных течений может быть записано в другом виде. Мнимая часть интеграла определяется, очевидно, поведением функции  $p(y)$  в окрестности точки  $y=y_c$ . Решение уравнения (1) вблизи критической точки при  $Ri < 1/4$  имеет вид [1]

$$\Psi = A(y - y_c)^{1/2+\nu} + B(y - y_c)^{1/2-\nu}, \quad (19)$$

где  $\nu = (1/4 - Ri_c)^{1/2}$ . Подставим теперь (19) в выражение (13) для давления и сдвинем критическую точку, согласно правилу обхода Линя, в верхнюю полуплоскость комплексного  $y$  (при  $U_y > 0$ ), т. е. положим  $y_c = y_0 + i\Delta$  ( $\Delta > 0$ ). После этого непосредственным вычислением интеграла (18) нетрудно получить известный критерий усиления ВГВ потоком (ср. [7])

$$\text{Im}(A^* B e^{i\pi\nu}) < 0. \quad (20)$$

Этот критерий, так же как и (18), пригоден при произвольных числах Ричардсона  $Ri_c < 1/4$ . По-видимому, невозможно представить общий критерий усиления в явном виде, т. е. выразить его непосредственно через параметры потока. Полезно, однако, для иллюстрации получить аналитический критерий для некоторых конкретных течений.

**4. Течения, допускающие аналитическое исследование.** Наиболее простой пример — течение с линейным профилем скорости:

$$U(y) = \begin{cases} \alpha y & \text{при } |y| < l \\ U_0 = \alpha l & \text{при } y \geq l \\ -U_0 & \text{при } y < -l \end{cases}, \quad N^2 = \begin{cases} N_0^2 + N_1^2 & \text{при } |y| < l \\ N_0^2 & \text{при } |y| \geq l \end{cases}. \quad (21)$$

В этом случае решение уравнения (1) выражается через модифицированные функции Бесселя:

$$\Psi = (y - y_c)^{1/2} [AI_\nu[k(y - y_c)] + BI_{-\nu}[k(y - y_c)]].$$

Используя граничные условия на изломе скорости ( $y = l$ ) — непрерывность давления и функции тока, нетрудно получить из (20) условие усиления в виде

$$\text{Im} \left( e^{i\pi\nu} \frac{\delta F_{-\nu} + i\delta(q_+/k) - 1/2 I_{-\nu}}{-\delta F_\nu + i\delta(q_+/k) + 1/2 I_\nu} \right) > 0, \quad (22)$$

где  $\delta = k(l - y_c)$ ,  $F_{\pm\nu} = [I'_{\pm\nu}(\delta)/I_{\pm\nu}(\delta)]$ . Наиболее простой результат получается при  $\delta \ll 1$  и  $Ri_+ = (N_+/ \alpha)^2 < \delta^2$ . В этом случае преломленная волна отсутствует и  $i q_+ = -|q_+|$ , а условие (22) принимает вид

$$|q_+| (l - y_c) > Ri_c. \quad (23)$$

Легко видеть, что для течения (21) условие (11) упрощается ( $\varphi_{\text{гг}} = 0$ ) и сводится к выражению (23).

Рассмотрим далее другой пример профиля скорости, допускающего при  $N = \text{const}$  аналитическое решение, — параболический профиль

$$U(y) = U_0(1 - y^2/L^2) \quad (24)$$

при условии, что в точке  $y = -d$  выполнено условие «твердой крышки»  $\Psi(-d) = 0$  (вместо условия (2) при  $y \rightarrow \infty$ ), а длина волны велика,  $kL \ll 1$ . При  $k=0$  уравнение (1) с профилем (24) имеет решение

$$\Psi = A(y + |y_c|)^{1/2+\nu} (y - |y_c|)^{1/2-\nu} (y - 2\nu|y_c|) + \\ + B(y + |y_c|)^{1/2-\nu} (y - |y_c|)^{1/2+\nu} (y + 2\nu|y_c|),$$

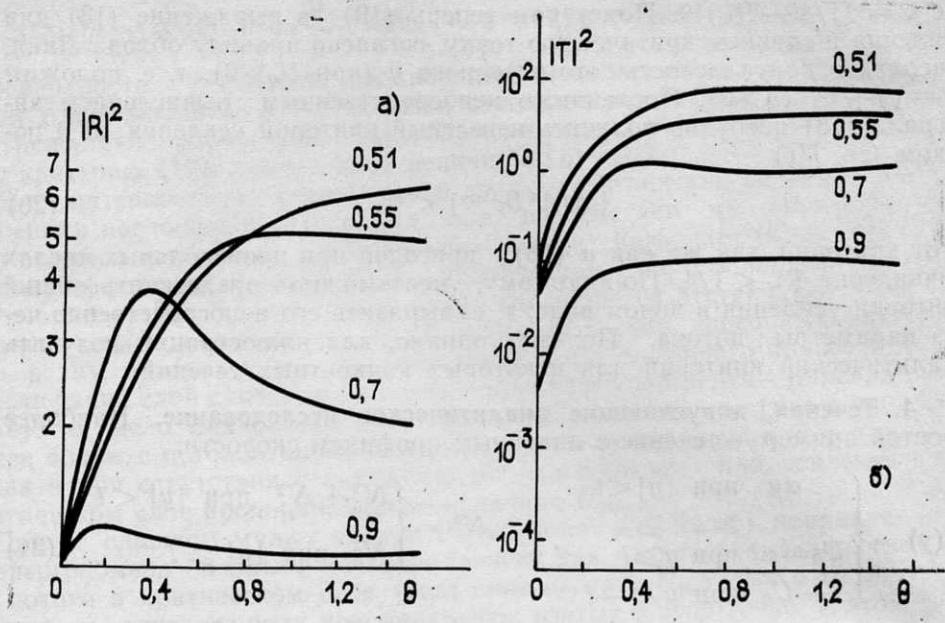


Рис. 1.

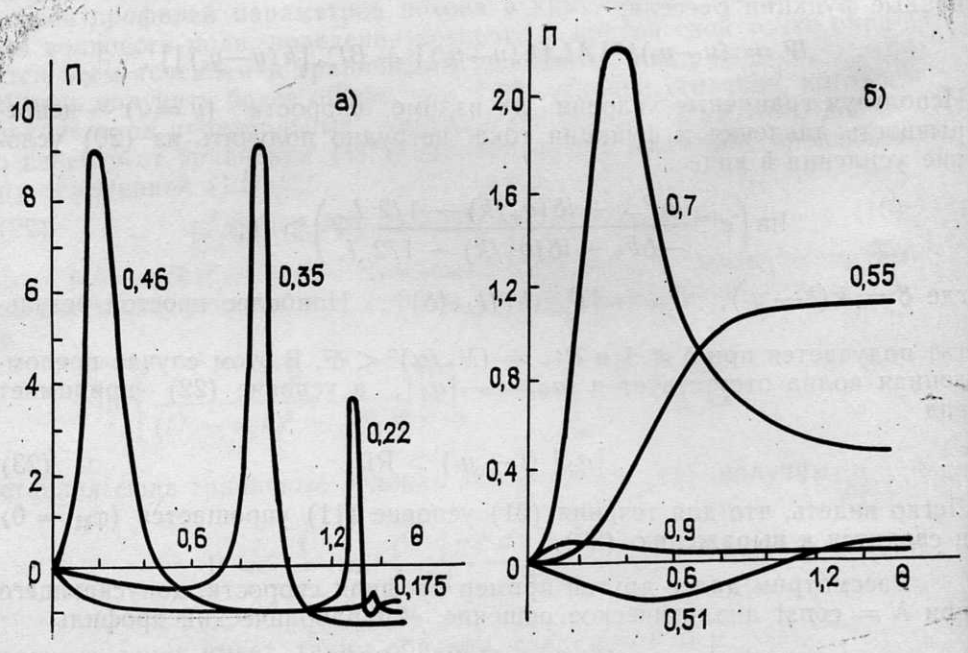


Рис. 2.



где  $y_c = -L(1 - \omega/kU_0)^{1/2}$ . Подставляя это решение в граничное условие при  $y = -d$ , получим отношение  $A/B$ , и критерий (20) в результате принимает вид

$$1/y_c = -[U_{yy}/U_y]|_{y=y_c} > l^{-1}(1 - \sqrt{1-4\text{Ri}_c}), \quad (25)$$

где  $l = |y_c| - d$  — расстояние от критического слоя до твердой крышки.

Подчеркнем, что в обоих рассматриваемых примерах критерии (23) и (25) являются нелокальными: условие усиления ВГВ зависит не только от свойств потока вблизи резонанса, но и от геометрии всего сдвигового слоя.

**5. Численный счет.** Приведем результаты численного расчета граничной задачи (1), (2) для слоя сдвига с профилем  $U(y) = U_0(1 - \text{th}(y/l))/2$ . Уравнение (1) решалось с использованием стандартной подпрограммы методом Рунге-Кутты 4-го порядка с переменным шагом на ЭВМ БЭСМ-6. Обход особенности ( $U = \omega/k$ ) осуществлялся прибавлением малой мнимой добавки к частоте ( $\text{Im } \omega > 0$ ). В этом случае коэффициенты  $R$  и  $T$  определяются двумя параметрами волны: ее фазовой скоростью  $c$  и углом падения  $\theta$ , а также параметром течения — числом Ричардсона в точке перегиба  $\text{Ri} = 4(Nl/U_0)^2$ .

Были вычислены угловые зависимости коэффициентов  $R$  и  $T$  при различных параметрах (см. рис. 1, где  $\text{Ri} = 0,012$ , а значения  $c$  указаны на соответствующих кривых), и по ним найдены угловые зависимости относительного усиления  $\Pi(\theta)$  (см. рис. 2а, где  $\text{Ri} = 0,1$  и  $c < 0,5$ , и рис. 2б, где  $\text{Ri} = 0,012$  и  $c > 0,5$ ). Подчеркнем, что резонансное усиление здесь возможно не только при  $c > 0,5$ , когда критическая точка находится на выпуклом участке профиля, как это было для волн в нестратифицированном потоке [6, 11], но и при  $c < 0,5$ , когда волны находятся в резонансе с вогнутыми участками профиля. Характерной особенностью  $R(\theta)$  и  $\Pi(\theta)$  при  $c < 0,5$  является наличие острого максимума в узком диапазоне углов.

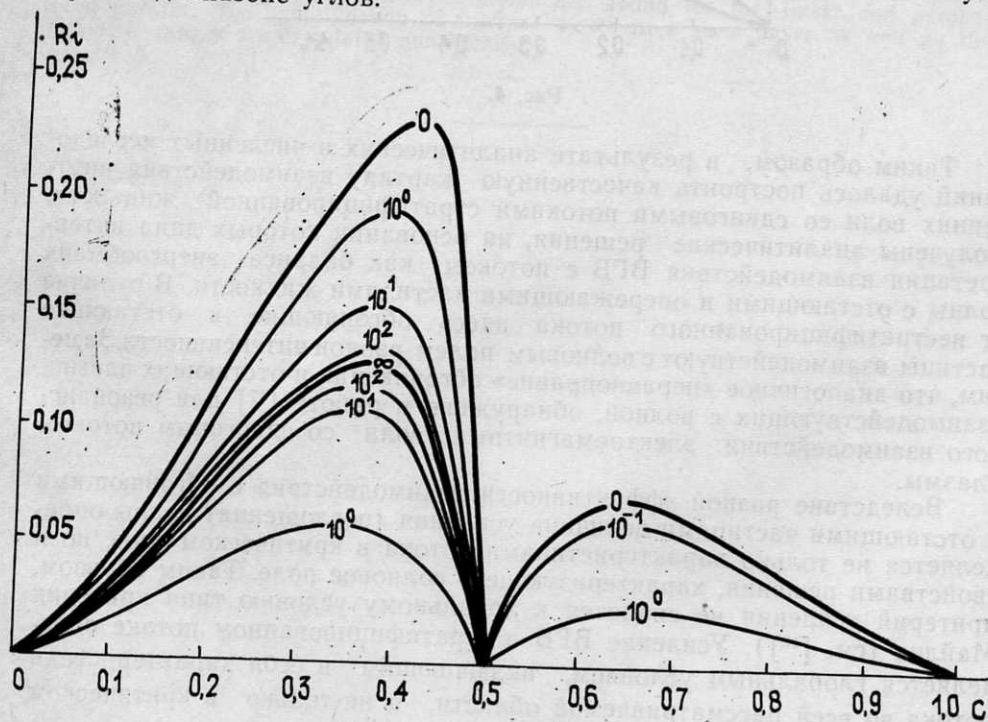


Рис. 3.

Для каждого графика  $\Pi(\theta)$ , полученного при заданных  $\text{Ri}$ ,  $c$ , было найдено максимальное значение  $\Pi_{\text{max}}(\text{Ri}, c)$  (см. рис. 3, где пред-

ставлены изолинии  $P_{\max} = \text{const}$  на плоскости параметров  $(Ri, c)$ . Здесь важной особенностью является наличие изолинии  $P_{\max} = \infty$ , существующей при  $c < 0,5$ . Она соответствует резонансу падающей волны с нейтральной собственной модой системы, в которой поле осциллирует ниже слоя сдвига и экспоненциально спадает выше него. Такие нейтральные возмущения, соответствующие спонтанному излучению ВГВ слоем сдвига, были найдены в работах [15, 16]. На рис. 4 изолинии  $P_{\max} = \text{const}$  изображены на плоскости параметров  $(Ri, kl)$ . Здесь изолиния  $P_{\max} = \infty$  совпадает с одной из нейтральных кривых на той же плоскости параметров, полученных в работе [16]. Заметим, что в отличие от спонтанного излучения, например тангенциального разрыва, здесь энергия ВГВ не сохраняется: имеется критический слой, где волна черпает энергию из стратифицированного потока.

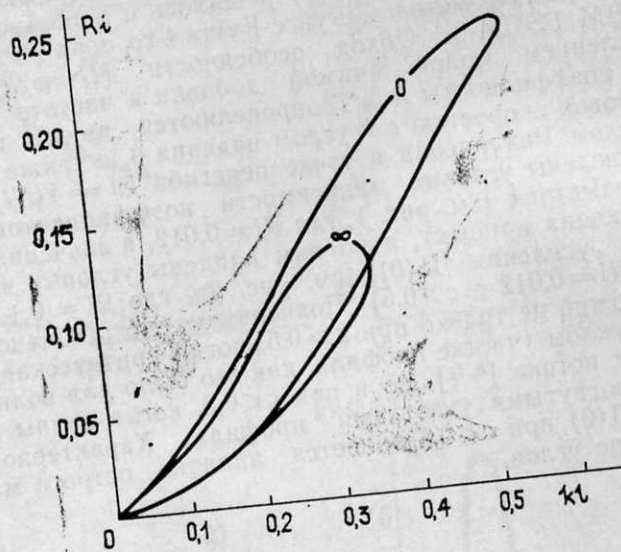


Рис. 4.

Таким образом, в результате аналитических и численных исследований удалось построить качественную картину взаимодействия внутренних волн со сдвиговыми потоками стратифицированной жидкости. Получены аналитические решения, на основании которых дана интерпретация взаимодействия ВГВ с потоком как баланса энергообмена волны с отстающими и опережающими частицами жидкости. В отличие от нестратифицированного потока здесь обгоняющие и отстающие частицы взаимодействуют с волновым полем разной интенсивности. Заметим, что аналогичное «неравноправие» обгоняющих и отстающих частиц, взаимодействующих с волной, обнаружено в работе [17] для резонансного взаимодействия электромагнитных волн со сдвиговым потоком плазмы.

Вследствие разной эффективности взаимодействия с обгоняющими и отстающими частицами величина усиления (поглощения) волны определяется не только характеристиками потока в критическом слое, но и свойствами решения, характеризующего волновое поле. Таким образом, критерий усиления не сводится к локальному условию типа критерия Майлса (см. [18]). Усиление ВГВ в стратифицированном потоке определяется глобальным условием, включающим в себя характеристики потока во всей рассматриваемой области, а не только в критическом слое.

Проведенные численные расчеты позволяют определить, при каких параметрах волн и потоков возможно резонансное усиление.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. — М.: Мир, 1978.
2. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. — М.: Мир, 1981.
3. Фабрикант А. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 2. С. 275.
4. McKenzie J. F. // J. Geophys. Res. 1972. V. 77. № 16. P. 2915.
5. Booker J. R., Bretherton F. R. // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. № 3. P. 513.
6. Фабрикант А. Л. // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 1. С. 107.
7. Jones W. L. // J. Fluid Mech. 1968. V. 34. № 3. P. 609.
8. Eltayeb I. A., McKenzie J. F. // J. Fluid Mech. 1975. V. 72. № 4. P. 661.
9. Van Duin C. A., Keider H. // J. Fluid Mech. 1982. V. 120. P. 505.
10. Lindzen R. S., Barker J. W. // J. Fluid Mech. 1985. V. 151. P. 189.
11. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 5. С. 655.
12. Троицкая Ю. И., Фабрикант А. Л. Препринт ИПФ АН СССР № 171. Горький, 1987.
13. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток. В кн.: Нелинейные волны. — М.: Наука, 1979.
14. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
15. Lalas D. P., Einaudi F. // J. Atmos. Sci. 1976. V. 33. № 7. P. 1248.
16. Fritts D. C. // J. Atmos. Sci. 1980. V. 37. № 7. P. 1642.
17. Гавриленко В. Г., Зелексон Л. А. // Физика плазмы. 1980. Т. 6. № 5. С. 1046.

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
4 марта 1988 г.

### RESONANT AMPLIFICATION OF INTERNAL GRAVITY WAVES IN A SHEAR FLOW

*Yu. I. Troitskaya, A. L. Fabrikant*

The problem of reflection and transmission of internal gravity waves is studied both analytically and numerically. The coefficients of reflection and transmission from a thin shear layer are found by a multiscale asymptotic expansion method. The amplification (absorption) of waves in a critical layer is shown to be the result of competition between the amplification of the wave by fast stream particles and its absorption by slow particles. Analytical solutions are found for the linear and parabolic speed profiles. The amplification of internal waves in a shear layer as well as their parameter ranges are calculated numerically.

**ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИИ**

# **РАДИОФИЗИКА**

**Том 32**

**ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК**

**ИЗДАНИЕ ГОРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО  
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
1989**