

УДК 532.592

© 1997 г. С.Н. РЕЗНИК, Ю.И. ТРОИЦКАЯ

**ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ИСТОЧНИКА МАССЫ В
СТРАТИФИЦИРОВАННОМ
СДВИГОВОМ ПОТОКЕ, ИМЕЮЩЕМ КРИТИЧЕСКИЙ СЛОЙ.
ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ**

Рассматривается двумерная задача о генерации волн телом, которое моделируется источником массы, расположенным на некоторой высоте над твердой поверхностью в стратифицированном сдвиговом потоке и движущимся со скоростью, совпадающей со скоростью потока на некоторой другой высоте. Обсуждаются качественные особенности силы волнового сопротивления при таких условиях.

Расчет волнового сопротивления движущихся в стратифицированной жидкости тел подробно исследован в случае покоящейся жидкости [1, 2], влияние же сдвигового течения изучено мало.

Здесь наибольший интерес представляет случай, когда скорость движения тела совпадает со скоростью потока на некотором уровне. Тогда в окрестности этого уровня формируется критический слой для волн, излучаемых телом, фазовая скорость которых равна скорости тела. Подобная задача о волновом сопротивлении двумерной локализованной неоднородности дна стратифицированному сдвиговому потоку, меняющему направление на некотором уровне, в окрестности которого образуется критический слой, была рассмотрена в [3]. Было показано, что наличие критического слоя приводит к существенному изменению волнового сопротивления по сравнению со случаем обтекания однородным потоком, в том числе и к значительному его возрастанию.

1. Постановка задачи. Рассмотрим сдвиговой поток стратифицированной по плотности жидкости, заполняющий полупространство, ограниченное снизу твердой поверхностью, который характеризуется постоянными частотой плавучести $N = \sqrt{gd \ln \rho_0 / dz}$ ($\rho_0(z)$ – плотность жидкости, z – вертикальная координата, вертикальная ось направлена вниз) и сдвигом скорости U_{0z} . Предположим, что поток динамически устойчив, т.е. в нем выполняется критерий Майлса $Ri = N^2 / U_{0z}^2 > 1/4$ [4, 5]. Цилиндрическое тело движется в потоке на расстоянии d от поверхности со скоростью V_0 , совпадающей со скоростью потока на некотором уровне. В окрестности этого уровня образуется критический слой для излучаемых телом волн, фазовая скорость которых равна V_0 .

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью V_0 . В ней скорость потока в критическом слое равна нулю. Тогда профиль скорости $u_0 = U_{0z}$, координата поверхности – $z_0 = (U_0 - V_0) / U_{0z}$, где U_0 – скорость потока на поверхности в покоящейся системе отсчета; координата тела – $h = z_0 - d$. При этом, $h > 0$, если тело находится ниже критического слоя, и $h < 0$, если выше. Будем моделировать погруженное тело локализованным источником массы $m(x, z)$, где x – горизонтальная координата, отсчитываемая вниз по потоку, при этом $x = 0$ соответствует центру тела.

Предполагая, что амплитуда волн, излучаемых при обтекании тела, достаточно мала, воспользуемся для их описания линейным приближением. Поскольку в рассматриваемой системе координат эти волны стационарны, описывающая их система уравнений гидродинамики имеет вид

$$u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + w_1 \frac{dU_0}{dz} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\rho_1 g}{\rho_0} = 0 \quad (1.1)$$

$$u_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + w_1 \frac{d\rho_0}{dz} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = m(x, z)$$

Здесь u_1, w_1, p_1, ρ_1 — возмущения горизонтальной и вертикальной скорости, давления и плотности. Характерное значение функции $m(x, z) = m_0$ пропорционально площади сечения тела D_0 и скорости его обтекания [6]. Все возмущения гидродинамических полей линейны по m_0 . Граничные условия для системы (1.1) — это условие непротекания на поверхности $z = z_0$ и условие убывания возмущений при удалении от нее

$$w_1 = 0 \quad (z = z_0); \quad w_1 = 0 \quad (z = -\infty) \quad (1.2)$$

Система (1.1) справедлива вне окрестности критического слоя, где ее решения имеют особенности. В этих областях должны приниматься во внимание дополнительные факторы: вязкость и диффузия [7], нелинейность [8] или нестационарность [9] волновых возмущений. В дальнейшем будем рассматривать волновые возмущения вне окрестности критического слоя, используя для обхода особенностей правило Липшица [10], справедливое в случае, когда волновые возмущения в критическом слое линейны. В настоящей работе используется приближение Буссинеска [12], поэтому при вычислении интегралов в дальнейшем пренебрегается зависимостью $\rho_0(z)$.

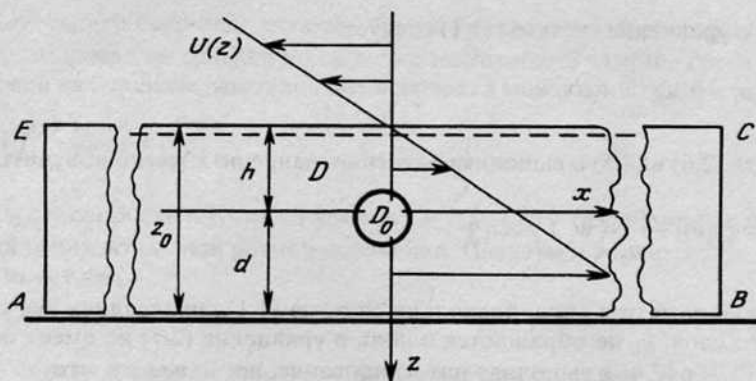
2. Силы, действующие на погруженное тело в стратифицированном сдвиговом потоке. Вычислим силу, действующую на единицу длины погруженного цилиндрического тела в стратифицированном сдвиговом потоке в случае, когда существует критический слой для волн, излучаемых при обтекании тела. Вне критического слоя гидродинамические поля удовлетворяют уравнению Эйлера. Рассмотрим горизонтальную проекцию этого уравнения и уравнение неразрывности

$$\rho_0 \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

На поверхности твердого тела S выполняется условие непротекания $v_n|_S = 0$.

Пусть для определенности тело расположено между поверхностью и критическим слоем ($h > 0$) (фиг. 1). Случай расположения тела выше критического слоя рассматривается аналогично. Проинтегрируем первое уравнение системы (2.1) по площадке D , ограниченной контуром тела и прямоугольным контуром S_{ABCE} , в котором отрезок AB совпадает с поверхностью, отрезок CE расположен ниже критического слоя, вертикальные отрезки AE и BC расположены далеко от препятствия (при $x \rightarrow \pm \infty$). Тогда получим, что сила, действующая на единицу длины цилиндрического погруженного тела, определяется как сумма потоков импульса, уносимых из объема жидкости, ограниченного площадкой D и цилиндрической поверхностью единичной длины в направлении, перпендикулярном плоскости D , и производной по времени от импульса этого объема, взятого с обратным знаком. Как показано в [11], поле вертикальной скорости $w \sim 1/x^2$, а поле горизонтальной скорости $u \sim 1/x$ при $x \rightarrow \infty$, так что потоки импульса через отрезки AE и BC отсутствуют. Выражение для горизонтальной компоненты силы примет тогда вид

$$f_x = \langle uw \rangle|_{z=0} - \frac{\partial}{\partial t} \iint_D udS, \quad \langle \dots \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots dx \quad (2.2)$$



Фиг. 1. Геометрия задачи

Вернемся к постановке задачи (1.1)–(1.2), когда погруженное тело моделируется источником массы $m(x, z)$. Вычислим в этом случае изменение импульса жидкого цилиндрического объема с единичной высотой и плоскостью D в основании. Горизонтальную проекцию уравнения Эйлера с источником с учетом уравнения неразрывности запишем в виде

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial z} uw + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = um\rho_0$$

Проинтегрируем это уравнение по x от $-\infty$ до ∞ и по z от 0 до z_0 . С учетом граничных условий получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{z_0} \rho_0 u dx dz - \rho_0 \langle uw \rangle|_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{z_0} um dx dz \rho_0 \quad (2.3)$$

Сравнивая (2.2) и (2.3), можно видеть, что

$$f_x = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{z_0} \rho_0 um dx dz \quad (2.4)$$

Строго говоря, в (2.4) входит слагаемое

$$- \frac{\partial}{\partial t} \iint_{D_0} \rho_0 u ds$$

где D_0 – площадка, ограничивающая объем, занимаемый телом. Однако из (2.3) видно, что $\partial u / \partial t$ имеет порядок квадрата амплитуды волн, которая пропорциональна площади сечения тела D_0^2 . Итак, обсуждаемая величина пропорциональна D_0^3 , т.е. имеет более высокий порядок малости, чем f_x , имеющая порядок D_0^2 .

Преобразуем подынтегральное выражение (2.4). Для этого воспользуемся уравнением энергии волновых возмущений, являющимся следствием системы (1.1)

$$\langle u_1 w_1 \rangle \frac{du_0}{dz} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\langle p_1 w_1 \rangle}{\rho_0} = \frac{\langle p_1 m \rangle}{\rho_0}$$

Интегрируя это уравнение по x от $-\infty$ до ∞ , получим

$$\langle u_1 w_1 \rangle \frac{du_0}{dz} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\langle p_1 w_1 \rangle}{\rho_0} = \frac{\langle p_1 m \rangle}{\rho_0} \quad (2.5)$$

Из первого уравнения системы (1.1) следует

$$p_1 = -\rho_0 u_0 u_1 - \rho_0 u_{0z} \int_{-\infty}^x w_1 dx_1 \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5) и выполняя интегрирование по x , легко получить

$$\frac{d}{dz} \langle u_1 w_1 \rangle = \langle u_1 m \rangle - \frac{u_{0z}}{u_0} \left\langle w_1 \int_{-\infty}^x m dx_1 \right\rangle \quad (2.7)$$

Здесь нужно заметить, что, поскольку система (1.1) справедлива вне окрестности критического слоя, u_0 не обращается в ноль и уравнение (2.7) не имеет особенностей. Подставляя (2.7) в (2.4) и выполняя интегрирование, легко видеть, что

$$f_x = D_1 - \rho_0 \int_0^{z_0} \frac{u_{0z}}{u_0} \left\langle w_1 \int_{-\infty}^x m dx_1 \right\rangle, \quad D_1 = \rho_0 \langle u_1 w_1 \rangle|_{z=0} \quad (2.8)$$

Величина D_1 определяет силу сопротивления, действующую на тело за счет излучения волн, поглощаемых в критическом слое, т.е. волновые потери. Подынтегральное выражение во втором слагаемом

$$D_2 = \rho_0 \int_0^{z_0} \frac{u_{0z}}{u_0} \left\langle w_1 \int_{-\infty}^x m dx_1 \right\rangle \quad (2.9)$$

отлично от нуля только в области источников, т.е. оно определяет вклад ближнего поля. По своей природе это "подъемная сила", определяемая векторным произведением скорости и завихренности в месте расположения тела. Ее горизонтальная компонента определяется вертикальной составляющей волнового возмущения скорости w_1 . Расчет силы, действующей на круговой цилиндр в сдвиговом потоке, с учетом "подъемной силы", выполнен в [11]. При отсутствии сдвига скорости ($u_{0z} = 0$) она равна нулю, и сила, действующая на тело, определяется только волновыми потерями. Оценки этой "подъемной силы" приведены в конце разд. 3.

3. Волновое сопротивление. Вычислим вначале силу, действующую на тело за счет волновых потерь D_1 , определяемую формулой (2.8). Используя фурье-представление для гидродинамических полей, легко получить, что

$$D_1 = 4\pi\rho_0 \int_0^{\infty} \text{Im} \left(\frac{W^*(k, z) W_z(k, z)}{k} \right) \Big|_{z=0} dk \quad (3.1)$$

$$W(k, z) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x, z) e^{-ikx} dx$$

Фурье-образ поля вертикальной скорости удовлетворяет уравнению и граничным условиям:

$$\frac{d^2 W(k, z)}{dz^2} + W(k, z) \left(\frac{\text{Ri}}{z^2} - k^2 \right) = \frac{M(k, z)}{z} + \frac{dM(k, z)}{dz} \quad (3.2)$$

$$W(k, z) = 0 \quad (z = z_0), \quad W(k, z) = 0 \quad (z \rightarrow -\infty)$$

$$M(k, z) = \int_{-\infty}^{\infty} m(x, z) e^{-ikx} dx$$

Будем считать, что источник локализован на уровне $z = h$, и его характерный вертикальный размер мал по сравнению со всеми масштабами задачи. Тогда при расчете волновых полей на большом расстоянии от источника можно положить

$$m(x, z) = Uf\left(\frac{x}{a}\right)\delta(z-h)\frac{b}{a} \quad (3.3)$$

Где $U = U_0 h$ – скорость потока на уровне $z = h$, $f(x/a)$ – безразмерная функция, a – характерный горизонтальный размер источника. Спектральное представление источника $m(x, z)$ имеет вид:

$$M(k, z) = UbF(ka)\delta(z-h) \quad (3.4)$$

где $aF(ka)$ – спектр функции $f(x/a)$, F – безразмерная функция. Будем считать, что $F(0) = 0$, это соответствует тому, что источники и стоки компенсируют друг друга. В этом случае выражение для силы, обусловленной волновыми потерями, аналогично [3] может быть представлено в виде

$$D_1 = 4\pi\rho_0 ab^2 N^2 G_1(\text{Ri}, \text{Fr}, \gamma), \quad \gamma = \frac{z_0}{h} \quad (3.5)$$

$$G_1 = \frac{1}{\text{Fr}} \int_0^\infty \left| \Phi\left(\frac{\kappa}{\text{Fr}}\right) \right|^2 f(\kappa, \text{Ri}, \gamma) d\kappa \quad (3.6)$$

$$\text{Fr} = \frac{U}{aN}$$

Здесь Fr – число Фруда.

Интегрирование производится по безразмерному волновому числу $\kappa = kU/N$. Подынтегральное выражение в (3.6) представляет собой произведение квадрата модуля безразмерного спектра источника,

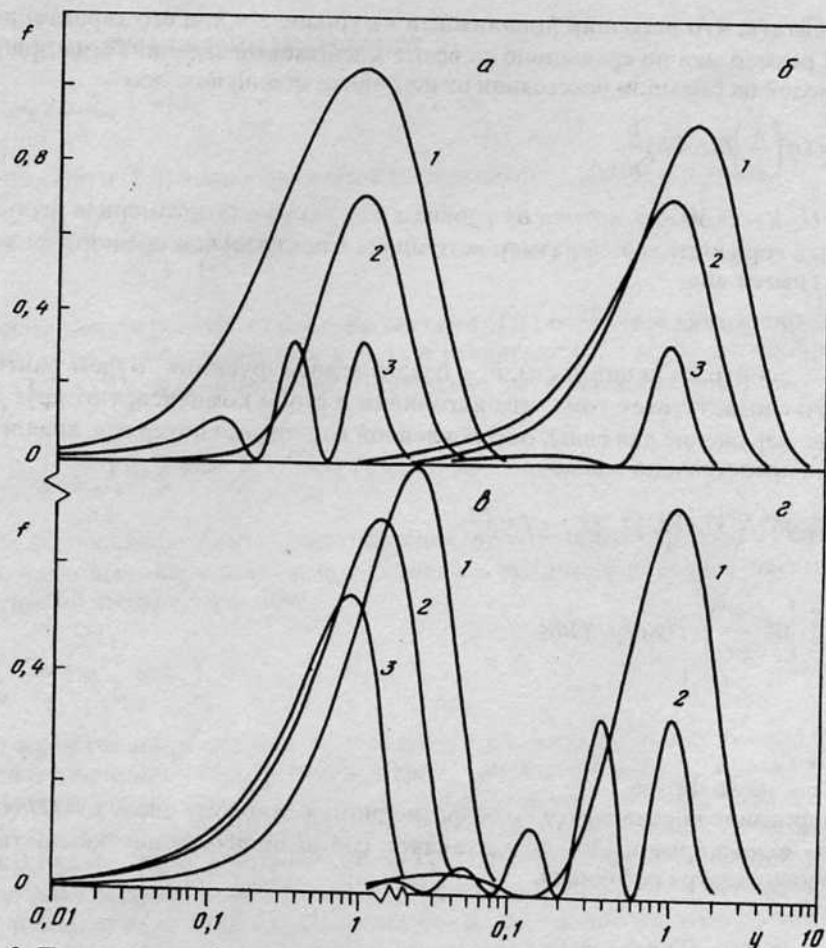
$$\Phi\left(\frac{\kappa}{\text{Fr}}\right) = \frac{F(\kappa a)}{\kappa a} = \frac{\text{Fr}}{k} F\left(\frac{\kappa}{\text{Fr}}\right)$$

на передаточную функцию f . Функция f определяется решением задачи (3.2). Процедура ее получения аналогична приведенной в [3] и описана в [11].

В отличие от формул, полученных в [3], передаточная функция зависит от дополнительного параметра $\gamma = z_0/h$. При этом при $z_0 = h$, f переходит в выражение для передаточной функции, полученное в [3], а (3.6) – в формулу волнового сопротивления источника в виде возвышения на поверхности, если $F(ka) = \zeta(ka)/(ka)$, где $\zeta(ka)$ – спектр возвышения поверхности. Как и в [3], функция f имеет смысл потока импульса, уносимого от источника k -й гармоникой единичной амплитуды. В случае, когда критический слой для подветренных волн расположен над поверхностью выше источника ($h > 0$):

$$f(\kappa, \text{Ri}, \gamma) = \frac{\pi\kappa(1 - \exp(-4\pi\mu))}{\text{sh}(\pi\mu)\sqrt{\text{Ri}}} \frac{|\text{Im}[I_{i\mu}(\gamma)(0, 5I_{-i\mu}(y) - y\dot{I}_{-i\mu}(y))]|^2}{|I_{-i\mu}(\gamma) - \exp(-2\pi\mu)I_{i\mu}(\gamma)|^2}, \quad y = \kappa\sqrt{\text{Ri}} \quad (3.7)$$

$$\dot{I}_{-i\mu}(y) = \frac{dI_{-i\mu}(y)}{dy}$$



Фиг. 2. Передаточные функции $f(y)$, $h > 0$, кривые 1-3 соответствуют $R_i = 0,25; 1; 10$; а, б, в отвечают $d/z_0 = 0,9; 0,5; 0$; $z - h < 0$, кривые 1-2 соответствуют $R_i = 1; 10$

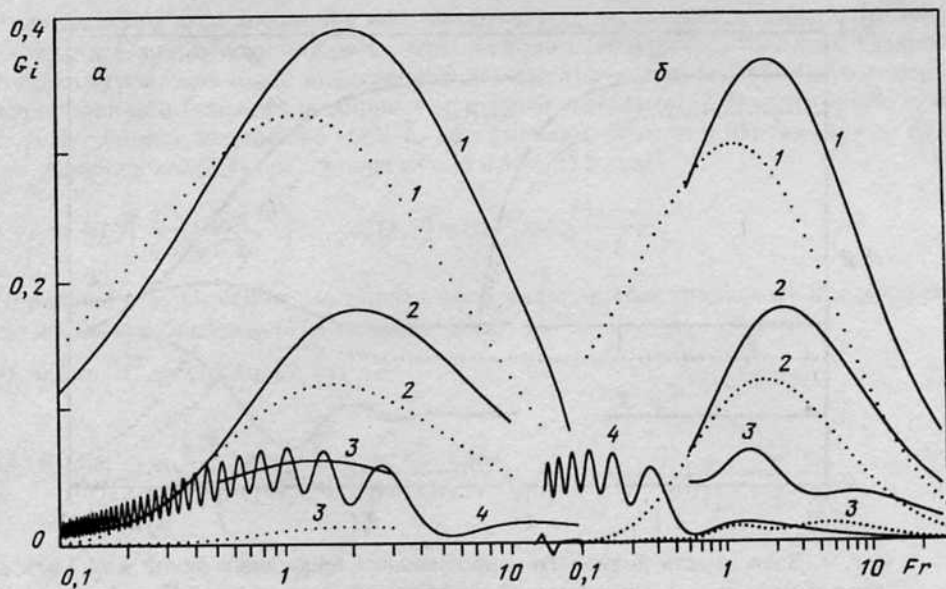
Предел $R_i \rightarrow \infty$ при постоянных U_0 и N соответствует $z \rightarrow \infty$ при сохранении $d = z_0 - h$ (расстояния от поверхности до источника). Тогда

$$f = \kappa \sqrt{1 - \kappa^2} \cos^2 \left(\frac{dN}{U_0 - V_0} \sqrt{1 - \kappa^2} \right), \quad \kappa < 1; \quad f = 0, \quad \kappa > 1 \quad (3.8)$$

На некоторых высотах над поверхностью $d(k)$ падающая и отраженная волны с определенным волновым числом k , имеющие равную амплитуду, складываются в противофазе. Если источник располагается на этой высоте $d = d(k)$, соответствующая k -я гармоника не излучается. В результате значение передаточной функции оказывается равным нулю. При увеличении d/z_0 условие обращения в нуль "передаточной функции" вначале выполняется для длинных волн. Рассматривая длинноволновую асимптотику выражения (3.7), можно получить значение числа нулей передаточной функции в зависимости от высоты источника над поверхностью:

$$n = \left[\frac{\arctg(2\mu)}{\pi} - \frac{\mu}{\pi} \ln \left(\frac{h}{z_0} \right) \right] \quad (3.9)$$

где $[]$ означает целую часть.



Фиг. 3. Зависимость волнового сопротивления (сплошные линии - G_1) и "подъемной силы" (пунктирные линии - G_2) от Fr при $a/d = 0,1$; $a - h > 0$, $b - h < 0$. Кривые 1-3 соответствуют $Ri = 0,25$; 1; 10

На фиг. 2, а, б, в в качестве иллюстрации приведены зависимости передаточной функции от κ при различных Ri и d/z_0 и $h > 0$. Число нулей функции f растет при фиксированном Ri с ростом d/z_0 и при фиксированном d/z_0 с ростом Ri . При этом, при умеренных Ri и d/z_0 не близких к единице, функция f нулей не имеет, а лишь несколько уменьшаются ее значения в области малых κ . Если критический слой расположен ниже источника ($h < 0$)

$$f(\kappa, Ri, \gamma) = \frac{\pi \kappa (1 - \exp(-4\pi\mu)) |I_{i\mu}(\gamma\gamma) \operatorname{Im}[0,5I_{-i\mu}(y) - yI_{-i\mu}(y)]|^2}{\operatorname{sh}(\pi\mu) \sqrt{Ri} |I_{-i\mu}(I_{-i\mu}(\gamma\gamma) - \exp(-2\pi\mu)I_{i\mu}(\gamma\gamma))^2} \quad (3.10)$$

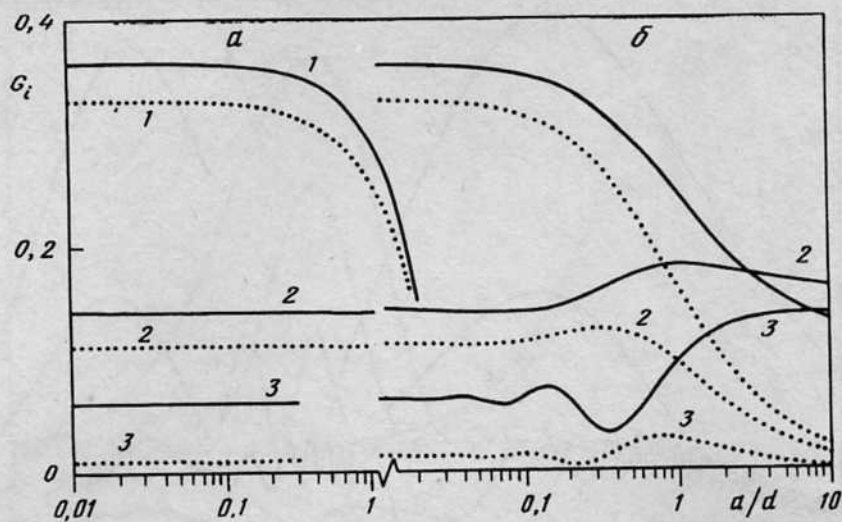
При умеренных числах Ri , когда $\mu \sim 1$ передаточная функция

$$f = \frac{\pi}{Ri \operatorname{sh}(\pi\mu)} \varphi(y), \quad \varphi(y) = y \left| \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} I_{-i\mu}(y) - y I_{-i\mu}(y) \right] \right|^2$$

не зависит от γ , и, как легко видеть, является асимптотикой функции (3.7) при $\gamma \rightarrow \infty$, т.е. совпадает с передаточной функцией источника в безграничном пространстве. Это, очевидно, обусловлено тем, что волна, падающая от источника, практически полностью поглощается в критическом слое при $Ri \geq 1$, а волна, прошедшая через критический слой, отразившаяся от поверхности и вернувшаяся к источнику, оказывается ослабленной в $\exp(-2\pi\mu)$ раз. Вид функции $\varphi(y)$ представлен на фиг. 2, г. При ряде значений y $\varphi(y)$ обращается в нуль. Это обусловлено отражением волны от бесконечно удаленной области, где волновые поля имеют асимптотику $\exp(-k|z|)$.

Используя выражение (3.6), рассмотрим теперь зависимость волновых потерь, определяемых функцией, от параметров потока и источника, для случая, когда спектр источника имеет вид:

$$\Phi\left(\frac{\kappa}{Fr}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\kappa}{Fr}\right)$$



Фиг. 4. Зависимость волнового сопротивления (сплошные линии - G_1) и "подъемной силы" (пунктирные линии - G_2) от a/d при $Fr = 1$: $a - h > 0$, $b - h < 0$. Кривые 1-3 соответствуют $Ri = 0,25; 1; 10$

Принимая во внимание обозначения, введенные в разд. 1, легко видеть, что

$$Fr = \frac{d}{a(l\nu - 1/\sqrt{Ri})}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{Ri}}{\sqrt{Ri} - 1/\nu}, \quad \nu = \frac{U_0 - V_0}{Nd}$$

Таким образом, G_1 является функцией числа Фруда, определенного по скорости источника относительно потока, размера источника a/d и числа Ричардсона $G_1 = G_1(Fr, a/d, Ri)$. На фиг. 3, *a* представлено семейство зависимостей G_1 от Fr в случае, когда критический слой расположен выше источника ($h > 0$) при $a/d = 0,1$. Кривые отличаются значением Ri , $Ri = \infty$ соответствует потоку с однородным профилем скорости. Такое изменение Fr при постоянных Ri и a/d обеспечивается при изменении скорости тела в фиксированном потоке на фиксированной высоте над поверхностью. При больших Ri зависимости имеют осциллирующий характер, причем число осцилляций растет с ростом Ri . Величина волновых потерь в сдвиговом потоке существенно отличается от ее значения в однородном потоке. При этом при Fr близком к единице (вблизи максимума), волновые потери в сдвиговом потоке существенно больше, чем в однородном потоке. Причина этого явления связана с расширением спектра излучаемых волн в сдвиговом потоке, подробно она обсуждается в [3].

На фиг. 3, *b* представлены зависимости в случае, когда критический слой расположен ниже источника ($h < 0$). Эти кривые определены на интервале $0 < Fr < d/(a\sqrt{Ri})$.

При $Fr > d/(a\sqrt{Ri})$ критический слой отсутствует, а волновое сопротивление источника определяется суммой вкладов дискретных собственных волн соответствующей краевой задачи. Этот случай в настоящей работе рассматриваться не будет.

На фиг. 4, *a, б* представлены зависимости G_1 от a/d при $Fr = 1$ при различных Ri . При малых a/d , когда источник расположен на большом расстоянии от поверхности по сравнению со своим размером, эти зависимости слабые. С ростом a/d изменяется и стремится к некоторому фиксированному значению при $a/d \rightarrow \infty$, соответствующему волновому сопротивлению возвышения поверхности.

Приведем оценки "подъемной силы" D_2 (см. (2.9)), которая действует на тело, моделируемое источником массы. Будем по-прежнему считать, что характерный

вертикальный размер источника мал по сравнению со всеми характерными масштабами задачи. Однако, если при рассмотрении волновых полей на большом удалении от источника его можно было представлять в виде δ -функции (см. (3.4)), то теперь при интегрировании по области источника во втором слагаемом (2.8) необходимо принять модель источника, имеющего малый, но конечный размер в вертикальном направлении. Аналогично (3.4) представим $m(x, z)$ и $M(k, z)$ в виде:

$$m(x, z) = Uf\left(\frac{x}{a}\right)q\left(\frac{|z-h|}{b}\right), \quad M(k, z) = UaF(ka)q\left(\frac{|z-h|}{b}\right)$$

Перейдем в выражении для "подъемной силы" к спектральному представлению. Тогда после преобразований можно получить:

$$D_2 = 4\pi\rho_0 N^2 ab^2 G_2(Ri, Fr, \gamma)$$

$$G_2(Ri, Fr, \gamma) = \frac{1}{Fr} \int_0^\infty \left| \Phi\left(\frac{\kappa}{Fr}\right) \right|^2 f_2(\kappa, Ri, \gamma) d\kappa$$

$$h > 0: f_2(\kappa, Ri, \gamma) = \text{Im}\{g_1\} \text{Im}\left\{ \begin{array}{l} g_2(y) \\ g_2(\gamma) \end{array} \right\}$$

$$g_1 = \frac{\pi}{\text{sh}(\pi\mu)} \frac{\kappa}{\sqrt{Ri}} [I_{i\mu}(\gamma)[0, 5I_{-i\mu}(y) - yI_{-i\mu}(y)]]$$

$$g_2(y) = I_{-i\mu}(y) - \exp(-2\pi\mu)I_{i\mu}(y)$$

$$h < 0: f_2(\kappa, Ri, \gamma) = \text{Im}\{g_1\} \text{Im}\left\{ \frac{g_3}{g_2(\gamma)} \right\}$$

$$g_3 = I_{-i\mu}(y)I_{i\mu}(\gamma) - \exp(-2\pi\mu)I_{-i\mu}(\gamma)I_{i\mu}(y)$$

При $Ri \rightarrow \infty$ функции f_2 при $h > 0$ и $h < 0$ пропорциональны $Ri^{-1/2}$, что соответствует убыванию "подъемной силы" при уменьшении завихренности потока. При $z_0/h = 1$, когда источник располагается на дне потока, $f_2 = 0$, что соответствует обращению в нуль "подъемной силы". Это находит отражение в уменьшении G_2 с ростом a/d при фиксированном Fr (фиг. 4, *a, б* - штриховые линии).

Кроме того из фиг. 3, 4, *a, б* видно, что при больших Ri "подъемная сила" мала по сравнению с волновыми потерями, при Ri порядка 1 они сравнимы, а при Ri близком к $1/4$, при некоторых Fr "подъемная сила" может превосходить волновые потери. Полная "волновая" сила, действующая на тело, согласно (2.8), $D = D_1 - D_2$, и можно ожидать, что в соответствующих областях параметров будет происходить резкое падение силы и даже изменение ее знака.

Качественный эффект появления горизонтальной компоненты "подъемной силы" должен существовать и при обтекании реального тела (а не модельного источника). Он обусловлен тем, что за счет излучения волн возникает асимметрия течения относительно горизонтальной плоскости, проходящей через центр тела (возникает вертикальная компонента скорости). В течении с завихренностью это вызывает появление горизонтальной силы (эффект Магнуса).

Заключение. Особенности, связанные с критическими слоями, влияют на силу волнового сопротивления, действующую на погруженные тела. Из фиг. 3, *a* (кривая 4 соответствует зависимости силы волнового сопротивления от числа Fr в потоке с

однородным профилем скорости, а кривые 1, 2, 3 соответствуют числам Ричардсона $1/4$, 1, 10 в сдвиговых потоках) можно видеть, что для $Ri \leq 1$ сила волнового сопротивления в течениях со сдвигом существенно больше, чем в однородных течениях. В то же время для $Ri = 1/4$, 1 и $Fr \leq 10$ величина горизонтальной компоненты "подъемной силы", появление которой обусловлено эффектом Магнуса, сравнима с волновой силой, обусловленной волновыми потерями. В результате полная сила, равная их разности, оказывается значительно меньше, чем каждая из этих компонент (хотя все же больше, чем сила, действующая на тело в однородном течении).

Этот результат есть следствие используемой модели, в которой профиль скорости полагается линейным и волны, излучаемые препятствием, находятся в потоке с ненулевой завихренностью. Если выбрать поток с профилем скорости в виде гиперболического тангенса, более типичный для океана, то эффект увеличения волновых потерь из-за присутствия критического слоя существовал бы, но горизонтальная компонента подъемной силы была бы меньше, чем в вихревом течении.

"Подъемная сила" не дает вклада в радиационные потери энергии движущегося препятствия, потому что полная "подъемная сила" перпендикулярна полной скорости препятствия относительно потока. Таким образом, главный эффект присутствия критического слоя состоит в увеличении волновых потерь.

Авторы выражают благодарность И.С. Долиной и В.П. Реутову за полезное обсуждение и В.В. Бредихину за помощь в подготовке иллюстраций. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-05-15325а), а также совместной программы ASAP NOAA/DOD.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степаняц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. МЖГ. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 21. С. 93–179.
2. Городцов В.А., Теодорович Э.В. К теории волнового сопротивления (поверхностные и внутренние волны) // Н.Е. Кочин и развитие механики. М.: Наука, 1984. С. 131–149.
3. Резник С.Н., Троицкая Ю.И. Волновое сопротивление локализованной неоднородности дна стратифицированному сдвиговому потоку, имеющему критический слой // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1996. Т. 32. № 1. С. 133–140.
4. Miles J.W. On the stability of heterogeneous shear flows // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. Pt 4. P. 496–508.
5. Howard L.N. Note on a paper of John Miles // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. Pt 4. P. 509–512.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. Hazel P. The effect of viscosity and heat conduction on internal gravity waves at a critical layer // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Pt 4. P. 775–783.
8. Maslove S.A. Critical layers in shear flows // Annual Review Fluid Mechanics. Palo Alto, Calif. Annu. Revs Inc., 1986. V. 18. P. 405–432.
9. Resnik S.N., Troitskaya Y.I. Effect of a critical layer of internal gravity waves in a shear flow // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt 3. P. 513–539.
10. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
11. Резник С.Н., Троицкая Ю.И. Волновое сопротивление плоского локализованного источника, движущегося в стратифицированном сдвиговом потоке, имеющем критический слой: Препринт № 373. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1995. 23 с.
12. Океанология. Физика океана. Т. 2. М.: Наука, 1978. 455 с.
13. Auton T.R., Hunt J.S.R., Prud'homme M. The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow // J. Fluid Mech. 1988. V. 197. P. 241–257.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
2.X.1995