ФАНО России

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение

«Федеральный исследовательский центр

Институт прикладной физики Российской академии наук»
(ИПФ РАН)

на правах рукописи

Скобелев Сергей Александрович

Самовоздействие широкополосного излучения и формирование предельно коротких лазерных импульсов

01.04.21 – лазерная физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Нижний Новгород
2015

Оглавление

Введение **8**

1 Солитоны с малым числом колебаний поля в среде с керровской нелинейностью **49**

1.1 Редуцированное волновое уравнение 54

1.2 Солитонные структуры циркулярно поляризованного поля в среде с «низкочастотной»дисперсией 58

1.3 Солитонная динамика волнового поля с циркулярной поляризацией . . 67

1.3.1 Динамика солитонов с циркулярной поляризацией 68

1.3.2 Формирование солитона с циркулярной поляризацией 70

1.4 Динамические свойства «упругих»взаимодействий волновых солитонов 70

1.4.1 Частоты сталкивающихся солитонов одинаковы 71

1.4.2 Частоты сталкивающихся солитонов различны 74

1.5 Динамика поля с циркулярной поляризацией с учетом высокочастотной дисперсии ($\mu \neq 0$) 76

1.6 Самокомпрессия лазерных импульсов на основе солитонной концепции 82

1.7 Векторные солитоны 89

1.7.1 Солитоны с линейной поляризацией 91

1.7.2 Солитоны с эллиптической поляризацией 96

1.8 Столкновение солитонов, вращающихся в противоположных направлениях 106

1.9 Солитонные структуры циркулярно поляризованного поля с произвольной степенной нелинейностью 113

1.10 Солитонные решения в рамках полного волнового уравнения 117

1.10.1 Точные солитонные решения с произвольным числом колебаний поля 118

1.10.2 Численный анализ 124
1.11 Обсуждение результатов 129

2 Структурные особенности самофокусировки лазерных импульсов с малым числом колебаний поля в среде с кубичной нелинейностью 132
2.1 Постановка задачи. Основные уравнения 135
2.2 Качественное исследование динамики самовоздействия 142
2.3 Динамика самовоздействия волновых полей в среде без дисперсии . . . 149
2.3.1 Самовоздействие «скалярного» (линейно поляризованного) поля 149
2.3.2 Самовоздействие циркулярно поляризованного поля 154
2.4 Особенности динамики самовоздействия в среде с дисперсией 168
2.4.1 Аномальная дисперсия $\varpi \ll \omega_{bnd}$ 170
2.4.2 Нормальная дисперсия $\varpi \gg \omega_{bnd}$ 172
2.4.3 «Нулевая» дисперсия групповой скорости ($\varpi \simeq \omega_{bnd}$) 174
2.5 Учет процессов, ограничивающих коллапс волнового поля 181
2.5.1 Насыщение нелинейности 181
2.5.2 Ионизация 183
2.6 Обсуждение результатов 185

3 Самокомпрессия лазерных импульсов в условиях самофокусировки в среде с аномальной дисперсией 188
3.1 Основные уравнения 191
3.2 Качественный анализ самокомпрессии волнового пакета 196
3.2.1 Безаберационной приближение 198
3.2.2 Учет аберраций 201
3.3 Предельные возможности самокомпрессии лазерного импульса в процессе самофокусировки излучения 203
3.4 Исследование устойчивости лазерного импульса относительно возмущений 208
3.5 Результаты численного моделирования 215
3.5.1 Односолитонная динамика ($\mathcal{N} \simeq 1$) 216
3.5.2 Многосолитонная динамика ($\mathcal{N} \geq 2$) 220
3.6 Обсуждение результатов 230

4 Экстремальная самокомпрессия солитонов в режиме ионизации газа 233

4.1 Постановка задачи. Основные уравнения 237

4.1.1 Применимость двухуровневой системы 237

4.1.2 Феноменологическая модель среды с двумя сортами газа 239

4.1.3 Особенности самовоздействия лазерных импульсов в среде с различными типами нелинейностями 243

4.2 Самокомпрессия солитона 248

4.3 Устойчивость процесса самокомпрессии относительно модификации начального профиля волнового пакета 249

4.4 Отличительные особенности компрессии солитонов НУШ от солитонов с малым числом колебаний поля 252

4.4.1 Приближенное уравнение 252

4.4.2 Самокомпрессия солитонов НУШ 255

4.4.3 Самокомпрессия солитонов DNLS 261

4.5 Оптимизация режима самокомпрессии лазерного импульса 265

4.6 Обсуждение результатов 272

5 Ионизационно-индуцированная самокомпрессия лазерных импульсов мультитераваттного уровня мощности 274

5.1 Структура «холодных» мод диэлектрического капилляра 277

5.2 Базовая система уравнений на эволюцию ионизирующего импульса в капилляре 283

5.2.1 Эволюционное уравнение для лазерного импульса 285

5.2.2 Граничные условия 289

5.2.3 Балансное уравнение 294

5.3 Качественное исследование 296

5.3.1 Закон сохранения энергии в электромагнитном импульсе 297

5.3.2 Закон изменения спектральных характеристик 299

5.3.3 Оценка на нарушение одномодовового режима распространения излучения 300

5.4 «Квазиодномодовый»режим распространения излучения 302

5.5 Возбуждение нелинейной моды в капилляре 315

5.6 Ионизационный компрессор 326

5.7 Эксперимент 339

5.8 Обсуждение результатов 344

6 Самокомпрессия мультипетаваттных лазерных импульсов в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны 347

6.1 Основные уравнения для описания динамики широкополосных лазерных импульсов 351

6.1.1 Самовоздействие лазерных импульсов в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны 351

6.1.2 Усиление лазерных импульсов в процессе обратного рамановского рассеяния в плазме 355

6.2 Экспериментальные результаты по усилению импульса при обратном рамановском рассеянии 364

6.3 Пространственно-временная неустойчивость лазерного импульса в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны 373

6.3.1 Линейная стадия филаментационной неустойчивости 375

6.3.2 Результаты численного моделирования филаментационной неустойчивости 379

6.4 Анализ модификации спектра лазерного импульса 388

6.5 Самокомпрессия лазерного импульса в процессе самофокусировки релятивистски сильного лазерного излучения 395

6.6 Шланговая неустойчивость релятивистски сильных лазерных импульсов 401

6.7 Экспериментальные результаты по укорочению лазерных импульсов в условиях возбуждения плазменной волны 416

6.8 Оптимизация режима самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов 427

6.9 Одномерная модель 432

6.10 Обсуждение результатов 442

Заключение 446

Список публикаций по теме диссертации 449

Литература 456

Определения, обозначения, сокращения

В диссертации применяются следующие определения, обозначения и сокращения:

НУШ – нелинейное уравнение Шредингера

Солитон – уединенная волна

ЦП, ЛП – циркулярная поляризация, линейная поляризация

Предельно короткий лазерный импульс (ПКИ) – лазерный импульс, содержащий небольшое число колебаний поля

DNLS – Derivative Nonlinear Shroedinger Equation

Нелинейная дисперсия – зависимость групповой скорости пакета от амплитуды поля приводящая к укручению профиля волнового пакета

Аномальная дисперсия – групповая скорость растет с ростом частоты

Нормальная дисперсия – групповая скорость падает с ростом частоты

1D+1 – пространственно одномерная задача

2D+1 – пространственно двумерная задача

3D+1 – пространственно трехмерная задача

ИК диапазон – инфракрасный диапазон

УФ диапазон – ультрафиолетовый диапазон

Редуцированное волновое уравнение – волновое уравнение, записанное в безотражательном приближении

Благодарности

Многие друзья и коллеги помогли мне, прочтя различные главы и разделы этой диссертации и сделав многочисленные полезные советы. Автор очень благодарен всем им. *Выражаю глубокую признательность* моим явным и неявным учителям и опекунам: В. А. Миронову, А. В. Киму, А. Г. Литваку, Г. М. Фрайману и А. М. Сергееву, и также коллегам и соавторам: А. А. Балакину, Д. В. Карташову, А. Н. Степанову, Е. А. Анашкиной, А.И. Смирнову, Ю. А. Малькову, М. Ю. Рябикину, Д. И. Кулагину за плодотворные дискуссии как в ходе выполнения исследований, приведенных в диссертации, так и при подготовке самой диссертации.

Автор благодарит свою семью за понимание, почему мне потребовалось провести многие выходные дни в работе над диссертацией, вместо того, чтобы разделить время с ними.

Работа выполнена при финансовой поддержке: Российского фонда фундаментальных исследований, фонда «Династия», Фонда содействия отечественной науке, Программ Президиума РАН, Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых.

Введение

Актуальность темы

В последние десятилетия был достигнут значительный прогресс в генерации *ультракоротких сверхсильных лазерных импульсов*. Он связан с появлением в середине 80-х годов компактных твердотельных лазерных систем, использующих метод усиления частотно-модулированных импульсов [136,178]. С их помощью стало возможным достижение интенсивностей на 4 порядка выше реализуемых ранее. Благодаря ультракороткой длительности генерируемого лазерного излучения, при относительно небольшом уровне энергии, содержащейся в лазерном импульсе, стало возможным получение беспрецедентно больших мощностей лазерных импульсов – тераваттного и петаваттного уровня [179]. Выходные параметры лазерных систем можно без преувеличений отнести к экстремальным значениям. Это и высокие пиковые интенсивности на уровне 10^{22} $\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$, при которых энергия осцилляции электрона в поле волны существенно превосходит энергию покоя и движение электрона становится ультрарелятивистским, и предельно короткие длительности импульсов, около 3-5 фемтосекунд, по сути, приближающиеся к периоду оптического поля, и сверхширокополосные сигналы, с шириной спектра более октавы, а также высокие на уровне киловатта средние мощности. Если по некоторым параметрам аналогичные лазерные источники и могут быть созданы, например, в видимом диапазоне, то их отсутствие в соседних спектральных диапазонах, таких как средний ИК или ультрафиолетовый (УФ), значительно сдерживает как фундаментальные исследования в указанных диапазонах, так и возможные прикладные разработки. Это в значительной степени объясняется отсутствием таких эффективных активных лазерных сред, и, соответственно, требует для своего решения привлечения нелинейно-оптических методов преобразования лазерного излучения. В свою очередь, нелинейно-оптические методы должны полагаться на использование новых нелинейных сред, эффективных в соответствующих

спектральных диапазонах.

Исследование взаимодействия сверхсильных оптических полей с веществом в настоящее время, как уже отмечалось выше, наиболее интенсивно ведется в фемтосекундной области. Создание тераваттных лазерных комплексов заложило основу еще одной области фундаментальной лазерной физики – *физики сверхсильных оптических полей* (которая тесно связана с физикой плазмы и физикой высоких энергий) и порождаемых ими специфических экстремальных состояний вещества. Взаимодействие сверхмощного лазерного излучения с веществом успешно используется сегодня для решения широкого круга фундаментальных и прикладных проблем физики; таких как создание сверхдальних лидаров и нелинейная спектроскопия атмосферы, реализация когерентных источников излучения в рентгеновском диапазоне длин волн, управляемый термоядерный синтез, ускорение частиц и формирование высокоэнергичных потоков заряженных частиц и даже лабораторное моделирование астрофизических процессов [136, 187].

Лазеры петаваттного (10^{15} Вт) уровня пиковой мощности – один из передовых рубежей современной науки, открывающий широкие горизонты для новых практических приложений и уникальных фундаментальных исследований. При фокусировке петаваттного лазерного импульса фемтосекундной длительности достигаются гигантские значения интенсивности светового излучения – 10^{22} Вт/см^2 и выше, при этом напряженность электрического поля на 4 порядка превосходит внутриатомное значение. Одним из наиболее перспективных направлений использования лазерного излучения петаваттной мощности является ускорение протонов и ионов. Обычно для этого используется процесс взаимодействия излучения с тонкими твердотельными мишенями. Ускорение происходит за счёт сил разделения зарядов, возникающих в результате смещения электронной компоненты.

Прогресс в технике генерации сверхкоротких лазерных импульсов не только позволил сформулировать принципиально новые подходы к решению задач, связанных с возбуждением и исследованием вещества в сильно неравновесных состояниях, но и обеспечил (в связи с созданием «настольных»источников мощных лазерных импульсов сверхкороткой длительности, способных функционировать в широком спектральном диапазоне: от УФ до среднего ИК) широкий фронт проведения экспериментальных исследований в этом направлении.

Таким образом, одно из современных направлений в исследовании взаимодействия электромагнитного излучения с веществом связано с использованием все бо-

лее коротких электромагнитных импульсов, поскольку это позволяет выйти на более высокий уровень мощности при той же энергии в лазерном излучении. Развитие методов генерации фемтосекундных оптических полей в среднем ИК-диапазоне, в том числе, включающих небольшое число оптических колебаний, является также наиболее важной проблемой в лазерной физике.

Исследования в данной диссертации направлены на развитие новых регулярных методов формирования лазерных импульсов предельно короткой длительности, содержащих небольшое число колебаний поля, от нДж до кДж уровня энергии в недостаточно освоенных частотных диапазонах, таких как средний ИК, УФ. В основу источников экстремального света положены механизмы конверсии фемтосекундных лазерных импульсов вверх и вниз по спектру в нелинейных средах с керровской, ионизационной, релятивистской нелинейностями.

Получение импульсов с малым числом колебаний поля основано на спектрально-временном преобразовании фемтосекундных импульсов при распространении через нелинейные среды. В самом процессе компрессии удобно выделить два основных момента – спектральное уширение и собственно сжатие импульса. В силу определенной взаимозависимости между длительностью импульса и его спектральной шириной сильное спектральное уширение является необходимым условием получения наиболее короткого импульса. Для увеличения спектральной ширины лазерного импульса обычно используют различного типа нелинейные механизмы его уширения.

На рисунке 1 схематично представлено, какой тип нелинейности необходимо использовать для уширения спектра лазерных импульсов с соответствующей энергией в волновом пакете. Как следует из данного рисунка, для генерации фемтосекундных лазерных импульсов предельно короткой длительности суб-миллиджоульного уровня энергии можно использовать безынерционную нелинейность керровского типа. Предложены две основные схемы компрессии, основанные на нелинейной фазовой самомодуляции спектра лазерного излучения в газонаполненных диэлектрических капиллярах. В первой схеме короткий импульс получается в результате компенсации нелинейной фазовой самомодуляции спектра лазерного излучения с помощью внешнего дисперсионного широкополосного компрессора [42,65,91,141,142,159]. Во второй схеме компрессия лазерного импульса происходит в самой нелинейной диспергирующей среде за счет правильного подбора нелинейных и дисперсионных характеристик среды. В первой части диссертации предложена и развита концепция волновых солитонов с малым числом колебаний поля. Показано, что найденные решения устойчивы

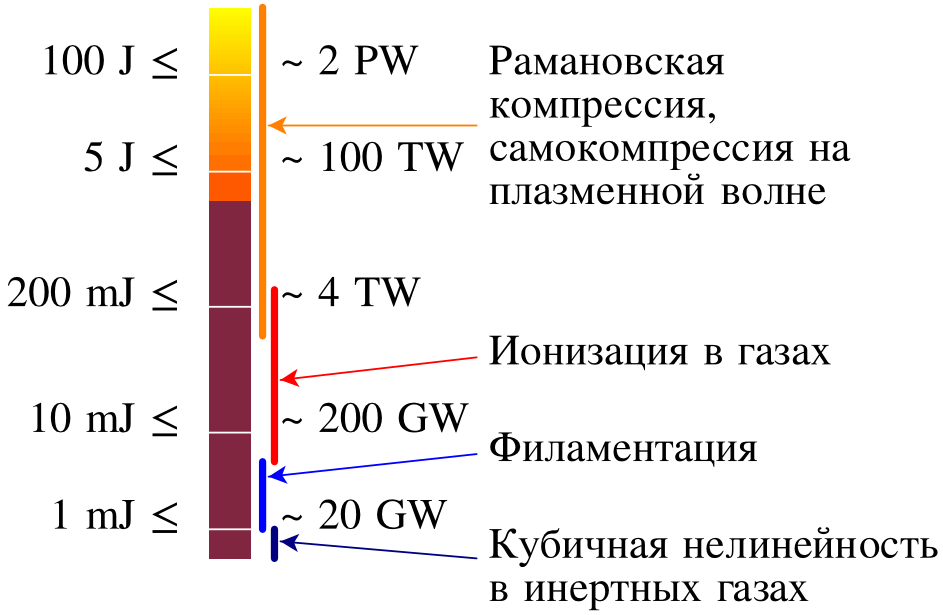


Рис. 1: Разные типы нелинейностей для уширения спектра лазерного импульса

относительно малых возмущений и играют фундаментальную роль в динамике произвольного импульса. Предложена и развита концепция волновых солитонов фемтосекундных оптических полей, содержащих малое число световых колебаний. Введено понятие $\mathcal{N}$-солитонной волновой структуры, позволяющей определить возможности предельной, основанной на солитоном механизме, компрессии сверхкоротких фемтосекундных импульсов. В среде с нелинейностью керровского типа и плазменным законом дисперсии показано, что произвольный оптический импульс распадается на найденные солитонные решения нелинейного волнового уравнения.

Другой подход для увеличения спектральной ширины лазерного импульса с мДж уровнем энергии основан на использовании филаментов [5, 37, 84] (см. рисунок 1). Эти структуры являются нелинейными образованиями, которые существуют за счет баланса фокусировки, связанной с керровской нелинейностью, и дефокусировки за счет ионизационной нелинейности. Филаментная структура ионизованной области способна обеспечить довольно протяженную трассу взаимодействия с веществом из-за самоканалирования излучения. Компрессия импульса наблюдается при наличие одиночной филаменты, формирующейся в газе сравнительно высокого давления при

мощности лазерного импульса, не сильно превышающей критическую для самофокусировки. Как следует из опубликованных работ, на данную тему имеется два различных подхода к укорочению оптического импульса. В первом случае при филаментации пытаются достичь равномерного уширения спектра лазерного импульса, а затем с помощью внешнего компрессора скомпенсировать полученный чирп частоты в импульсе. В частности, в работе [84] было продемонстрировано, что, используя две последовательные филаменты, можно сжать импульс с начальной длительностью 33 фс и энергией 0.85 мДж до 5.1 фс с энергий в импульсе 0.18 мДж. В другой серии работ было экспериментально показано, что при филаментации возможна также и самокомпрессия лазерного импульса без внешних устройств для компенсации дисперсии. В частности, в работах [174, 177] было впервые продемонстрировано сжатие импульса с энергией 2.5 мДж с 45 фс до 7.8 фс. Тем не менее, как показывает детальный анализ, проведенный в работах [109, 174], энергетическая эффективность такого метода невысока и составляет несколько процентов. Однако, главное ограничение связано с расслоением волнового пучка, когда мощность превышает критическую мощность для самофокусировки.

В последние десятилетие достигнут значительный прогресс в генерации лазерных импульсов в диапазоне длин волн 3-8 мкм с энергией в лазерном импульсе от единиц до десяток мДж. Большинство сред в данном частотном диапазоне обладают аномальной дисперсией групповой скорости. Как отмечалось выше, для укорочения волновых пакетов можно использовать филаменты. В настоящее время экспериментально наблюдают укорочения импульсов в филаментах в газовых средах [86, 163, 199] и в объемных средах [66, 87]. Однако, и здесь мощность в лазерном импульсе должна не сильно превышать критическую мощность для самофокусировки из-за развития хорошо известной и опасной самофокусировочной модуляционной неустойчивости [201, 218]. В третьей главе диссертации будет обсуждаться возможность самокомпрессии лазерных импульсов в процессе самовоздействия трехмерных волновых пакетов. Особенности коллапса волнового пакета в среде с аномальной дисперсией групповой скорости обсуждались более 30 лет тому назад [28, 113, 266]. Рассматривалась в основном динамика сферически-симметричных волновых пакетов. Было показано, что в этом случае сферическая симметрия не нарушалась и укорочение масштабов происходит как по поперечной, так и по продольной координате в процессе коллапса излучения. Однако исследования эти проводились для энергии в волновом пакете, которая незначительно превышала порог для коллапса из-за филаментаци-

онной неустойчивости. Важно отметить, что критическая энергия в данном случае зависит от первоначального размера волнового пакета. В третьей главе диссертации исследуется особенности самокомпрессии лазерных импульсов, сильно вытянутых в поперечном направлении, у которых дисперсионная длина много меньше дифракционной. Аналитические результаты получены для распределений солитонного типа по продольной координате. Сильно вытянутые распределения волнового пакета позволяют оперировать с большими энергиями в лазерном импульсе. В адиабатическом режиме длительность солитона уменьшается пропорционально квадрату характерного размера волнового пучка в результате самофокусировки. Оказалось, что такие вытянутые эллипсоидальные распределения лазерного импульса сохраняют свою форму и симметризация распределения волнового пакета не происходит. Такая ситуация заметно отличается от прежних работ. Проведенный анализ в данной диссертации на основе аналитических и численных исследований в рамках волнового уравнения в безотражательном приближении показал устойчивость данной компрессии лазерного импульса относительно филаментационной неустойчивости для лазерных импульсов с начальной длительностью порядка десяти периодов колебаний поля. Это связано с тем, что самофокусировочная неустойчивость при учете в НУШ слагаемого, описывающего зависимости групповой скорости от амплитуды волнового пакета, становится конвективной. В результате возникающие неоднородности смещаются к задней части импульса и перестают нарастать.

В последнее время ведутся исследования по созданию источников экстремального света в новых спектральных диапазонах, таких как средний ИК и ультрафиолетовый, включающий и диапазон вакуумного ультрафиолета, на основе волоконно-оптических лазерных систем. Под экстремальным светом здесь подразумевают световые импульсы предельно коротких длительностей, соизмеримых с периодом колебаний поля, или же сверхширокополосные когерентные ультракороткие импульсы – спектральные суперконтинуумы, простирающиеся более чем на октаву. В связи с отсутствием эффективных активных лазерных сред в данных частотных диапазонах для решения поставленной задачи необходимо использовать нелинейно-оптические методы преобразования лазерного излучения. В настоящее время существуют несколько подходов для получения лазерных импульсов в ультрафиолетовом диапазоне [94,158] в фотоно-кристалическом волокнах, заполненных газом. В частности, в работе [158] приведены результаты численного моделирования, показывающие, как меняется частота лазерного импульса в процессе его распространения в волокне

при наличии керровской и ионизационной нелинейности. На вход нелинейной среды задавался лазерный импульс, который сжимался на начальном этапе за счет модуляционной неустойчивости, и, соответственно, увеличивалась его интенсивность. Далее за счет дополнительной ионизации газа происходила перестройка частоты излучения в коротковолновую часть спектра. В работе [94] представлены результаты экспериментального и теоретического исследования генерации лазерного импульса в диапазоне от 200 до 320 нм в фотонно-кристалическом волокне с переменной дисперсией групповой скорости. В отличие от предыдущей работы, здесь рассматривались интенсивности поля, при которых ионизация газа отсутствует. Лазерный импульс длительностью 30 фс задавался на входе в область с малой аномальной дисперсией. На начальном этапе импульс сжимался за счет модуляционной неустойчивости, и, благодаря слабой дисперсии, происходило формирование ударной волны, что сопровождалось конверсией спектра в коротковолновую часть (из-за скачка поля). Когда спектр оптического импульса «дотягивался» до точки нулевой дисперсии групповой скорости, генерировались дисперсионные волны в области нормальной дисперсии на длине волны 266 нм с эффективностью 8%. Длительность излучения на данной частоте составляла 10 фс. В диссертации будет показано, что в среде с независимым контролем керровской и ионизационной нелинейностей (например, таких как смесь двух газов с заметно отличающимися потенциалами ионизации) может иметь место экстремальная самокомпрессия лазерного импульса. Газ с более высокими потенциалом и большей плотностью обеспечивает керровскую нелинейность и приводит в условиях волноводной дисперсии к образованию солитона, в то время как второй сорт газа с меньшим потенциалом ионизации приводит к ионизационному преобразованию спектра. Предлагается использовать волноводную систему для обеспечения контроля дисперсии групповых скоростей. В результате режим самокомпрессии солитона содержит в себе две качественно отличающиеся друг от друга последовательные стадии. На первой стадии солитонный импульс сжимается адиабатически в соответствии с повышением несущей частоты солитона [44]. При этом экстремальная компрессия имеет место на втором этапе, когда формируется солитон с одним периодом поля со сверхшироким спектром. Мы продемонстрировали, что на данной стадии процесс дальнейшей самокомпрессии значительно ускоряется и сопровождается смещением центральной частоты сверхширокого спектра в ультрафиолетовую область, сохраняя однопериодичность солитона на протяжении всего времени. Оценки показывают, что этот метод может привести к успеху в генерации импульсов с

длительностью в сотни аттосекунд в ультрафиолетовой области с эффективностью в десятки процентов.

Для генерации лазерных импульсов с энергией в импульсе от десяти до сотен мДж необходимо использовать принципиально иную схему компрессии, использующей другой тип нелинейности (см. рисунок 1), например, ионизационную. На данный момент существует две схемы сжатия импульсов, основанные на использовании ионизационной нелинейности. Компрессия мощных лазерных импульсов, основанная на ионизационном механизме нелинейной фазовой самомодуляции в капиллярах, заполненных газом низкого давления (когда имеет место одномодовый режим распространения излучения в капилляре) была продемонстрирована в работах [182, 210]. В работе [182] было показано, что зависимость фазы в спектре выходного излучения от частоты близка к параболической. При этом данный частотный чирп может быть скомпенсирован при распространении выходного излучения в среде с нормальной дисперсией. В качестве основного элемента оптического компрессора для компенсации фазовой модуляции в спектре может использоваться обычная стеклянная пластина, обладающая в рассматриваемом диапазоне длин волн нормальной дисперсией групповой скорости [210]. Так, например, в работе [210] было впервые продемонстрировано сжатие импульса с 85 фс до 35 фс. Начальная энергия в импульсе была 5 мДж. К недостаткам данной схемы следует отнести наличие внешнего компрессора. Важным этапом на этом пути является работа [188], в которой была впервые продемонстрирована экспериментально и теоретически возможность ионизационно-индуцированной самокомпрессии лазерного импульса, реализующегося при распространении фемтосекундного излучения в условиях полого сверхразмерного капилляра, заполненного газом. В частности, в данной работе было показано сжатие импульса с 30 фс до 13 фс с начальной энергией в импульсе 2.2 мДж. В диссертации развита новая концепция получения мульти-миллиджоульных лазерных импульсов предельно короткой длительности в диэлектрических капиллярах, заполненными газом. Разработана теоретическая модель, объясняющая механизм такой самокомпрессии и дающая хорошее согласие с экспериментальными данными. Ключевой идеей является использование газа при сравнительно более высоких давлениях, когда с учетом образующейся плазмы нарушаются условия одномодового распространения и возможно возбуждение ионизационно-нелинейного плазменного волновода, в котором могут распространяться слабо утекающие моды. Существование такого волновода связано с резкой зависимостью вероятности ионизации газа от интенсивности поля

в лазерном импульсе, что приводит к образованию резкого (на масштабе длины волны) скачка показателя преломления. За счет действия ионизационной нелинейности происходит частотная модуляция лазерного импульса, в результате которой формируется чирп с повышением частоты от передней к задней части импульса. Создание более узкого плазменного канала в диэлектрическом капилляре способно обеспечить аномальный характер групповой скорости, что приведет к сжатию исходного ионизирующего импульса, поскольку в среде с аномальной дисперсией групповой скорости синие спектральные компоненты могут «догнать» красные, так как имеют более высокую групповую скорость.

Дальнейшее увеличение мощности генерируемого лазерного излучения сопряжено со значительными техническими трудностями. Они связаны в первую очередь со стойкостью оптических элементов при огромных мощностях лазерного излучения. Это приводит к необходимости значительного увеличения геометрических размеров используемой оптики, что создает технологические проблемы. На высоком уровне мощности для лазерной компрессии естественно использовать процессы в ионизованной среде, для которой не возникает проблем электрической прочности материалов. В прозрачной плазме обсуждаются два процесса укорочения интенсивного лазерного импульса: в результате обратного рамановского рассеяния и при возбуждении кильватерной плазменной волны (см. рисунок 1). Метод компрессии волновых пакетов, связанный с обратным рамановским рассеянием [126], представляет один из наиболее перспективных способов получения интенсивных ультракоротких волновых пакетов с длительностью, сопоставимой с периодом плазменной волны. Этот рассматриваемый механизм усиления и укорочения импульса очень чувствителен к неоднородности среды (как регулярной, так и флуктуационной) [128, 185] в силу резонансного характера. Первые экспериментальные исследования рамановской компрессии, проведенные в начале двухтысячных годов, показали, что значительного усиления и, соответственно, укорочения длительности лазерного импульса получить не удалось [17, 106, 212]. Однако, в последние годы в связи с развитием лазерной техники было продемонстрировано заметное усиление лазерного импульса при обратном рамановском рассеянии в плазме [138, 185], в связи с чем активизировались дальнейшие исследования данного механизма. В реальных условиях плазма является неоднородной, и это приводит к ухудшению профиля выходного импульса. Одна из возможностей решения данной проблемы связана с использованием двойного рамановского рассеяния [16, 184]. На первой стадии импульс укорачивается в результате

обратного рамановского процесса. На второй стадии рассеянный мощный сверхкороткий лазерный импульс используется как накачка.

Схема самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов, основанная на плазме в простой модели мгновенной релятивистской нелинейности, была проанализирована в работе [167], но не была экспериментально реализована. Укорочение импульсов в плазме в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны в прозрачной плазме – довольно интересное явление. Главная его особенность состоит в нерезонансном характере, который уже обсуждался более чем десятилетие назад [79, 124, 153]. Однако наиболее острая проблема заключается в том, что для ультракоротких импульсов эффект нестационарной самофокусировки [204] может оказывать сильное влияние на динамический процесс самокомпрессии импульса, что до сих пор остаётся не до конца решённым вопросом. В данной диссертации будут проведены детальные исследования нового метода самокомпрессии релятивистски сильного лазерного импульса до нескольких колебаний поля в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны. Самосжатие волнового пакета связано с тем, что в условиях возбуждения кильватерной волны в задней части волнового пакета происходит вытеснение электронов, а в передней части импульса, наоборот, концентрация электронов увеличивается. Следовательно, задняя часть импульса догоняет переднюю часть, так как групповая скорость волнового пакета в плазме увеличивается с уменьшением концентрации электронов. Следует отметить, что укорочение длительности релятивистски сильных лазерных импульсов сопровождается значительным смещением начального спектра волнового пакета в длинноволновую область. Как показали результаты численного исследования в условиях возбуждения кильватерной волны, несущая частота волнового пакета может быть смещена с 800 нм до 650 нм с энергетической эффективностью около 50%. Такое значительное смещение спектра лазерного импульса связано с процессом нестационарной самофокусировки излучения, которая с одной стороны обеспечивает подавление дифракционной расходимости пучка и, соответственно, к существенному увеличению нелинейного взаимодействия со средой, а с другой стороны – к смещению спектра волнового пакета в длинноволновую часть из-за эффекта «отдачи», связанного с возбуждением кильватерной плазменной волны.

В связи с тем, что в данной диссертации исследуются разные схемы самокомпрессии лазерных импульсов до длительностей, соизмеримых с периодом поля, возникает новая в теоретическом плане проблема исследования особенностей распространения

сверхкоротких импульсов конечной амплитуды, дифракции их в неоднородной среде и взаимодействия *широкополосного излучения* с веществом. Особенности теоретического описания пространственно-временной эволюции импульсов с шириной спектра порядка несущей частоты связаны с невозможностью применения традиционно используемого в теории волновых процессов приближения медленно меняющихся амплитуд для исследования динамики системы. Необходимо также и получение материальных уравнений, адекватно описывающих линейную и нелинейную дисперсию показателя преломления среды в широком диапазоне частот в области прозрачности [7, 30, 242]. Следует отметить, что сходные задачи, связанные с описанием заметного уширения спектра излучения, возникают и в композитных средах, например, в кластерной плазме [111], и при изучении такого уникального явления, как сверхдальное распространение ионизирующего фемтосекундного лазерного излучения в атмосфере [6, 36, 140, 238, 238].

На пути решения этой проблемы используются несколько подходов. Прежде всего, следует отметить, что для исследования особенностей динамики сверхкоротких импульсов все чаще обращаются непосредственно к численному решению уравнений Максвелла. Однако, даже при использовании самых сверхмощных компьютеров удается проводить исследование лишь двумерных волновых полей на довольно ограниченной трассе распространения [78]. Очевидно, что этого недостаточно для описания реальной ситуации самовоздействия полей, поскольку динамика процесса определяется конкуренцией эффектов дифракции и нелинейной рефракции и, следовательно, существенно зависит от размерности задачи.

Наибольшее распространение получило обобщение приближенного метода медленно меняющейся огибающей, связанное с учетом зависимости групповой скорости от амплитуды волнового поля, линейной дисперсии среды (см. например [29, 80, 81, 111, 232, 236, 238]). В результате задача сводится к анализу уравнения для огибающей волнового пакета, которое иногда называют нелинейным уравнением Шредингера (*НУШ*) высокого порядка. Порядок определяется максимальной производной от показателя преломления среды по частоте, которую учитывают при получении уравнения.

Третий подход основан на рассмотрении безотражательного распространения импульса в однородной среде. Предполагается, что пространственно-временная структура волнового поля плавно меняется в процессе однонаправленного распространения импульса по трассе из-за дифракции и нелинейности среды, т.е в пренебрежении

эффектами отражения [21,26,30,31,63,115,172,173,215,246,257]. В случае квазимонохроматического излучения такой подход, очевидно, соответствует переходу к уравнению для огибающей. Учет конечной ширины спектра приводит к новым эффектам, которые проявляются в долговременной эволюции пространственно-ограниченного импульса: *формирование дифракционного предвестника, образование характерной подковообразной структуры и дублета в спектре волнового поля* [26, 257]. В дальнейшем волновое уравнение в безотражательном приближении будем называть *редуцированным*.

Проведенное выше обсуждение различных подходов к исследованию эволюции *сверхкоротких импульсов* позволяет выделить особо приближенное описание процессов в предположении плавного изменения волнового поля при его распространении в среде. Очевидно, что это приближение выполнено как для «видиоимпульсов», так и квазимонохроматических волновых пакетов. В данной диссертации проведено развитие такого (*третьего*) подхода для исследования *динамики самовоздействия широкополосного излучения* в среде с различными типами нелинейностей.

Следует отметить, что в исследованиях динамики самовоздействия подобных волновых пакетов преобладающим является *численное моделирование*. В то же время весьма важным представляется развитие методов *аналитического исследования*, позволяющих сформулировать некоторые общие выводы о динамике системы. В представленной диссертации, наряду с численным исследованием эволюции системы, проведено дальнейшее развитие методов теории нелинейных волн (метод моментов распределения поля, обобщенное линзовое преобразование, солитонные и автомодельные решения).

Цель и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является исследование особенностей самовоздействия лазерных импульсов с малым числом колебаний поля в средах с различными типами нелинейностей: керровская, ионизационная, релятивистская. Базируясь на проведенном анализе, разработаны новые регулярные методы самокомпрессии лазерных импульсов с энергией от нДж до кДж уровня в различных частотных диапазонах (УФ, видимый, средний ИК) до предельно короткой длительности, содержащей малое число колебаний поля. В основу источников экстремального света положены механизмы конверсии фемтосекундных лазерных импульсов вверх и вниз по спектру

в нелинейных средах с керровской, ионизационной, релятивистской нелинейностями.

Целью и актуальностью темы обусловлены следующие задачи, решаемые в диссертационной работе.

- Исследование нелинейной динамики предельно коротких лазерных импульсов в волноведущих оптических системах, представляющих собой сильно нелинейные оптические волокна или полые капилляры, заполненные газом. Основное внимание было сконцентрировано на проблеме формирования солитонного режима распространения излучения с малым числом оптических колебаний, а также возможности самокомпрессии произвольного импульса с энергией субмиллиджоульного уровня до предельно коротких длительностей на основе концепции солитона высокого порядка.

- Изучение долговременной эволюции трехмерных волновых пакетов в случае сверхкоротких электромагнитных импульсов в среде с безынерционной нелинейностью керровского типа. Анализ влияния нелинейной дисперсии на процесс самофокусировки лазерного импульса с целью значительного уширения его спектра.

- Исследование возможности самокомпрессии лазерных импульсов, сильно вытянутых в поперечном направлении, в процессе самофокусировки лазерного излучения в среде с аномальной дисперсией групповой скорости в условиях, когда по продольной координате задано распределение солитонного типа. Анализ устойчивости рассматриваемого режима компрессии волнового пакета относительно филаментационной неустойчивости в среде с зависимостью групповой скорости от амплитуды волны.

- Исследование особенности самокомпрессии лазерных импульсов миллиджоульного уровня энергии с начальной длительностью в десятки фемтосекунд до нескольких сотен аттосекунд в волноведущих системах, заполненных двумя сортами газа с существенно различными потенциалами ионизации.

- Исследование эффекта ионизационно-индуцированной самокомпрессии лазерных импульсов с энергией в диапазоне от миллиджоулей до джоулей вплоть до одного колебания поля в газонаполненных диэлектрических капиллярах в процессе формирования нелинейного плазменного волновода.

- Исследование самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов, включая импульсы мултипетаваттного уровня мощности, в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны, когда длительность лазерного импульса составляет порядка одного или менее периода плазменной волны. Анализ влияния возможных неустойчивостей на укорочение волнового пакета.

Научная новизна

1. Для нелинейного одномерного волнового уравнения в среде с безынерционной нелинейностью керровского типа и плазменным законом дисперсии получены новые решения солитонного типа для циркулярно поляризованного излучения с произвольным числом колебаний поля.

2. Предложено обобщенное линзовое преобразование, позволившее аналитически исследовать новые особенности самовоздействия трехмерных пространственно-ограниченных волновых пакетов с шириной спектра порядка несущей частоты в средах с безынерционной нелинейностью керровского типа.

3. Получены новые результаты в теории самокомпрессии трехмерных пространственно-ограниченных лазерных импульсов при самофокусировке излучения в среде с безынерционной нелинейностью керровского типа и аномальным законом дисперсии групповой скорости: показана возможность адиабатического уменьшения длительности волнового пакета солитонного типа по продольной координате вплоть до одного периода поля, найдены условия стабилизации известной филаментационной неустойчивости.

4. Обнаружен и исследован новый метод самокомпрессии лазерных импульсов солитонной формы в волноведущей системе с двумя независимыми типами нелинейностей: безынерционная нелинейность керровского типа приводит к формированию локализованной структуры, ионизационная нелинейность обеспечивает смещение спектра в коротковолновую область.

5. Предложен новый метод ионизационно-индуцированной самокомпрессии лазерных импульсов в газонаполненном диэлектрическом капилляре при формировании нелинейного плазменного канала, аномальная дисперсия которого позволя-

ет сгруппировать коротковолновые спектральные компоненты, появляющиеся в процессе ионизации газа.

6. Получены новые результаты в теории самовоздействия релятивистски сильных лазерных импульсов в плазме в условиях возбуждения кильватерной волны с периодом, превышающим длительность волнового пакета: на нелинейной стадии имеет место стабилизация филаментационной неустойчивости; продемонстрирована возможность устойчивой относительно шланговой неустойчивости самокомпрессия лазерного импульса до одного периода поля.

Основные положения, выносимые на защиту

1. В средах с безынерционной нелинейностью керровского типа и с плазменным законом дисперсии существует класс точных одномерных уединенных решений с произвольным числом колебаний поля. Особенностью данных волновых солитонов является существование предельного солитона с максимально допустимой энергией и минимальной возможной длительностью (соизмеримой с периодом колебаний поля).

2. Режим парного взаимодействия циркулярно поляризованных волновых солитонов с малым числом осцилляций поля зависит от взаимного вращения поляризации поля и несущих частот. В отличие от взаимодействия шредингеровских солитонов, здесь возможно изменение как поляризационных, так и спектральных характеристик при сохранении солитоноподобной структуры огибающей.

3. Самовоздействие трехмерных пространственно-ограниченных сверхкоротких импульсов в средах без дисперсии и с аномальной дисперсией групповой скорости приводит к укручению профиля и образованию ударных фронтов. Процесс опрокидывания волнового профиля опережает волновой коллапс при любой длительности волнового пакета и сопровождается формированием особенности более сложного типа. Градиентная катастрофа развивается при неограниченном возрастании поля на ударном фронте, что приводит к аномальному уширению спектра излучения, спадающему по степенному закону.

4. В среде с безынерционной нелинейностью керровского типа нелинейная дисперсия приводит к стабилизации известной филаментационной неустойчивости

для лазерных импульсов с длительностью менее десяти периодов колебаний поля.

5. В среде с безынерционной нелинейностью керровского типа и аномальным законом дисперсии групповой скорости процесс самофокусировки излучения для сильно вытянутых распределений в поперечном направлении и имеющих «солитонное» распределение по продольной координате, сопровождается адиабатическим уменьшением длительности волнового пакета вплоть до одного колебания поля. На заключительной стадии компрессии нелинейная дисперсия приводит к формированию ударной волны.

6. В волноведущей системе с двумя независимыми типами нелинейностей (кубической и ионизационной) имеет место адиабатическое уменьшение длительности лазерного импульса солитонной формы вплоть до одного колебания поля, сопровождаемое сверхширокимсмещением спектра в коротковолновую область. В результате происходит формирование лазерных импульсов с длительностью в несколько сотен аттосекунд в ультрафиолетовой области спектра.

7. Возбуждение нелинейной моды в капилляре и уширение спектра лазерного импульса за счет нелинейного механизма фазовой самомодуляции, связанной с полевой ионизацией газа, приводят к самокомпрессии исходных импульсов с энергией от миллиджоульного до джоульного уровня вплоть до одного оптического периода.

8. Самовоздействие релятивистски сильных волновых полей в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны с периодом, превышающим длительность волнового пакета, приводит к самокомпрессии мульти-петаваттных лазерных импульсов. Режим укорочения устойчив относительно филаментационной и шланговой неустойчивостей из-за сильно инерционного характера нелинейности.

Научная и практическая ценность

Проведенные исследования имеют большое теоретическое и практическое значение. Развитые методы аналитического исследования самовоздействия широкополосного излучения позволили более детально исследовать картину нелинейной динами-

ки электромагнитного излучения, содержащего конечное число периодов поля в средах с различными типами нелинейностей: керровской, ионизационной, релятивистской. Базируясь на полученных результатах, предложены новые регулярные методы для формирования лазерных импульсов с малым числом колебаний поля в широком диапазоне по энергии от нДж до кДж, в том числе в недостаточно освоенных частотных диапазонах, таких как средний ИК и ультрафиолетовый, без использования внешних устройств компрессии импульсов.

Достоверность

Все полученные результаты обладают высокой степенью достоверности и являются обоснованными. Разработанная теория удовлетворяет принципу соответствия, который включает известные уравнения эволюции огибающих сверхкоротких световых импульсов и результаты анализа пространственно-временной динамики огибающих, как частный случай, обобщая их на импульсы со сверхширокими временными и пространственными спектрами. Успешность нового теоретического подхода подтверждена соответствием результатов численного моделирования эволюции системы. В исследованиях применялись надежные и хорошо апробированные методы численного расчета, позволяющие проводить проверку правильности их работы на хорошо известных моделях. Имеется хорошее качественное и количественное совпадение теоретических результатов с экспериментально полученными данными. Основные положения диссертации опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах, докладывались на международных и российских конференциях, обсуждались на семинарах ИПФ РАН.

Апробация работы

Основные результаты исследований, представленных в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: Международной конференции по лазерной оптике «Int. Conf. on Laser Optics» (С. Петербург, 2003 г.); ежегодном международном совещании по лазерной физике LPHYS (Гамбург, Германия, 2003); ежегодном международном совещании по лазерной физике LPHYS (Триест, Италия, 2004); международном симпозиуме «Topical Problems of Nonlinear Wave Physics» (Нижний Новгород, 2003, 2005); ежегодном международном конгрессе по

математическому моделированию «VI Int. Congress on Mathematical Modeling» (Нижний Новгород, 2004); международной конференции по сверхсильным полям в плазме «3-rd International Conference on Superstrong Field in Plasmas» (Италия, 2005), международном российско-германском совещании по лазерной физике RGLS-2005 (Нижний Новгород, 2005г.); международной конференции «Frontiers of Nonlinear Physics» (Н. Новгород, 2004, 2007, 2010); научной школе «Нелинейные волны» (Н. Новгород, 2004, 2008); международной конференции по когерентной и нелинейной оптике «ICONO» (Минск, 2007, С.-Петербург 2005); международной конференции «HILAS» (Берлин, Германия, 2012).

Результаты исследования самовоздействия сверхкоротких импульсов вошли в список наиважнейших результатов РАН в 2006 г. Результаты по самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов вошли в наиважнейшие результаты в 2011 и 2014 гг. Кроме того, полученные результаты неоднократно рекомендовались в годичный отчет РАН. Проведенные исследования были поддержаны грантом для аспирантов и молодых ученных без степени Фонда коммерческих программ «Династия» в 2005-2007 г.; грантом фонда содействия отечественной науке в области естественных и гуманитарных наук по программе «Лучшие аспиранты Российской академии наук» в 2005-2006 г.; стипендией имени академика Г.А. Разуваева в 2006 году; грантом фонда некоммерческих программ «Династия» по программе поддержки молодых ученых со степенью кандидата наук 2009-2010 г.; грантом фонда содействия отечественной науке по программе «Выдающиеся ученые. Кандидаты и доктора наук РАН» в 2008 г; грант Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-4902.2011.2 (2011-2012); грант Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-5853.2013.2 (2013-2014); гранты РФФИ 10-02-01400-а (2011-2012), 12-02-33074 мол_а_вед (2012-2013), 13-02-00755 а (2013-2015), 15-32-20641 мол_а_вед (2015-2016), 10-02-01400-а (2010-2012).

По теме диссертации опубликовано 22 статьи в отечественных и зарубежных научных журналах, 28 тезисов докладов на конференциях.

Личный вклад автора

Вклад автора заключается в постановке задач, в проведении теоретического анализа решений уравнений, в получении численных результатов, обсуждении получен-

ных результатов. Экспериментальные исследования были проведены в ИПФ РАН группой А.Н. Степанова и в университете им. Г. Гейне, Дюссельдорф, Германия группой проф. О. Вилли. Полученные результаты представляют собой существенный вклад в развитие научного направления в проблеме формирования волновых пакетов с длительностью, соизмеримой с периодом поля, в процессе самокомпрессии мощных лазерных импульсов в широком диапазоне по энергии от нДж до кДж уровня.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка основных публикаций автора по теме работы и списка литературы. Общий объем диссертации 479 страниц, включая 127 рисунков и списка литературы из 267 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во **Введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, формулируются цели и задачи, основные положения, выносимые на защиту, научная новизна и практическая ценность работы. Приводится информация о публикациях по теме диссертации. Кратко излагается содержание работы.

В **первой главе** диссертации дан анализ нового класса одномерных уединенных решений волнового уравнения с циркулярной поляризацией, содержащих произвольное число колебаний поля, в прозрачной нерезонансной среде с безынерционной нелинейностью керровского типа. Эти решения с увеличением амплитуды поля плавно перестраиваются от солитонных решений НУШ, соответствующих длинным импульсам со многими осцилляциями, до предельно коротких, фактически одноперiодных видеоимпульсов. Особенностью данных волновых солитонов является существование предельного солитона с максимально допустимой энергией и минимальной возможной длительностью (соизмеримой с периодом колебаний поля). На основе численного моделирования показано, что режим парного взаимодействия волновых солитонов с циркулярной поляризацией зависит от взаимного вращения поляризации поля и несущих частот. В отличие от взаимодействия шредингеровских солитонов, здесь возможно как изменение поляризационных, так и спектральных характеристик при сохранении солитоноподобной структуры огибающей. Рассмотрен вопрос устойчиво-

сти предельно коротких солитонов с учетом влияния высокочастотной дисперсии. Предложен алгоритм для определения начальных распределений волнового поля, распадающихся в дальнейшем на последовательность солитонов с предопределенными параметрами. Рассмотрена реализуемость таких солитонных структур для поля с эллиптической поляризацией и численно показана их структурная устойчивость.

В *разделе 1.1* приведено однонаправленное одномерное волновое уравнение, описывающее эволюцию лазерного импульса, полученное с помощью стандартной методики восстановления эволюционного уравнения из дисперсионного соотношения, определяющегося зависимостью линейной диэлектрической проницаемости от частоты света. Данная зависимость в широком интервале частот в области прозрачности может быть получена из общих соотношений теории дисперсии среды, например, при использовании соотношения Крамерса-Кронинга. Линейная диэлектрическая проницаемость имеет следующий вид [A7]:

$$\varepsilon = \varepsilon_o + b\omega^2 - \frac{a}{\omega^2} \ . \tag{1}$$

Здесь константы a и b ответственны за «высокочастотную»и «низкочастотную»дисперсию среды соответственно. Приближение безынерционной нелинейности является оправданным в силу того, что при малых длительностях лазерного излучения единственным физическим механизмом, обеспечивающим нелинейность показателя преломления на этих временах, является ангармонизм поляризационного отклика электронных оболочек. Характерное время задержки электронного отклика составляет доли фемтосекунды и мало по сравнению с длительностью одного периода колебаний в ближнем инфракрасном и оптическом диапазонах. Будем полагать среду нерезонансной, допускающей введение низкочастотной и высокочастотной дисперсии феноменологическим образом. В предположении безотражательного распространения электромагнитного излучения в среде волновое уравнение для амплитуды электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ в лазерном импульсе с произвольной поляризацией может быть записано в безразмерных переменных в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^2\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}\right) - \mu\frac{\partial^3\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial\tau^3}\right] = -\boldsymbol{\mathcal{E}} \ , \tag{2}$$

где $\tau = \omega_o(t - \frac{z\sqrt{\varepsilon_o}}{c})$ – время в сопровождающей системе координат, ω_o – характерная несущая частота излучения, $\mu = \omega_o^4\frac{b}{a}$, $z \to z\frac{2\omega_o c\sqrt{\varepsilon_o}}{a}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}} \to \boldsymbol{\mathcal{E}}\sqrt{\frac{3a}{2n_2\omega_o^2}}$, n_2 – коэффициент нелинейности. Масштабная инвариантность (2), как и в случае НУШ, дает

возможность описывать особенности динамики системы с помощью лишь только одного дисперсионного параметра. Подбором параметра μ удается добиться хорошего согласия с экспериментальными данными: например, для кварцевого стекла и благородных газов такое согласие реализуется при изменении частоты на порядок [30,245]. Уравнение (2) включает в себя минимально необходимое число слагаемых для учета дисперсионных и нелинейных эффектов, достаточное для полного описания многих прозрачных сред, и может рассматриваться в качестве *базового уравнения* при анализе динамики широкополосного оптического излучения в нерезонансной среде с безынерционной нелинейностью керровского типа.

Линейное дисперсионное соотношение для уравнения (2) имеет следующий вид:

$$k(\omega) = \mu\omega^3 - \frac{1}{\omega} \ . \tag{3}$$

Аномальная зависимость дисперсии групповой скорости от частоты ($\frac{\partial^2 k(\omega)}{\partial\omega^2} < 0$) имеет место, когда спектр лазерного импульса целиком расположен левее точки нуля дисперсии $\omega_{bnd} = \sqrt[4]{\frac{1}{3\mu}}$. Эта часть дисперсионной кривой соответствует случаю, когда низкочастотная плазменная дисперсия, описываемая вторым слагаемым в дисперсионнм соотношении (3), доминирует над высокочастотной дисперсией нейтрального газа, описываемой первым слагаемым в (3). При этом частотная модуляция в лазерном импульсе, наводимая дисперсией среды, противоположна по знаку нелинейной частотной модуляции, что является физической предпосылкой для существования солитоноподобных решений в уравнении (2).

В *разделе 1.2* найден новый класс уединенных решений волнового уравнения (2) в безотражательном приближении для циркулярно поляризованного излучения, содержащего произвольное число осцилляций поля, когда основную роль в динамике волновых процессов играет низкочастотная («плазменная») дисперсия среды ($\mu = 0$). Волновые солитоны уравнения (3) в этом случае можно представить двухпараметрическим семейством решений вида

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(z,\tau) = \mathcal{A}(\tau-\gamma z)\left[\boldsymbol{e}_x\cos\varphi(z,\tau) + \boldsymbol{e}_y\sin\varphi(z,\tau)\right] \ , \tag{4a}$$

$$\varphi(z,\tau) = \omega(\tau+\gamma z) + \int\limits_{-\infty}^{\tau-\gamma z} \frac{\omega\mathcal{A}^2\left(3\gamma - 2\mathcal{A}^2\right)}{2\left(\gamma-\mathcal{A}^2\right)^2} d\zeta + \varphi_0 \ , \tag{4b}$$

где ω – характерная несущая частота, γ – параметр, определяющий групповую скорость солитона, φ_0 – постоянная фаза поля. Огибающая $\mathcal{A}(\tau-\gamma z)$ подчиняет-

ся уравнению в обыкновенных производных, которое для нормированных величин $\zeta = \omega(\tau - \gamma z)$ и $u = \dfrac{\mathcal{A}}{\sqrt{\gamma}}$ в классе локализованных функций может быть представлена в виде квадратуры

$$\int\limits_{u_m}^{u} \frac{1-3u^2}{u\sqrt{\delta^2 - \mathcal{F}(u^2)}} du = \pm(\zeta - \zeta_o) \ , \tag{5}$$

$$\mathcal{F}(u^2) = u^2 \left[\frac{3}{2}\left(1+\delta^2\right) - \frac{4-5u^2}{4\left(1-u^2\right)^2} \right] \ .$$

Здесь u_m – максимальная амплитуда солитона, определяемая действительным корнем кубичного уравнения $\mathcal{F}(u_m^2) = \delta^2$ (за исключением одного предельного решения, для которого $u_m^2 = \frac{2}{3}$ при $\delta^2 = \frac{1}{8}$), ζ_o – постоянная интегрирования, отвечающая положению максимума огибающей поля.

Как видно из (5), его решения зависят лишь от параметра $\delta^2 = \frac{1}{\gamma\omega^2} - 1$, являющегося комбинацией ω, γ и располагающегося в интервале $0 \leq \delta^2 \leq \frac{1}{8}$. Используя малость параметра δ^2, можно представить амплитуду волнового солитона в виде $u_m \simeq \delta\sqrt{2\left(1+\frac{8\delta^2}{3}\right)}$. При малых амплитудах $u_m^2 \ll \frac{1}{3}$, соответствующих предельно малым δ, как легко видно, решения (5) имеют вид *sech* и отвечают шредингеровским солитонам огибающих. Отметим, что для предельно коротких длительностей, несмотря на широкий спектр сигнала, соизмеримый со средней частотой, ω удобно рассматривать в качестве характерной несущей частоты, являющейся таковой в пределе малых амплитуд. Важной особенностью данных волновых солитонов является существование предельного солитона с максимально допустимой энергией и минимальной возможной длительностью (соизмеримой с периодом колебаний поля). С увеличением δ амплитуда солитона возрастает, а его длительность, определенная по полувысоте интенсивности, уменьшается, достигая минимально возможной величины при $\delta^2 = \frac{1}{8}$ и равной по сути менее, чем периоду колебаний $\tau_s = 2.3\omega^{-1}$. Следует также обратить внимание, что волновые солитоны с малым числом колебаний обладают достаточно сильной частотной модуляцией, не позволяющей ввести определенным образом фазовую скорость для таких структурных образований, что делает их заметно отличными от известных ранее волновых солитонов [111, 227], для которых и несущая частота, и несущий волновой вектор строго определяются.

В *разделе 1.3* путем прямого численного моделирования нелинейной динамики оптического поля в среде с керровской нелинейностью показано, что волновые солитоны являются «абсолютно»устойчивыми образованиями относительно малых возмущений и могут распространяться без каких-либо изменений.

В *разделах 1.4, 1.8* представлены результаты численного исследования по парному взаимодействию солитонов. Следует различать два принципиально различных случая взаимодействующих солитонов. Первый, когда взаимодействуют солитоны с близкими частотами, именно в этом случае возможно сопоставление полученных результатов с аналогичными для шредингеровских солитонов. И второй, не имеющий соответствующего аналога для солитонов НУШ, когда характерные частоты заметно различаются. В *разделе 1.4* было показано, что в случае, когда у взаимодействующих солитонов вектора поля вращаются в одном направлении и несущие частоты близки, существуют три различных режима столкновения импульсов в зависимости от абсолютной разности фаз полей: (а) солитоны проходят друг сквозь друга; (б) они полностью отражаются; (в) солитоны точно реплицируют друг друга в процессе взаимодействия. Однако, если несущие частоты солитонов различны и/или свойственные ему амплитуды отличаются более чем на 40%, лишь один из сценариев реализуется: солитоны проходят друг через друга с полным сохранением своей волновой структуры, включая и частотные заполнения. Причем их взаимодействие достаточно близко к шредингеровским солитонам. В *разделе 1.8* было показано, что в случае, когда у сталкивающихся солитонов вектора поля вращаются в противоположных направлениях и амплитуды солитонов отличаются, могут быть сформулированы следующие положения, которые отражают определенные динамические свойства соударений: (а) в случае, когда частоты сталкивающихся солитонов совпадают, имеет место упругое отталкивание волновых структур; (б) в случае, когда частоты слабо отличаются, имеет место неупругое взаимодействие солитонов; (в) в случае, когда частоты значительно отличаются, имеет место упругое прохождение волновых структур.

В *разделе 1.5* рассмотрен вопрос устойчивости предельно коротких солитонов с учетом влияния «высокочастотной дисперсии» (первое слагаемое в выражении (3)) нейтрального газа. Как отмечалось выше, при $\mu \neq 0$ дисперсия групповой скорости может обратиться в нуль в случае при $\omega_o = \omega_{bnd} = \sqrt[4]{\frac{1}{3\mu}}$. При $\omega_o < \omega_{bnd}$ реализуется аномальная зависимость групповой скорости от частоты, при которой существуют решения солитонного типа, а при выполнении обратного неравенства – нормальная зависимость дисперсии групповой скорости от частоты, при которой солитонов (5) не существует. Показано, что предельно короткие солитоны устойчивы по отношению к влиянию высокочастотной дисперсии, если их спектр целиком расположен в области частот $\omega < \omega_{bnd}$. В противном случае происходит их постепенное разрушение за счет параметрического четырехволнового взаимодействия с собственными волнами среды

с $\omega > \omega_{bnd}$.

В *разделе 1.6* путем численного моделирования показано, что произвольный лазерный импульс, распространяющийся в среде с безынерционной нелинейностью керровского типа и плазменным законом дисперсии, распадается на найденные солитонные структуры нелинейного волнового уравнения. Был предложен алгоритм для определения начальных распределений волнового поля, которые в дальнейшем распадаются на последовательность солитонов с предопределенными параметрами.

В *разделе 1.7* численно исследованы свойства солитонов с эллиптической поляризацией.

В *разделе 1.9* проведено обобщение найденных решений на случай волнового уравнения в безотражательном приближении с нелинейностью степенного типа ($\boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl} \propto \boldsymbol{\mathcal{E}}^{2m} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}$, где m – целое число)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{2m} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}\right)\right] + \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0 \ . \tag{6}$$

В *разделе 1.10* найдены и проанализированы солитонные решения для циркулярно-поляризованного излучения в рамках полного волнового уравнения в отсутствии безотражательного приближения.

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_o}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - \frac{a}{c^2}\boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{4\pi n_2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}) = 0 \ . \tag{7}$$

Во **второй главе** диссертации приведены результаты исследований структурных особенностей динамики самофокусировки лазерных импульсов с шириной спектра порядка центральной частоты. Описание процессов проведено в предположении безотражательного распространения волнового поля произвольной длительности в диспергирующей среде с безынерционной нелинейностью керровского типа. Развиты методы качественного исследования динамики самовоздействия сверхкоротких импульсов. В частности, методом моментов найдено достаточное условие коллапса в системе. Использование преобразования автомодельного типа выявило определяющую роль нелинейной дисперсии среды (зависимость групповой скорости от амплитуды поля). Самофокусировка волнового поля сопровождается опрокидыванием продольного профиля импульса, и в результате формируется особенность нового типа, в которой на фоне неограниченного роста поля происходит градиентная катастрофа. Численное исследование подтверждает, что самофокусировка сверхкоротких импульсов, как правило, сопровождается укручением продольного распределения и

формированием ударных фронтов. Показано формирование степенных спектров, характерных для градиентной катастрофы распределения поля.

В *разделе 2.1* выведено уравнение, описывающее динамику самовоздействия широкополосного линейно поляризованного волнового поля в среде с фокусирующей нелинейностью в параксиальном приближении:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z}+3\mathcal{E}^2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau}-b\frac{\partial^3\mathcal{E}}{\partial\tau^3}-\gamma\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\tau^2}\right)+a\mathcal{E}=\Delta_\perp\mathcal{E}\ . \tag{8}$$

Параметры $a>0$, $b>0$ характеризуют, соответственно, низкочастотную (плазменную) и высокочастотную дисперсию среды; $\gamma>0$ определяет диссипацию поля. Подбором параметров a и b удается добиться хорошего согласия с экспериментальными данными: например, для кварцевого стекла и благородных газов такое согласие реализуется при изменении частоты на порядок [30]. Уравнение (8) включает в себя минимальное необходимое число слагаемых для учета дисперсионных и нелинейных эффектов, достаточное для полного описания многих прозрачных сред, и может рассматриваться в качестве *фундаментального уравнения* при анализе динамики широкополосного оптического излучения в нерезонансной среде с безынерционной нелинейностью керровского типа.

В отсутствии линейной дисперсии среды ($a=b=0$) уравнение (8) можно рассматривать как неодномерное ($\Delta_\perp\neq0$) обобщение модифицированного уравнения Бюргерса. Оно относится к типу обобщенных уравнений Хохлова-Заболоцкой и описывает, например, особенности самовоздействия акустических волновых полей в средах с кубичной нелинейностью [261,262]. При $\gamma=0$, $a=0$ (8) имеет вид обобщенного уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Оно используется, например, для описания эволюции упругих волн конечной амплитуды в магнетиках [186,255]. В зависимости от закона дисперсии фононов, линейно связанных с магнонами, коэффициент b может принимать как положительные $b>0$, так и отрицательные $b<0$ значения.

В *разделе 2.2* методы качественного исследования динамики самофокусировки квазимонохроматического излучения обобщены на случай волновых пакетов длительностью несколько периодов колебаний поля. В частности, методом моментов получены достаточное условие коллапса и ряд других интегральных соотношений. Соответствующее уравнение для изменения характерного поперечного размера сгустка имеет вид:

$$\mathcal{I}\cdot\frac{d^2\langle\boldsymbol{\rho}_\perp^2\rangle}{dz^2}=8\mathcal{H}+8\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(b\phi_{\tau\tau}^2-a\phi^2\right)d\tau d\boldsymbol{r}_\perp\ , \tag{9}$$

где ϕ – потенциал поля $\mathcal{E} = \phi_\tau$, $\mathcal{I}$ – энергия в электромагнитном импульсе, $\mathcal{H}$ – гамильтониан:

$$\mathcal{I} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi_\tau^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{10a}$$

$$\mathcal{H} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\nabla_\perp \phi\right)^2 - b\phi_{\tau\tau}^2 - \frac{1}{2}\phi_\tau^4 + a\phi^2 \right] d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ . \tag{10b}$$

В отсутствие низкочастотной дисперсии ($a = 0$) уравнение такого типа получено ранее в [186]. Видно, что для среды без дисперсии ($a = b = 0$) правая часть (9) пропорциональна гамильтониану системы (10b) и, таким образом, распределения волнового поля с отрицательным гамильтонианом ($\mathcal{H} < 0$) схлопываются в поперечном направлении на конечной трассе распространения. Этот вывод остается в силе и для распределений поля, спектр которых локализован преимущественно в области аномальной дисперсии групповой скорости ($b \to 0$). В остальных случаях (9) указывает на возможность первоначального обужения поперечного распределения поля. Полученное соотношение позволяет расклассифицировать начальные распределения волнового поля по типу первоначального поведения – уменьшения характерного поперечного размера или увеличения. В дальнейшем будем рассматривать, в основном, распределения, характерный поперечный размер которых на начальном этапе эволюции системы уменьшается. Для таких распределений поля правая часть уравнения (9) меньше нуля.

Проведено обобщение линзового преобразования [266] на случай широкополосного излучения. Преобразование на случай импульсов произвольной длительности имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{F}(\zeta, \boldsymbol{\eta}, \theta)}{\rho(z)} \ , \tag{11}$$

где новые переменные

$$\zeta = \int \frac{dz}{\rho^2(z)}, \ \boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{r}}{\rho(z)}, \ \theta = \tau - \frac{\rho_z}{4\rho} r^2 \ , \tag{12}$$

а функция $\rho(z)$ описывает как изменение поперечного размера поля, так и перенос точки нелинейного фокуса $z = z_o$ на бесконечность. Такое представление решения уравнения (8) учитывает два процесса в системе: самофокусировку излучения и образование характерной «подковообразной»структуры распределения поля, определяемой переменной θ. В результате преобразования приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\zeta} + 3\mathcal{F}^2\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\theta} - \frac{\rho_{zz}\rho^3}{4}\eta^2\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\theta}\right] - \rho^2(z)\left[b\frac{\partial^4\mathcal{F}}{\partial\theta^4} - a\mathcal{F}\right] = \Delta_\perp\mathcal{F} \ . \tag{13}$$

Преобразование в «коллапсирующую»систему координат позволяет, как и в случае квазимонохроматического излучения, «отделить»процесс самофокусировки в системе и свести задачу к исследованию квазиодномерной продольной эволюции импульса. Характерный поперечный масштаб квазиволноводной структуры в новых переменных – порядка единицы. Темп самосжатия $\rho(z)$ определяет уровень ослабления дисперсионных эффектов при коллапсе $[\rho(z) \to 0]$. Таким образом, по крайней мере на начальном этапе эволюции системы, укручение продольного профиля поля становится основным эффектом. Более того, в этом режиме самовоздействия задачу в приближении нелинейной геометрической оптики удается свести к квазиодномерной.

В *разделе 2.3.1* путем численного моделирования нелинейной динамики линейно поляризованного излучения (на основе уравнения (8)) показано, что процесс схлопывания протекает без заметного изменения амплитуды. Получены аналитические выражения на изменение максимальной амплитуды и размере пучка лазерного импульса в процессе самофокусировки:

$$\mathcal{E}_{max}(z) \propto \frac{1}{\sqrt{z_o - z}\sqrt{\ln(z_o - z)/z_o}}\ , \quad \rho(z) \propto \sqrt{z_o - z}\ . \tag{14}$$

Здесь увеличение амплитуды связано с уменьшением ширины пучка ($\rho \propto \sqrt{z_o - z}$), а убывание – с диссипацией на ударных фронтах.

В *разделе 2.3.2* приведено обобщение качественного исследования для волнового поля с круговой поляризацией. Преобразование уравнения в «схлопывающуюся систему координат»позволило установить определяющую роль нелинейной дисперсии (зависимости групповой скорости волнового пакета от амплитуды) в динамике системы. Качественное исследование дает возможность получить соответствующие законы изменения амплитуды и ширины волнового пучка, как в случае линейно-поляризационного излучения:

$$\mathcal{E}_{max}(z) \propto \frac{1}{\sqrt{z_o - z}\sqrt[4]{\ln(z_o - z)/z_o}}\ , \quad \rho(z) \propto \sqrt{z_o - z}\ . \tag{15}$$

Итак, из сравнения выражений (14) и (15) следует, что в отличие от линейно поляризованного излучения в данном случае ослабление амплитуды поля волнового пакета из-за диссипации на ударном фронте значительно слабее, что приводит к формированию ударной волны огибающей. Формирование одиночного ударного фронта означает ослабление диссипации в переходной области и, следовательно, возможность не только уменьшения эффективной ширины волнового поля, но и неограниченного возрастания амплитуды поля. В результате, следует ожидать возникновения

более сложной структурной особенности поля – градиентной катастрофы в условиях коллапса. Укручение продольного профиля и образование ударных фронтов является характерной особенностью эволюции сверхкоротких импульсов. Показано, что процесс «опрокидывания»несколько опережает волновой коллапс

$$z_B \simeq z_o \left[1 - \exp\left(-2\rho_o \sqrt{\frac{|\mathcal{H}|}{\mathcal{I}}} \frac{\tau_p}{|\mathcal{W}|^2_{max}} \right) \right] , \tag{16}$$

где z_B – длина опрокидывания, ρ_o – начальный размер пучка, τ_p – длительность импульса. Для исследования тонких деталей динамики системы был проведен анализ спектра поля. В случае сред без дисперсии спектр поля при больших частотах носит степенной характер ($\sim 1/\omega$), что соответствует градиентной катастрофе.

Путем использования достаточного условия для самофокусировки волнового пакета (9) для лазерного импульса вида

$$\phi = \mathcal{A} \cdot \frac{\exp(i\omega\tau)}{\cosh\left(\dfrac{\tau}{\tau_p}\right)} \exp\left(-\frac{r^2}{2\rho_o^2} \right) . \tag{17}$$

получена аналитическая оценка на длину коллапса z_o

$$z_o = \rho_o \sqrt{\frac{\mathcal{I}}{4|\mathcal{H}|}} = \frac{\rho_o^2}{2\sqrt{3}\tau_p} \frac{\sqrt{1+3\kappa^2}}{\sqrt{\dfrac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_{cr}} - 1}} , \tag{18}$$

где $I_{cr} = \dfrac{140\pi\tau_p^3[1+3\kappa^2]}{35\kappa^4 + 14\kappa^2 + 3}$, $\kappa = \omega\tau_p$. При большом числе колебаний поля в лазерном импульсе ($\kappa \gg 1$) длина самофокусировки z_o определяется классическим выражением [266]. Однако в случае, когда в лазерном импульсе содержится несколько колебаний поля, длина самофокусировки z_o зависит также от длительности волнового пакета τ_p. Данный результат хорошо согласуется с результатами численных расчетов.

В *разделе 2.4* исследовано влияние дисперсии на процесс самофокусировки циркулярно поляризованного волнового поля. Показано, что в среде с низкочастотной дисперсией (аномальный закон дисперсии групповой скорости) эволюция системы протекает по тому же сценарию, что и в среде без дисперсии. Спектр поля при больших частотах носит степенной характер $\sim 1/\omega^{3/2}$. В среде с нормальным законом дисперсии групповой скорости ситуация напоминает процессы в случае квазимонохроматического излучения (развитие неустойчивости дробления импульса пополам и т.д.) [235]. Несмотря на образование довольно крутых фронтов, спектр волнового поля спадает гораздо более быстро (по экспоненциальному закону). Это можно объяс-

нить тем, что в приосевой области динамика самовоздействия описывается модифицированным уравнением КдВ. В этом случае возможность стабилизации укручения хорошо известна. Проведено исследование самофокусировки волнового поля вблизи точки нулевой дисперсии групповой скорости ($\varpi \simeq \omega_{bnd}$). Построен класс начальных распределений, на которых имеет место интегральная компенсация дисперсии. Показано, что такие распределения фокусируются при незначительном увеличении длительности импульса. Отличительные особенности самовоздействия импульсов с малым числом периодов поля в условиях нулевой дисперсии групповой скорости проявляются в спектральной области. В процессе эволюции поля имеет место сильное уширение спектра примерно на две октавы, а также дробление спектра вблизи точки нулевой дисперсии $\varpi \simeq \omega_{bnd}$. Такая сильная модификация спектра лазерного импульса приводит к формированию пространственно-временного распределения поля в виде гофры.

В *разделе 2.5* проведено исследование того, как повлияют на сделанные выше заключения о структурных особенностях самофокусировки сверхкоротких импульсов насыщение нелинейности и ионизация среды.

В **третьей главе** диссертации приведены результаты исследований нового метода самокомпрессии лазерных импульсов, сильно вытянутых в поперечном направлении, у которых дисперсионная длина много меньше дифракционной в процессе самофокусировки излучения в среде с аномальной дисперсией групповой скорости в условиях, когда по продельной координате задано распределение солитонного типа. Показано, что самофокусировка волнового поля приводит к адиабатическому уменьшению продольного размера волнового пакета до длительности, соизмеримой с периодом колебаний поля. Сильно вытянутое эллипсоидальное распределение волнового пакета сохраняется на всех стадиях эволюции системы, и симметризация не происходит. В дальнейшем нелинейная дисперсия приводит к формированию ударной волны. Аномальное уширение спектра излучения, спадающего по степенному закону, может быть использовано в дальнейшем для генерации аттосекундного импульса вблизи заднего фронта волнового пакета. Аналитически и численно показана возможность подавления самофокусировочной неустойчивости при учете зависимости групповой скорости от амплитуды поля.

В *разделе 3.1* предложено использовать уравнение в безразмерных переменных

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z \partial \tau} + \mathcal{E} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}) = \Delta_\perp \mathcal{E} \tag{19}$$

для адекватного описания пространственно-временной эволюции лазерных импульсов в процессе адиабатического уменьшения длительности лазерного импульса в процессе самофокусировки излучения. Здесь $\mathcal{E} \to \mathcal{E}\frac{\sqrt{a}}{\omega_o\sqrt{4\pi n_2}}$, $z \to z\frac{2\omega_o c}{a}$, $\tau = \omega_o(t - z\sqrt{\varepsilon_o}/c)$, ω_o – характерная несущая частота лазерного импульса, $r_\perp \to r_\perp \dfrac{c}{\sqrt{a}}$.

В *разделе 3.2* проведено исследование уменьшения длительности волнового пакета на основе нелинейного уравнения Шредингера с использованием вариационного метода. В качестве распределения волнового пакета бралось гауссово распределение как по продольной, так и по поперечной координатам. В случае, когда в продольном направлении задано солитонное распределение (длительность волнового пакета $a_{||(s)}$ не меняется), получено уравнение на изменение поперечного размера волнового пучка $a_\perp$

$$\frac{d^2 a_\perp}{dz^2} = \frac{4}{a_\perp^3} - \frac{\mathcal{I}_q^2}{8\pi^3 a_\perp^5}\ , \quad a_{||(s)} = \frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2}a_\perp^2}{\mathcal{I}_q}\ . \tag{20}$$

Как следует из выражения (20), длительность пакета $a_{||(s)}$ пропорциональна квадрату размера пучка ($a_{||(s)} \propto a_\perp^2$). Здесь $\mathcal{I}_q$ – энергия в лазерном импульсе. Для вытянутых распределений волнового пакета ($a_{||(s)} \ll a_\perp$) условие для самофокусировки автоматически выполнено (правая часть уравнения (20) должна быть меньше нуля), поскольку второе слагаемое в уравнении (20), отвечающее за нелинейность среды, превышает первое слагаемое, ответственное за дифракцию пучка.

Приближенное решение уравнения (20) имеет следующий вид:

$$a_\perp(z) \simeq a_{\perp o}\left(1 - \frac{3\mathcal{I}_q z}{4\pi^{3/2}a_{\perp o}^3}\right)^{1/3}\ , \tag{21a}$$

$$a_{||(s)}(z) \simeq a_{||(s)_o}\left(1 - \frac{3\mathcal{I}_q z}{4\pi^{3/2}a_{\perp o}^3}\right)^{2/3}\ , \tag{21b}$$

где $a_{\perp o}$ – начальный размер пучка, $a_{||(s)_o}$ – начальная длительность солитона. Важно отметить, что, как следует из выражений (21a), (21b), продольный масштаб солитона $a_{||(s)}$ всегда остается меньше поперечного размера пучка $a_\perp$ ($a_\perp \gg a_{||(s)}$), т. е. анизотропность в распределении волнового пакета сохраняется. Длина среды, на которой длительность волнового пакета обратится в нуль, имеет следующий вид:

$$z_{comp} = \frac{a_{\perp o}a_{||(s)_o}}{3\sqrt{2}}\ . \tag{22}$$

Как видно из выражения (22), длина нелинейной среды z_{comp}, на которой длительность солитона обратится в нуль, возрастает пропорционально увеличению начальной длительности пакета $a_{||(s)_o}$ или увеличению начального размера пучка $a_{\perp o}$.

Как показал качественный анализ на основе нелинейного уравнения Шредингера, распределение «солитонного» типа будет испытывать адиабатическое сжатие в продольном направлении вплоть до нулевой длительности в процессе самофокусировки пучка, в связи с чем возникает резонный вопрос о предельном сжатии лазерного импульса.

В *разделе 3.3* проведен качественный анализ компрессии лазерного импульса на основе волнового уравнения (19). Было использовано обобщенное линзовое преобразование для получения системы уравнений, описывающей динамику лазерного импульса в приосевой области $\mathcal{E} \simeq \frac{\mathcal{A}}{\rho}[1 - \frac{\eta^2}{2}]$ и изменение поперечного размера пучка

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial\zeta\partial\theta} + \rho^2\mathcal{A} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}) \simeq 0 \ , \tag{23a}$$

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} \simeq -2\frac{\langle|\mathcal{A}|^4\rangle}{\rho^3} \ . \tag{23b}$$

При получении уравнения (23b) проведено усреднение $|\mathcal{A}|^4$ по форме импульса

$$\langle|\mathcal{A}|^4\rangle = \frac{1}{\mathcal{I}_{full}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\mathcal{A}|^4 d\theta \ , \tag{24}$$

так как характерный масштаб поля $\rho(z)$ является, по предположению, функцией только от эволюционной переменной z. Здесь $\mathcal{I}_{full}$ – энергия в импульсе. Второе слагаемое в уравнении (23a) описывает ослабление роли аномальной дисперсии среды по мере уменьшения поперечного размера пучка $\rho(z)$. В новых переменных функция $\rho(\zeta)$ плавно меняется на дисперсионной и нелинейной длинах. Поэтому можно предположить, что параметры солитона (4) будут плавно изменяться в процессе самофокусировки лазерного импульса. Как видно, уравнение (23b) для поперечного размера пучка ρ с точностью до коэффициента совпадает с уравнением (20). Если на входе был задан шредингеровский солитон [с большой длительностью ($\delta \ll 1$) и, соответственно, без частотной модуляции $\varphi(\theta) \simeq 0$], то по мере уменьшения длительности в импульсе появится сильная частотная модуляция $\varphi(\theta) \simeq \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\theta}|\mathcal{A}(\theta')|^2 d\theta'$, которая отразится, в первую очередь, в спектре волнового пакета. Поскольку в уравнении (23a) важной особенностью рассматриваемых волновых солитонов является полуограниченный спектр их допустимых решений, т. е. наличие граничного решения $0 \leq \delta \leq \delta_{cr} = \sqrt{\frac{1}{8}}$, то максимальная степень компрессии будет определяться предельным солитоном, длительность которого соизмерима с периодом поля. При

дальнейшем уменьшении поперечного размера пучка это приводит к формированию ударной волны, так как в данном случае аномальная дисперсия среды уже не сможет скомпенсировать нелинейность. Этим заключительный режим самокомпрессии лазерного импульса, описываемый системой уравнений (23), отличается от режима, который мы рассматривали на основе нелинейного уравнения Шредингера.

В *разделе 3.4* проведено исследование развития самофокусирвочной неустойчивости для лазерных импульсов с малым числом колебаний поля. Вначале был проведен анализ того, как протекает самофокусировочная неустойчивость в рамках НУШ с учетом дополнительного слагаемого, ответственного за зависимость групповой скорости пакета от амплитуды поля

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}+\Delta_{\perp}\Psi+|\Psi|^2\Psi-2i|\Psi|^2\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}=0\ , \tag{25}$$

где Ψ – медленно меняющаяся амплитуда волнового пакета. Здесь второе слагаемое описывает аномальную дисперсию среды, третье слагаемое – дифракцию пучка, четвертое слагаемое – самовоздействие в среде с кубичной нелинейностью, пятое слагаемое ответственно за укручение огибающей импульса. Для анализа устойчивости плоской волны относительно возмущений искали решение в виде

$$\Psi(z,\tau,r_{\perp})=[u(z)+v(z,\tau,r_{\perp})]\exp[i(u_o^2z+2u_o^2\tau)]\ ,\quad v\ll u\ , \tag{26}$$

где u_o – амплитуда падающей волны. Далее было получено линеаризованное уравнение для функции v

$$i\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2}+\Delta_{\perp}v+u_o^2(v+v^{\star})+2iu_o^2\frac{\partial v}{\partial\tau}=0\ . \tag{27}$$

Представляя решение данного уравнения, искали в виде $v = a + ib$, где $a, b \propto \exp(\Gamma z+i\Omega\tau+i\kappa_{\perp}r_{\perp})$, можно получить следующее дисперсионное соотношение:

$$\Gamma=-2iu_o^2\Omega\pm\sqrt{(\Omega^2+\kappa_{\perp}^2)(2u_o^2-\Omega^2-\kappa_{\perp}^2)}\ . \tag{28}$$

Первое слагаемое в выражении (28) описывает снос возмущений со скоростью $2u_o^2$. Таким образом, однородное решение остается неустойчивым. Однако, тип неустойчивости меняется – она становится конвективной. Следовательно, для лазерных импульсов с длительностью меньше некоторого значения $\tau_p < \tau_{cr}$ филаментационная неустойчивость должна быть подавлена.

Была получена оценка на длительность волнового пакета τ_{cr}, когда растущие возмущения стабилизируются в результате выноса их на заднюю часть лазерного

импульса, так как в задней части пакета будет отсутствовать возможность их дальнейшего усиления. Для оценки длительности импульса τ_{cr} в качестве характерной трассы была рассмотрена длина, на которой возмущения в отсутствии сноса должны были бы усилиться в e^{15} раз, т. е. $z_\star = \frac{15}{\Gamma_{max}}$. Волновой пакет с длительностью $\tau_p < \tau_{cr} = 60$ должен быть устойчив относительно самофокусировочной неустойчивости. В размерных единицах это соответствует десяти периодам поля. Отметим, что неустойчивость по продольной координате будет автоматически отсутствовать, поскольку по ней мы задаем солитонное решение. Результаты численного исследования, выполненного на основе волнового уравнения (19) для (3D+1) случая, подтверждают сделанный вывод об устойчивости волнового пакета с небольшим числом колебаний поля относительно филаментационной неустойчивости.

В *разделе 3.5* приведены результаты численных расчетов на основе волнового уравнения (19) для лазерных импульсов с начальной длительностью менее десяти колебаний поля для аксиально-симметричных волновых пучков. Было показано, что в случае, когда на вход нелинейной среды в продольном направлении задано солитонное решение (4), длительность волнового пакета адиабатически уменьшается в процессе самофокусировки излучения. Получено хорошее согласие результатов численного моделирования с проведенным выше качественным анализом рассматриваемой системы. В случае, когда в начальном импульсе содержится несколько квазисолитонных структур, начальное продольное распределение волнового пакета будет разбиваться на последовательность солитонов, которые в дальнейшем (благодаря процессу самофокусировки) будут по отдельности монотонно самокомпрессироваться и разбегаться в продольном направлении. Как показал детальный анализ, для самокомпрессии лазерных импульсов предпочтительно задавать на вход нелинейной среды распределения волнового поля, в которых содержится не более двух квазисолитонных структур.

В **четвертой главе** диссертации показано, что в среде с независимым контролем керровской и ионизационной нелинейностей (например, таких как смесь двух газов с заметно отличающимися потенциалами ионизации) может иметь место экстремальная самокомпрессия лазерного импульса. Газ с более высокими потенциалом и большей плотностью обеспечивает керровскую нелинейность и приводит в условиях волноводной дисперсии к образованию солитона, в то время как второй сорт газа с меньшим потенциалом ионизации приводит к ионизационному повышению частоты в коротковолновую часть, и соответственно, к уменьшению длительности солитона.

В таком случае, режим самокомпрессии солитона включает в себя две качественно отличающиеся друг от друга последовательные стадии. На первой солитонный импульс сжимается обычным образом, когда процесс адиабатически развивается, согласуясь с солитонными соотношениями. При этом экстремальная компрессия имеет место на втором этапе, когда солитон с малым числом колебаний поля становится по-настоящему одноперiодным со сверхшироким спектром. Продемонстрировано, что на данной стадии процесс дальнейшей самокомпрессии значительно ускоряется и сопровождается повышением сверхширокого спектра, сохраняя одноперiодичность солитона на протяжении всего времени. Предложенный метод позволяет получить лазерные импульсы с длительностью в несколько сотен аттосекунд в ультрафиолетовой области с эффективностью в десятки процентов. Проведены исследования по оптимизации самокомпрессии лазерных импульсов, основанные на концепции солитонов высокого порядка.

Отметим, что в работе [222] в рамках нелинейного уравнения Клейна-Гордона, содержащего малые инерционные (нелокальные) поправки, развито самосогласованное описание одномерных солитоноподобных волновых сигналов в плавно неоднородных нестационарных нелинейных средах. Данное описание сводится к решению замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений для скорости квазисолитона и интегральных характеристик волнового поля. Показана возможность существенного повышения частоты на примере распространения в исходно однородной и стационарной плазме релятивистских квазисолитонов при наличии в среде слабой дополнительной ионизации.

В *разделе 4.1* предложена базовая система уравнений для описания одномерной нелинейной динамики лазерного импульса в безотражательном приближении, которое замыкается балансным уравнением с туннельной ионизацией как главным механизмом формирования плазмы:

$$2c\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial z\partial t}+\omega_D^2\mathcal{U}+\omega_p^2\mathcal{U}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}(|\mathcal{U}|^2\mathcal{U})=0 \tag{29a}$$

$$\frac{\partial\omega_p^2}{\partial t}=(\omega_n^2-\omega_p^2)W(|\mathcal{U}|)\ . \tag{29b}$$

Здесь $\mathcal{U}=\mathcal{E}_x+i\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_x$ и $\mathcal{E}_y$ – соответсвующие компоненты электрического поля в единицах $\sqrt{2\pi\chi^{(3)}\mathcal{N}_a}$, $t-\frac{z\sqrt{\varepsilon_o}}{c}\to t$, $W(|\mathcal{U}|)$ – вероятность туннельной ионизации [260]. Отметим, что уравнения (29) описывают случай аномальной дисперсии групповых скоростей и подобны тем, что наблюдаются в ситуации с фотонно-кристаллическими

волокнами с полой сердцевиной, заполненной газами, рассмотренной в работе [44]. Мы пренебрегли лишь квантовым поглощением, которое связано с атомным потенциалом, необходимым для ионизации атомов, так как уравнения (29) содержат в себе поглощение, соответствующее тому факту, что новорождённые электроны приобретают осцилляторную энергию, которая в туннельном режиме для циркулярной поляризации превышает потенциал ионизации [75].

В *разделе 4.2* приведены результаты численных расчетов, демонстрирующих возможность самокомпрессии лазерного импульса, когда на вход нелинейной среды задано солитонное решение (4). Показано, что длительность волнового пакета уменьшилась с 10 фс до 250 ас с одновременным смещением спектра в ультрафиолетовую область. Были проведены дополнительные расчеты подтверждающие, что имеет место именно адиабатическое уменьшение длительности солитона (4). Такую сильную компрессии лазерного импульса не удается достичь, используя газ с одним сортом атомов, так как по мере уменьшения длительности солитона увеличивается амплитуда, что ведет к ионизации газа и, соответственно, к ослаблению керровской нелинейности.

В *разделе 4.3* приведены результаты численных исследований, демонстрирующие, что режим самокомпрессии лазерного импульса является устойчивым и слабо зависит от начального профиля и частотной модуляции в волновом пакете. Отличия начального распределения от солитонных решений (4) приводят лишь к некоторому увеличению длины компрессии.

В *разделе 4.4* для проведения качественного анализа самокомпрессии солитонноподобных лазерных импульсов получена упрощенная система уравнений для огибающей волнового пакета $\mathcal{U}(z,\tau) = \mathcal{A}(z,\tau)\exp[i\varphi(z,\tau)]$

$$2ic\left[\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\mathcal{A}}{2\omega}\right] + \frac{\omega_D^2}{\omega^3}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\tau^2} + \omega|\mathcal{A}|^2\mathcal{A} - 2i\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\left(|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}\right) = 0\ , \quad \omega = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\ , \tag{30a}$$

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial\omega_p^2}{\partial\tau}\ , \tag{30b}$$

$$\frac{\partial\omega_p^2}{\partial\tau} = (\omega_n^2 - \omega_p^2)W(|\mathcal{A}|)\ , \tag{30c}$$

которая позволяет исследовать динамику волнового пакета в случае, когда несущая частота лазерного импульса может существенно меняться в процессе ионизации газа с меньшим потенциалом ионизации. В рамках данной приближенной системы уравнений в случае аппроксимации вероятности ионизации степенной формой $W(|\mathcal{A}|) = \mu_m|\mathcal{A}|^{2m}$ при $m > 1$ показано, что длительность волнового пакета обратит-

ся в нуль на конечной длине z_c нелинейной среды

$$z_c = \frac{2c}{m\omega_n^2 \mu_m \alpha_m \mathcal{A}_o^{2m}} \ , \tag{31}$$

где $\alpha_m = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^{2(m+1)} x}$ есть число.

Показано, что длительность солитонов нелинейного уравнения Шредингера (при $\varepsilon = 0$ в уравнении (30a)) уменьшается с увеличением несущей частоты в процессе ионизации газа по закону

$$\tau_p(\omega) \propto \frac{1}{\omega^3} \ , \tag{32}$$

в то время как для солитонов DNLS (при $\varepsilon = 1$ в уравнении (30a)), существующих в рамках нелинейного уравнения Шредингера с учетом слагаемого, ответственного за укручение продольного профиля, длительность уменьшается по закону

$$\tau_p(\omega) \propto \frac{1}{\omega^{3.5}} \ . \tag{33}$$

Продемонстрировано хорошее согласие результатов численного моделирования с проведенным качественным анализом.

В *разделе 4.5* проведены исследования по оптимизации самокомпрессии лазерного импульса, основанные на концепции солитонов высокого порядка. Используя данный подход, удается компрессировать лазерные импульсы с большей начальной длительностью. Показано, что длительность волнового пакета уменьшилась с 25 фс до 250 ас.

В **пятой главе** диссертации приведены результаты по самовоздействию мощного лазерного импульса в диэлектрическом капилляре, заполненном газом, в случае, когда основным механизмом нелинейности является полевая ионизация газа. Продемонстрировано, что при сравнительно высоких давлениях газа в процессе его ионизации имеет место возбуждение довольно узкого нелинейного плазменного канала в диэлектрическом капилляре, в котором могут распространяться собственные утекающие моды. Благодаря дисперсии данного канала и частотной модуляции в волновом пакете, связанной с ионизационной нелинейностью, имеет место самокомпрессия лазерного импульса вплоть до одного колебания поля.

В *разделе 5.1* представлена структура «холодных» мод диэлектрического капилляра. В данной главе диссертации будет исследоваться случай, когда динамика волнового пакета в диэлектрическом капилляре является принципиально неодномерной.

Поэтому ключевым моментом будут граничные условия на стенке капилляра, учитывающего эффект утечки излучения излучения.

В *разделе 5.2* приведена система уравнений, описывающая пространственно-временную эволюцию поля лазерного импульса в диэлектрическом капилляре. Система уравнений имеет вид:

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z \partial \tau} + \Delta_\perp \mathcal{E} = \beta \mathcal{N} \mathcal{E} \ , \qquad \beta = \left(\frac{\omega_{po} a}{c}\right)^2 \ , \tag{34a}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\right|_{r=1} = -\alpha \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} \ , \qquad \alpha = 4\pi \frac{a}{\lambda} \frac{\sqrt{\varepsilon_w - 1}}{\varepsilon_w + 1} \ , \tag{34b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau} = (1 - \mathcal{N}) \cdot W(|\mathcal{E}|) \ , \tag{34c}$$

$$W(|\mathcal{E}|) = 4 \frac{\omega_a}{\omega_o} \cdot \frac{1}{|\mathcal{E}|} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{1}{|\mathcal{E}|}\right) \ . \tag{34d}$$

Здесь введены следующие новые (безразмерные) переменные:

$$z \to z \cdot 2 k_o a^2 = z \cdot 4 z_R \ , \qquad r \to r \cdot a \ , \tag{35}$$
$$\tau \to \frac{\tau}{\omega_o} \ , \qquad \mathcal{E} \to \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_a \ ,$$

где ω_o – центральная частота широкополосного излучения, $\mathcal{E}_a$ – атомное поле, $\frac{1}{\omega_a}$ – атомная единица времени, $z_R = \frac{1}{2} k_o a^2$ – рэлеевская длина, a – радиус капилляра. Концентрация плазмы нормирована на концентрацию нейтрального газа $\mathcal{N}_o$. Здесь рассматривается полевой механизм ионизации газа.

В *разделе 5.3* проведен качественный анализ модификации спектра ионизирующего лазерного импульса с помощью метода моментов. Получена оценка на одномодовый режим распространения излучения в капилляре. Условие одномодового распространения при этом определяется малостью влияния рефракции излучения на плазме, образующейся в результате ионизации газа, на пространственную структуру поля, и может быть представлено в виде:

$$\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}_{cr}} < \frac{\mathcal{N}^\star}{\mathcal{N}_{cr}} = \frac{u_{12}^2 - u_{11}^2}{(k_o a)^2} \ , \tag{36}$$

где $\mathcal{N}_{cr}$ – критическая плотность, определяемая условием $\omega_{po} = \omega_o$, $u_{11} = 2.405$ и $u_{12} = 5.52$ – первый и второй нули функции Бесселя нулевого порядка. Так, для длины волны $\lambda_o = 0.8$ мкм и диаметра капилляра 150 мкм оценка концентрации плазмы, при которой нарушается одномодовый режим распространения излучения в капилляре, дает $\mathcal{N} < 1.2 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$, что при полной однократной ионизации соответствует давлению нейтрального газа 3.5 Торр.

В *разделе 5.4* приведены результаты численного моделирования динамики самовоздействия лазерного импульса в диэлектрическом капилляре при $\mathcal{N} < \mathcal{N}^\star$. Продемонстрировано, что преобладает квазиодномодовый режим распространения излучения. Проведено исследование структуры спектра выходного излучения в зависимости от начальной энергии в импульсе и давления.

В *разделе 5.5* продемонстрирована при $\mathcal{N} > \mathcal{N}^\star$ возможность возбуждения в диэлектрическом капилляре нелинейного плазменного канала, в котором могут распространяться собственные утекающие моды. Существование такого канала связано с резкой зависимостью вероятности ионизации газа от интенсивности поля в лазерном импульсе, что приводит к образованию резкого (на масштабе длины волны) скачка показателя преломления. Проведено исследование энергетической эффективности прохождения мощного ионизирующего лазерного импульса в волноводе в условиях возбуждения плазменного канала и определены зависимости ширины и сдвига несущей частоты спектра волнового пакета в зависимости от давления газа и начальной амплитуды в лазерном импульсе.

В *разделе 5.6* проведено детальное исследование самосжатия ионизирующего лазерного импульса в диэлектрическом волновде. Продемонстрирована временная самокомпрессия волнового пакета вплоть до одного оптического периода (2.6 фс). Компрессия волнового пакета связана с формированием нелинейного плазменного волновода, аномальная дисперсия которого позволяет сгруппировать коротковолновые спектральные компоненты, появляющиеся в процессе ионизации газа. Продемонстрирована возможность масштабирования данной схемы к джоулеву уровню энергии.

В *разделе 5.7* приведены экспериментальные результаты по ионизационно-индуцированной самокомпрессии лазерного импульса в диэлектрическом волноводе. Продемонстрировано хорошее согласие результата эксперимента и численных расчетов.

В **шестой главе** диссертации обсуждаются два пригодных метода укорочения интенсивных лазерных импульсов мульти-петаваттного уровня мощности в плазме, для которой не возникает проблем электрической прочности.

В *разделе 6.1.1* сформулирована базовая система уравнений для описания самовоздействия трехмерного релятивистски сильного лазерного импульса с круговой поляризацией в плазме в условиях возбуждения кильватерной волны преимущественно только в продольном направлении в случае, когда период ее превышает длительность волнового пакета. Это легко выполняется для волновых пакетов с поперечным

размером, значительно превышающим длину плазменной волны. Получено условие применимости этого подхода. Данная система уравнений в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z \partial \tau} + \frac{\beta a}{1+\phi} - \Delta_{\perp} a = 0 \tag{37a}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} = \frac{\omega_{pl}^2}{2\omega_o^2}\left[\frac{1+|a|^2}{(1+\phi)^2} - 1\right] , \tag{37b}$$

где ω_{pl} – плазменная частота, $\tau = \omega_o\left(t - \frac{z}{c}\right)$ – время в сопровождающейся системе координат, c – скорость света, $z = \tilde{z}\frac{2\omega_o r_o^2}{c}$, $r_{\perp} = \tilde{r}_{\perp} r_o$, $\beta = \left(\frac{\omega_{pl} r_o}{c}\right)^2$, ω_o – несущая частота лазерного излучения, r_o – начальный размер лазерного пучка, $a = \frac{e\mathcal{A}}{mc^2}$ – безразмерный векторный потенциал, $\phi = \frac{e\Phi}{mc^2}$ – безразмерный скалярный потенциал. Рассматриваемая система уравнений является обобщением на случай широкополосного излучения уравнений, которые обычно используются для исследования процессов в случае квазимонохроматических полей [39, 40, 175, 204, 206].

В *разделе 6.1.2* получена базовая система уравнений для описания усиления и укорочения широкополосных лазерных импульсов в процессе обратного рамановского рассеяния в плазме.

В *разделе 6.2* приведены экспериментальные результаты по усилению фемтосекундных лазерных импульсов на малом уровне энергии при вынужденном рамановском рассеянии в случае встречного распространения усиливаемого фемтосекундного импульса и частотно-модулированного широкополосного импульса накачки с той же несущей частотой в диэлектрических капиллярах, заполненных газовой плазмой. Показано хорошее согласие экспериментальных результатов с теоретическими расчетами.

В *разделе 6.3* проведено аналитическое и численное исследование самофокусировочной неустойчивости релятивистски сильного лазерного импульса в плазме в условиях возбуждения плазменной волны с периодом, превышающим длительность волнового пакета. Показано, что данная неустойчивость подавлена из-за инерции нелинейного отклика.

В *разделе 6.4* проведено аналитическое и численное исследование модификации спектра релятивистски сильного лазерного импульса в условиях нестационарной самофокусировки. Это исследование важно, поскольку уширение спектра волнового пакета является необходимым условием для укорочения длительности импульса. Как показал анализ, спектр волнового пакета уширяется более чем на порядок, и несу-

щая частота волнового пакета может быть смещена в длинноволновую область на несколько октав. Такое значительное смещение спектра лазерного импульса связано с процессом нестационарной самофокусировки излучения, которая, с одной стороны, обеспечивает подавление дифракционной расходимости пучка и, соответственно, к существенному увеличению нелинейного взаимодействия со средой, а с другой стороны – к смещению спектра волнового пакета в длинноволновую часть из-за эффекта «отдачи», связанного с возбуждением кильватерной плазменной волны.

В *разделе 6.5* проведен теоретический анализ (на основе аналитических и численных исследований) нового метода самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов вплоть до одного колебания поля в процессе нестационарной самофокусировки в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны с периодом, превышающим длительность лазерного импульса. Самосжатие волнового пакета связано с тем, что в условиях возбуждения кильватерной волны в задней части волнового пакета происходит вытеснение электронов, а в передней части импульса, наоборот, концентрация электронов увеличивается. Следовательно, задняя часть импульса догоняет переднюю часть, так как групповая скорость волнового пакета в плазме увеличивается с уменьшением концентрации электронов. Получена зависимость длины среды z_c, на которой длительность волнового пакета достигает минимального значения, от параметров лазерного импульса и концентрации плазмы:

$$z_c \simeq \frac{\omega_o^2}{\omega_p^2} \frac{2\tau_o^3}{\pi\alpha\mu[\exp(2\alpha\tau_o) - 1]} \ , \tag{38}$$

где

$$\mu = \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{dv}{d\zeta} \right)^2 \zeta^2 + 4v^2 + 4v \left(\frac{dv}{d\zeta} \right) \right] d\zeta \ , \tag{39}$$

τ_o – начальная длительность импульса. Как следует из выражения (38) благодаря процессу самофокусировки волнового пакета длина компрессии z_c экспоненциально уменьшается при существенном превышении мощности излучения над критическим значением ($\alpha\tau_o \gg 1$).

В *разделе 6.6* проведено теоретическое исследование шланговой неустойчивости распространяющихся в плазме релятивистски сильных лазерных импульсов с длительностью менее периода кильватерной плазменной волны. Получено аналитическое выражение для смещения центра масс волнового пучка и проанализировано влияние этой неустойчивости на процесс модификации спектра лазерного излучения для широкой области начальных параметров. Показано, что развитие неустой-

чивости характеризуется степенной (не экспоненциальной) зависимостью от трассы распространения и не приводит к ухудшению режима самокомпрессии лазерных импульсов.

В *разделе 6.7* приведены экспериментальные результаты по самокомпрессии релятивистских лазерных импульсов в газовой струе в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны с периодом, соизмеримым с начальной длительностью лазерного импульса. Продемонстрировано укорочение лазерного импульса с мощностью 100 ТВт с 30 фс до 10 фс в газовой струе с длиной 2 мм и концентрацией электронов 1.1×10^{19} см$^{-3}$. Получено хорошее согласие результатов численных расчетов с экспериментальными данными.

В *разделе 6.8* приведены исследования по оптимизации укорочения длительности лазерного импульса. Показано, что для мощных лазерных импульсов подавляется процесс самофокусировки из-за насыщения нелинейности (реализуется квазиодномерная ситуация), что приводит к уменьшению темпа укорочения длительности волнового пакета. Длина компрессии z_c (на которой длительность лазерного импульса достигает минимального значения) волнового пакета степенным образом зависит от амплитуды поля в лазерном импульсе a_o:

$$z_c \propto a_o^{-0.2} \ . \tag{40}$$

В *разделе 6.9* проведено аналитическое и численное исследование самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны в рамках одномерной задачи ($\Delta_\perp \equiv 0$). Получено аналитическое выражение для характерной длины компрессии лазерного импульса

$$z_c^{1D} \propto \frac{\lambda}{a_o} \left(\frac{\mathcal{N}_{cr}}{\mathcal{N}_e} \right)^{3/2} \ . \tag{41}$$

Данная длина обратно пропорциональна начальной амплитуде лазерного импульса a_o, и с увеличением концентрации плазмы $\mathcal{N}_e$ она уменьшается по степенному закону с показателем степени $3/2$. Продемонстрировано хорошее согласие зависимости длины компрессии волнового пакета от амплитуды поля и концентрации плазмы с данными численного расчета.

В **Заключении** изложены основные результаты проведенных в диссертации исследований.

Глава 1

Солитоны с малым числом колебаний поля в среде с керровской нелинейностью

Последние достижения в лазерной науке привели к развитию новой области «экстремального света», где крайне короткие лазерные импульсы, включающие лишь несколько оптических периодов, взаимодействуют с веществом [22, 137, 189]. Ожидается, что подобные волновые пакеты с малым числом колебаний поля могут пролить свет на нелинейную физику в разных областях [23, 64, 130]. Другая важная область, где импульсы с малым числом колебаний имеют место быть – терагерцовое излучение [54, 76, 180, 225].

Один из самых поразительных эффектов в нелинейной физике – это существование уединенных волн, в частности, в экстремальной нелинейной оптики – солитонов с малым числом колебаний, которые являются следствием результата конкуренции эффектов дисперсии и нелинейности. Такие локализованные волновые пакеты известны как оптические солитоны в общепринятой нелинейной оптике [243], играя исключительно важную роль в различных разделах физики [60]. Большой интерес, проявляемый к солитонным решениям нелинейных волновых уравнений как к базовым элементарным структурам связан с тем, что они играют фундаментальную роль в нелинейной физике [237]. В настоящее время успехи, достигнутые в области лазерной техники, позволяют экспериментально исследовать процессы нелинейного взаимодействия с веществом электромагнитных импульсов длительностью в несколько периодов оптических колебаний [24, 35, 142]. Одним из важных и интересных вопро-

сов в этой связи является возможность солитонных режимов распространения таких предельно коротких импульсов поля в различных нелинейных средах [245, 256]. Теоретический анализ физических явлений, возникающих в процессе данного взаимодействия, затруднен тем обстоятельством, что в условиях предельно малых длительностей неприменим хорошо развитый аппарат нелинейной оптики, использующий приближение медленно меняющейся амплитуды волнового поля.

Следует отметить, что к одному из важных этапов в развитии теории нелинейных волновых процессов вообще и в теории нелинейного распространения волновых пакетов в частности следует, несомненно, отнести введение для описания эволюции медленной огибающей волнового поля нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), учитывающего наряду с дисперсионными эффектами также и нелинейность среды керровского типа [122, 243, 265]. Универсальный характер этого уравнения и необычайно широкая сфера его применений сделали его по сути одним из краеугольных в нелинейной физике. Его замечательной особенностью в одномерном случае является наличие уединенных решений – солитонов Шредингера, устойчивых элементарных структур, играющих фундаментальную роль в нелинейной динамике волновых процессов [237]. Закономерен вопрос о характере эволюции волновых полей, локализованных в малых пространственно-временных областях, когда используемых для НУШ приближений оказывается недостаточно для описания соответствующей динамики поля. Очевидно, что первый и естественный шаг на этом пути состоит в обобщении НУШ, т.е. оставаясь в рамках медленно меняющейся амплитуды, дополнять исходное уравнение новыми слагаемыми, ответственными за дисперсионные и нелинейные эффекты более высоких порядков. Следует отметить, что такой путь носит достаточно универсальных характер и весьма примечательным и интересным на нем также является поиск солитонных решений полученных обобщенных уравнений Шредингера (см., например, [230, 243]). Однако важный шаг мог бы состоять также и в отказе от чрезвычайно плодотворного приближения медленности амплитуды на масштабах быстрых осцилляций поля. По-видимому, на этом пути не существует «универсального обобщения НУШ до нелинейного волнового уравнения для полного поля», в котором могли бы существовать волновые солитонные структуры подобные шредингеровским солитонам, и такое рассмотрение может быть проведено лишь на примере конкретной задачи.

В последние десятилетие получил широкое распространение новый подход для детального анализа нелинейной волновой задачи. В рамках данного подхода динамика

поля описывается как целое без масштабного разделения на медленную огибающую и высокочастотное заполнение в так называемом безотражательном приближении. В этом приближении предполагается изменение распределений полей плавными на масштабах порядка длины волны [245], т.е. пренебрегают эффектами отражения. Отметим, что вопросам самовоздействия предельно коротких импульсов (ПКИ) в нерезонансных средах к настоящему времени посвящено довольно заметное число работ, в которых проведены, главным образом, численные исследования динамики распространения одномерных сигналов [91, 139, 246, 256]. В частности, эти исследования показали, что наряду со сложной динамикой поля возможно, при определенных условиях, возбуждение волновых структур бризерного типа, имеющих солитоноподобную форму для огибающей и периодическую динамику для внутренней структуры импульса.

Отметим также практический аспект интереса к этим задачам, связанный с возможностью эффективного укорочения оптических импульсов до весьма малых длительностей, сопоставимых с периодом оптических колебаний. Техника получения лазерного излучения ультракороткой длительности, используемая на сегодняшний день, основана на эффекте генерации спектрального континуума и создания нелинейной частотной модуляции в лазерном излучении благодаря его самовоздействию в плотных газах в диэлектрических капиллярах. Для компенсации этой частотной модуляции и временной компрессии излучение с выхода капилляра поступает в компрессор, состоящий из линейных дисперсионных элементов [142]. Достигаемая с помощью такой техники компрессии длительность в два периода оптических колебаний, по сути, является предельной в силу ограниченности спектральной полосы оптических элементов компрессора. Дальнейшее укорочение длительности до одного оптического периода на этом пути невозможно в силу отсутствия оптических элементов, обладающих достаточной спектральной шириной. В тоже время, в работе [139] указывалось, что при соответствующем подборе параметров среды и лазерного импульса эффект нелинейной самомодуляции может приводить не только к генерации спектрального континуума, но и к временному самосжатию до одного оптического периода.

В данной главе диссертации будут представлены результаты исследований нелинейной динамики лазерных импульсов с малым числом колебаний поля с произвольной поляризацией в прозрачной изотропной среде с безынерционной нелинейностью керровского типа. Приближение безынерционной нелинейности является оправдан-

ным в силу того, что при малых длительностях лазерного излучения единственным физическим механизмом, обеспечивающим нелинейность показателя преломления на этих временах, является нелинейность поляризационного отклика электронных оболочек. Характерное время задержки электронного отклика составляет доли фемтосекунды и мало по сравнению с длительностью одного периода колебаний в ближнем инфракрасном и оптическом диапазонах. Будем полагать среду нерезонансной, допускающей введение низкочастотной и высокочастотной дисперсии феноменологическим образом.

Структура данной главы следующая. В разделе 1.1 получено однонаправленное одномерное волновое уравнение, описывающее эволюцию лазерного импульса, полученное с помощью стандартной методики восстановления эволюционного уравнения из дисперсионного соотношения, определяющегося зависимостью линейной диэлектрической проницаемости от частоты света. Данная зависимость в широкой области частот в области прозрачности может быть получена из общих соотношений теории дисперсии среды, например, воспользовавшись соотношением Крамерса-Кронинга. В разделе 1.2 аналитически показано существование нового класса устойчивых солитоноподобных структур волнового поля с циркулярной поляризацией. Привлекательной особенностью этих решений является их преемственная связь с солитонными решениями шредингеровского типа, позволяющая проследить переход от шредингеровских солитонов к видеоимпульсам, включающим менее периода оптических колебаний. Важной особенностью рассматриваемых волновых солитонов является полуограниченный спектр их допустимых решений, т. е. наличие граничного решения, соответствующего предельному солитону с минимально возможной длительностью импульса и, соответственно, с максимально возможной амплитудой. В разделе 1.3 продемонстрирована возможность формирования найденных решений и показана устойчивость их относительно малых возмущений. В разделах 1.4, 1.8 представлены результаты численных исследований показывающие, что режим парного взаимодействия волновых солитонов с циркулярной поляризацией зависит от взаимной поляризации волновых пакетов и несущих частот. В отличие от взаимодействия шредингеровских солитонов, здесь возможно как изменение поляризационных, так и спектральных характеристик при сохранении солитоноподобной структуры огибающей. В разделе 1.5 проведены результаты численных исследований динамики солитонов с учетом высокочастотной дисперсии среды. В разделе 1.6 предложена стратегия по самокомпрессии лазерного импульса до одного периода, основанная на солитонах

с небольшим числом колебаний поля как на фундаментальных структурах. Путем численного моделирования динамики циркулярно-поляризованного волнового поля в керровской среде показано, что короткий оптический импульс распадается на солитоны с малым числом колебаний. Предложен алгоритм для генерации солитонов с предельно короткой длительностью. В разделе 1.7 численно исследованы свойства солитонов с эллиптической поляризацией. В разделе 1.10 аналитически найдены солитонные решения в рамках полного волнового уравнения в отсутствии однонаправленного приближения.

1.1 Редуцированное волновое уравнение

Волновое уравнение в изотропной среде для напряженности электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ имеет следующий вид

$$\Delta\boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{-\infty}^{t}\varepsilon(t-t')\boldsymbol{\mathcal{E}}(t')dt' = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl}}{\partial t^2}\ , \tag{1.1}$$

где ε – линейная диэлектрическая проницаемость среды, c – скорость света в вакууме, $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl}$ – нелинейный поляризационный отклик среды. Линейная часть уравнения (1.1), описывающая распространение оптических импульсов с конечным числом осцилляций поля в изотропной нерезонансной среде, может быть получена с помощью стандартной методики восстановления эволюционного уравнения из дисперсионного соотношения, определяющегося зависимостью линейной диэлектрической проницаемости от частоты света. Данная зависимость в широкой области частот в области прозрачности может быть получена из общих соотношений теории дисперсии среды, например, воспользовавшись соотношением Крамерса-Кронинга (см. например [19, 172, 248])

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\varepsilon_i(x)dx}{x^2-\omega^2}\ , \tag{1.2}$$

где ε_r и ε_i – действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$, т.е $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) + i\varepsilon_i(\omega)$. Применим формулу (1.2) к слабопоглощающим средам (в данной области частот), т.е. будем предполагать, что в рассматриваемом диапазоне частот мнимой частью диэлектрической проницаемостью можно пренебречь. Предположим, что область слабого поглощения простирается в некотором достаточно широком интервале частот от ω_1 до ω_2 (причем $\omega_1 \ll \omega_2$), и рассмотрим частоты ω такие, что $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$. Область интегрирования в выражении (1.2) разбивается на три части. В первой из них можно пренебречь в знаменателе подынтегрального выражения x по сравнению с ω, а в третьей части сделать разложение знаменателя

по малому параметру $\dfrac{\omega^2}{x^2} \ll 1$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi}\left\{\int\limits_0^{\omega_1}\frac{x\varepsilon_i(x)dx}{x^2-\omega^2} + \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{x\varepsilon_i(x)dx}{x^2-\omega^2}\int\limits_{\omega_2}^{+\infty}\frac{x\varepsilon_i(x)dx}{x^2-\omega^2}\right\} \simeq 1 + \frac{2}{\pi}\left\{-\int\limits_0^{\omega_1}\frac{x\varepsilon_i(x)dx}{\omega^2} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\omega_2}^{+\infty}\frac{\varepsilon_i(x)dx}{x\left(1-\dfrac{\omega^2}{x^2}\right)}\right\} \simeq \varepsilon_o + b\omega^2 - \frac{a}{\omega^2}\ , \quad (1.3)$$

где $\varepsilon_o = 1 + \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{\omega_2}^{+\infty}\dfrac{\varepsilon_i(x)dx}{x}$ – статическая диэлектрическая проницаемость, $a = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\omega_1} x\varepsilon_i(x)dx$ и $b = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{\omega_2}^{+\infty}\dfrac{\varepsilon_i(x)dx}{x^3}$. Следовательно, в области прозрачности линейная диэлектрическая проницаемость имеет следующий вид [172, 245]

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_o + b\omega^2 - \frac{a}{\omega^2}\ . \quad (1.4)$$

Здесь константы a и b ответственны за «высокочастотную»и «низкочастотную»дисперсию среды соответственно. Отметим, что дисперсионная кривая среды (1.4) с высокой степенью точности в ближнем ИК и части видимого спектрального диапазона описывает дисперсию прозрачных диэлектриков [245]. Дисперсия атомарных газов при не слишком высоких давлениях в ИК и оптическом диапазонах имеет вид $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_o + b\omega^2$ [55].

Ограничиваясь далее случаем распространения излучения в среде с безынерционной нелинейностью керровского типа, векторное волновое уравнение для электрического поля волны можно представить в виде [266]

$$\Delta\boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{\varepsilon_o}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \frac{a}{c^2}\boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{b}{c^2}\frac{\partial^4\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^4} + \frac{g}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^2\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\right) + \frac{h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{\mathcal{E}},\left[\boldsymbol{\mathcal{E}},\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\right]\right]\ . \quad (1.5)$$

Здесь постоянные g и h характеризуют нелинейный показатель преломления среды (см., например, [266]). Приближение безынерционной нелинейности является оправданным в силу того, что при малых длительностях лазерного излучения единственным физическим механизмом, обеспечивающим нелинейность показателя преломления на этих временах, является нелинейность поляризационного отклика электронных оболочек. Характерное время задержки электронного отклика составляет доли фемтосекунды и мало по сравнению с длительностью одного периода колебаний в ближнем инфракрасном и оптическом диапазонах. При этом для электронной нелинейности справедливы соотношения $h = \dfrac{2g}{3}$, $g = 2n_2$, где n_2 – экспериментально

измеряемый коэффициент нелинейности. В этом случае уравнение (1.5) существенно упрощается.

Данная глава диссертации посвящена анализу нового класса уединенных решений волнового поля, описывающему распространение в прозрачной нерезонансной среде солитоноподобных структур оптического излучения с произвольной поляризацией, включающих конечное число периодов колебаний поля. Поэтому пространственными эффектами здесь пренебрегаем ($\Delta_\perp \equiv 0$).

Для детального анализа динамической задачи удобно использовать эволюционное уравнение для поля в простейшей форме редуцированного одномерного волнового уравнения. Полагая изменения распределений полей малыми на масштабах, соизмеримых с характерными длинами волн, и пренебрегая отраженной волной, для волнового поля, бегущего вдоль оси z, из (1.5) получаем уравнение [31, 104, 172, 240, 246]

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[2\sqrt{\varepsilon_o}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z} - \frac{b}{c}\frac{\partial^3\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial\tau^3} + \frac{2n_2}{3c}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^2\boldsymbol{\mathcal{E}}\right)\right] + \frac{a}{c}\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0\ , \tag{1.6}$$

где $\tau = t - \dfrac{z\sqrt{\varepsilon_o}}{c}$ – время в сопровождающей системе координат. Как отмечено в работе [245], данное уравнение включает в себя минимальное необходимое число слагаемых для учета дисперсионных и нелинейных эффектов, достаточное для полного описания многих прозрачных сред, и может рассматриваться в качестве *базового уравнения* при анализе динамики предельно коротких импульсов в нерезонансной среде.

В наших работах [172, 239, 240] впервые удалось найти аналитические решения уравнения (1.6) солитонного типа для случая аномальной зависимости дисперсии групповой скорости от частоты. К нахождению этих решений и демонстрации возможности компрессии лазерных импульсов до длительности в один оптический период мы и переходим далее. Для этого предварительно перепишем уравнение (1.6) в безразмерном виде, введя нормировочные размерные множители для времени $\tau_o = \dfrac{1}{\omega_o}$, поля $\mathcal{E}_o = \sqrt{\dfrac{3a}{2n_2\omega_o^2}}$ и трассы $z_o = \dfrac{2\omega_o c\sqrt{\varepsilon_o}}{a}$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^2\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}\right) - \mu\frac{\partial^3\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial\tau^3}\right] + \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0\ , \tag{1.7}$$

где $\mu = \dfrac{b}{a}\omega_o^4$. В рассматриваемом нами случае линейный закон дисперсии для волны $\boldsymbol{\mathcal{E}} \sim \exp\left(i\omega\tau - ik_z z\right)$, распространяющейся вдоль z, имеет вид

$$k_z = -1/\omega + \mu\omega^3\ . \tag{1.8}$$

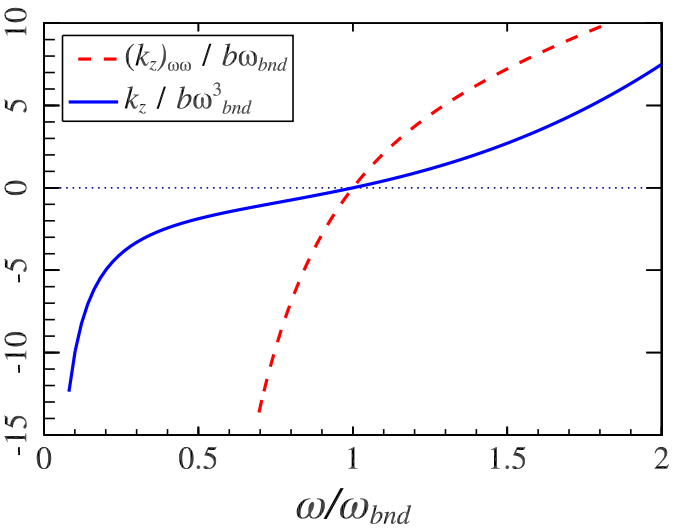


Рис. 1.1: Закон дисперсии $k_z(\omega)$ (сплошная синяя линия) и зависимость дисперсии групповой скорости от частоты (красная пунктирная линия) $\partial^2 k_z/\partial\omega^2$.

Заметим, что изменяя центральную частоту ϖ широкополосного излучения, можно управлять ролью дисперсии в динамике системы (см. рис. 1.1). В частности, для излучения с частотой $\omega_{bnd} = \left(\frac{1}{3\mu}\right)^{1/4}$ параметр дисперсии групповой скорости (GVD) $\alpha = \partial^2 k_z/\partial\omega^2$ обращается в ноль. Соответственно, для волновых полей с частотой $\varpi \gg \omega_{bnd}$ спектр поля сосредоточен в области с нормальной дисперсией групповой скорости $\alpha > 0$, а для $\varpi \ll \omega_{bnd}$ дисперсия является аномальной ($\alpha < 0$). Эта часть дисперсионной кривой ($\varpi \ll \omega_{bnd}$) соответствует случаю, когда низкочастотная плазменная дисперсия, описываемая вторым слагаемым в правой части (1.8), доминирует над высокочастотной дисперсией нейтрального газа, описываемой первым слагаемым в (1.8). При этом частотная модуляция в лазерном импульсе, наводимая дисперсией среды, противоположна по знаку нелинейной частотной модуляции, что является физической предпосылкой для существования солитоноподобных решений в уравнении (1.7). Из уравнения (1.7) следует, что для локализованных распределений поля выполняется интегральное соотношение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\mathcal{E}} d\tau = \mathbf{0} \,, \tag{1.9}$$

выражающее отсутствие среднего поля у таких распределений и указывающее на их

осциллирующий характер, что, в первую очередь, связано с низкочастотной дисперсией среды.

Введение высокочастотного заполнения в уравнении (1.7) сводит его к нелинейному уравнению Шредингера для медленно меняющейся амплитуды поля, а также к различным его обобщениям [122, 230, 243]

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}+|\Psi|^2\Psi-2i|\Psi|^2\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}=0\ , \tag{1.10}$$

где Ψ – медленно меняющаяся амплитуда волнового пакета. Здесь второе слагаемое описывает, в частности, аномальную дисперсию среды, третье слагаемое – самовоздействие в среде с кубичной нелинейностью, четвертое слагаемое ответственно за укручение огибающей импульса.

1.2 Солитонные структуры циркулярно поляризованного поля в среде с «низкочастотной»дисперсией

Для анализа волновой динамики удобно разделять, как это обычно принято в теории нелинейных волн, системы с «высокочастотной» и «низкочастотной» дисперсией: для первых в каждом приближении повышается порядок производных в уравнении (1.7), для вторых же растет кратность интегралов [143]. Нахождение солитонных решений уравнения (1.7) удобно начать со случая циркулярной поляризации лазерного излучения [1]. Начнем рассмотрение вопросов эволюции оптического поля с наиболее важного, для интересующих нас вопросов, случая, когда основную роль в динамике волновых процессов играет низкочастотная («плазменная») дисперсия среды ($\mu=0$) и уравнение (1.7) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}_x}{\partial z\partial\tau}+\mathcal{E}_x+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[\left(\mathcal{E}_x^2+\mathcal{E}_y^2\right)\mathcal{E}_x\right]=0\ , \tag{1.11a}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}_y}{\partial z\partial\tau}+\mathcal{E}_y+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[\left(\mathcal{E}_x^2+\mathcal{E}_y^2\right)\mathcal{E}_y\right]=0\ , \tag{1.11b}$$

[1] Для импульсов длительностью порядка $\lambda\sim\dfrac{2\pi c}{\omega}$ (ω – центральная частота в спектре импульса), когда формально нельзя пользоваться понятием циркулярно поляризованной волны, речь идет о суперпозиции двух ортогональных линейно поляризованных полей, сдвинутых друг относительно друга на $\dfrac{\lambda}{2}$.

где $\mathcal{E}_x$ и $\mathcal{E}_y$ – соответствующие проекции вектора электрического поля. Данное уравнение описывает, в частности, распространение предельно коротких импульсов в оптическом волокне в области аномальной дисперсии [245], а также их самовоздействие в ионизованном газе, в котором плазменная дисперсия преобладает над газовой дисперсией, связанной с нейтральными частицами [139].

Принимая во внимание интегральное соотношение (1.9) и учитывая, что групповые и фазовые скорости волн могут быть различны, представим решения уравнений (1.11) в виде

$$\mathcal{E}_x(z,\tau) = a(z,\tau)\cos\varphi(z,\tau)\ , \tag{1.12a}$$

$$\mathcal{E}_y(z,\tau) = a(z,\tau)\sin\varphi(z,\tau)\ , \tag{1.12b}$$

описывающем эволюцию циркулярно поляризованного поля. Тогда для амплитуды $a(z,\tau)$ и фазы $\varphi(z,\tau)$ волнового поля получим следующую систему точных уравнений:

$$a_{z\tau} - \varphi_z\varphi_\tau a + a + 6aa_\tau^2 + 3a^2a_{\tau\tau} - \varphi_\tau^2 a^3 = 0\ , \tag{1.13a}$$

$$a\varphi_{z\tau} + a_z\varphi_\tau + \varphi_z a_\tau + 6a^2a_\tau\varphi_\tau + \varphi_{\tau\tau}a^3 = 0\ , \tag{1.13b}$$

где нижний индекс означает частную производную по соответствующей переменной. Полагая, что огибающая поля распространяется с постоянной скоростью, ищем решения в виде

$$a(z,\tau) = a(\zeta), \qquad \varphi(z,\tau) = \omega\tau - kz + \int\limits_{-\infty}^{\zeta} g(a)d\zeta' + \varphi_o\ , \tag{1.14}$$

где $\zeta = \tau - \gamma z$, φ_o – постоянная фаза поля. Локальные частоты и волновые векторы определяются как $\varphi_\tau = \omega + g(a)$, $\varphi_z = -k - \gamma g(a)$. Подставляя полученные соотношения в (1.13b) и определяя ω как несущую частоту сигнала в пределе малых амплитуд ($g(a) \to 0$ при $a \to 0$), находим, что

$$g(a) = \frac{\omega a^2\left(3\gamma - 2a^2\right)}{2\left(\gamma - a^2\right)^2}\ , \tag{1.15}$$

$k = -\gamma\omega$, при этом выражение для фазы поля имеет вид

$$\varphi(z,\tau) = \omega\tau + \gamma\omega z + \int\limits_{-\infty}^{\zeta} \frac{\omega a^2\left(3\gamma - 2a^2\right)}{2\left(\gamma - a^2\right)^2}d\zeta' + \varphi_o\ . \tag{1.16}$$

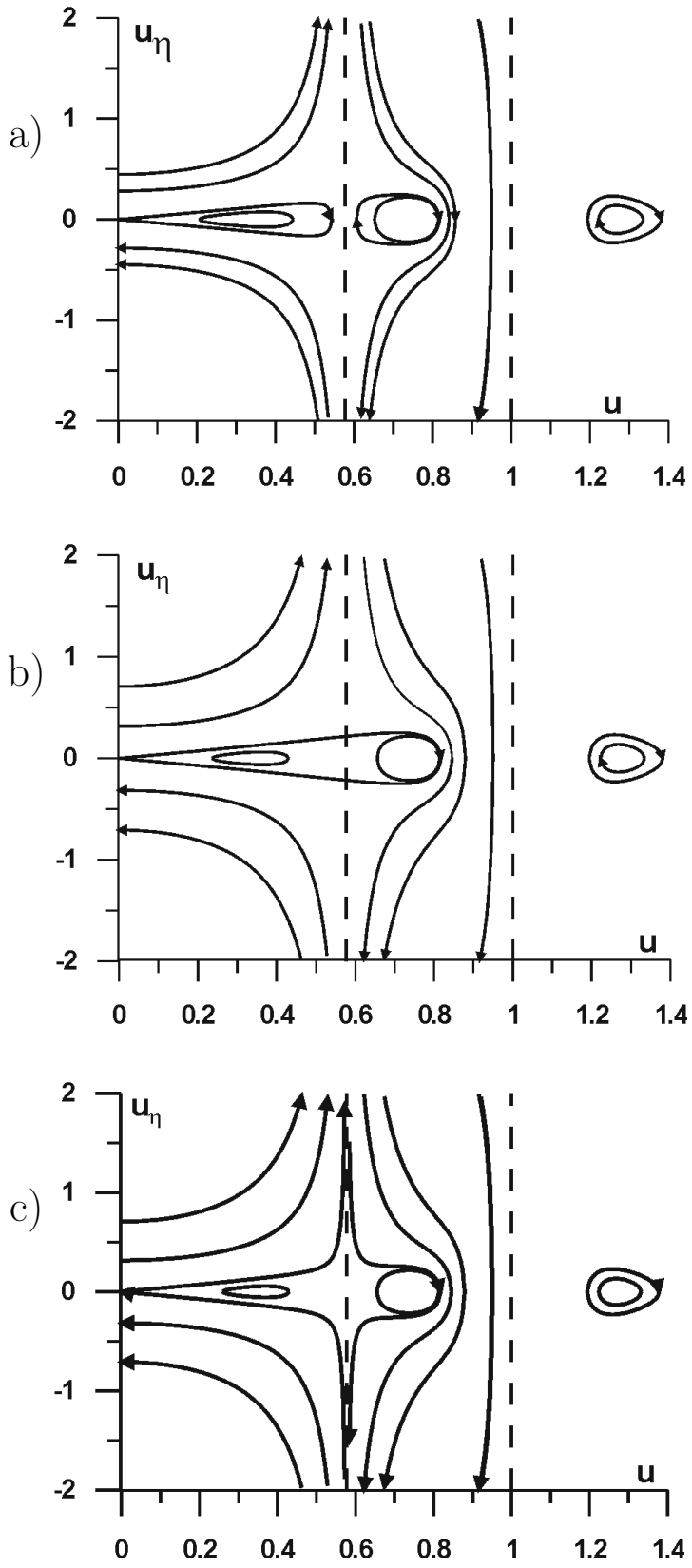


Рис. 1.2: Фазовая плоскость для уравнения (1.17) при различных значениях параметра δ: $\delta^2 < \frac{1}{8}$ (a), $\delta^2 = \frac{1}{8}$ (b), $\delta^2 > \frac{1}{8}$ (c).

Таким образом, импульс волнового поля не только может включать в себя конечное число колебаний, но также должен быть модулированным по фазе, т.е. содержать частотный чирп, вообще говоря, достаточно сложной формы: $\varphi_\tau \sim g(a)$. Уравнение для амплитуды (1.13а) при этом принимает вид

$$u_{\eta\eta} - \frac{6uu_\eta^2}{1-3u^2} - \frac{u}{1-3u^2}\left\{\delta^2 - \frac{u^2\left[4\left(1-u^2\right)^2 - u^2\right]}{4\left(1-u^2\right)^3}\right\} = 0\ , \qquad (1.17)$$

где введены новые переменные $\eta = \omega\zeta$ и $u = \dfrac{a}{\sqrt{\gamma}}$. Как легко видеть, в этом случае семейство солитоноподобных решений является однопараметрическим, т.е. зависит от параметра $\delta^2 = \dfrac{1}{\gamma\omega^2} - 1 > 0$. В соответствии с первым интегралом уравнения (1.17), имеющим вид

$$\left(\frac{du}{d\eta}\right)^2 = \frac{u^2}{\left(1-3u^2\right)^2}\left[\delta^2 - \frac{3}{2}\left(\delta^2+1\right)u^2 + \frac{\left(4-5u^2\right)u^2}{4\left(1-u^2\right)^2}\right] + \frac{C}{\left(1-3u^2\right)^2}\ , \qquad (1.18)$$

где C – постоянная интегрирования, равная нулю для локализованных распределений поля, его решения в общем случае можно представить лишь в квадратурах. Однако возможные типы решений могут быть легко проанализированы на фазовой плоскости, на которой фазовые траектории (1.18) симметричны относительно оси $u = 0$. Ограничиваясь рассмотрением полуплоскости $u \geq 0$, видно, что уравнение (1.17) имеет четыре состояния равновесия: три центра и седловую точку в начале координат, разделенные особыми прямыми $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $u = 1$. Вид фазовой плоскости существенно зависит от параметра δ (рис.1.2). Интересующим нас солитонным решениям соответствует замкнутая сепаратрисса из седла в седло ($C = 0$), существующая только при $\delta^2 \leq \delta_{cr}^2 = \dfrac{1}{8}$ и включающая в себя одно или два состояния равновесия типа центр. При $\delta^2 < \dfrac{1}{8}$ указанная сепаратрисса включает ближайшие состояние равновесия; типичная фазовая плоскость для этого случая показана на рис. 1.2**(а)**. Для этих параметров максимальная амплитуда солитона ограничена сверху: $u_{max} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

В общем случае найти аналитическое решение уравнения (1.18) проблематично. Однако при $u_{max}^2 \ll 1$ уравнение (1.18) может быть проинтегрировано. При этом приближенное решение представляется в неявном виде:

$$6\delta\sqrt{\delta^2 - \frac{u^2}{2}} - Arcosh\left(\frac{\sqrt{2}\delta}{u}\right) = \pm\delta\eta\ . \qquad (1.19)$$

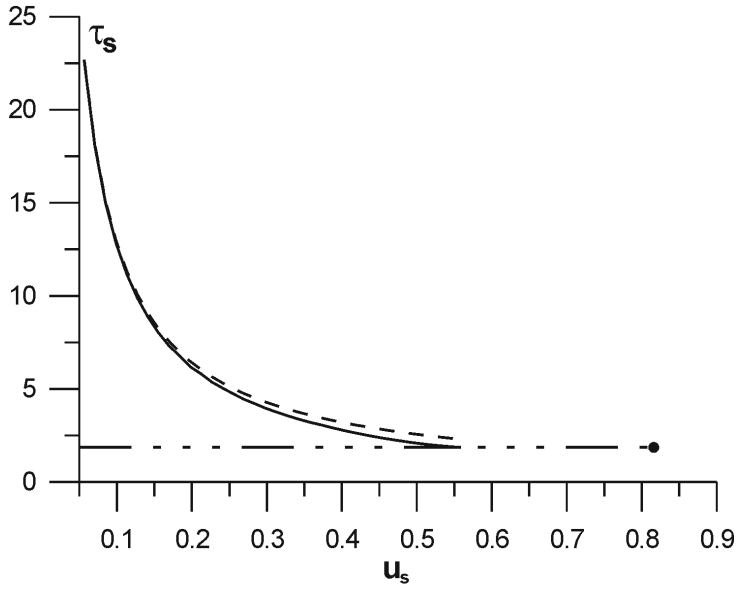


Рис. 1.3: Зависимость длительности солитонов при $\delta^2 < \frac{1}{8}$ от их амплитуды (сплошная линия). Для сравнения показана зависимость длительности солитонов Шредингера от амплитуды, $\tau_s \propto \frac{1}{a_s}$ (штриховая линия). Точкой указаны длительность и амплитуда предельно короткого солитона

Зависимость среднеквадратичной длительности таких солитонов

$$\tau_s = \sqrt{\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 u^2 d\eta}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\eta}} \tag{1.20}$$

от амплитуды представлена на рис.1.3 сплошной линией.

Выражение (1.19) с хорошей точностью описывает распределение поля в солитоне вплоть до $\delta \approx \delta_{cr}$, исключая лишь само предельное значение. На рис.1.4 показаны характерные осциллограммы поля, соответствующие точному и приближенному солитонным решениям при $\delta = 0.32$ и включающие в себя около полутора периодов оптических колебаний. Как видно, эти решения весьма близки.

При $\delta^2 = \delta_{cr}^2 = \frac{1}{8}$ вид сепаратриссы качественно меняется в ввиду снятия особенности при $u^2 = \frac{1}{3}$, включает два состояния равновесия (рис.1.2**(b)**). Данное решение является изолированным и условно может быть названо «предельным» солитоном, соответствующим минимально возможной длительности $\tau_s = \frac{1.84}{\omega}$ и максимально возможной амплитуде $u_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Точное решение, описывающее такой солитон,

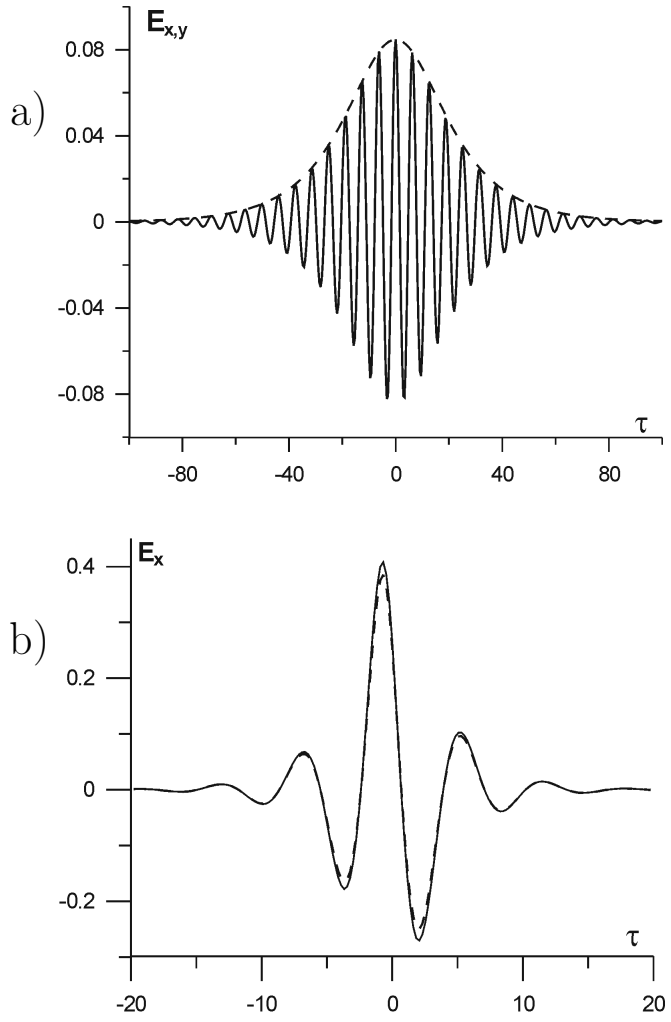


Рис. 1.4: Точные солитонные решения (сплошные кривые), отвечающие $\delta = 0.06$**(a)** и $\delta = 0.32$ **(b)**. Штриховыми линиями показаны солитон НУШ **(a)** и приближенное аналитическое решение (1.19).

имеет ту же функциональную зависимость, что и (1.19), однако соответствует солитону с максимально допустимой энергией:

$$\sqrt{\frac{2-3u^2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}}Arcosh\left(\sqrt{\frac{2}{3u^2}}\right) = \pm\frac{\eta}{4}\ . \tag{1.21}$$

Здесь следует отметить, что в узкой окрестности границы $\delta^2 \approx \frac{1}{8}$, как следует из (1.17), возможны быстрые изменения амплитуды поля, свидетельствующие о необходимости учета «высокочастотной»дисперсии.

При $\delta^2 > \frac{1}{8}$ происходит разрыв замкнутой сепаратриссы, что указывает на отсутствие локализованных решений (рис.1.2**(c)**).

Наличие предельного солитона при $\delta^2 = \delta^2_{cr} = \frac{1}{8}$ и отсутствие локализованных решений при $\delta^2 > \frac{1}{8}$ имеет простой физический смысл. Вместе с нелинейной фазовой модуляцией, нелинейное слагаемое в уравнении (1.11) ответственно также за нелинейную дисперсию групповой скорости лазерного импульса, которая приводит к укручению фронта импульса и, в отсутствии дисперсии, к опрокидыванию профиля поля. С увеличением амплитуды решений, т.е. с ростом параметра δ, этот эффект проявляется все сильнее, приводя к обогащению спектра импульса высокими частотами. Влияние же «низкочастотной»дисперсии падает с увеличением частоты, поэтому, начиная с некоторой критической амплитуды поля, плазменная дисперсия не может сбалансировать опрокидывание волны, что выражается в отсутствии локализованных решений уравнения (1.17). Отметим, что для предельно коротких длительностей, несмотря на широкий спектр сигнала, соизмеримый со средней частотой, ω удобно рассматривать в качестве характерной несущей частоты, являющейся таковой в пределе малых амплитуд.

Важной особенностью рассматриваемых волновых солитонов является полуограниченный спектр их допустимых решений, т. е. наличие граничного решения, соответствующего предельному солитону с минимально возможной длительностью импульса и, соответственно, с максимально возможной амплитудой. С увеличением δ амплитуда солитона возрастает, а его длительность, определенная по полувысоте интенсивности, уменьшается, достигая минимально возможной величины при $\delta^2 = \frac{1}{8}$ и равной по сути менее периода колебаний $\tau_s = \frac{1.84}{\omega}$. На рисунке 1.3 точкой указаны длительность и амплитуда предельно короткого солитона (1.21).

Существование солитонов огибающей волнового поля и компрессии произвольных начальных импульсов до весьма малых длительностей детально исследованы

в рамках приближения медленно меняющихся комплексных амплитуд (ММА) для квазимонохроматических полей [208]. Найденные нами решения являются обобщением НУШ, описывающего нелинейную динамику квазимонохроматических сигналов, на случай предельно малых длительностей лазерных импульсов – вплоть до одного оптического периода, когда приближение ММА уже не справедливо. Чтобы продемонстрировать это, установим связь полученных решений с хорошо известными солитонами огибающей, существующими в рамках нелинейного уравнения Шредингера (1.10), а также его обобщений [230]. Длительность найденных локализованных распределений поля примерно обратно пропорциональна их амплитуде (рис.1.3), поэтому переход к длинным квазимонохроматическим импульсам, содержащим много осцилляций, осуществляется при малых амплитудах $u^2 \ll \frac{2}{3}$, что, как следует из уравнения (1.18), имеет место при $\delta^2 \ll \frac{1}{8}$. В этом случае (1.18) в низшем порядке разложения по степеням u (удерживая слагаемые $\sim u^4$) сводится к уравнению для нахождения НУШ солитонов:

$$u_\eta^2 = u^2\left(\delta^2 - \frac{u^2}{2}\right) \ , \tag{1.22}$$

имеющим своим решением зависимость

$$u(\eta) = \frac{\sqrt{2}\delta}{\cosh\left(\delta\eta\right)} \ . \tag{1.23}$$

Для сравнения на рисунке 1.4**(а)** приведено сплошной линией точное решение для волнового солитона при $\delta = 0.06$ и пунктиром – шредингеровский солитон для огибающей. На рисунке 1.3 для сравнения представлены зависимости длительности солитонов τ_s от их амплитуды u_s для двух случаев: сплошная линия – приближенное решение солитона (1.19), штриховая линия – солитон НУШ (1.23) $\left[\tau_s \propto \frac{1}{u_s}\right]$.

При увеличении амплитуды длительность солитона уменьшается, и все возрастающую роль начинают играть процессы, связанные с зависимостью групповой скорости пакета от амплитуды поля, что, в первую очередь, отражается на структуре фазовой модуляции импульса $\varphi_\eta \sim \frac{3u^2}{2}$ (см. уравнение (1.16)). Его амплитудная зависимость трансформируется при этом в солитоны обобщенного нелинейного уравнения Шредингера (1.10) [230], которые, как нетрудно получить из (1.18), проводя разложение многочленов и удерживая слагаемые следующего порядка малости (удерживая слагаемые $\sim u^6$), имеют вид:

$$u(\eta) = \frac{2\delta}{\sqrt{1+\sqrt{1+12\delta^2}\cosh(2\delta\eta)}} \ . \tag{1.24}$$

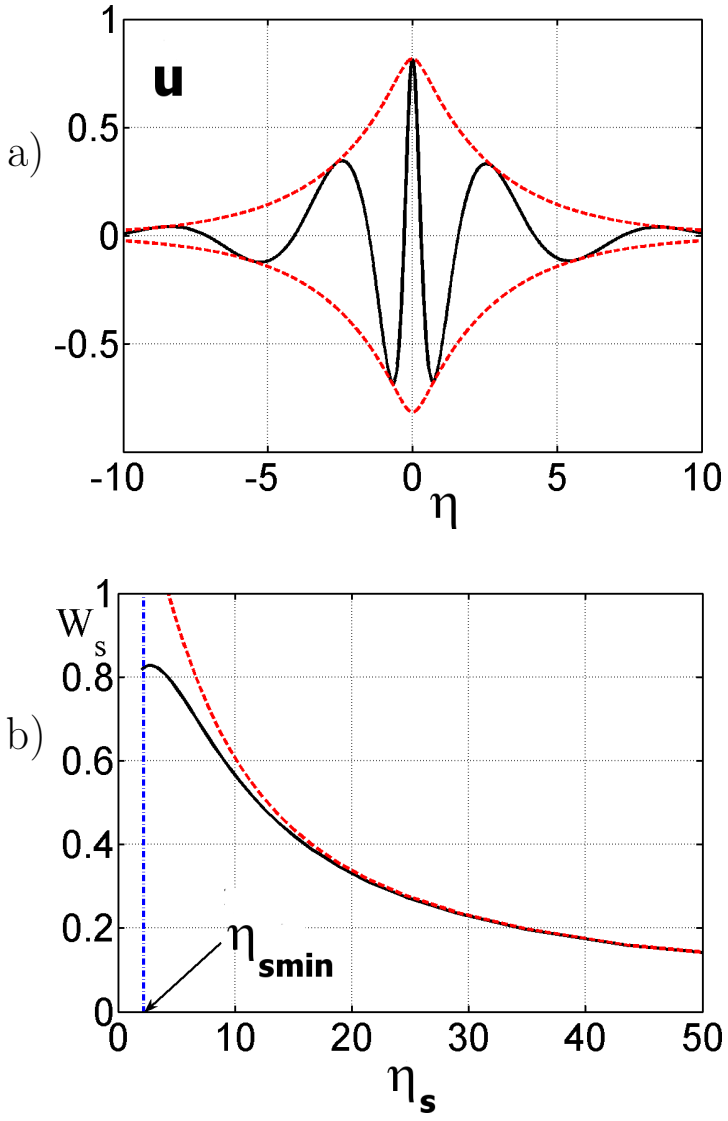


Рис. 1.5: **(a)** Временное распределение поля в «предельном»солитоне ($\delta = \delta_{cr}$). Сплошной черной линией представлена $\mathcal{E}_x$ компонента поля, красной пунктирной линией приведено распределение интенсивности поля $\sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}$. **(b)** Сплошной линией представлена зависимость энергии солитонов с малым числом осцилляций поля от их длительности. Красной пунктирной линией представлена зависимость энергии от длительности для солитонов НУШ. Синей пунктирной линией показано положение предельного солитона $\eta = \eta_{smin}$.

При дальнейшем увеличении амплитуды длительность солитона становится соизмеримой с периодом оптических колебаний, накладывая тем самым в соответствие с интегралом (1.9) фактически ограничение сверху на допустимые значения поля, что отражается, по сути, в существовании предельного солитонного решения. На рисунке 1.5 показана характерная осциллограмма поля, соответствующая предельному солитону ($\delta = \delta_{cr}$) и зависимость энергии солитона от длительности, вычисленная как

$$W_s = \frac{\gamma}{\omega} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\eta \ . \tag{1.25}$$

Как видно из рисунка 1.5**(a)** частоты в центральной части импульса существенно выше, чем в окрестности, т.е. спектр импульса сильно уширен. Существенное различие между солитонами с малым числом осцилляций поля и шредингеровскими солитонами имеет место (см. рис.1.5**(b)**) для импульсов с длительностью менее чем $2 - 2.5$ периода поля.

В целом, можно заключить, что найденные нами солитонные структуры волнового поля имеют прямую преемственную связь с солитонами Шредингера и позволяют осуществить переход от солитонов огибающей квазимонохроматического излучения фактически к оптическим видеосолитонам (рис.1.5**(a)**). В силу малости критического значения параметра δ_{cr} и, соответственно, малости амплитуд солитонных решений из (1.16) и (1.19) можно с большой точностью сказать, что эти решения приближенно имеют огибающую солитонов НУШ и фазовую модуляцию, соответствующую солитонам обобщенного нелинейного уравнения Шредингера [230].

1.3 Солитонная динамика волнового поля с циркулярной поляризацией

Следует обратить внимание, что волновые солитоны с малым числом колебаний обладают достаточно сильной частотной модуляцией (1.16), не позволяющей ввести определенным образом фазовую скорость для таких структурных образований, что делает их заметно отличными от известных ранее волновых солитонов [111, 227], для которых и несущая частота, и несущий волновой вектор строго определяются. По-видимому, именно соответствующим образом подобранный частотный чирп делает рассматриваемые волновые структуры более устойчивыми образованиями, которые

достаточно легко могут быть сформированы заданием соответствующих начальных, локализованных распределений поля, а также в рамках более общих уравнений, учитывающих, например, высокочастотную дисперсию [139,239,246], где они могут представлять собой лишь приближенные, слабозатухающие солитоноподобные решения.

Для изучения свойств солитонных структур (1.16), (1.18) и их роли в динамике нелинейного распространения электромагнитного излучения нами проведено численное исследование уравнения (1.11). Численное моделирование проводилось с использованием *псевдоспектрального метода*. Уравнение (1.11) относится к классу гамильтоновых систем с гамильтонианом вида

$$\mathcal{H} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\int\limits_{-\infty}^{\tau} \boldsymbol{\mathcal{E}} d\tau' \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \right)^2 \right] d\tau = const. \tag{1.26}$$

Данное выражение оказывается полезным с точки зрения моделирования, ввиду, как известно, высокой чувствительности функции Гамильтона к точности численного расчета, что было использовано нами для повышенного контроля численного эксперимента.

Для характеристики трассы распространения импульсов поля определим характерные масштабы уравнения (1.11). Аналогично уравнению для огибающей, мы можем определить характерные дисперсионный и нелинейный масштабы. Однако, в отличие от солитонов НУШ (1.23), солитонные решения уравнения (1.11) содержат два масштаба, соответствующие заполнению и огибающей в смысле их представления в виде (1.12). Поэтому мы выберем в качестве опорных характерную дисперсионную длину $L_{dis} \propto \dfrac{\omega_\star^2}{\Delta\omega}$ и характерную длину нелинейного взаимодействия $L_{nl} \propto \dfrac{\Delta\omega}{\omega_\star^2 \mathcal{E}_{max}^2}$, где $\omega_\star$ – характерная, например центральная, частота в спектре импульса, $\Delta\omega$ – его спектральная ширина, а $\mathcal{E}_{max}$ – максимальная амплитуда.

1.3.1 Динамика солитонов с циркулярной поляризацией

Для поля с циркулярной поляризацией $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{e}_x \mathcal{E}_x + \boldsymbol{e}_y \mathcal{E}_y$, как показывают численные расчеты, солитонный импульс является устойчивым образованием относительно малых возмущений и может распространяться на большие трассы без каких-либо изменений. В качестве иллюстрации на рис.1.6 представлена эволюция вдоль трассы распространения временного распределения поля (рис.1.6**(a)**) и соответствующей ей спектральной интенсивности (рис.1.6**(b)**) для входного импульса, заданного в виде

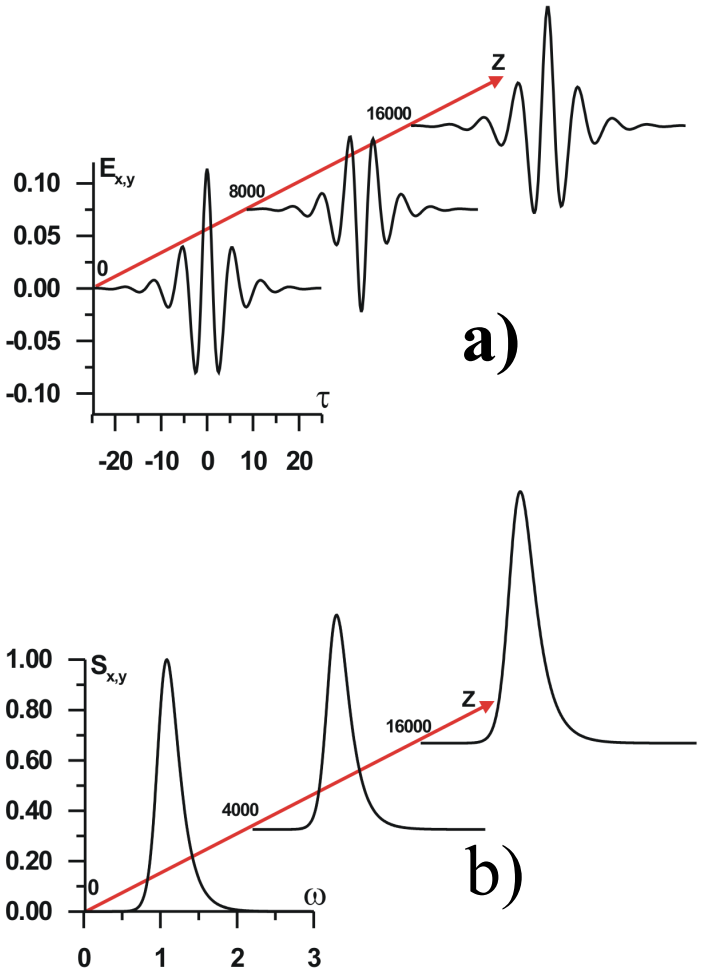


Рис. 1.6: Временная (a) и спектральная (b) эволюция вдоль трассы распространения циркулярно поляризованного солитона.

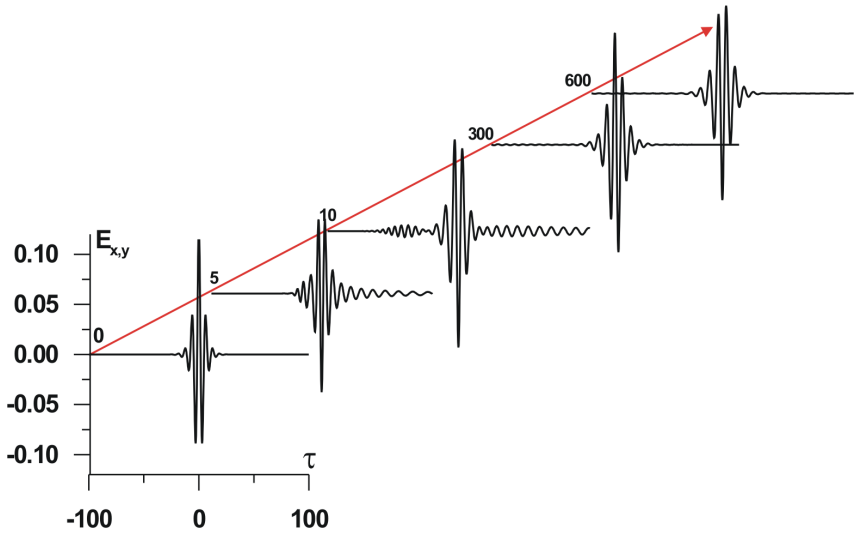


Рис. 1.7: Формирование оптического солитона с циркулярной поляризацией.

волнового солитона с параметрами $\delta = 0.25$ и $\omega = 1$. Для данного входного распределения поля характерные масштабы L_{dis}, L_{nl} примерно равны и порядка $3 - 4$. Следует отметить, что в численном расчете не наблюдалась утечка энергии в виде убегающих волн на рассчитанной трассе $L \approx 16000 L_{nl}$.

1.3.2 Формирование солитона с циркулярной поляризацией

Если спектр оптического импульса на входе в нелинейную среду большей частью лежит в области «низкочастотной»дисперсии, то при его распространении в среде возможно формирование предельно короткого оптического солитона.

На рис.1.7 приведена типичная картина образования солитона, состоящего всего из полутора световых колебаний. Из рисунка видно, что длительность сформировавшегося солитона при распространении его в среде не изменяется, а динамика заключается в периодической эволюции внутренней структуры импульса. Следует отметить, что на начальном этапе возбуждения односолитонного решения наблюдается небольшая утечка энергии в виде убегающих низкочастотных и высокочастотных волн. Общая доля потерь на рассчитанной трассе $L \approx 600 L_{nl}$ составила порядка 8% от общей энергии начального импульса.

1.4 Динамические свойства «упругих»взаимодействий волновых солитонов

Как отмечалось ранее, замечательным свойством уравнения (1.11) является наличие у него локализованных, солитоноподобных решений для циркулярно поляризованного поля, устойчивых относительно малых возмущений. При переходе к лазерным импульсам, содержащим большое число колебаний поля, эти решения плавно трансформируются в хорошо известные шредингеровские солитоны (1.23). Данное обстоятельство, в частности, позволяет надеяться, что и волновые солитоны с малым числом осцилляций поля (1.16), (1.18) унаследуют определенные свойства шредингеровских солитонов. К числу таких важных свойств относится свойство упругого взаимодействия двух соударяющихся солитонов, а именно сохранение их солитонных структур до и после соударения[2]. В этой связи естественно, как нам кажется, обра-

[2]С точки зрения общей теории нелинейных волн, несомненно, принципиально важным здесь является вопрос о полной интегрируемости исходного нелинейного волнового уравнения, представ-

титься к хорошо зарекомендовавшему себя приему, а именно исследованию с помощью численного моделирования парных соударений волновых солитонов, представляющих собой точные решения нелинейного волнового уравнения соответствующей гамильтоновой системы. Под сохранением солитонной структуры волнового поля мы будем понимать сохранение лишь солитоноподобной структуры огибающей, полагая, что его спектральное содержимое может претерпевать изменения из-за нелинейного характера взаимодействия.

В данном разделе путем прямого численного моделирования нелинейной динамики оптического поля в среде с керровской нелинейностью показано, что в классе циркулярно-поляризованных полей волновые солитоны с малым числом колебаний в парных соударениях сохраняют свойства соударений шредингеровских солитонов относительно структуры своих огибающих, в то время как их частотные заполнения могут изменяться, однако, в соответствии с сохранением солитоноподобной структуры. В результате соударения не происходит излучения свободных полей, т.е. несолитонной части спектра, сохраняя таким образом общую энергию, заключенную в солитонах [263].

В силу «однонаправленности»уравнения (1.11) для исследования парной столкновительной динамики будем располагать солитоны (1.16), (1.18) в порядке убывания их групповых скоростей, а также располагать их таким образом, чтобы они пространственно не перекрывались. Естественно, начальные условия задавались в виде волновых структур (1.16), (1.18), являющихся точными решениями исходного уравнения (1.11). Будем различать два принципиально различных случая взаимодействующих солитонов. Первый, когда взаимодействуют солитоны с близкими частотами; именно в этом случае возможно сопоставление полученных результатов с аналогичными для шредингеровских солитонов. И второй, не имеющий соответствующего аналога, когда характерные частоты заметно различаются.

1.4.1 Частоты сталкивающихся солитонов одинаковы

В первой серии численных экспериментов ω полагались одинаковыми для сталкивающихся солитонов, а в качестве варьируемых параметров выступали амплитуды солитонов, а также абсолютная разность фаз их частотного заполнения, задаваемая в виде $\Delta\varphi = \varphi_{o1} - \varphi_{o2}$ при фиксированном расстоянии между солитонами, где φ_{o1} и φ_{o2}

ляющийся пока мало разрешимым.

постоянные фазы поля первого и второго солитона, соответственно (см. (1.14)). Проведенные численные расчеты позволяют четко идентифицировать три различных режима динамического взаимодействия волновых солитонов, которые могут быть суммированы следующим образом.

Если амплитуды соударяющихся солитонов различаются более чем на 40% (приводимые здесь и далее численные значения приближенные и в общем случае могут меняться в зависимости от интервала значений параметров солитонов, в частности, указанная величина соответствует $\omega \sim 1$, $a \sim 0.2$), всегда наблюдается лишь один режим взаимодействия: солитоны проходят друг через друга с полным сохранением своей волновой структуры, включая и частотные заполнения. Типичная картина режима прохождения одной волновой структуры через другую представлена на рис. 1.8.

Если амплитуды соударяющихся солитонов различаются менее чем на 40%, то в зависимости от разности фаз наблюдаются три различных режима их взаимодействия, типичные сценарии которых представлены на рис. 1.8-1.11. В диапазоне фаз $-\frac{\pi}{8} < \Delta\varphi < \frac{\pi}{8}$, который в общем случае достаточно слабо зависит от амплитуд соударяющихся солитонов, солитоны (см. рис. 1.8) проходят друг через друга без изменений, как и в случае заметной разницы в амплитудах, хотя режим их взаимодействия может быть достаточно длительным и сложным. При близких амплитудах их относительная скорость мала, и потому они достаточно долго проходят друг через друга, по-видимому, даже с определенным обменом энергией на некоторых интервалах времени.

При этом, как показывает спектральный анализ, их частотный состав практически не изменяется после взаимодействия, т. е., волновые структуры асимптотически остаются полностью идентичными самим себе, по крайней мере, с точностью до некоторой задержки по отношению к невозмущенному движению, определяемой нелинейным взаимодействием. Данная задержка уменьшается с увеличением разницы в амплитудах.

Если фазы лежат в интервале $\frac{\pi}{8} < \Delta\varphi < \frac{5\pi}{4}$, то солитон с большей амплитудой догоняет более медленный, однако не проходит через него, а пространственно располагается сзади, как отражено на рис. 1.9. В течение определенного периода взаимодействия этой связанной пары происходит обмен энергией с полной репликацией одного солитона другим, которые затем начинают распространяться независимо, фактически обменявшись и скоростями; усилившийся второй, первоначально более

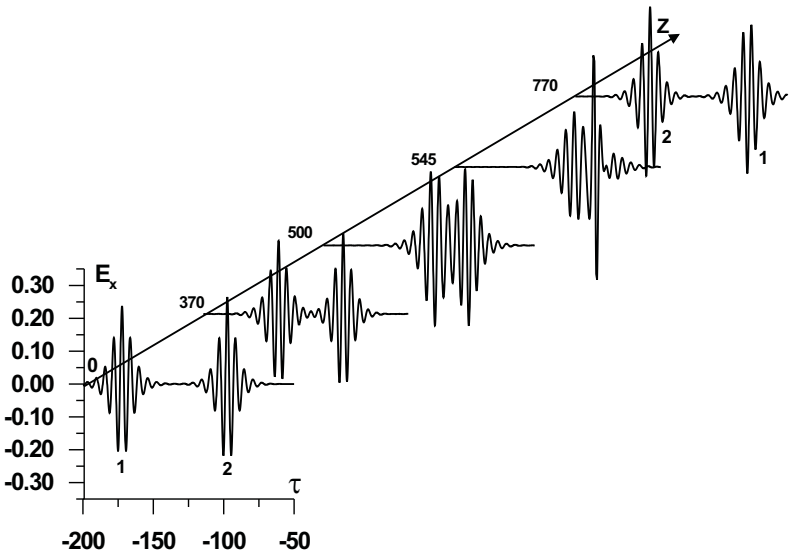


Рис. 1.8: Режим прохождения солитонов с малым числом осцилляций друг через друга с полным сохранением своей волновой структуры, включая и частотные заполнения: $\omega = 1$ (характерный период колебаний поля $\approx 2\pi$), $a_{s1} = 0.24$, $\tau_{s1} = 9.2$ ($\delta_1 = 0.17$) и $a_{s2} = 0.26$, $\tau_{s2} = 8$ ($\delta_2 = 0.19$), $\Delta\varphi = 0$, где a_{si}, τ_{si} – амплитуда и длительность i-го солитона, которые также отмечены соответствующими цифрами на рисунках.

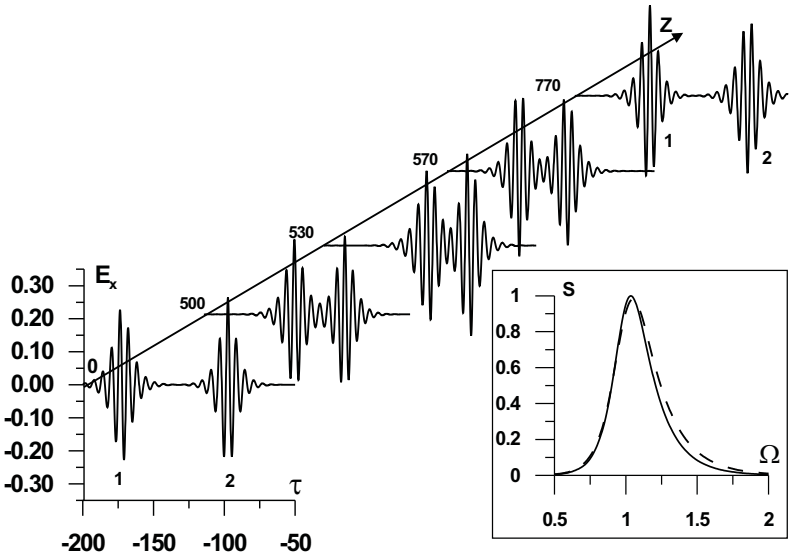


Рис. 1.9: Режим репликации одной исходной волновой структуры другой: $\omega = 1$, $a_{s1} = 0.24$, $\tau_{s1} = 9.2$ ($\delta_1 = 0.17$) и $a_{s2} = 0.26$, $\tau_{s2} = 8$ ($\delta_2 = 0.19$), $\Delta\varphi = 0.5\pi$. На вставке показаны спектральные мощности солитонов $S(\Omega)$ до и после взаимодействия, которые практически идентичны. Непрерывная линия соответствует первому до и второму после, пунктирная второму до и первому после взаимодействия.

медленный солитон приобретает скорость первого и отходит от него. При этом происходит также полное копирование спектрального состава волнового поля; на вставке к рис. 1.9 приведены спектральные мощности волновых солитонов $S(\Omega)$ до и после взаимодействия, которые с точностью численных расчетов полностью идентичны друг другу. Отметим также, что в представленных выше двух режимах фактически не произошло рождение новой волновой структуры, т.е., волновые солитоны и после взаимодействия асимптотически остались теми же самыми, включая и их высокочастотные заполнения.

В диапазоне фаз $\frac{5\pi}{4} < \Delta\varphi < \frac{7\pi}{4}$, как видно из рис. 1.10, наблюдался режим отталкивания, т.е., после некоторого переходного периода, когда солитоны взаимодействуют сблизившись, но оставаясь быть достаточно пространственно разделенными, они разбегаются друг от друга. При этом, естественно, параметры волновых солитонов претерпевают изменения, и, в первую очередь, это относится к высокочастотному заполнению. Данный режим применительно к волновому полю лишь условно может быть назван упругим, так как волновые структуры до и после взаимодействия строго не одни и те же, хотя при небольшой разнице в амплитудах солитонов, когда и наблюдается данный режим взаимодействия, эти различия в общем-то малы. На рисунке 1.11 показаны типичные картины изменений спектрального состава солитонов до (непрерывные линии) и после отталкивания (пунктирные линии). Следует обратить внимание, что спектральный состав изменяется таким образом, что волновые структуры и после взаимодействия остаются солитонами в соответствие с решением (1.16), (1.18): спектр первого, отраженного солитона смещается в синюю сторону, в то время как второго, получившего дополнительный «импульс»в направлении своего движения, в противоположную, т.е. красную сторону.

1.4.2 Частоты сталкивающихся солитонов различны

Во второй серии расчетов параметр ω полагался различным для сталкивающихся солитонов. Здесь так же, как и в случае заметной разницы в амплитудах, наблюдался лишь один режим взаимодействия, когда солитоны проходят друг сквозь друга, асимптотически оставаясь теми же самыми. Данный режим наблюдался вплоть до разности частот около 5% для значений $\omega \sim 1$. Типичный сценарий для параметров $\omega = 0.8$ и 1.4, а также $a_{s1} = 0.29$, $\tau_{s2} = 11.5$ ($\delta_2 = 0.16$) и $a_{s2} = 0.22$, $\tau_{s2} = 6.67$ ($\delta_2 = 0.18$) представлен на рис. 1.12, где солитоны проходят друг че-

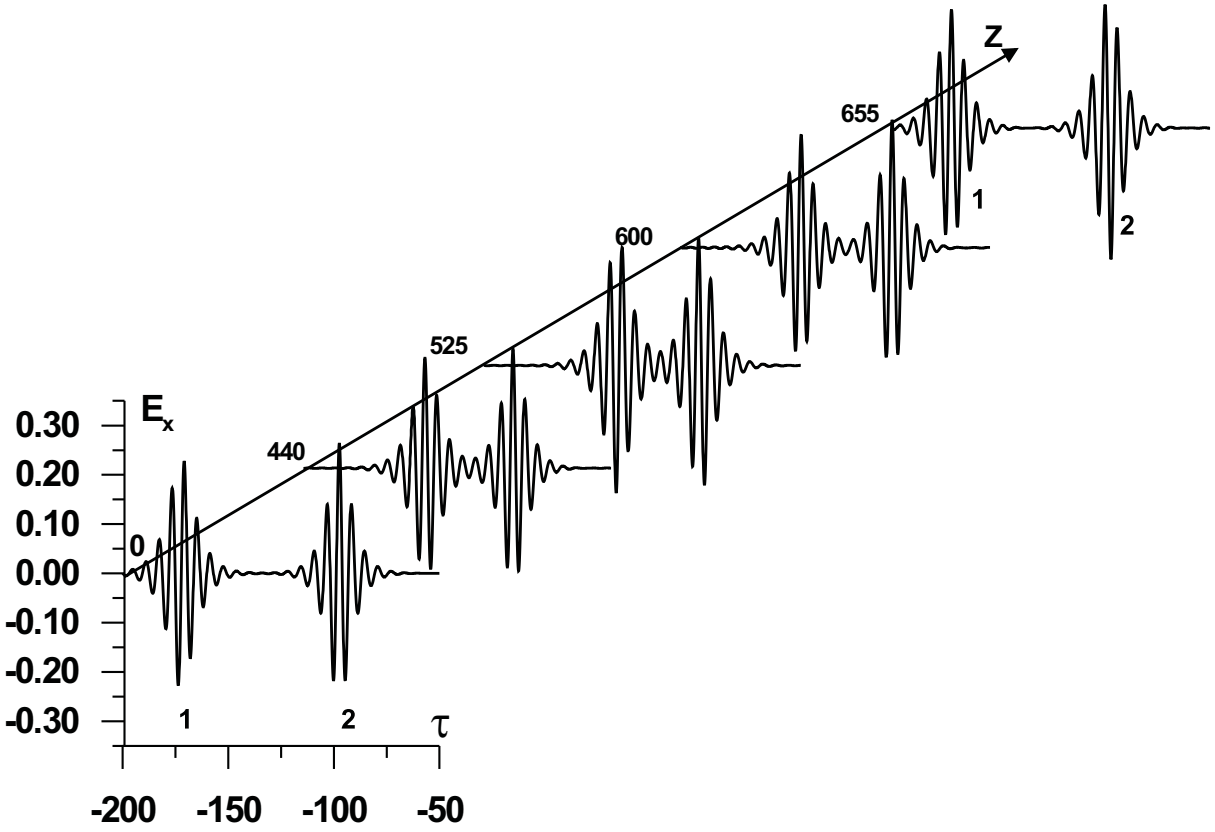


Рис. 1.10: Режим отталкивания пары волновых солитонов друг от друга: $\omega = 1$, $a_{s1} = 0.24$, $\tau_{s1} = 9.2$ ($\delta_1 = 0.17$) и $a_{s2} = 0.26$, $\tau_{s2} = 8$ ($\delta_2 = 0.19$), $\Delta\varphi = 1.5\pi$.

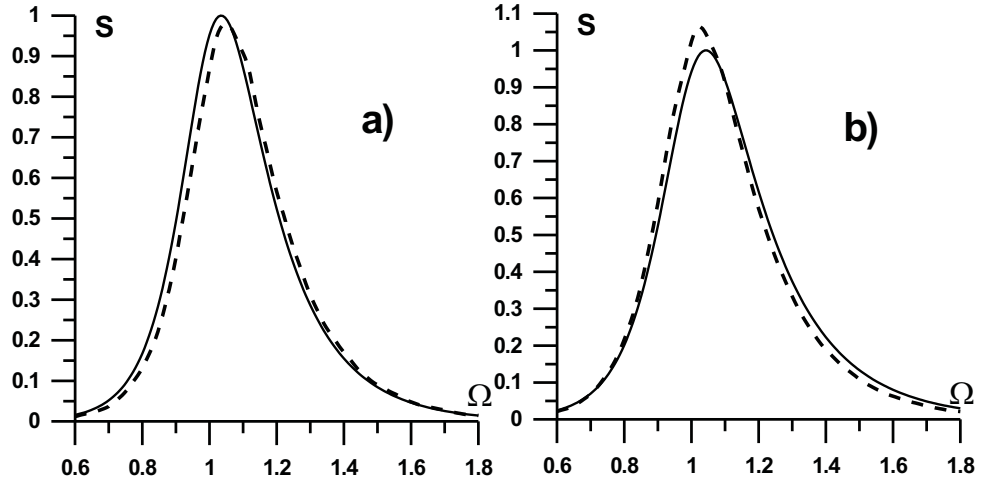


Рис. 1.11: Спектральные мощности волновых солитонов $S(\Omega)$ до (непрерывные линии) и после (пунктир) отталкивания: **(a)** – первого солитона, **(b)** - второго, соответствующие параметры приведены на рис.1.10

рез друга, практически не взаимодействуя и не меняя своего спектрального состава. Видно также, что ввиду заметной разницы групповых скоростей эффективное взаимодействие, т.е., по сути, перекрытие волновых пакетов, происходит лишь на небольшой трассе распространения ($7 \lesssim z \lesssim 25$), в то время как в предыдущих случаях (см. рис. 1.8–1.10) имело место весьма длительное взаимодействие волновых солитонов ($z \sim 700$). Следует отметить, что во всех режимах взаимодействия солитонов не наблюдалось генерации несолитонных компонент, т. е., полная энергия, содержащаяся в волновых структурах, оставалась неизменной.

Таким образом, в результате проведенных численных экспериментов по парным соударениям волновых солитонов могут быть сформулированы следующие положения, которые отражают определенные динамические свойства векторного волнового уравнения (1.11) в классе циркулярно-поляризованных полей [263]:

1. В результате соударений солитоноподобная структура волновых полей не нарушается, т.е. волновые солитоны остаются солитонами и после соударений.

2. В результате соударений не происходит излучения свободных полей, т.е. несолитонной части спектра, сохраняя тем самым общую энергию, заключенную в солитонах.

Естественно, что эти положения не могут быть точными, так как основываются лишь на результатах численного моделирования. Тем не менее, мы полагаем, что они могут оказаться полезными как на пути теоретических исследований, так и практического использования волновых солитонов малых длительностей, подобно тому, какую роль играют шредингеровские солитоны огибающих.

1.5 Динамика поля с циркулярной поляризацией с учетом высокочастотной дисперсии ($\mu \neq 0$)

Следующим важным моментом с точки зрения реализуемости найденных нами солитонных решений (1.16)–(1.18) редуцированного нелинейного волнового уравнения является их динамика с учетом высокочастотной составляющей дисперсии среды ($\mu \neq 0$), которой мы пренебрегли в (1.7). Учет этой дисперсии, в частности, необходим при рассмотрении задачи самовоздействия волнового поля в прозрачных диэлектриках, важнейшим примером которых являются оптические волокна. Для

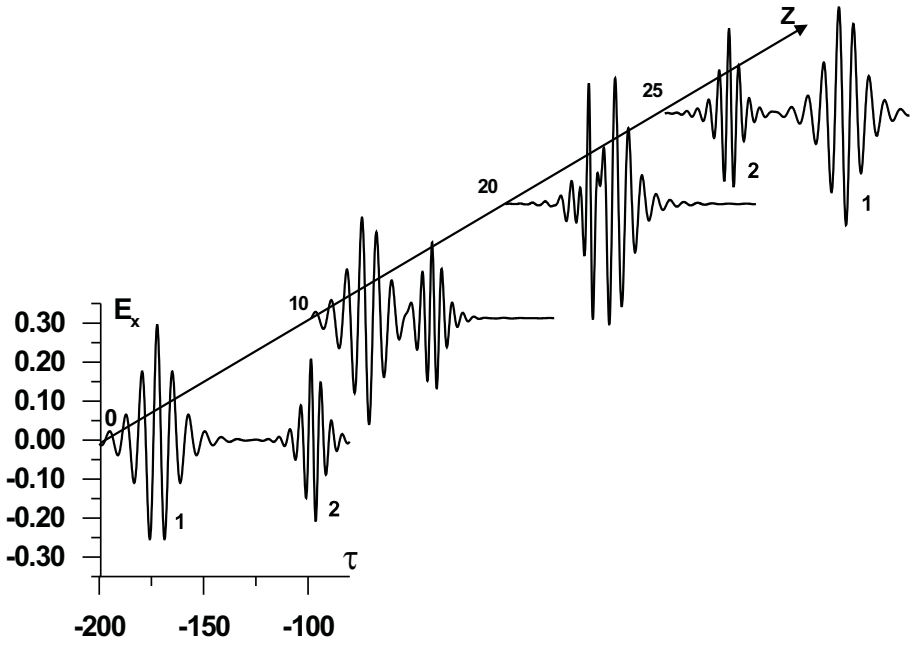


Рис. 1.12: Режим взаимодействия волновых солитонов с разными несущими частотами: $\omega = 0.8$ и 1.4, $a_{s1} = 0.29$, $\tau_{s1} = 11.5$ ($\delta_1 = 0.16$) и $a_{s2} = 0.22$, $\tau_{s2} = 6.67$ ($\delta_2 = 0.18$).

изучения свойств волновых структур (1.16)–(1.18) и их роли в динамике нелинейного распространения лазерных импульсов было проведено численное исследование уравнения (1.7) [172]. Как известно, введение четвертой производной в уравнении (1.7) может приводить к существенному изменению дисперсионных свойств среды, в частности, к появлению точки нуля дисперсии групповых скоростей $\omega_{cr} = \left(\dfrac{1}{3\mu}\right)^{1/4}$. Численное моделирование проводилось с использованием псевдоспектрального метода, точность которого контролировалась сохранением гамильтониана

$$\mathcal{H} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\int\limits_{-\infty}^{\tau} \boldsymbol{\mathcal{E}} d\tau' \right)^2 - \mu \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\tau \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_\tau \right) - \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \right)^2 \right] d\tau = const \ . \qquad (1.27)$$

При учете высокочастотной дисперсии все указанные свойства этих решений сохранялись в случае, когда спектр солитонов находился в области $\varpi < \omega_{cr}$. Однако главным вопросом здесь будет то, что произойдет, если заметная часть спектра импульса расположена в области с нормальной дисперсией групповой скорости ($\varpi > \omega_{cr}$) [172]. На рис.1.13 представлена эволюция волнового поля, заданного на входе в среду в виде волнового солитона уравнения (1.11), соответствующего $\delta = 0.32$ и частоте заполнения $\omega = 1$ при $\mu = 0.0658$. При этих параметрах отношение $\dfrac{\omega_{cr}}{\omega}$ составляет примерно 1.5, так, что точка нулевой дисперсии групповой скорости

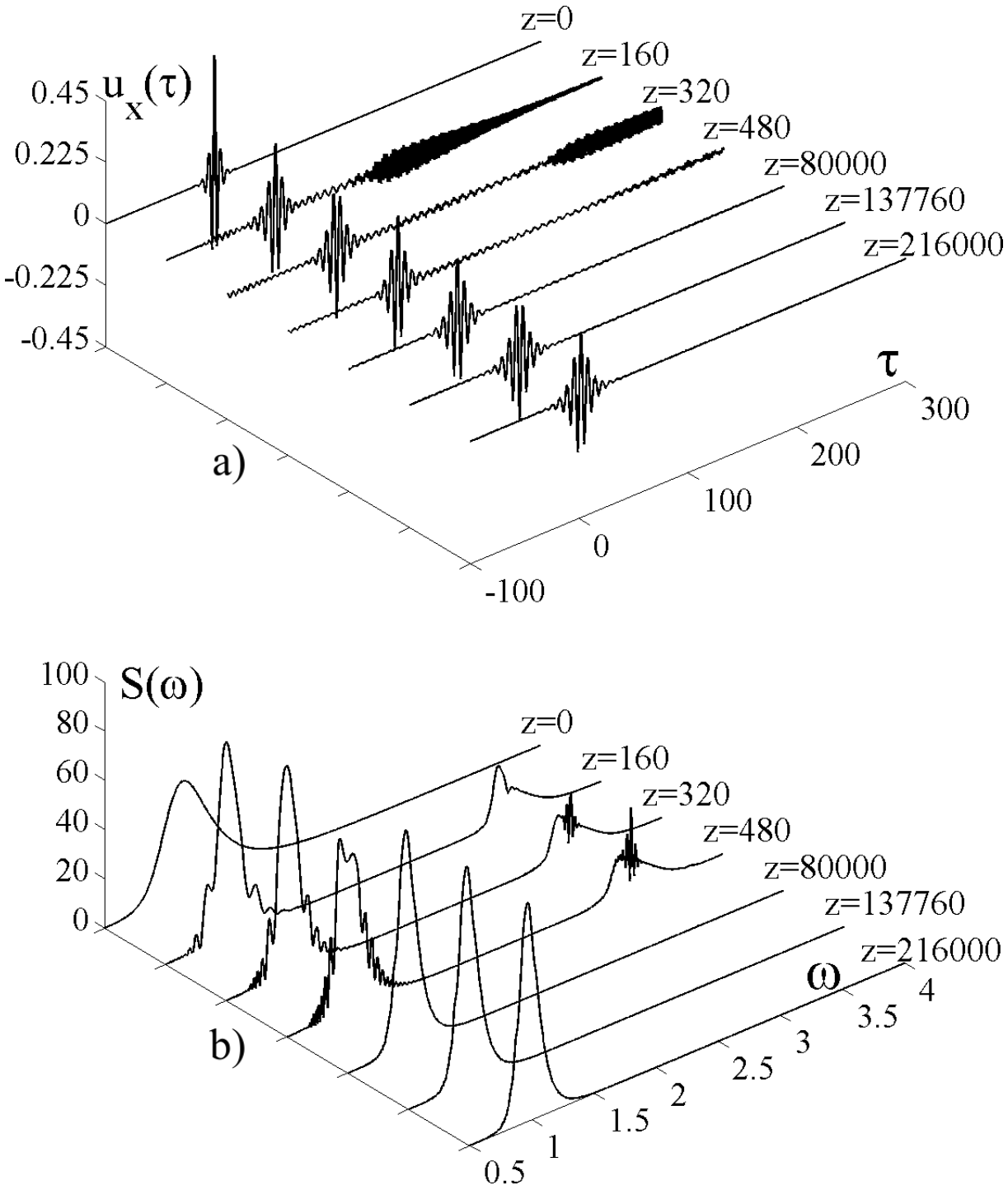


Рис. 1.13: Динамика волнового поля при учете высокочастотной дисперсии вдоль трассы распространения: (a) эволюция временного распределения, (b) эволюция спектра. Параметры входного солитона: $\omega = \omega^{in} = 1$ и $\delta = \delta_{in} = 0.32$. Параметры образовавшегося солитона: $\omega^{(n)} = 0.92$ и $\delta^{(n)} = 0.17$. Линейная дисперсионная длина для этих параметров $L_{dis} \simeq 15$.

находится на высокочастотном краю спектра импульса (рис. 1.13**(b)**). Видно, что при выбранных параметрах около 20% энергии оптического импульса расположено изначально в области с нормальной дисперсией групповой скорости (рис. 1.13**(b)**, рис. 1.14**(a)**). Как ожидалось, это приводит к разбиению начального спектра на две части: правая часть спектра ($\omega > \omega_{cr}$) излучается в виде убегающих квазигармонических волн (см. рис. 1.13 при $z \sim 0 \ldots 200$), в то время как левая часть спектра трансформируется в новую солитоноподобную структуру с небольшим числом колебаний поля, но сдвинутой несущей частотой в красную (низкочастотную) область спектра. В дальнейшем новый образовавшийся солитон распространяется без каких-либо изменений (рис. 1.13 при $z \gtrsim 500$). Следует отметить, что спектр образовавшейся структуры полностью локализован в области с аномальной дисперсией групповой скорости (рис. 1.13**(b)**, рис. 1.14**(a)**).

Механизмом разрушения волнового поля, заданного на входе в среду при этом, по-видимому, служит четырехволновое параметрическое взаимодействие волн в среде с кубичной нелинейностью. Высокочастотная дисперсия делает возможным выполнение условий фазового синхронизма для такого параметрического процесса [3,4,68,100,135]. О наличии такого параметрического взаимодействия свидетельствует возникновение пика на смещенной частоте (см. рисунок 1.13**(b)**), который исчезает вследствие группового разбегания импульсов (в численной схеме этот импульс «выбегает»за пределы временного интервала расчета). Для параметров на рисунке 1.13 энергетическая эффективность параметрического преобразования частоты составила около 30% (см. рисунок 1.14**(b)**) [172].

Чтобы удостовериться, что образовавшаяся волновая структура действительно является солитоном с малым числом колебаний поля и идентифицировать его физические параметры: ω и δ , мы использовали приближенное решение волнового солитона (1.19), которое с хорошей точностью (менее чем 1%) описывает динамику поля вплоть до $\delta \simeq \delta_{cr}$

$$6\delta\sqrt{\delta^2 - \frac{a^2}{2\gamma}} - Arcosh\left(\frac{\sqrt{2\gamma}\delta}{a}\right) = \pm\delta\eta \ . \tag{1.28}$$

Используя это решение (1.28) в неявном виде, мы можем найти амплитуду соли-

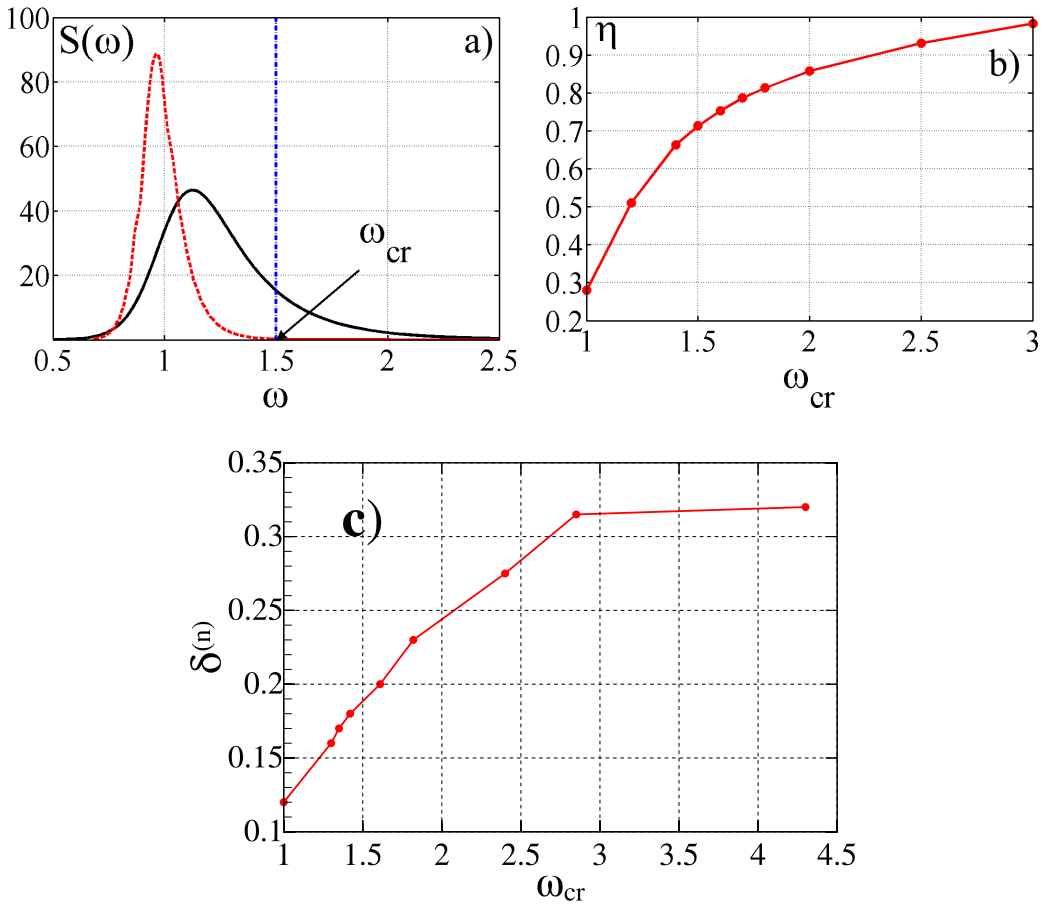


Рис. 1.14: **(a)** Спектральные мощности волновых солитонов $S(\omega)$ на входе $z = 0$ (черная сплошная линия) и при $z = 216000$ (красная пунктирная линия), соответствующие рис. 1.13. **(b)** Зависимость отношения энергии сгенерированного солитона от входной энергии в импульсе как функция от ω_{cr}. **(c)** Зависимость параметра $\delta^{(n)}$ сгенерированного солитона от положения точки нуля дисперсии групповой скорости ω_{cr}. Параметр $\delta^{(n)}$ определен на основе уравнения (1.30). Параметры входного солитона: $\omega = \omega^{in} = 1$ и $\delta = \delta_{in} = 0.32$.

тона и его энергию:

$$a_m = \sqrt{2}\frac{\delta}{\omega} \tag{1.29a}$$

$$W_s = \frac{\gamma}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\eta = \frac{4\delta\left(1-3\delta^2\right)}{\omega^3}\ . \tag{1.29b}$$

Для выделения солитона в компьютерном моделировании мы использовали оконный фильтр во временной области и далее определили энергию и амплитуду [3] выделенной структуры. Решив систему (1.29) , найдем параметры сгенерированной волновой структуры: частоту солитона $\omega = \omega^{(n)}$ и $\delta = \delta^{(n)}$ [или групповую скорость $v_{gr} = \gamma^{-1} = \left(\delta^2+1\right)\omega^2$], которые полностью характеризуют образовавшийся солитон

$$\omega^{(n)} = \frac{2\sqrt{3}a_m^2}{W_s}\sqrt{-1+\sqrt{1+\frac{W_s^2}{18a_m^6}}} \tag{1.30a}$$

$$\delta^{(n)} = \frac{a_m\omega^{(n)}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}a_m^3}{W_s}\sqrt{-1+\sqrt{1+\frac{W_s^2}{18a_m^6}}}\ . \tag{1.30b}$$

Применяя эту процедуру к случаю на рисунке 1.13 , мы получим следующие параметры недавно родившегося солитона: $\omega^{(n)} = 0.92$ и $\delta^{(n)} = 0.17$, с энергией в солитоне около 70% от начальной энергии в импульсе (рис. 1.14). Параметры входного солитона: $\omega = \omega^{in} = 1$ и $\delta = \delta_{in} = 0.32$.

При дальнейшем смещении центральной частоты ϖ к точке нуля дисперсии ($\frac{\varpi}{\omega_{cr}} \gtrsim 0$) часть спектра солитона оказывается в области с нормальным законом дисперсии групповой скорости, вследствие чего происходит его быстрое разрушение. Отметим, что в случае, когда центральная частота в спектре импульса лежит в области нормальной дисперсии и близка к точке нуля дисперсии групповой скорости ω_{cr}, наблюдается эффективная генерация спектрального континуума, сопровождающаяся расплыванием импульса во временной области [31, 91, 92, 246]. Тем не менее, солитон с большей длительностью и в этом случае может быть сформирован, как только часть первоначального спектра импульса будет локализована ниже критической частоты, что согласуется с недавними экспериментами [164]. Важно отметить, что более общая ситуация по перестройке солитонной структуры от точки нулевой дисперсии групповой скорости в случае эллиптически поляризованного излучения будет рассмотрена в разделе 1.7.2.

[3] Как максимум поля интенсивности

На рисунке 1.14 подведены итоги компьютерного моделирования и показана зависимость эффективности генерации солитона[4] от положения точки нуля дисперсии групповой скорости ω_{cr} (см. рисунок 1.14**(b)**). На иллюстрации 1.14**(c)** показана зависимость параметра $\delta^{(n)}$ сгенерированного солитона от ω_{cr}. Параметр $\delta^{(n)}$ по сути характеризует длительность сформировавшейся волновой структуры $\left[\tau_s^{(n)} \propto \frac{1}{\delta^{(n)}}\right]$. Хотелось бы подчеркнуть, что эти рисунки 1.14**(b, c)** отражают две вещи: устойчивую генерацию солитонов с малым числом колебаний поля и энергетическую эффективность такого процесса. Таким образом, солитоны с малым числом колебаний поля могут быть легко возбуждены в широкой области параметров и, следовательно, могут рассматриваться как элементарные структуры, которые играют фундаментальную роль в динамике экстремально коротких электромагнитных импульсов.

1.6 Самокомпрессия лазерных импульсов на основе солитонной концепции

Далее мы рассмотрим возможность самокомпрессии электромагнитных импульсов до предельно малых длительностей, содержащих несколько осцилляций поля. При решении поставленной задачи будем основываться на найденных нами солитонных структурах, соответствующих минимальным возможным длительностям волнового импульса. Как было показано численно в работах [139, 239], в комбинированной среде с безынерционной нелинейностью керровского типа и плазменным (низкочастотным) законом дисперсии эффект нелинейной самомодуляции приводит к самосжатию начального квазимонохроматического импульса до одного периода поля. В данном разделе мы предложим стратегию для самокомпрессии первоначально короткого импульса ниже одного периода поля, основанную на солитонах с небольшим числом колебаний поля как на фундаментальных структурах. Учитывая тот факт, что солитонные структуры имеют преемственную связь с солитонами Шредингера, для стратегии самокомпрессии мы будем следовать по пути, который хорошо известен в рамках НУШ и его обобщений. Основа этой идеи заключается не только в существовании солитонов с небольшим числом колебаний поля, но в значительной степени их устойчивости относительно парных соударений (см. раздел 1.4) [263]. Поскольку амплитуда солитонов НУШ однозначно связана с их длительностью, ин-

[4]Отношение энергии сгенерированного солитона к входной энергии в импульсе

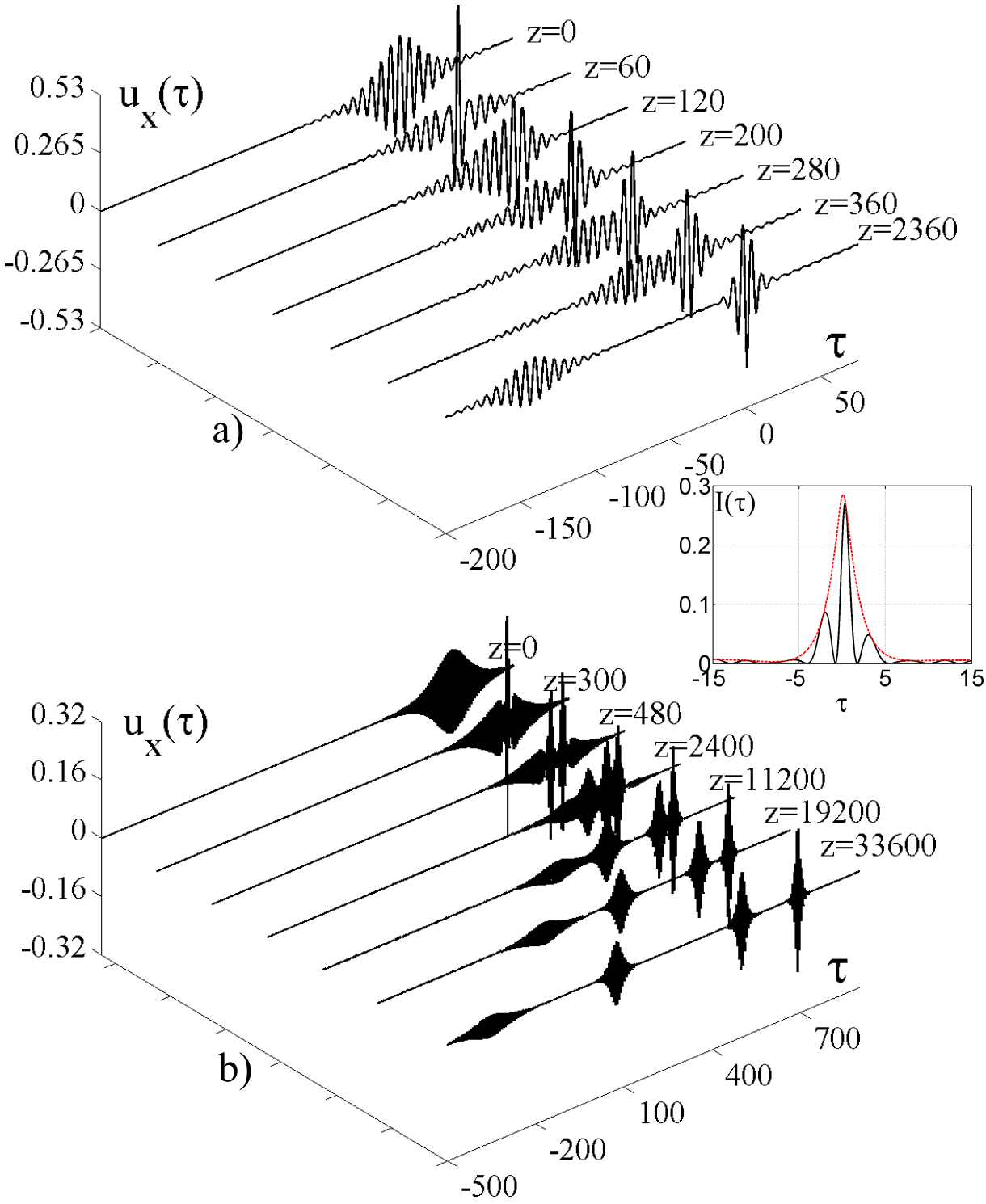


Рис. 1.15: Динамика волнового поля вдоль трассы распространения для двух случаев: **(a)** $\mathcal{N} = 2.04$, $\delta_{in} = 0.08$, $\omega_{in} = 1$; **(b)** $\mathcal{N} = 4.02$, $\delta_{in} = 0.02$, $\omega_{in} = 1$. На вставке приведено распределение интенсивности для сжатого импульса для случая $\mathcal{N} = 2.04$ на трассе $z = 60$. Здесь линейная дисперсионная длина для этих параметров $L_{dis} \simeq 60$ **(a)** и $L_{dis} \simeq 1000$ **(b)**.

теграл под огибающей поля в солитоне есть постоянное число [5]

$$\mathcal{K}_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_s d\tau \ , \tag{1.31}$$

где $\mathcal{E}_s(\tau)$ - распределение Шредингеровского солитона (1.23)

$$\mathcal{E}_s(\tau) = \frac{\sqrt{2}\delta}{\omega} \frac{1}{\cosh(\omega\delta\tau)} \ . \tag{1.32}$$

Это число $\mathcal{K}_s$ играет важную роль в динамике электромагнитных импульсов в рамках НУШ. Было показано, что самокомпрессия в рамках НУШ полностью характеризуется солитонным числом $\mathcal{N}$ в солитоне Шредингера высокого порядка, считая его в качестве начального импульса [1, 2, 108]. Данный параметр $\mathcal{N}$ определяется отношением интеграла под огибающей лазерного импульса (заданного на вход нелинейной среды) к интегралу под огибающей поля в солитоне (1.32)

$$\mathcal{N} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(z=0,\tau) d\tau}{\mathcal{K}_s} \ . \tag{1.33}$$

Амплитудное распределение солитонных структур электромагнитного поля предельно короткой длительности (1.18) с высокой точностью аппроксимируется распределением, соответствующим солитонам НУШ. Поэтому в первом приближении интеграл от амплитудного профиля предельно коротких солитонов также представляет собой некоторую универсальную постоянную, независимую от параметров солитона. Аналогично мы введем это число, взяв начальный импульс в форме солитона с малым числом колебаний поля высокого порядка, т.е.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\zeta) = \mathcal{N}\sqrt{\gamma} u(\zeta) \left[\boldsymbol{e}_x \cos\varphi(\zeta) + \boldsymbol{e}_y \sin\varphi(\zeta)\right] \ , \tag{1.34}$$

где $\varphi(\zeta)$ и $u(\zeta)$ подчиняются уравнениям (1.16), (1.18). Это соответствует тому, что в начальном распределение волнового пакета содержится несколько нелинейных структур.

На рисунке 1.15 показаны результаты численного моделирования распространения лазерного импульса, заданного на входе в нелинейную среду в виде (1.34), для двух случаев: **(a)** $\mathcal{N} = 2.05$, $\delta_{in} = 0.08$, $\omega_{in} = 1$; **(b)** $\mathcal{N} = 4.02$, $\delta_{in} = 0.02$, $\omega_{in} = 1$.

[5] Оно определяется только параметрами среды: величиной дисперсии групповой скорости и нелинейности [208].

По мере распространения импульса в среде наблюдается эффективное сжатие импульса на дистанциях $z \sim 60$ и $z \sim 300$ на рисунке 1.15**(a, b)** благодаря фазировке нелинейных структур, содержащихся в начальном распределении волнового пакета. Отметим, что линейная дисперсионная длина L_{dis} на рисунке 1.15**(a)** соответствует $L_{dis} \simeq 60$, а на рисунке 1.15**(b)** соответствует $L_{dis} \simeq 1000$. Причем процесс самосжатия сопровождается появлением заметной асимметрии в распределении интенсивности [105, 139, 172, 239]. Это отличает его от компрессии импульсов в рамках НУШ [46, 208] и является проявлением нелинейности дисперсии групповой скорости, присутствующей в уравнении (1.11). Минимальная длительность скомпрессированного импульса по половине максимума интенсивности в результате сжатия на рисунке 1.15**(a)** составила 2.88, а на рисунке 1.15**(b)** соответственно 5.86 (здесь период поля равен 2π). Таким образом, длительность сжатого импульса меньше одного периода поля. Энергетическая эффективность самокомпрессии (отношение энергии в узкой центральной части импульса к полной энергии в импульсе) составила около 49% и 40% соответственно. На рисунке 1.16 представлена зависимость длительности скомпрессированного импульса от числа солитонов $\mathcal{N}$, содержащихся в исходном лазерном импульсе, при различных начальных длительностях исходного лазерного импульса $\tau_p = 60\pi;\ 45\pi;\ 30\pi;\ 20\pi$ (период поля равен 2π), соответственно. Как видно из рисунка 1.16, фактор компрессии, определяемый как отношение исходной длительности лазерного импульса к длительности сжатого импульса, зависит не только от числа солитонов $\mathcal{N}$, но и от начальной длительности импульса τ_p, что является отличием от самосжатия в рамках НУШ [208]. Данная зависимость (см. рисунок 1.16) хорошо аппроксимируется законом $\dfrac{\tau_p}{\tau_{min}} \propto \mathcal{N}^{\alpha}$, где α зависит от начальной длительности импульса и увеличивается с уменьшением τ_p: $\alpha = 1.54;\ 1.6;\ 1.85;\ 2.1$.

Таким образом, на промежуточной стадии волновой пакет сильно сжимается. Однако, при дальнейшем распространении лазерного импульса в среде происходит его дробление на последовательность солитонов (1.16), (1.18) с параметрами [172]:

$$\delta^{(n)} \simeq (2n-1)\delta_{in}\ , \tag{1.35}$$

где $n = 1, \ldots, [N]$ есть последовательность целых чисел, как для шредингеровских солитонов, так и для большинства солитонов с малым числом колебаний поля $\delta^2 \ll 1$. В частности, на рисунке 1.15**(a)** в процессе распространения исходного волнового пакета сформировались два солитона, а на рисунке 1.15**(b)** – четыре солитона. Как отмечалось ранее, важной особенностью рассматриваемых волновых солитонов явля-

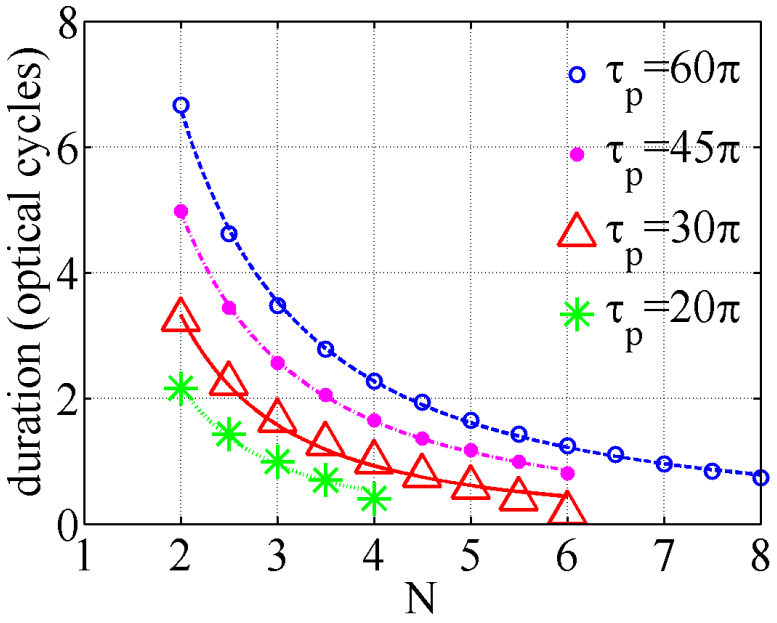


Рис. 1.16: Зависимость минимальной длительности от числа солитонов $\mathcal{N}$ при различных длительностях исходного лазерного импульса $\tau_p = 60\pi;\ 45\pi;\ 30\pi;\ 20\pi$. Пунктиром на рисунке представлена аппроксимация законом $\frac{\tau_p}{\tau_{min}} \propto \mathcal{N}^{\alpha}$. Здесь период поля равен 2π.

ется полуограниченный спектр их допустимых решений, то есть наличие граничного решения $\delta_{cr} = \sqrt{\frac{1}{8}}$, соответствующего предельному солитону (1.21) с минимально возможной длительностью импульса и, соответственно, с максимально возможной амплитудой. Поэтому число солитонов, на которые на самом деле разобьется начальный импульс, есть целое число $[N]$, фактически подчиняющееся следующему неравенству: $\delta^{([N])} < \delta_{cr}$, т.е.

$$(2[N]-1)\,\delta_{in} < \delta_{cr} = \sqrt{\frac{1}{8}}\,. \tag{1.36}$$

Иначе динамика импульса будет более сложной, но, в конечном счете, солитоны с $\delta^{([N])} < \delta_{cr}$ будут сформированы. Следует отметить, что заметное отличие значений N получается для экстремально коротких импульсов (для длины волны $\lambda \simeq 1\mu m$, ниже 10 фс), если используется в качестве оценки шредингеровский солитон, как следует из рисунка 1.5**(b)**. Это может привести к ошибочному предсказанию эффективности самокомпрессии импульса. Отметим, что в разделе 1.10.2 будет рассмотрен качественно отличный случай, когда на входе в нелинейную среду будет задан солитон высокого порядка (1.34) при $\mathcal{N} = 2.05$, $\delta = 0.11$. Однако рассмотренная выше

концепция будет некорректной, так как параметр второго солитона не сможет удовлетворить неравенству (1.36), т.е. $\delta^{(2)} \gtrsim \delta_{cr}$. Это приведет к тому, что начальное распределение лазерного импульса на асимптотической стадии разобьется только на один короткий солитон [105]. Следует отметить, что динамика солитона высокого порядка в рамках нелинейного уравнения Шредингера происходит немного по-другому. Солитоны в рамках НУШ не разбегаются, а существуют в виде связанной структуры. Начальное распределение разбивается на последовательность солитонов, которые в дальнейшем снова сливаются в начальное распределение, что соответствует бризерному поведению. В частности, бризерное решение Ψ при $\mathcal{N} = 2$ в рамках НУШ имеет следующий вид [209]

$$\Psi(z,\tau) = 4\frac{\cosh 3\tau + 3\cosh\tau\exp(4iz)}{\cosh 4\tau + 4\cosh 2\tau + 3\cos 4z}\exp\left(i\frac{z}{2}\right) \ . \tag{1.37}$$

Мы восстановили параметры образовавшихся солитонов, воспользовавшись процедурой, описанной в разделе 1.5 (см. уранение (1.30)), которые сформировались на асимптотической стадии: $\omega^{(1)} = 0.92$ и $\delta^{(1)} = 0.24$, $\omega^{(2)} = 0.97$ и $\delta^{(2)} = 0.08$ на рисунке 1.15**(a)**; $\omega^{(1)} = 0.97$ и $\delta^{(1)} = 0.14$, $\omega^{(2)} = 0.98$ и $\delta^{(2)} = 0.1$, $\omega^{(3)} = 0.99$ и $\delta^{(3)} = 0.06$, $\omega^{(4)} = 1$ и $\delta^{(4)} = 0.02$ на рисунке 1.15**(b)**.

Далее рассмотрим коэффициент энергетической эффективности η_n

$$\eta_n = \frac{W^{(n)}}{W} \ , \tag{1.38}$$

который характеризует долю энергии, содержащуюся в каждом отдельном родившемся солитоне. Здесь $W = \mathcal{N}^2 W_{in}$ – энергия в начальном волновом пакете (1.34), W_{in} – энергия солитона для случая $\delta = \delta_{in}$. Учитывая, что энергия в солитоне при $\delta \ll 1$ аппроксимируется законом $W^{(n)} \propto 4\delta^{(n)}$, следовательно, энергия в каждой возбудившейся волновой структуре может быть записана в следующем виде:

$$W^{(n)} \simeq (2n-1)W_{in} \ , \tag{1.39}$$

В результате получаем окончательное выражение для η_n

$$\eta_n = \frac{2n-1}{\mathcal{N}^2} \ . \tag{1.40}$$

Из выражения (1.40) следует, что в случае $\mathcal{N} = 2.04$ в самом коротком солитоне (см. рисунок 1.15**(a)**) содержится $W^{(2)} = \dfrac{3W}{4}$ начальной энергии. В случае $\mathcal{N} = 4.02$, представленном на рисунке 1.15**(b)**, в самом коротком солитоне содержится уже $W^{(4)} = \dfrac{7W}{16}$. Таким образом, с ростом числа солитонов $\mathcal{N}$, содержащихся в

начальном распределении (1.34), энергия в самом коротком солитоне будет уменьшаться.

Таким образом, мы определили режим самокомпрессии (см. рисунок 1.15) как промежуточный этап динамики импульса, для которой следующий важный вопрос заключается в том, что произойдет на финальной стадии. После самокомпрессии импульс расплывается и в дальнейшем разбивается на последовательность импульсов, определяющихся параметром $\mathcal{N}$, и впоследствие формируются солитоны, которые хорошо разделены в пространстве. На рисунке 1.15**(a)** показан результат разбиения начального импульса на два солитона, а на рисунке 1.15**(b)** – на четыре солитона, что согласуется с солитонным числом в начальном импульсе (1.36).

Эти результаты имеют важное значение с точки зрения экспериментального получения оптических импульсов предельно короткой длительности. В частности, использование солитонного режима компрессии лазерных импульсов позволяет, в принципе, достичь длительности лазерного излучения меньше одного оптического периода, что, как уже указывалось в начале главы, невозможно для существующей в настоящее время методики получения лазерного излучения предельно короткой длительности. К примеру, как следует из результатов численного моделирования [105], для гауссового импульса с начальной длительностью $\tau_o = 40$ фс на длине волны $\lambda = 0.8$ мкм с начальной энергией $W = 1$ мДж, распространяющегося в диэлектрическом капилляре с диаметром $d_c = 250$ мкм и длиной $L \simeq 80$ см, заполненном газо-плазменной смесью: при давлении аргоновой плазмы в несколько Торр и нейтрального газа в четыре атмосферы, на выходе капилляра будет сформирован импульс длительностью $\tau_{out} = 1.5$ фс. Большой диаметр капилляра был выбран для работы с энергией импульса порядка одного миллиджоуля. Отметим, что дисперсии диэлектрического капилляра не достаточна для обеспечения аномальной дисперсии групповой скорости, поскольку вклад волновода в общую дисперсию мал для данного диаметра $\left[\dfrac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \propto \dfrac{1}{d_c^2}\right]$ по сравнению с таковой у нейтрального газа. Поэтому для достижения необходимой аномальной дисперсии групповой скорости был рассмотрен случай, когда в волноводе до прихода основного импульса, который мы собираемся сжать, необходимо создать предварительно плазму с давлением в несколько Торр, что достаточно для достижения аномальной дисперсии.

Важно отметить, что в недавней работе [22] было экспериментально продемонстрирована самокомпрессия лазерного импульса с начальной длительностью $\tau_o = 80$ фс на длине волны $\lambda = 1.8$ мкм с начальной энергией $W = 120$ мкДж в фотонном

кристаллическом волноводе с диаметром $d_c \sim 60$ мкм на длине $L = 0.2$ м, заполненного ксеноном в четыре атмосферы. На выходе капилляра был получен лазерный импульс длительностью $\tau_{out} = 4.5$ фс. В данном случае только дисперсии волновода было достаточно для обеспечения аномальной дисперсии групповой скорости из-за малости диаметра капилляра, но это ограничило использование их энергии.

1.7 Векторные солитоны

Как отмечалось ранее, один из самых поразительных эффектов в нелинейной физике – это существование уединенных волн, в частности, в экстремальной нелинейной оптике это есть солитоны с малым числом колебаний, которые являются следствием результата взаимодействия дисперсии и нелинейности. Такие локализованные волны известны как оптические солитоны в общепринятой нелинейной оптике [243], играя исключительно важную роль в различных разделах физики [60]. В частности, векторные или эллиптически поляризованные солитоны представляют собой крайне значимый класс локализованных солитонов как нелинейные двупреломления, индуцированные оптическим керровским эффектом, становятся существенными, и поляризационная эволюция их разительно отличается [193]. Это также крайне значимо, так как эллиптически поляризованные импульсы могут обеспечить новое измерение лазерных параметров, которые позволяют осуществлять квантовый контроль в молекулах и наноструктурах [93, 169]. Однако точные солитонные решения с конечным числом колебаний были найдены не так давно для линейного [157] и циркулярно-поляризованного света [172, 239, 240] (см. раздел 1.1). Кроме того, базовое волновое уравнение для линейного поляризованного поля принадлежит к классу полностью интегрированных уравнений [156]. Важно отметить, что в предельном случае наиболее коротких длительностей наблюдается количественное различие в условиях возбуждения этих двух типов солитонов (смотрите ниже) и, более того, в существовании подобных малопериодных солитонов с произвольными поляризационными состояниями *нетривиально*.

В данном разделе мы обнаружили важную связь между линейно и циркулярно поляризованными солитонами, найдя так называемые эллиптически поляризованные солитоны с малым числом колебаний в изотропной среде с керровской нелинейностью. Подобные уединенные волны характеризуются фиксированным поляризационным эллипсом, который однозначно вращается с постоянной скоростью в процессе

распространения. Такое вращение достаточно сходно со шредингеровским солитоном в недвупреломляющих средах [58, 59, 83, 170]. Это выглядит очень неожиданным, поскольку в общепринятой нелинейной оптике, где используется приближение медленно меняющихся амплитуд, не существует количественного различия между линейными и циркулярно поляризованными солитонами. Следует отметить, что эллиптически поляризованный шредингероподобный векторный солитон в изотропной среде с керровской нелинейностью недавно был обнаружен экспериментально [58,59]. Также мы приподняли завесу тайны новой физики в нетривиальном взаимодействии между этими солитонами и показали, что их взаимодействие критически зависит от относительного поляризационного вращения.

Для дальнейшего анализа удобно переписать уравнение (1.7) через новую функцию $\mathcal{U} = \mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial z} - \mu\frac{\partial^3\mathcal{U}}{\partial\tau^3} + \frac{\partial}{\partial\tau}(|\mathcal{U}|^2\mathcal{U})\right] + \mathcal{U} = 0\ . \tag{1.41}$$

Обращая особое внимание на случай аномальной дисперсии, где солитоны с малым числом колебаний могут существовать, мы принимаем решения уравнения (1.41) в форме (более подробно смотри выше)

$$\mathcal{U}(z,\tau) = \mathcal{A}(z,\tau)e^{i\phi(z,\tau)}\ , \tag{1.42}$$

мы получаем для реальной функций $\mathcal{A}(z,\tau)$ и $\phi(z,\tau)$ следующую систему уравнений:

$$\mathcal{A}_{z\tau} - \mathcal{A}\varphi_z\varphi_\tau + \mathcal{A} + (\mathcal{A}^3)_{\tau\tau} - \mathcal{A}^3\varphi_\tau^2 = 0, \tag{1.43a}$$

$$\mathcal{A}\varphi_{z\tau} + \mathcal{A}_z\varphi_\tau + \mathcal{A}_\tau\varphi_z + 2(\mathcal{A}^3)_\tau\varphi_\tau + \mathcal{A}^3\varphi_{\tau\tau} = 0. \tag{1.43b}$$

В данном случае тип поляризации определяется функцией $\varphi(z,\tau)$. Два предельных случая линейной [156,157] и циркулярной поляризации [105,172], где точные решения для солитонов с малым числом колебаний поля найдены и в настоящее время хорошо проработаны. В наиболее простом случае циркулярной поляризации солитонные решения уравнения могут быть представлены как [105, 172] (см. формулу (1.16))

$$\mathcal{A}(z,t) = \gamma^{1/2}\mathcal{A}_S(\xi), \tag{1.44a}$$

$$\varphi(z,\tau) = \varphi_s = \omega_o(\tau+\gamma z) + \Phi_S(\xi), \tag{1.44b}$$

$$\Phi_S(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\xi} \frac{\mathcal{A}_S^2(3-2\mathcal{A}_S^2)}{2(1-\mathcal{A}_S^2)^2}d\xi', \tag{1.44c}$$

где $\xi = \omega_o(\tau - \gamma z)$, ω_o – несущая частота солитона и γ^{-1} – групповая скорость солитона. Профиль интенсивности $\mathcal{A}_S(\xi)$ это солитоноподобное решение уравнения второго порядка в обычных производных для стационарного распределения огибающей (1.18), как отмечалось ранее (см. раздел 1.2), имеющее место при $\delta^2 \leq \delta_{cr}^2 = \frac{1}{8}$. Отметим, что существование предельного солитона с циркулярной поляризацией с минимальной длительностью связано с условием $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U} d\tau = 0$, которое является интегралом уравнения (1.41).

1.7.1 Солитоны с линейной поляризацией

Далее обратимся к вопросу существования солитонов с линейной поляризацией. Случай линейной поляризации соответствует $\varphi(z,\tau) = const = \varphi_o$, где вектор электрического поля создает угол φ_o с проекцией на ось x. В этом случае уравнение (1.43) без потерь обобщения может быть сведено к одному уравнению для $\mathcal{A}(z,\tau)$ с $\varphi = 0$.

Как известно, отличие нелинейной динамики линейно-поляризованного поля от поля с циркулярной поляризацией заключается, прежде всего, в возможности более быстрого обогащения спектрального состава и, в первую очередь, на утроенных частотах в силу кубического характера нелинейности. Таким образом, вопрос об их реализуемости и роли в динамике поля зависит от эффективности возбуждения спектральных компонент на утроенных частотах, которая определяется как дисперсией среды, так и ее нелинейными свойствами. В рассматриваемой нами диспергирующей среде с плазменным законом дисперсии условия волновых синхронизмов для резонансного возбуждения спектральных гармоник поля в линейном режиме не выполняются. Однако, очевидно, что для достаточно высоких частот, где низкочастотная дисперсия практически не проявляет себя, расстройки волновых синхронизмов могут быть малыми. Для оценки влияния нелинейности обратимся к простейшей задаче о возбуждении третьей гармоники синусоидального сигнала с заданной интенсивностью.

Представляя в уравнение (1.41) поле в виде

$$\mathcal{U}(z,\tau) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{U}_1(z)e^{i\omega\tau - ikz} + c.c.\right] + \frac{1}{2}\left[\mathcal{U}_3(z)e^{3i\omega\tau - ik_3 z} + c.c.\right] \tag{1.45}$$

получим следующую систему уравнений для соответствующих амплитуд (при $\mu = 0$):

$$i\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial z} = \frac{3\omega}{4}|\mathcal{U}_1|^2\mathcal{U}_1 \tag{1.46a}$$

$$i\frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial z} = \frac{3\omega}{4}\left[\mathcal{U}_1^3 e^{i\Delta k z} + 6|\mathcal{U}_1|^2\mathcal{U}_3\right] \ , \tag{1.46b}$$

где $\Delta k = k_3 - 3k = \dfrac{8}{3\omega}$ – линейная фазовая расстройка. Решая эту систему уравнений, мы получим следующее выражение для интенсивности третей гармоники:

$$|\mathcal{U}_3(z)|^2 = \frac{9\mathcal{U}_{1o}^6\omega^2}{4}\frac{\sin^2\left(\dfrac{\Delta\tilde{k}z}{2}\right)}{\left(\Delta\tilde{k}\right)^2} \ , \tag{1.47}$$

где $\Delta\tilde{k} = \Delta k + \dfrac{9\omega}{4}\mathcal{U}_{1o}^2 = \dfrac{8}{3\omega} + \dfrac{9\omega}{4}\mathcal{U}_{1o}^2$, $\mathcal{U}_{1o}^2$ – интенсивность основного сигнала. Как следует из (1.47), в той области частот, где низкочастотная дисперсия важна, амплитуда третьей гармоники всегда мала. Об этом свидетельствуют также численные расчеты [139, 246], показывающие, что в области аномальной дисперсии соответствующие спектральные компоненты малы. Таким образом, анализ солитонных решений для волнового поля, проведенный для циркулярно поляризованного излучения, может быть распространен, естественно, с известными оговорками, и на линейно поляризованные поля, в нелинейной динамике которых упомянутые выше волновые солитоны должны также играть важную роль.

По-видимому, солитон с линейной поляризацией был впервые численно обнаружен в работе [246]. При этом характерная динамика возбуждения солитона с линейной поляризацией подобна случаю, которая была рассмотрена нами ранее в задаче по возбуждению солитона с циркулярной поляризацией (см. рисунок 1.7).

Далее обратимся к точным результатам, полученным недавно в работах [156, 157] для нелинейного уравнения, описывающего динамику линейно поляризованного поля. Для дальнейшего анализа удобно переписать уравнение для линейно поляризованного поля в следующем виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \tau} = u + \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}u^3 \ , \tag{1.48}$$

где $u = \sqrt{6}\mathcal{U}$. Для удобства данное уравнение написано на характеристике $\tau = \omega_o(t + z/c)$. Одним из методов исследования уравнения (1.48) с начальными данными $u(z = 0, \tau)$, сводящих получение решения к квадратурам, является метод обратной задачи теории рассеяния. В работе [156] было показано, что уравнение (1.48) относится к классу интегрируемых уравнений, к которому может быть

применен метод обратной задачи рассеяния. Данный метод является основным инструментом решения задачи Коши для интегрируемых уравнений. Для нелинейного уравнения Шредингера метод был развит в работах Захарова и Шабота [202]. Метод обратной задачи рассеяния основан на том факте, что нелинейное уравнение можно представить в виде системы линейных уравнений. Возьмем пару функций v_1 и v_2, зависящих от переменных z и τ, образуем из них матрицу $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ и потребуем, чтобы она удовлетворяла системе уравнений

$$v_\tau = \mathcal{U} v \ , \tag{1.49a}$$

$$v_z = \mathcal{V} v \ , \tag{1.49b}$$

где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ суть матрицы, зависящие от функции U или ее производных. Уравнения (1.49) не противоречат друг другу только при определенном виде матриц $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ [156]

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda u_\tau \\ -\lambda u_\tau & -\lambda \end{pmatrix} \tag{1.50a}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2}u^2 + \frac{1}{4\lambda} & -\frac{\lambda}{2}u^2 u_\tau - \frac{1}{2}u \\ \frac{\lambda}{2}u^2 u_\tau - \frac{1}{2}u & \frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{1}{4\lambda} \end{pmatrix} \ , \tag{1.50b}$$

где λ произвольная ненулевая константа. Причем условие совместимости ($v_{\tau z} = v_{z\tau}$) уравнений (1.49) в этом заключается в выполнении уравнения (1.48). При этом матрицы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ образуют пару Лакса.

В работе [157] было показано, что уравнение (1.48) может быть переписано через цепь преобразований

$$u(z,\tau) = \frac{\partial q}{\partial z} \ , \tag{1.51a}$$

$$\tau = w(y,z): \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \cos q, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2 \tag{1.51b}$$

к другому хорошо известному интегральному нелинейному уравнению в частных производных *sine-Gordon*

$$\frac{\partial^2 q}{\partial z \partial y} = \sin q \ . \tag{1.52}$$

Таким образом, как следует из выражения (1.51a), чтобы найти решение для u необходимо взять частную производную по эволюционной переменной z от решения

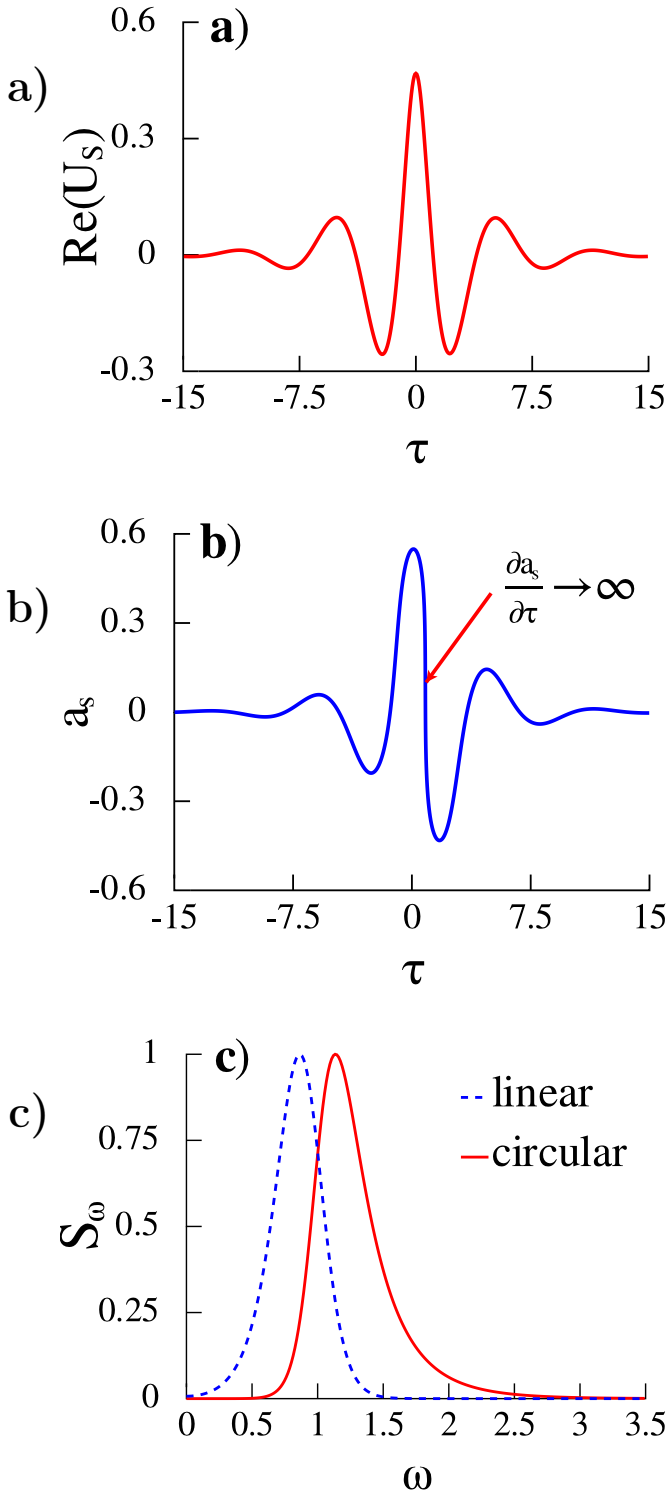


Рис. 1.17: **(a)** Временной профиль предельного солитона с циркулярной поляризацией. **(b)** Распределение поля в солитоне с линейной поляризацией. **(c)** Красной линией представлен спектр солитона с циркулярной поляризацией, синей пунктирной линией – спектр солитона с линейной поляризацией.

для уравнения *sine-Gordon*. Причем поскольку нас интересует локализованные решения для поля $u(z,\tau)$, необходимо рассматривать делокализованные решения уравнения (1.52). Возьмем бризерное решение уравнения *sine-Gordon* (1.52), которое описывает нелокализованное распределение [95]:

$$q = -4\arctan\left(\frac{m\sin\psi}{n\cos\phi}\right) , \tag{1.53}$$

где $\phi = m(y+z)$, $\psi = n(y-z)$, $n = \sqrt{1-m^2}$, $0 < m < 1$ – солитонный параметр. Применяя преобразования (1.51), получаем следующее точное решение уравнения (1.48) в параметрическом виде [157]

$$u = 4mn\frac{m\sin\psi\sinh\phi + n\cos\psi\cosh\phi}{m^2\sin^2\psi + n^2\cosh^2\phi} , \tag{1.54a}$$

$$\tau = y + 2mn\frac{m\sin 2\psi - n\sinh 2\phi}{m^2\sin^2\psi + n^2\cosh^2\phi} . \tag{1.54b}$$

Отметим, что из соотношений (1.51) можно получить следующее выражение

$$\frac{\partial u(z,\tau)}{\partial\tau} = \tan q(z,y) \tag{1.55}$$

из которого следует, что при

$$m = m_{cr} = \sin\frac{\pi}{8} \approx 0.383 \tag{1.56}$$

решение для $u(z,\tau)$ имеет особенность $\dfrac{\partial u}{\partial\tau} \to \pm\infty$. Таким образом, важной особенностью рассматриваемых волновых солитонов с линейной поляризацией является полуограниченный спектр их допустимых решений $0 < m < m_{cr}$ как и для рассматриваемых ранее солитонов с циркулярной поляризацией $0 < \delta < \delta_{cr} = \sqrt{1/8}$. Чтобы установить связь полученных решений с хорошо известными солитонами Шредингера, необходимо рассмотреть малые значения параметра m, т.к. длительность волновых структур обратно пропорциональна данному параметру. Решение при $m \ll 1$ имеет следующий вид

$$u(z,\tau) \simeq 4m\frac{\cos(\tau - z)}{\cosh[m(\tau + z)]}, \quad \tau \simeq y . \tag{1.57}$$

Таким образом, уравнение (1.48) может быть переписано через цепь преобразований как уравнение *sine-Gordon*. Так, стартуя от бризерного решения уравнения *sine-Gordon*, становится возможным получить точную форму линейно-поляризованного поля (1.54).

На рисунке 1.17(**a**) сплошной красной линией представлено распределение предельного солитона с циркулярной поляризацией, а на рисунке 1.17(**c**) красной линией представлен его спектр. Обратим внимание, что есть качественная разница между линейно и циркулярно поляризованными солитонами. Это следует из того факта, что для солитонов с линейной поляризацией в предельном случае, что соответствует наименьшей длительности волновой структуры, первая производная по времени от поля стремится к бесконечности $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} \to \infty$, то есть имеет место формирование ударной волны в профиле поля (см. рисунок 1.17(**b**)). Мы можем подчеркнуть данный пункт, показывающий, что самоукручение реального профиля поля на каждом периоде более эффективно для линейно-поляризованных импульсов, в то время как для циркулярно поляризованных импульсов подобный случайный имеет место только через профиль интенсивности. Таким образом, предельный солитон для линейно-поляризованного поля связан с сингулярностью поля из-за образования ударной волны на каждом полупериоде, в отличие от циркулярно-поляризованного солитона, где существование предельного солитона связано с наличием интегрального соотношения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U} d\tau = 0$, который ответственен за отсутствие нулевой гармоники в лазерном импульсе. Однако, важно отметить, что спектр солитона с циркулярной поляризацией шире, чем такой у линейно-поляризованного, что ясно отображается на рисунке 1.17(**c**). Это имеет место из-за сильной фазовой модуляции самого профиля интенсивности для циркулярно поляризованного поля, которое отражено в решении (1.16). Обобщая, можно сказать, что линейно-поляризованные солитоны не могут быть представлены как пара противоположно вращающихся циркулярно поляризованных солитонов, в отличие от случая векторных солитонов, описанных двумя связанными нелинейными уравнениями Шредингера [83, 170].

1.7.2 Солитоны с эллиптической поляризацией

Далее попытаемся идентифицировать импульсы с поляризацией, отличной от циркулярной и линейной, которые распространяются подобно уединенным волнам. Мы провели численные исследования, чтобы доказать существование эллиптически поляризованных уединенных волн, а также их стабильность. Для решения уравнения (1.41) мы применили псевдоспектральный метод Фурье, в котором пространственные и временные шаги были выбраны как $\Delta z = 0.02$ и $\Delta \tau = 0.115$, дабы сохранить Га-

мильтониан уравнения (1.41),

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}|\mathcal{U}|^4 + \mu \left| \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \tau} \right|^2 - \left| \int_{-\infty}^{\tau} \mathcal{U} d\xi \right|^2 \right] d\tau \tag{1.58}$$

с точностью 10^{-5} (число точек по продольной координате 2^{14}).

Возбуждение одиночного солитона с эллиптической поляризацией

Оттолкнемся от аналитических решений для циркулярно поляризованных солитонов в уравнениях (1.44), использовавшихся в качестве начальных условий. Так, если входное распределение поля представлено в форме уравнений (1.44), но с различными амплитудами (x, y) компонентов поля, то есть

$$Re(\mathcal{U}) = \gamma^{1/2} \mathcal{A}_S(\tau) \cos \varphi_s \tag{1.59a}$$

$$Im(\mathcal{U}) = (1-\epsilon)\gamma^{1/2} \mathcal{A}_S(\xi) \sin \varphi_s \ , \tag{1.59b}$$

любые эллиптически поляризованные уединенные волны могут быть легко возбуждены в процессе распространения импульса в нелинейной среде. В случае с подобным входным импульсом важны два основных параметра: амплитуда солитона или δ и ϵ, позволяя должным образом возбуждать эллиптически поляризованный солитон с данной эллиптичностью ϵ.

Типичный пример возбуждения одиночного эллиптически поляризованного солитона показан на рисунке 1.18 при следующих начальных условиях: $\omega_o = 1$, $\delta = 0.32$ и $\epsilon = 0.95$. На рисунке 1.18**(a)** показана эволюция проекции поля на ось x на различных расстояниях распространения лазерного импульса. Линейная дисперсионная длина для этих параметров есть $L_d \simeq 15$. В этом случае, после промежуточной стадии, когда часть энергии импульса излучится в форме непрерывных волн, уединенная волна сформируется с длительностью 1.5 оптического периода и эллипсной поляризацией с эллиптичностью порядка 0.95, однозначно вращаясь вдоль трассы распространения. На рисунке 1.18**(b)** показана динамика эллипса поляризации вдоль трассы распространения излучения. В данном случае продольный период вращения эллипса поляризации составляет $L_\epsilon \simeq 1536$.

Генерация нескольких солитонов

Другой фундаментальной проблемой, также имеющей практический интерес, является генерация предсказуемых мультисолитонных импульсов с различными поля-

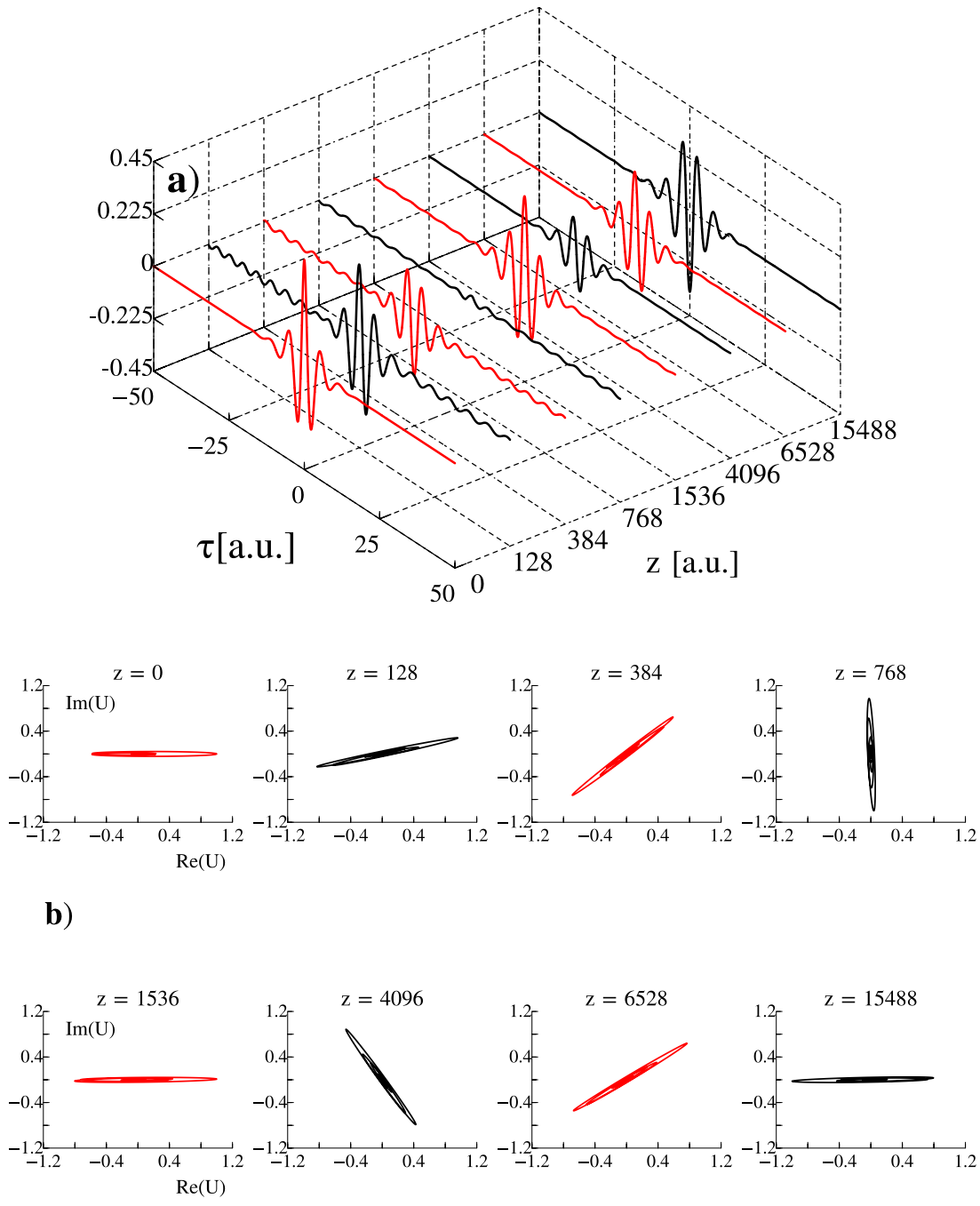


Рис. 1.18: **(a)** Возбуждение одиночного эллиптически поляризованного солитона, в случае, когда на входе нелинейной среды при $\mu = 0$ задан лазерный импульс (1.59) при следующих начальных условиях: $\delta_{in} = 0.32$, $\omega_o = 1$, $\epsilon_{in} = 0.95$. После промежуточного этапа формируется солитон с $\epsilon \simeq 0.95$. Линейная дисперсионная длина при этих параметрах $L_d \simeq 15$. Продольный период вращения эллипса поляризации составляет $L_\epsilon \simeq 1536$. **(b)** Снимки эллипса поляризации на различных расстояниях распространения лазерного импульса.

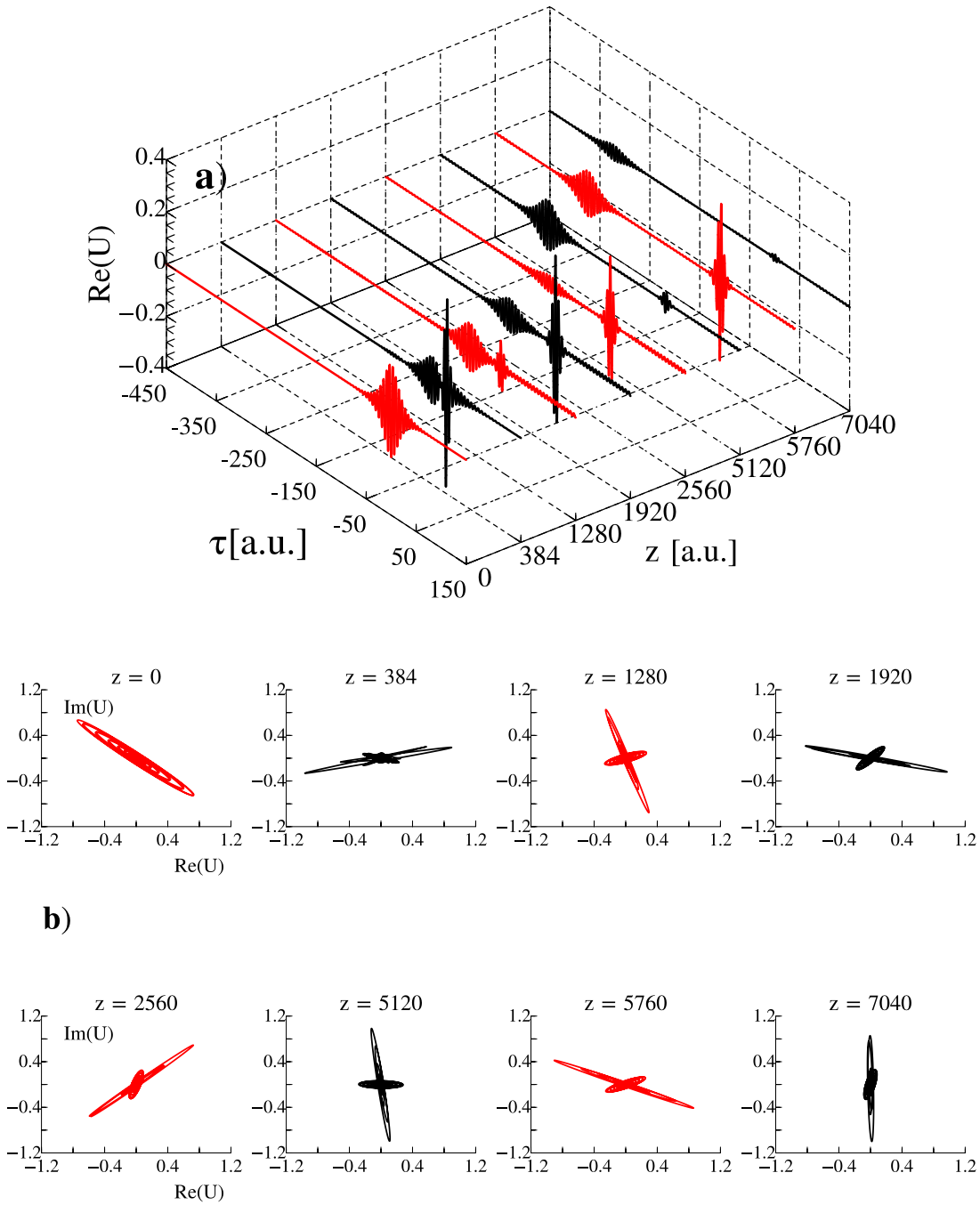


Рис. 1.19: Эволюция эллиптически поляризованного импульса при распространении в случае входного импульса в форме солитона высокого порядка с параметрами: $\mathcal{N} = 2$, $\delta = 0.1$, $\epsilon = 0.9$ и $\omega_o = 1$: **(a)** временные профили компоненты поля и **(b)** снимки эллипса поляризации на различных расстояниях распространения. Два выходных солитона сформировались с эллиптичностью около $\epsilon_1 \simeq 0.96$ и $\epsilon_2 \simeq 0.8$. Их эллипсы поляризации вращаются с периодичностью вдоль направления распространения. Период вращения эллипса солитона с большей амплитудой $L_{1\epsilon} \simeq 1984$; второго солитона, соответственно, $L_{2\epsilon} \simeq 4288$.

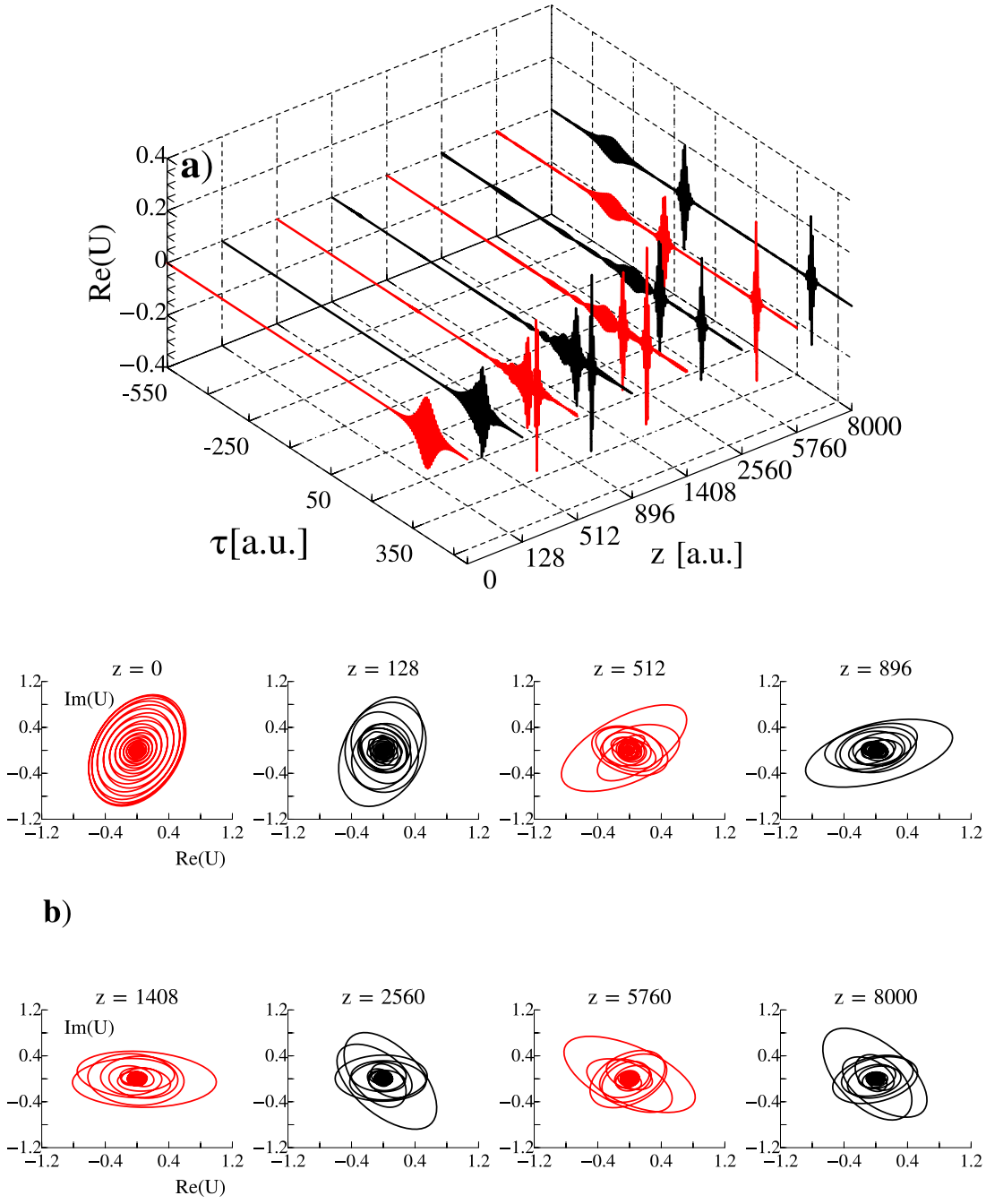


Рис. 1.20: Эволюция эллиптически поляризованного импульса при распространении в случае входного импульса в форме солитона высокого порядка с параметрами: $\mathcal{N} = 3$, $\delta = 0.06$, $\epsilon = 0.4$ и $\omega_o = 1$: **(a)** временные профили компоненты поля и **(b)** снимки эллипса поляризации на различных расстояниях распространения. В результате распада начального распределения сформировалось три солитона.

ризационными состояниями. Так как теперь нам известно, как сгенерировать одиночную эллиптически поляризованную уединенную волну, что естественно для применения концепции солитонов высокого порядка, которые играют исключительно важную роль в теории нелинейного уравнения Шредингера и использовались для компрессии оптического импульса циркулярно поляризованных импульсов длительностью менее периода поля [105, 172]. Так, введение солитона высокого порядка с числом $\mathcal{N}$ как параметра и определяя начальное распределение поля в форме

$$\mathcal{U}(z=0,\tau) = \mathcal{N}\mathcal{U}_S \ ,$$

где $\mathcal{U}_S$ есть солитоноподобное решение уравнения (1.41) с данными поляризационными состояниями (смотри выше), что реально возможно сгенерировать $[\mathcal{N}]$ оптических солитонов [$[\mathcal{N}]$ – есть целая от $\mathcal{N}$]. В качестве примера на рисунке 1.19**(a)** показана динамика эволюции солитоноподобного импульса с параметрами: $\mathcal{N} = 2$, $\delta = 0.1$, $\epsilon = 0.9$. Как видно из этих рассчетов, первая значительная компрессия импульса имеет место быть при $z \simeq 500$, которая подобна шредингеровскому сценарию распространения солитона высокого порядка, за исключением того факта, что появляется существенная ассиметрия в профиле поля по причине эффекта нелинейной дисперсии групповой скорости. Далее импульс распадается, и вскоре формируются две уединенные волны с различными поляризационными состояниями. На рисунке 1.19**(b)** показана эволюция проекции поля на ось x на различных расстояниях распространения лазерного импульса. Скорость вращения эллипса, как и ожидалось, выше для интенсивных солитонов, и они вращаются в одном направлении. В данном случае продольный период вращения эллипса поляризации для солитона с большей амплитудой составляет $L_{1\epsilon} \simeq 1984$, а для второго солитона $L_{2\epsilon} \simeq 4288$.

На рисунке 1.20 показан случай возбуждения трех солитонов при следующих начальных условиях: $\mathcal{N} = 3$, $\omega_o = 1$, $\delta = 0.06$ и $\epsilon = 0.4$. Таким образом, концепция солитонов высокого порядка позволяет нам в значительной степени предугадать число сгенерированных солитонов, однако недостаток этой процедуры состоит в отсутствии регулярного способа генерации солитонов с нужной эллиптичностью поляризации.

Высокочастотная дисперсия ($\mu \neq 0$)

Следующая важная проблема с точки зрения реализуемости солитонов с эллиптической поляризацией – их динамика с учетом высокочастотной дисперсии среды ($\mu \neq 0$), которой мы ранее пренебрегали. Известно, что введение высокочастотной

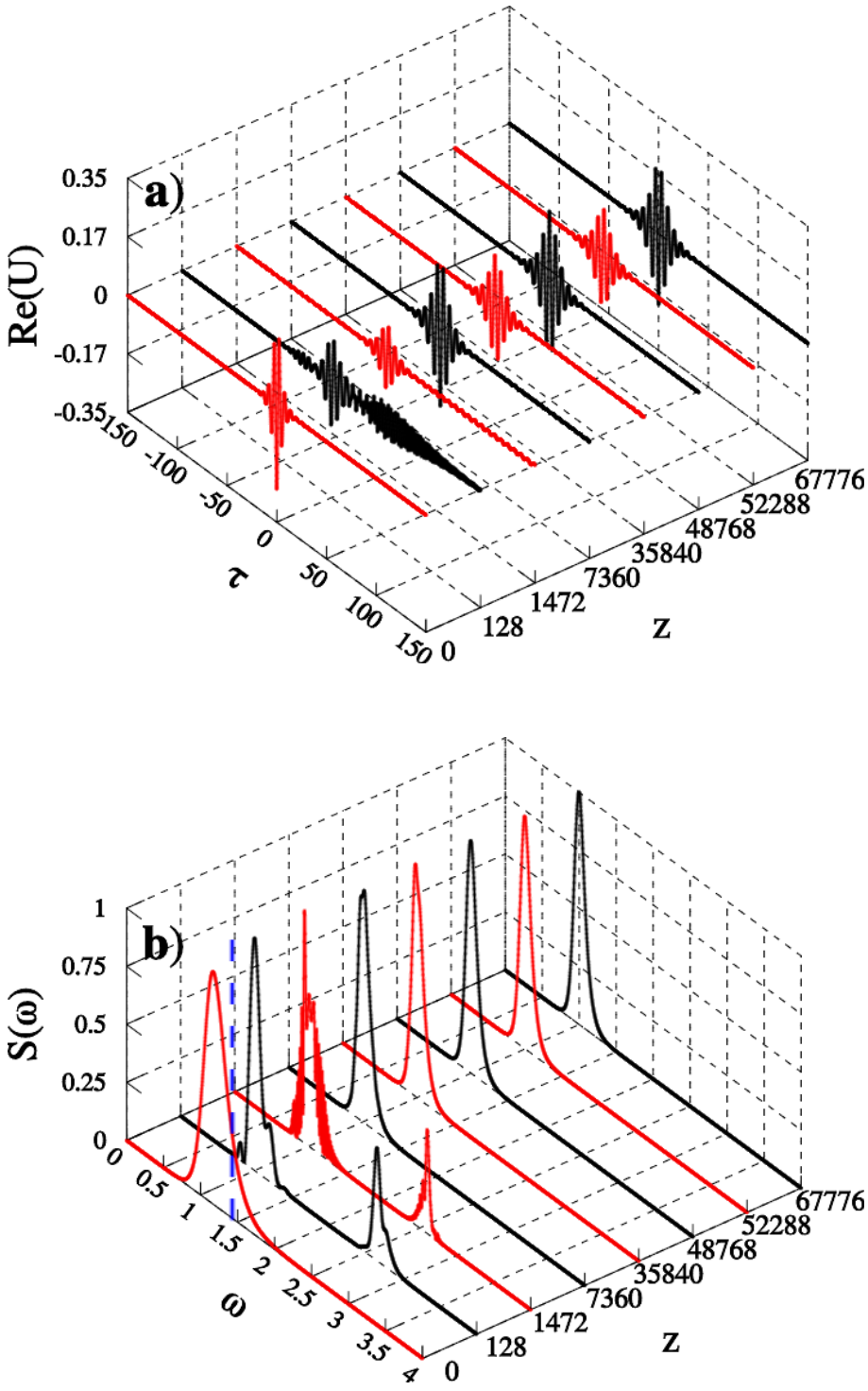


Рис. 1.21: **(a)** Эволюция волнового поля (1.59) в среде с высокочастотной дисперсией в случае $\omega_{cr} = 1.43$; **(b)** эволюция спектра мощности. Параметры входного солитона: $\delta_{in} = 0.32$, $\omega_{in} = 1$, $\epsilon = 0.95$. Линейная дисперсионная длина $L_{dis} \simeq 15$. Синей пунктирной линией показано положение точки нуля дисперсии групповой скорости. Здесь спектральная мощность нормирована на максимальное значение.

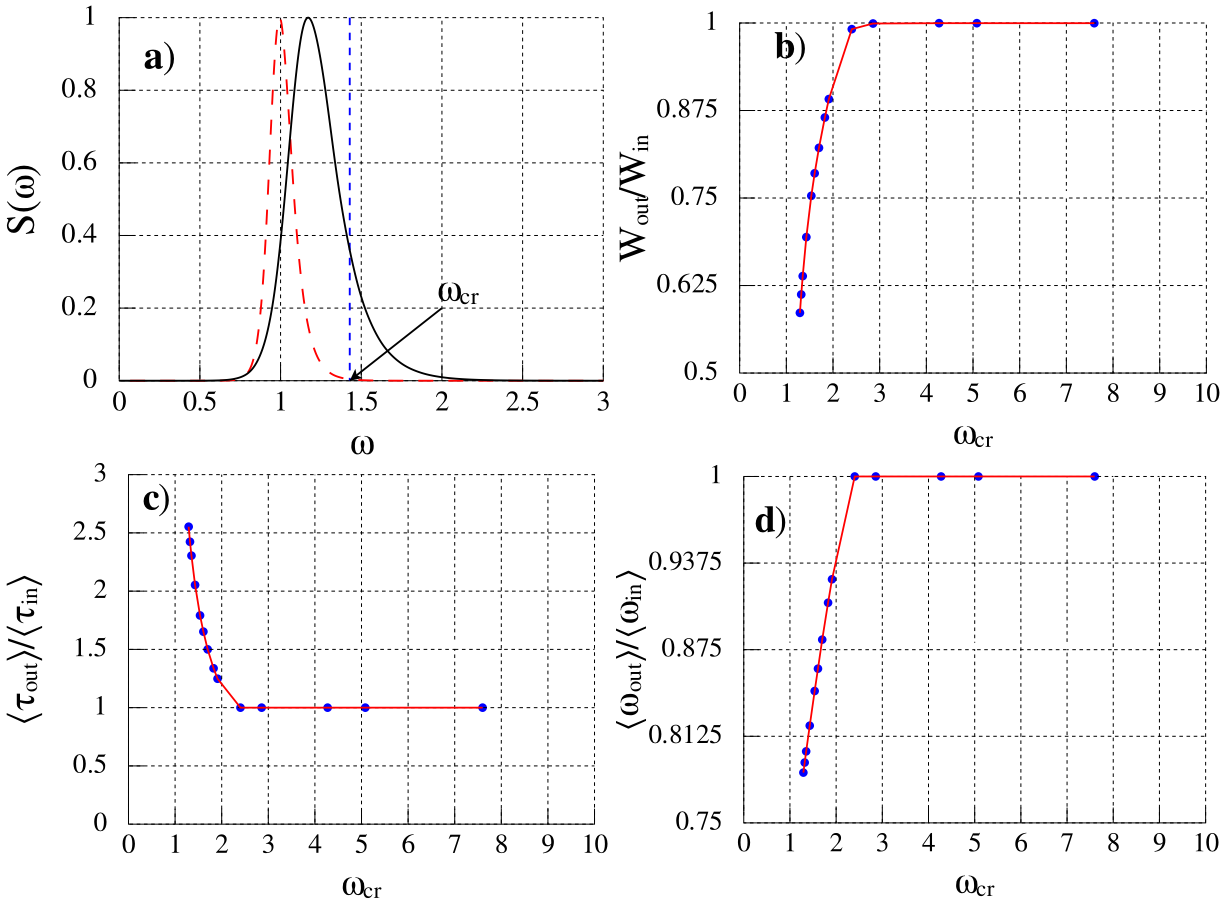


Рис. 1.22: Возбуждение солитона с учетом высокочастотной дисперсии ($\mu \neq 0$). **(a)** Спектральная интенсивность $S(\omega)$ волнового пакета на входе нелинейной среды при $z = 0$ (черная линия) и на выходе среды при $z = 67776$ (красная пунктирная линия) для начальных параметров, соответствующих рисунку 1.21. Здесь спектральные интенсивности нормированы на максимальное значение. Синей пунктирной линией показано положение точки нуля дисперсии групповой скорости. **(b)** Зависимость отношения энергии сгенерированного солитона от начальной энергии в импульсе от положения точки нуля дисперсии групповой скорости ω_{cr}. **(c)** Зависимость средней длительности солитона $\langle \tau_p \rangle$ (1.60a), нормированной на начальное значение, как функция ω_{cr}. **(d)** Зависимость средней несущей частоты $\langle \omega \rangle$ (1.60b) сформированного солитона, нормированной на начальное значение, как функция ω_{cr}.

дисперсии в уравнении (1.41) наряду с низкочастотной может существенно изменить ситуацию, в частности, как отмечалось ранее, может появиться точка нулевой дисперсии групповой скорости $\omega_{cr} = \sqrt[4]{\frac{1}{3\mu}}$ (см. рисунок 1.1).

С учетом высокочастотной дисперсии среды, все упоминаемые ранее свойства эллиптически поляризованных солитонов сохранились, когда часть спектра находилась в области $\omega < \omega_{cr}$ (подобно случаю с циркулярно поляризованными солитонами, который был рассмотрен в разделе 1.5). Главный вопрос здесь: что случится, если значительная часть спектра импульса располагается в области с нормальной дисперсией групповой скорости. На рисунке 1.21 представлена эволюция волнового пакета (1.59) для $\omega_{in} = 1$, $\delta_{in} = 0.32$, $\epsilon = 0.95$ в среде с высокочастотной дисперсией с $\mu = 0.08$, что соответствует случаю $\omega_{cr} = 1.43$. Для выбранных параметров точка нуля дисперсии групповой скорости расположена в задней части спектра импульса (см. рисунок 1.21**(b)**). Ясно, что для выбранных параметров около 15% первоначальной энергии импульса расположено в области с нормальной дисперсией групповой скорости (см. рисунок 1.21**(b)** при $z = 0$). Как и ожидалось, это ведет к разделению спектра на две части: правая часть спектра ($\omega > \omega_{cr}$) излучается в бегущие квазимонохроматические волны (см. рисунок 1.21**(a)** при $z \sim 1470$), а левая – трансформируется в новую солитоноподобную структуру с малым числом осцилляций поля, но сдвинутой несущей частотой в красную (низкочастотную) область спектра из-за эффекта отдачи. Далее недавно сформированный солитон распространяется без изменений (см. рисунок 1.21**(a)**). Следует отметить, что спектр сгенерированной структуры полностью локализован в области с аномальной дисперсией групповых скоростей (см. рисунок 1.21**(b)** при $z \gtrsim 3000$). Численные расчеты демонстрируют формирование солитона, имеющего эллиптичность $\epsilon \simeq 0.95$ и период вращения главной оси поляризационного эллипса $L_\epsilon \simeq 4608$.

Излучение квазимонохроматических волн, имеющих изолированный спектр в коротковолновой области, было активно изучено как возможность генерации уширенного излучения в синей части спектра в микроструктурированных волокнах и в основном отнесено к так называемому волоконно-оптическому излучению Черенкова (см. работу [43]). Однако следует отметить, что когда солитон сформирован, ничего не излучается в нормальную область спектра, и лишь на переходной стадии распространение импульса в присутствии параметрического взаимодействия между солитоном и непрерывным излучением свидетельствует о появлении изолированного

пика (вблизи $\omega \simeq 2.5$), который затем исчезает в результате группового разбегания (в численной схеме импульс выходит за пределы временной коробки). Энергетическая эффективность параметрического частотного преобразования на трассе $z = 128$ составляет 26% (см. рисунок 1.21**(b)**).

С дальнейшим сдвигом центральной частоты солитона с малым числом колебаний поля к точке нуля дисперсии часть спектра солитона в области с нормальным законом групповой скорости ($\omega > \omega_{cr}$) ведет к более сильной модификации солитоноподобного сгенерированного импульса. Акцентируем внимание на том, что если центральная частота находится в области нормальной дисперсии и близка к точке нулевой дисперсии групповой скорости ω_{cr}, эффективная генерация спектрального континуума происходит в сопровождении разделения импульса во временной области. Тем не менее, солитон с большей длительностью может так же быть сформирован в этом случае, так скоро, как часть начального спектра импульса будет локализована ниже критической частоты, что подтверждено последними экспериментами (см. рисунок 1.22**(a)**) [164]. Отметим, что разделение лазерного импульса во временной области связано с тем, что излучаемые квазимонохрамотические волны на основе механизма Черенкова имеют групповую скорость значительно меньше, чем скорость солитона (см. рисунок 1.1).

Рисунок 1.22 демонстрирует результаты компьютерных расчетов, показывающих зависимость эффективности генерации солитона (отношение энергии сгенерированного солитона к входной энергии в импульсе) от положения точки нуля дисперсии групповой скорости ω_{cr} (см. рисунок 1.22**(b)**). На вход нелинейной среды задавался волновой пакет с параметрами: $\omega_{in} = 1$, $\delta_{in} = 0.32$, $\epsilon = 0.92$. Поскольку для эллиптически поляризованного поля не найдены аналитически решения для уединенных волн, в связи с чем нельзя применить предложенный ранее метод восстановления параметров возбудившегося солитона (δ, ω) для случая с циркулярной поляризацией (см. раздел 1.5). Поэтому далее будем идентифицировать возбудившиеся волновые структуры с помощью усредненных характеристик: средняя длительность солитона $\langle \tau_p \rangle$ и средняя несущая частота $\langle \omega \rangle$

$$\langle \tau_p \rangle = \frac{1}{W} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau^2 - \langle \tau \rangle^2) |\mathcal{U}|^2 d\tau \ , \quad \langle \tau \rangle = \frac{1}{W} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau |\mathcal{U}|^2 d\tau \ , \tag{1.60a}$$

$$\langle \omega \rangle = \frac{2}{W} \int_{0}^{+\infty} \omega |S(\omega)|^2 d\omega \ , \tag{1.60b}$$

где W – энергия в лазерном импульсе, $\langle\tau\rangle$ – центр масс волнового пакета, $S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Re(\mathcal{U})\exp(i\omega\tau)d\tau$ – спектральная мощность. Средняя длительность $\langle\tau_p\rangle$ и средняя частота $\langle\omega\rangle$ сформированного солитона приведена на рисунках 1.22**(c)** и 1.22**(d)** соответственно. Как следует из рисунков 1.22 в случае, когда точка нуля дисперсии групповой скорости ω_{cr} расположена на краю спектральной интенсивности входного импульса $\omega_{cr} \gtrsim 2.2$ (см. рисунок 1.22**(a)**), длительность волновой пакета и несущая солитона не изменяются, так как лазерный импульс практически ничего не излучает в непрерывный спектр за счет Черенкова механизма. При дальнейшем уменьшении значения ω_{cr}, что соответствует увеличению значения параметра μ, процесс формирования солитона сопровождается существеным излучением волн в непрерывный спектр, что ведет к увеличению средней длительности солитона и, соответственно, к уменьшению энергии в солитоне. Как следует из рисунка 1.22**(c)**, для параметров, соответствующих рисунку 1.21, средняя длительность импульса увеличивалась в 2.1 раз ($\langle\tau_{out}\rangle \simeq 2.1\langle\tau_{in}\rangle$). Средняя частота солитона за счет эффекта отдачи уменьшилась в 1.22 раз ($\langle\omega_{in}\rangle \simeq 1.22\langle\omega_{out}\rangle$). Отметим, что рисунок 1.22 отображает две вещи: стабильную генерацию солитона с малым числом колебаний поля и энергетическую эффективность этого процесса. Такие солитоны с малым числом осцилляций поля легко возбуждаются в широкой области параметров и, следовательно, могут быть рассмотрены в качестве элементарных структур, играющих фундаментальную роль в динамике коротких оптических импульсов.

1.8 Столкновение солитонов, вращающихся в противоположных направлениях

Общеизвестно, что результаты парных столкновений солитонов (см. [60]) крайне важны с позиций фундаментального свойства интегрируемости основного уравнения. Дабы пролить свет на динамику столкновений, мы заострим внимание на циркулярно поляризованных солитонах, в частности, на тех, у которых вектора поля вращаются в противоположных направлениях и удовлетворяют нашим вычислениям на основе уравнения (1.41) при $\mu = 0$, где нами сканировались входные параметры солитон-солитонового взаимодействия с различными амплитудами, несущими частотами и поляризационными состояниями. Будем различать два принципиально различных случая взаимодействующих солитонов. Первый, когда взаимодействуют солитоны

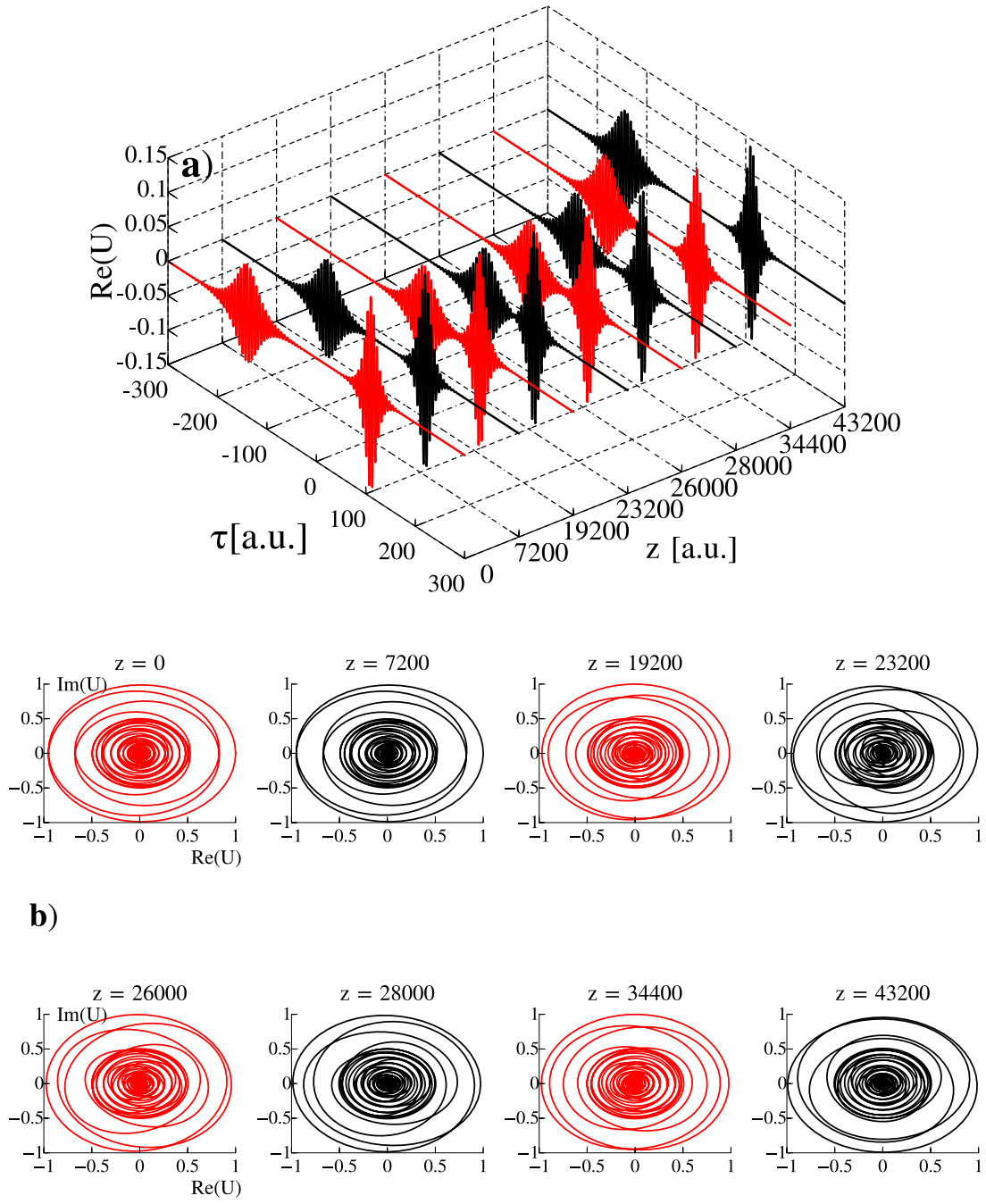


Рис. 1.23: Режим отталкивания циркулярно-поляризованных солитонов с малым числом осцилляций поля, в случае когда вектора поля вращаются в противоположных направления (1.61) при $\omega_1 = \omega_2 = 1$, $\delta_1 = 0.05$, $\delta_2 = 0.1$. **(a)** Временные профили компоненты поля $\mathcal{E}_x = Re(\mathcal{U})$; **(b)** снимки эллипса поляризации на различных расстояниях распространения.

с близкими частотами, именно в этом случае возможно сопоставление полученных результатов с аналогичными для шредингеровских солитонов. И второй, не имеющий соответствующего аналога, когда характерные частоты заметно различаются.

Поскольку уравнение (1.41) описывает однонаправленное распространение импульса для исследования столкновений солитонов, солитон с меньшей групповой скоростью был помещен впереди другого. Кроме того, солитоны располагались таким образом, чтобы они пространственно не перекрывались. Естественно, начальные условия задавались в виде волновых структур (1.16), (1.18), являющихся точными решениями исходного уравнения (1.41). Проанализировав результаты этих рассчетов, мы сделали вывод, что столкновение солитонов имеет несколько отличительных особенностей. Одна из наиболее характерных особенностей – взаимодействие сильно зависит от их относительных направлений вращения. Отметим, что ранее в данной главе (см. раздел 1.4) уже обсуждался вопрос об парном взаимодействии солитонов, но в случае, когда они вращаются в одном направлении [104]. Как было показано, если сталкивающиеся солитоны вращаются в одном направлении и несущие частоты близки, существуют три различных режима столкновения импульсов в зависимости от абсолютной разности фаз полей:

- солитоны проходят друг сквозь друга;
- они полностью отражаются;
- солитоны точно реплицируют друг друга в процессе взаимодействия.

Однако, если несущие частоты солитонов различны и/или свойственные ему амплитуды отличаются более чем на 40%, лишь один из сценариев реализуется: солитоны проходят друг через друга с полным сохранением своей волновой структуры, включая и частотные заполнения. Причем их взаимодействие достаточно близко к шредингеровским солитонам.

Качественно отличная ситуация имеет место в случае, когда у сталкивающихся солитонов вектора поля вращаются в противоположных направлениях, то есть предполагается, что

$$Re(U) = \sqrt{\gamma_1}\mathcal{A}_{S1}\cos\varphi_{s1} + \sqrt{\gamma_2}\mathcal{A}_{S2}\cos\varphi_{s2}\ , \tag{1.61a}$$

$$Im(U) = \sqrt{\gamma_1}\mathcal{A}_{S1}\sin\varphi_{s1} - \sqrt{\gamma_2}\mathcal{A}_{S2}\sin\varphi_{s2}\ , \tag{1.61b}$$

где $\gamma_1,\ \mathcal{A}_{S1},\ \varphi_{s1},\ \gamma_2,\ \mathcal{A}_{S2},\ \varphi_{s2}$ – параметры двух сталкивающихся солитонов, и их решения уравнения (1.16) и (1.18). В таком случае результаты столкновения крайне

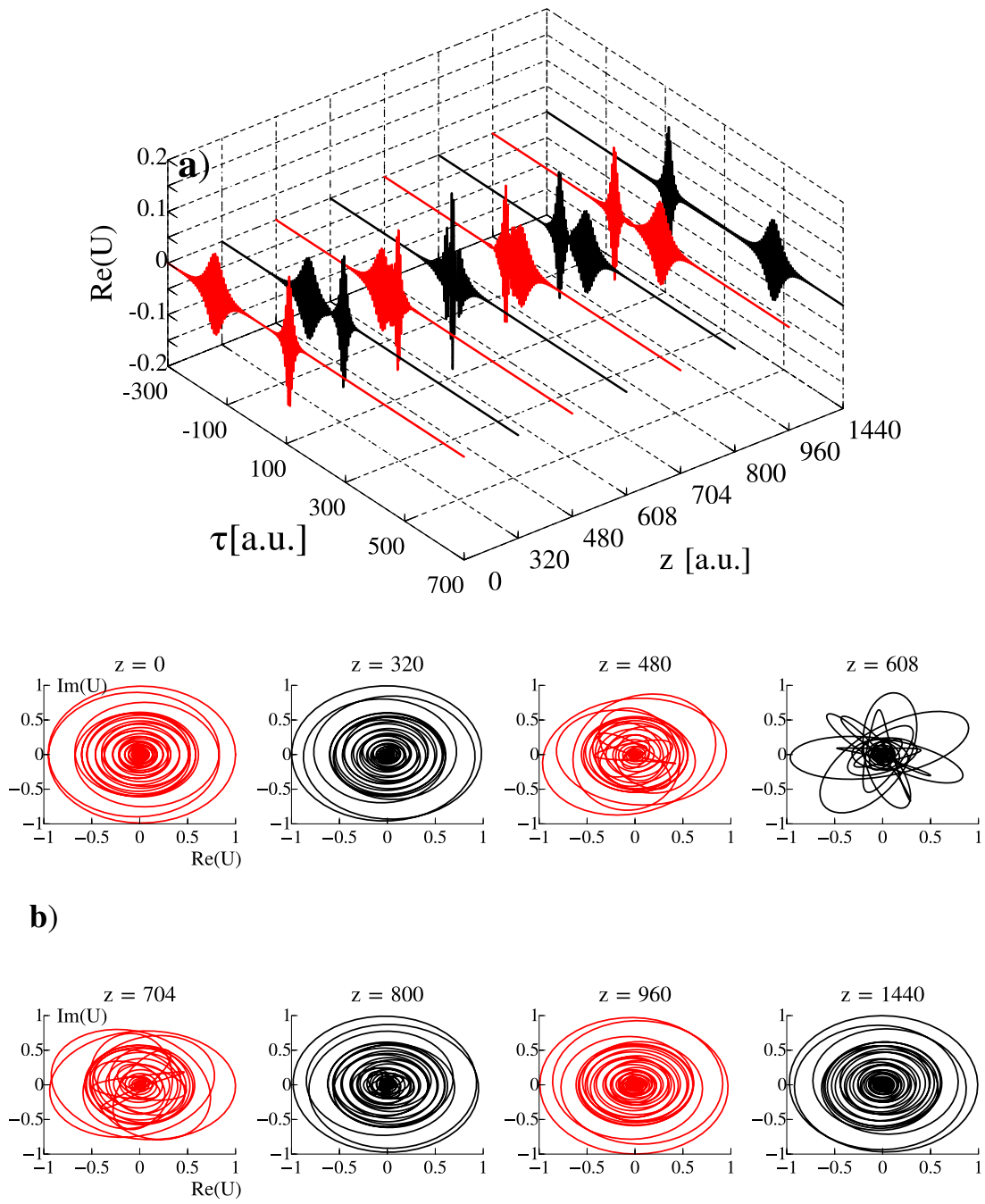


Рис. 1.24: Режим прохождения циркулярно-поляризованных солитонов с малым числом осцилляций поля друг через друга с полным сохранением своей волновой структуры, в случае, когда вектора поля вращаются в противоположных направлениях. Частоты сталкивающихся волновых структур задавались заметно различными. Начальные параметры: $\delta_1 = 0.05$, $\delta_2 = 0.1$, $\omega_1 = 0.9$, $\omega_2 = 1.1$. **(a)** Временные профили компоненты поля $\mathcal{E}_x = Re(\mathcal{U})$; **(b)** снимки эллипса поляризации на различных расстояниях распространения.

зависят от различий между несущими частотами ($\omega_1,\ \omega_2$). Если последние равны ($\omega_1 = \omega_2$), как показано на примере для солитонов с параметрами $\delta_1 = 0.05$, $\delta_2 = 0.1$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$ на рисунке 1.23. Как видно из рисунка 1.23**(a)** солитоны упруго (по точности расчетов) отражаются друг от друга таким образом, что ни одна из непрерывных волн не излучается в процессе взаимодействия. Таким образом, данный случай столкновения солитонов качественно отличается от рассматриваемого нами ранее случая столкновения волновых структур, вращающихся в одном направлении, когда они проходят друг через друга без изменения энергии [104]. На рисунке 1.23**(b)** представлены снимки эллипса поляризации, которые демонстрируют сохранение поляризации поля. Важно отметить, что мы можем с высокой точностью контролировать моделирование уравнения (1.41), поскольку Гамильтониан

$$\mathcal{H} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}|\mathcal{U}|^4 - \left| \int\limits_{-\infty}^{\tau} \mathcal{U} d\xi \right|^2 \right] d\tau \tag{1.62}$$

крайне чувствителен к точности рассчетов, и дополнительный контроль также осуществляется с использованием другой константы движения – полной энергии

$$W = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{U}|^2 d\tau \ . \tag{1.63}$$

Данное качественное отличие можно объяснить следующим образом. В случае, когда их вектора поля вращаются в одном направлении

$$Re(\mathcal{U}) = \sqrt{\gamma_1}\mathcal{A}_{S1}\cos\varphi_{s1} + \sqrt{\gamma_2}\mathcal{A}_{S2}\cos\varphi_{s2} \ , \tag{1.64a}$$

$$Im(\mathcal{U}) = \sqrt{\gamma_1}\mathcal{A}_{S1}\sin\varphi_{s1} + \sqrt{\gamma_2}\mathcal{A}_{S2}\sin\varphi_{s2} \ , \tag{1.64b}$$

нелинейная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{nl}(\tau)$ промодулирована на масштабе огибающей поля $\mathcal{A}_{Si}(\tau)$, в то время как в случае (1.61) $\varepsilon_{nl}(\tau)$ модулируется с двойной несущей частотой поля 2ω (или пространственно на половине падающей длины волны). Это приводит, по сути, к возбуждению брэгговской решетки ,на которой как раз и эффективно рассеивается назад налетающий слева солитон, т.е. приводя к полному отражению солитонов друг от друга.

Во второй серии расчетов частоты сталкивающихся солитонов задавались заметно отличными. В этом случае наблюдается лишь один режим взаимодействия, когда солитоны проходят друг сквозь друга без потери энергии. Этот случай изображен на рисунке 1.24 для $\delta_1 = 0.05$, $\delta_2 = 0.1$, $\omega_1 = 0.9$, $\omega_2 = 1.1$. Видно также, что ввиду

заметной разницы групповых скоростей эффективное взаимодействие, т.е., по сути, перекрытие волновых пакетов, происходит лишь на небольшой трассе распространения (см. рисунок 1.24**(a)**). На рисунке 1.24**(b)** представлены снимки эллипса поляризации, которые демонстрируют сохранение поляризации поля. Таким образом, режим взаимодействия солитонов в случае, когда характерные частоты заметно различаются, не зависит от их относительного поляризационного вращения.

В-третьей серии расчетов рассматривался промежуточный случай, когда частоты сталкивающихся солитонов отличались менее чем на 5%, взаимодействие при этом являлось неупругим, то есть непрерывные волны излучаются в течении всего процесса взаимодействия, и солитоны могут потерять существенную часть их энергии, что показано на рисунке 1.25**(a)** для входных параметров солитонов $\delta_1 = 0.05$, $\delta_2 = 0.1$, $\omega_1 = 0.98$, $\omega_2 = 1.02$, когда около 10% энергии падающих солитонов излучается через линейные волны. Из рисунка 1.25**(b)** видно, что в результате неупругого взаимодействия солитонов с близкими частотами, вращающихся в противоположных направлениях, волновая структура с большей амплитудой стала эллиптически поляризованной. Следовательно, для возбуждения эллиптически поляризованного солитона можно в качестве начального распределения использовать сумму двух точных решений, соответствующих циркулярно поляризованным солитонам, вращающимся в противоположных направлениях.

В результате проведенных численных экспериментов по парным соударениям волновых солитонов было выявлено, что их свойства сильно зависят от их относительного поляризационного вращения. Если они вращаются однонаправленно, уединенные волны взаимодействуют друг с другом, оставаясь солитонами со структурой огибающей, подобной шредингеровским солитонам. На основе численного анализа парного взаимодействия циркулярно-поляризованных солитонов, вращающихся в противоположных направлениях, когда амплитуды солитонов отличаются, могут быть сформулированы следующие положения, которые отражают определенные динамические свойства соударений:

1. В случае, когда частоты сталкивающихся солитонов совпадают, имеет место упругое отталкивание волновых структур;

2. В случае, когда частоты слабо отличаются (менее 5%), имеет место неупругое взаимодействие солитонов;

3. В случае, когда частоты значительно отличаются, имеет место упругое прохож-

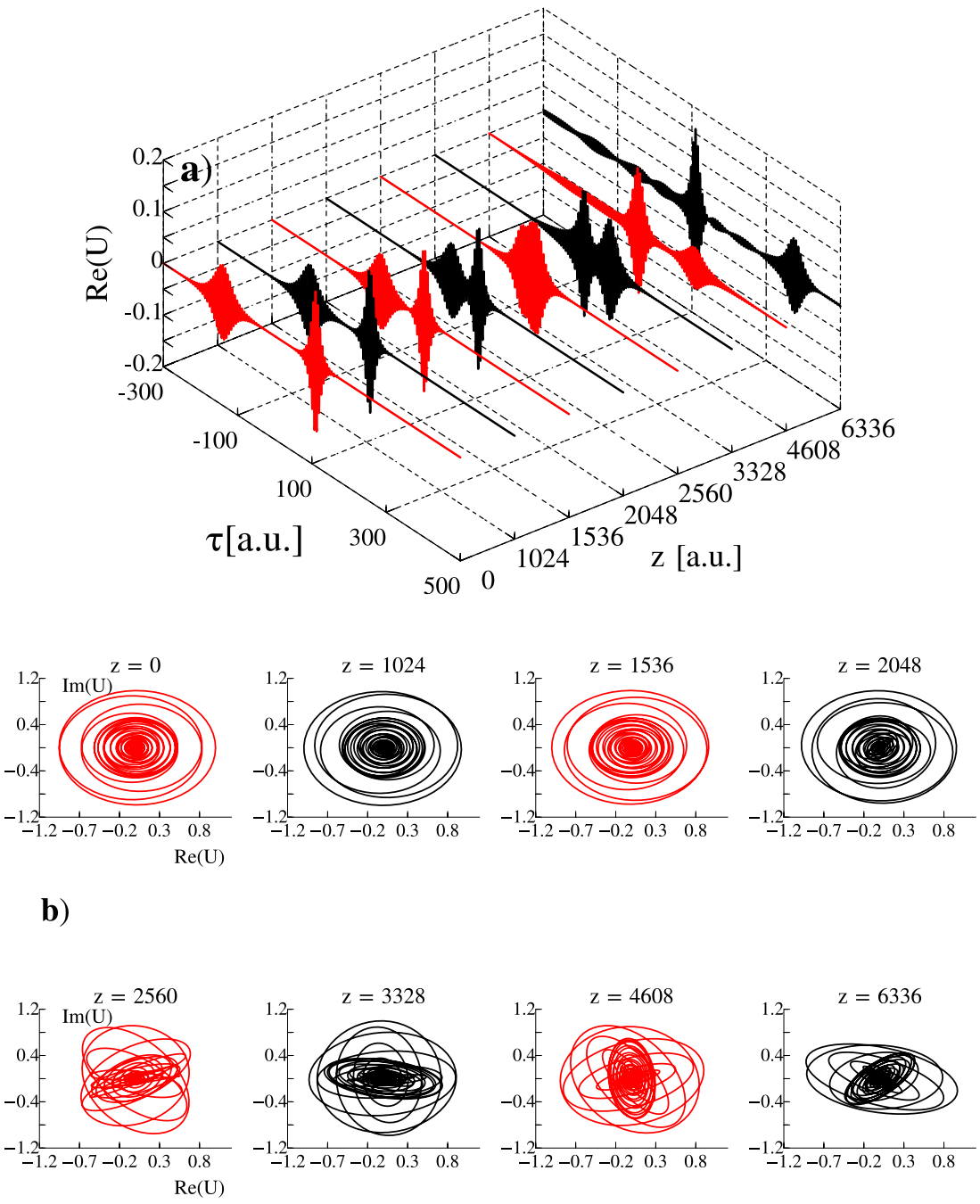


Рис. 1.25: Режим неупругого взаимодействия циркулярно-поляризованных солитонов с малым числом осцилляций поля, в случае, когда вектора поля вращаются в противоположных направлениях. Частоты сталкивающихся волновых структур задавались близкими. Начальные параметры: $\delta_1 = 0.05$, $\delta_2 = 0.1$, $\omega_1 = 0.98$, $\omega_2 = 1.02$. **(a)** Временные профили компоненты поля $\mathcal{E}_x = Re(\mathcal{U})$; **(b)** снимки эллипса поляризации на различных расстояниях распространения. Около 10% энергии падающих солитонов излучается через линейные волны.

дение волновых структур.

1.9 Солитонные структуры циркулярно поляризованного поля с произвольной степенной нелинейностью

Далее проведем обобщение ранее найденных решений на случай нелинейного уравнения с нелинейностью степенного типа. Ограничиваясь распространением излучения в среде с безинерционной нелинейностью, векторное волновое уравнение в безотражательном приближении для электрического поля волны можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z \partial \tau} + \mathcal{E}_x + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left[\left(\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2\right)^m \mathcal{E}_x\right] = 0 \ , \tag{1.65a}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_y}{\partial z \partial \tau} + \mathcal{E}_y + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left[\left(\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2\right)^m \mathcal{E}_y\right] = 0 \ , \tag{1.65b}$$

где $\mathcal{E}_x$ и $\mathcal{E}_y$ – соответствующие проекции вектора электрического поля, m – степень нелинейности[6]. Принимая во внимание интегральное соотношение (1.9) и учитывая, что групповые и фазовые скорости волн могут быть различны, представим решения уравнения (1.65) в виде:

$$\mathcal{E}_x(z,\tau) = \mathcal{A}(z,\tau)\cos\varphi(z,\tau) \ , \tag{1.66a}$$

$$\mathcal{E}_y(z,\tau) = \mathcal{A}(z,\tau)\sin\varphi(z,\tau) \ . \tag{1.66b}$$

Тогда для амплитуды $\mathcal{A}(z,\tau)$ и фазы $\varphi(z,\tau)$ волнового поля получим следующую систему точных уравнений:

$$\mathcal{A}_{z\tau} - \varphi_z\varphi_\tau\mathcal{A} + \mathcal{A} + 2m(2m+1)a^{2m-1}\mathcal{A}_\tau^2 + (2m+1)\mathcal{A}^{2m}\mathcal{A}_{\tau\tau} - \mathcal{A}^{2m+1}\varphi_\tau^2 = 0 \ , \tag{1.67a}$$

$$\mathcal{A}_z\varphi_\tau + \mathcal{A}\varphi_{z\tau} + \mathcal{A}_\tau\varphi_z + 2(2m+1)\mathcal{A}^{2m}\mathcal{A}_\tau\varphi_\tau + \mathcal{A}^{2m+1}\varphi_{\tau\tau} = 0 \ . \tag{1.67b}$$

Полагая, что огибающая поля распространяется с постоянной скоростью, ищем решения в виде

$$\mathcal{A}(z,\tau) = \mathcal{A}(\zeta), \qquad \varphi(z,\tau) = \omega\tau - kz + \int\limits_{-\infty}^{\zeta} g(\mathcal{A})d\zeta' + \varphi_o \ , \tag{1.68}$$

[6] $m = 1$ соответствует среде с кубичной (керровской) нелинейностью.

где $\zeta = \tau - \gamma z$, φ_o – постоянная фаза поля. Локальные частоты и волновые векторы определяются как $\varphi_\tau = \omega + g(\mathcal{A})$, $\varphi_z = -k - \gamma g(\mathcal{A})$. Подставляя полученные соотношения в (1.67b) и определяя ω как несущую частоту сигнала в пределе малых амплитуд ($g(\mathcal{A}) \to 0$ при $\mathcal{A} \to 0$), находим, что

$$g(\mathcal{A}) = \frac{\omega \mathcal{A}^{2m} \left[\gamma(2m+1) - (m+1)\mathcal{A}^{2m}\right]}{(m+1)\left(\gamma - \mathcal{A}^{2m}\right)^2} \ , \tag{1.69}$$

$k = -\gamma\omega$, при этом выражение для фазы поля имеет вид

$$\varphi(z,\tau) = \omega\tau + \gamma\omega z + \int\limits_{-\infty}^{\zeta} \frac{\omega \mathcal{A}^{2m} \left[\gamma(2m+1) - (m+1)a^{2m}\right]}{(m+1)\left(\gamma - \mathcal{A}^{2m}\right)^2} d\zeta' + \varphi_o \ . \tag{1.70}$$

Уравнение для амплитуды (1.67a) при этом принимает вид:

$$\mathcal{U}_{\eta\eta} - \frac{2m(2m+1)\mathcal{U}^{2m-1}\mathcal{U}_\eta^2}{1-(2m+1)\mathcal{U}^{2m}} - \\ - \frac{\mathcal{U}}{1-(2m+1)\mathcal{U}^{2m}} \left\{ \delta^2 - \frac{\mathcal{U}^{2m}\left[(m+1)^2\left(1-\mathcal{U}^{2m}\right)^2 - m^2\mathcal{U}^{2m}\right]}{(m+1)^2\left(1-\mathcal{U}^{2m}\right)^3} \right\} = 0 \ . \tag{1.71}$$

Здесь введены новые переменные $\eta = \omega\zeta$ и $\mathcal{U} = \dfrac{\mathcal{A}}{\sqrt[2m]{\gamma}}$ и, как легко видеть, и в этом случае семейство солитоноподобных решений является однопараметрическим, т.е. зависит от параметра $\delta^2 = \dfrac{1}{\gamma\omega^2} - 1 > 0$. При $m = 1$ выражения (1.70) и (1.71) трансформируются в (1.16) и в (1.17) соответственно.

Весь дальнейший анализ ограничим случаем $m = 2$. Тогда выражение (1.71) можно переписать в следующем виде:

$$\mathcal{U}_{\eta\eta} - \frac{20\mathcal{U}^3\mathcal{U}_\eta^2}{1-5\mathcal{U}^4} - \frac{u}{1-5\mathcal{U}^4} \left\{ \delta^2 - \frac{\mathcal{U}^4\left[9\left(1-\mathcal{U}^4\right)^2 - 4\mathcal{U}^4\right]}{9\left(1-\mathcal{U}^4\right)^3} \right\} = 0 \ . \tag{1.72}$$

В соответствии с первым интегралом уравнения (1.72), имеющим вид

$$\left(\frac{d\mathcal{U}}{d\eta}\right)^2 = \frac{\mathcal{U}^2}{\left(1-5\mathcal{U}^4\right)^2}\left[\delta^2 - \frac{5}{3}\left(\delta^2+1\right)\mathcal{U}^4 + \frac{4\mathcal{U}^4\left(3-4\mathcal{U}^4\right)}{9\left(1-\mathcal{U}^4\right)^2}\right] + \frac{C}{\left(1-5\mathcal{U}^4\right)^2} \ , \tag{1.73}$$

где C – постоянная интегрирования, равная нулю для локализованных распределений поля, его решения в общем случае представимы лишь в квадратурах. Однако возможные типы решений могут быть легко проанализированы на фазовой плоскости, на которой фазовые траектории (1.73) симметричны относительно оси $\mathcal{U} = 0$. Вид фазовой плоскости качественно совпадает с фазовой плоскостью, рассмотренной

для редуцированного волнового уравнения (см. раздел 1.2). Ограничиваясь рассмотрением полуплоскости $\mathcal{U} \geq 0$, видно, что уравнение (1.73) имеет 4 состояния равновесия: 3 центра и седловую точку в начале координат, разделенные особыми прямыми $\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ и $\mathcal{U} = 1$. Вид фазовой плоскости существенно зависит от параметра δ. Интересующим нас солитонным решениям соответствует замкнутая сепаратрисса из седла в седло ($C = 0$), существующая только при $\delta^2 \leq \delta_c^2 = \frac{1}{24}$ и включающая в себя одно или два состояния равновесия типа центр. При $\delta^2 < \frac{1}{24}$ она включает ближайшее состояние равновесия. Для этих параметров максимальная амплитуда солитона ограничена сверху $\mathcal{U}_{max} < \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$. При $\mathcal{U}_{max}^2 \ll 1$ уравнение (1.73) может быть проинтегрировано, и приближенное решение представлено в неявном виде

$$15\delta\sqrt{\delta^2 - \frac{\mathcal{U}^4}{3}} - Arcosh\left(\frac{\sqrt{3}\delta}{\mathcal{U}^2}\right) = \pm 2\delta\eta \ . \tag{1.74}$$

При $\delta^2 = \frac{1}{24}$ сепаратриссная траектория качественно меняется, и ввиду снятия особенности при $\mathcal{U}^4 = \frac{1}{5}$, она включает два состояния равновесия. Данное решение является изолированным и условно может быть названо «предельным»солитоном, соответствующим минимально возможной длительности и, соответственно, максимально возможной амплитуде $\mathcal{U}_{max} = \sqrt[4]{\frac{3}{5}}$. Его точное решение имеет ту же функциональную зависимость, что и (1.73), однако описывает солитон с максимально допустимой энергией:

$$\sqrt{\frac{6 - 10\mathcal{U}^4}{25}} - \sqrt{\frac{2}{3}}Arcosh\left(\sqrt{\frac{3}{5\mathcal{U}^4}}\right) = \pm\frac{\eta}{3} \ . \tag{1.75}$$

При $\delta^2 > \frac{1}{24}$ происходит разрыв замкнутой сепаратриссной траектории, что указывает на отсутствие локализованных решений.

Установим связь полученных решений с хорошо известными солитонами огибающей, существующими в рамках нелинейного уравнения Шредингера с нелинейностью более высокого порядка. Длительность найденных локализованных распределений поля примерно обратно пропорциональна их амплитуде, поэтому переход к длинным квазимонохроматическим импульсам, содержащим много осцилляций, осуществляется при малых амплитудах $\mathcal{U}^4 \ll \frac{1}{5}$, что, как следует из уравнения (1.73), имеет место при $\delta^2 \ll 1$. В этом случае (1.73) сводится к уравнению для нахождения НУШ солитонов:

$$\mathcal{U}_\eta^2 = \mathcal{U}^2\left(\delta^2 - \frac{\mathcal{U}^4}{3}\right) \tag{1.76}$$

имеющим своим решением солитон

$$\mathcal{U}^2(\eta) = \frac{\sqrt{3}\delta}{\cosh(2\delta\eta)} \ . \tag{1.77}$$

Далее вычислим энергию W_S, которая содержится в данном солитонном распределении,

$$W_S = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2\right) d\tau = \frac{\sqrt{3}\pi}{2\omega^2} \ . \tag{1.78}$$

Из выражения (1.78) следует, что энергия в солитоне W_S не зависит от параметра δ, т.е. данный солитон неустойчив и будет коллапсировать в продольном направлении в процессе эволюции системы. В частности, данный факт использовался ранее при численном исследовании процесса самофокусировки двумерного волнового пакета в свободном пространстве при ограниченности вычислительных ресурсов [152], - сохраняя скэйлинг уравнений, уменьшали число пространсвенных переменных, но увеличивали степень нелинейности.

В заключении проанализируем приближенное распределение на уединенную волну (1.74), которое с высокой точностью описывает локализованные решения даже для коротких длительностей, за исключением предельного случая. На данном распределении также можно подсчитать энергию W_S

$$W_S = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2\right) d\tau \simeq \frac{\sqrt{3}\pi}{2\omega^2} \left(1 - 8\delta^2\right) \ . \tag{1.79}$$

Как следует из выражения (1.79) с увеличением параметра δ энергия в уединенной волне уменьшается $\dfrac{dW_S}{d\delta} < 0$, что говорит о том, что в соответствие с критерием Вахитова-Колоколова [209, 243] такое решение так же неустойчиво.

В целом можно заключить, что найденные нами солитонные структуры волнового поля имеют прямую преемственную связь с солитонами Шредингера с нелинейностью более высокого порядка и позволяют осуществить переход от солитонов огибающей квазигармонического излучения фактически к оптическим видеосолитонам. Однако данные решения являются неустойчивы и коллапсируют в продольном направлении.

1.10 Солитонные решения в рамках полного волнового уравнения

Как было показано выше, в рамках однонаправленного уравнения, описывающего распространение оптического импульса в среде с безынерционной нелинейностью керровского типа в случае пренебрежения отраженной волны, существует новый класс солитонных решений с малым числом колебаний поля, которые играют важную роль в динамике распространения лазерного импульса. Тем не менее, введение солитонных решений в рамках полного волнового уравнения может пролить свет на фундаментальные свойства нелинейных волн и расширить концепцию солитонов к высоким интенсивностям и коротким длительностям, где приближение медленно меняющихся амплитуд неприменимо [60]. В лазерной физике существует несколько примеров, где солитонные решения полного волнового уравнения найдены, но по большей части лишь для резонансных сред. Есть также ограниченное количество примеров в других областях физики, например, релятивистские солитоны огибающей в плазме [251] и уединенные волны в так называемой φ^4 теории поля [60]. Тем не менее, большинство подобных решений неприменимы.

В данном разделе будут представлены результаты динамики электромагнитного поля в рамках полного нелинейного волнового уравнения. Новый класс точных солитонных решений с циркулярной поляризацией с малым числом колебаний поля приведен ниже [105], который описывает распространение экстремально коротких импульсов в нерезонансной среде.

В общем векторное волновое уравнение для изотропной среды может быть записано в следующей форме (1.1)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{t} \varepsilon(t-t')\mathcal{U}(t')dt' = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{P}_{nl}}{\partial t^2} \ , \tag{1.80}$$

где $\mathcal{U} = \mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y$, ε – линейная диэлектрическая проницаемость, которая широкой в области частот в области прозрачности может быть представлена выражением (1.4)

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_o + b\omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ . \tag{1.81}$$

Рассмотрим далее наиболее интересный случай, когда низкочастотная дисперсия доминирует $b = 0$. В случае нерезонансной среды векторный керровский эффект может быть описан нелинейной поляризацией $\mathcal{P}_{nl} = \chi^{(3)}|\mathcal{U}|^2\mathcal{U}$ (где $\chi^{(3)}$ есть кубичная нелинейная восприимчивость), и нелинейный атомный отклик, как предполагается,

должен быть мгновенным (см. примеры [1,35,189]). В результате волновое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_o}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\mathcal{U} - \frac{\varepsilon_o}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(|\mathcal{U}|^2\mathcal{U}) = 0 \ , \tag{1.82}$$

где мы ввели безразмерное поле $\mathcal{U} \to \sqrt{4\pi\chi^{(3)}/\varepsilon_o}\mathcal{U}$.

1.10.1 Точные солитонные решения с произвольным числом колебаний поля

Для локализованных распределений поля $\mathcal{U}$ можно написать уравнение на нулевую гармонику $\overline{\mathcal{U}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U} dt$

$$\frac{d^2\overline{\mathcal{U}}}{dz^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}\overline{\mathcal{U}} = 0 \ , \tag{1.83}$$

из которого следует, что если в начальном распределении лазерного импульса отсутствует постоянная составляющая ($\overline{\mathcal{U}} = 0$), то в дальнейшем в процессе распространения импульса в нелинейной среде нулевая гармоника не будет появляться. Это указывает на осциллирующий характер поля в солитоне. В последующем анализе мы будем рассматривать циркулярно поляризованный свет, в случае, когда нулевая гормоника равна нулю ($\overline{\mathcal{U}} = 0$), то есть $\mathcal{U} = \mathcal{E}(z,t)e^{i\varphi(z,t)}$. Для амплитуды $\mathcal{E}(z,t)$ и фазы $\varphi(z,t)$ мы получили следующую систему уравнений:

$$\mathcal{E}_{zz} - \mathcal{E}\varphi_z^2 - \frac{\varepsilon_o}{c^2}(\mathcal{E}_{tt} - \mathcal{E}\varphi_t^2) - \frac{\omega_p^2}{c^2}\mathcal{E} - \frac{\varepsilon_o}{c^2}(6\mathcal{E}\mathcal{E}_t^2 + 3\mathcal{E}^2\mathcal{E}_{tt} - \mathcal{E}^3\varphi_t^2) = 0 \ , \tag{1.84a}$$

$$2\mathcal{E}_z\varphi_z + \mathcal{E}\varphi_{zz} - \frac{\varepsilon_o}{c^2}(2\mathcal{E}_t\varphi_t + \mathcal{E}\varphi_{tt}) - \frac{\varepsilon_o}{c^2}(6\mathcal{E}^2\mathcal{E}_t\varphi_t + \mathcal{E}^3\varphi_{tt}) = 0 \ , \tag{1.84b}$$

где нижние индексы обозначают производные. Как видно, данная система уравнений (1.84) структурно совпадает с ранее рассмотренной нами системой уравнений (1.13).

Теперь мы предположим, что амплитуда распространяется с постоянной скоростью, и будем искать решение уравнения (1.84) в следующей форме

$$\mathcal{E}(z,t) = \mathcal{E}(\xi) \ , \tag{1.85a}$$

$$\varphi(z,t) = \omega t - kz + \mathcal{F}(\xi) \ , \tag{1.85b}$$

где $\xi = z - Vt$ и функция $\mathcal{F}(\xi)$ подчиняется уравнению

$$(1-\beta^2\mathcal{A}^2)\mathcal{A}\frac{d^2\mathcal{F}}{d\xi^2} + 2(1-3\beta^2\mathcal{A}^2)\frac{d\mathcal{A}}{d\xi}\frac{d\mathcal{F}}{d\xi} + 2\left[\gamma^2\left(\frac{\varepsilon_o V\omega}{c^2} - k\right) + \frac{3\varepsilon_o V\omega\mathcal{A}^2}{c^2}\right]\frac{d\mathcal{A}}{d\xi} = 0 \ , \tag{1.86}$$

где $\beta = V\sqrt{\varepsilon_o}/c$ и $\gamma = (1 - V^2\varepsilon_o/c^2)^{-1/2}$ есть релятивистский фактор. Дабы упростить выражение (1.86), мы ввели безразмерную нормализованную амплитуду $\mathcal{A} = \gamma\mathcal{E}$ и наложили ограничения $\mathcal{F} \to 0$ (или константа) при $|\xi| \to \infty$. В пределе, когда $\mathcal{A} \to 0$, мы делаем вывод, что

$$V\frac{\omega}{k} = \frac{c^2}{\varepsilon_o} \ , \tag{1.87}$$

в противном случае частота ω и волновой вектор k должны быть переопределены. Важно отметить, что соотношение (1.87) между групповой $\left(V = \dfrac{\partial\omega}{\partial k}\right)$ и фазовой $\left(\dfrac{\omega}{k}\right)$ скоростями справедливо также для линейных волн, поскольку в этом случае ω и k удовлетворяют дисперсионному уравнению $k = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_o - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}$, смотрите уравнение (1.82). Интегрирование уравнения (1.86) дает следующие выражения для нелинейной фазовой модуляции $\mathcal{F}$:

$$F(\xi) = -\frac{\beta k_o}{2}\int\limits_{-\infty}^{\xi}\frac{\mathcal{A}^2(3 - 2\beta^2\mathcal{A}^2)}{(1 - \beta^2\mathcal{A}^2)^2}d\xi' \ , \tag{1.88}$$

где $k_o = \sqrt{\varepsilon_o}\dfrac{\omega}{c}$. Заменяя локальную частоту $\partial_t\varphi = \omega - V\mathcal{F}_\xi$ и локальное волновое число $\partial_z\varphi = -k + \mathcal{F}_\xi$, где

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\xi} = -\beta k_o\frac{\mathcal{A}^2(3 - 2\beta^2\mathcal{A}^2)}{2(1 - \beta^2\mathcal{A}^2)^2} \tag{1.89}$$

в уравнение (1.84a), мы получим уравнение мы получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\mathcal{A}}{d\xi^2} - \frac{6\beta^2\mathcal{A}}{1 - 3\beta^2\mathcal{A}^2}\left(\frac{d\mathcal{A}}{d\xi}\right)^2 - \frac{k_o^2\mathcal{A}}{1 - 3\beta^2\mathcal{A}^2}\left\{\alpha^2 - \frac{\mathcal{A}^2\left[4(1 - \beta^2\mathcal{A}^2)^2 - \beta^2\mathcal{A}^2\right]}{4(1 - \beta^2\mathcal{A}^2)^3}\right\} = 0 \ , \tag{1.90}$$

где мы ввели $\alpha = \sqrt{\dfrac{\gamma^2\omega_p^2}{\omega^2\varepsilon_o} - 1}$. Важно отметить, что уравнение (1.90) подобно тому, что было получено ранее при использовании однонаправленного приближения (1.17) [172, 240, 263]. Тем не менее, поскольку уравнение (1.90) получено в рамках полного волнового уравнения, это означает, что уравнение действительно для произвольных скоростей лазерного импульса, и с физической точки зрения описывает новые типы полевой структуры.

Уравнение (1.90) существенно упрощается в случае стоячего солитона, когда групповая скорость равна нулю ($\beta = 0$). Тогда фазовая модуляция будет отсутствовать, то есть $\mathcal{F} = 0$, и огибающая импульса имеет *sech – распределение*

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{2|\varepsilon|}{\varepsilon_o}}sech\left(\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_o}}k_o\xi\right) \ , \tag{1.91}$$

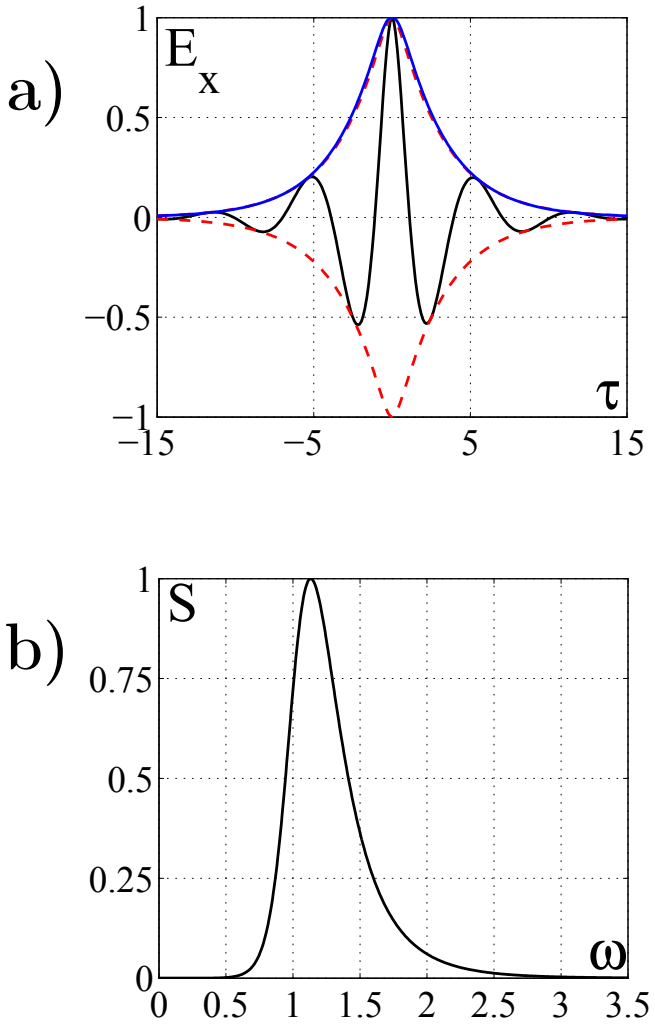


Рис. 1.26: **(a)** Временное распределение солитона с малым числом осцилляций поля для $\delta = 0.33$. Черная линия – распределение проекции поля на ось x $[\mathcal{E}_x(\tau)]$; красная пунктирная линия – точное распределение огибающей поля, полученное на основе решения уравнения (1.92); синяя сплошная линия – приближенное распределение огибающей поля, которое соответствует выражению (1.95). **(b)** Спектр мощности солитона $S(\omega) = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_x \exp(i\omega\tau) d\tau \right|^2$

где $\varepsilon = \varepsilon_o - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} < 0$. Оно описывает стандартные решения в среде с негативной диэлектрической проницаемостью, ситуация, которая может иметь место, когда несущие частоты меньше некоего критического значения $\omega < \dfrac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon_o}}$. Это распределение поля хорошо известно в физике плазмы, где нелинейные электромагнитные структуры такого рода соответствуют полостям с локальной положительной проницаемостью в области высоких интенсивностей поля окруженных непрозрачной для оптического излучения средой, где $\varepsilon < 0$ (см. пример [251]).

В случае произвольной групповой скорости в терминах новой нормализованной амплитуды $a = \beta\mathcal{A} = \beta\gamma\mathcal{E}$ уравнение (1.91) может быть проинтегрировано однократно для локализованных структур (то есть, когда a, $a_\xi \to 0$ для $\xi \to \pm\infty$) и записано в следующем виде

$$\frac{da}{d\xi} = \pm\frac{\omega}{V}\frac{\sqrt{1+\delta^2}a}{(1-3a^2)(1-a^2)}\sqrt{\left(1-\frac{3}{2}a^2\right)\left(\frac{1+4\delta^2+\sqrt{1-8\delta^2}}{4(1+\delta^2)}-a^2\right)}\times \\ \times\sqrt{\left(\frac{1+4\delta^2-\sqrt{1-8\delta^2}}{4(1+\delta^2)}-a^2\right)}\,. \quad (1.92)$$

Как легко заметить, уравнение (1.92) имеет локализованную структуру с максимальной амплитудой

$$a_{max} = \sqrt{\frac{1+4\delta^2-\sqrt{1-8\delta^2}}{4(1+\delta^2)}}\,, \quad (1.93)$$

при $\delta = \alpha\beta = \beta\sqrt{\dfrac{\gamma^2\omega_p^2}{\omega^2\varepsilon_o}-1} < \sqrt{\dfrac{1}{8}}$, которая определяет область скоростей, где волновые солитоны существуют для данной несущей частоты ω. Совместно с нелинейной фазовой самомодуляцией $\mathcal{F}(\xi)$, определяемой выражением (1.88), это полностью характеризует волновые солитоны. Пример такого солитона с малым числом колебаний поля показан на рисунке 1.26**(a)**. Для удобства мы выбрали представление результатов в переменной $\tau = \omega t - \dfrac{k_o z}{\sqrt{\varepsilon_o}}$. Эти расположенные в пространстве солитоны распространяются с постоянной групповой скоростью, и их длительность может быть сравнима с оптическим периодом. Однако в сравнении с классическими уединенными волнами [60] они чирпованы с ультраширокими спектром, простирающемся более чем на целую октаву, как показано на рисунке 1.26**(b)**. Эти солитоны имеют минимальную длительность $\tau_{min} \cong 2.3$ [7] и, соответственно, максимальную амплитуду $a_{max} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Наличие предельного солитона диктуется интегральным соотношением

[7] полная ширина по половине максимума интенсивности

(1.83). В этом предельном случае уравнение (1.92) может быть легко проинтегрировано точно, и это решение дается неявным выражением

$$\frac{1}{3}\sqrt{2-3a^2} - \frac{1}{2}\mathrm{Arch}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{a}\right) = \pm\frac{\omega\xi}{4V} \ , \tag{1.94}$$

где Arch$x$ определяет обратную функцию $\cosh x$.

Дабы представить преемственность найденных солитонов с фундаментальным шредингеровским солитоном, мы рассмотрим солитоны уравнения (1.92) при малых амплитудах, то есть $a_{max}^2 \ll 1$, которые соответствуют длинным импульсам, содержащим большое число осцилляций поля, где приближение медленно меняющихся амплитуд действительно. В этом случае приближенное решение может быть записано как

$$\frac{9}{2}\delta\sqrt{\delta^2 - \frac{a^2}{2}} - \mathrm{Arch}\left(\frac{\sqrt{2}\delta}{a}\right) = \pm\frac{\omega}{V}\delta\xi \ . \tag{1.95}$$

Интересно отметить, что это решение с высокой точностью описывает солитоны даже для коротких длительностей, за исключением предельного случая с минимальной длительностью $\tau \simeq \tau_{min}$. На рисунке 1.26**(a)** синей линией представлено приближенное решение (1.95), которое хорошо согласуется с точным решением. Это приближенное решение может быть использовано для анализа солитонной динамики. Для примера из выражения (1.95) можно получить шредингеровский солитон $a(\xi) = a_{NLS} = \dfrac{\sqrt{2}\delta}{\cosh\left(\omega\delta\xi V^{-1}\right)}$ [2], производя разложения данного уравнения по малому параметру амплитуды $\delta \ll \sqrt{\dfrac{1}{8}}$ в первом порядке малости. В следующем порядке малости мы получим решение нелинейного уравнения Шредингера высокого порядка, которое учитывает нелинейную дисперсию групповой скорости, где нелинейная фазовая модуляция становится важной [73, 80, 150],

$$a = \frac{2\delta\sqrt{1-9\delta^2}}{\sqrt{1-18\delta^2+\cosh(2\omega\delta\xi V^{-1})}} \quad , \tag{1.96a}$$

$$F = -\frac{3\omega}{2V}\int\limits_{-\infty}^{\xi} a^2 d\xi' \ . \tag{1.96b}$$

Таким образом, структура уединенной волны, определяемая нелинейным волновым уравнением (1.82), покрывает весь спектр волновых солитонов от фундаментальных шредингеровских солитонов для длинных импульсов, содержащих множество оптических колебаний поля, к солитонам экстремально коротких длительностей, содержащих только оптический период. Тем не менее, даже самый короткий солитон

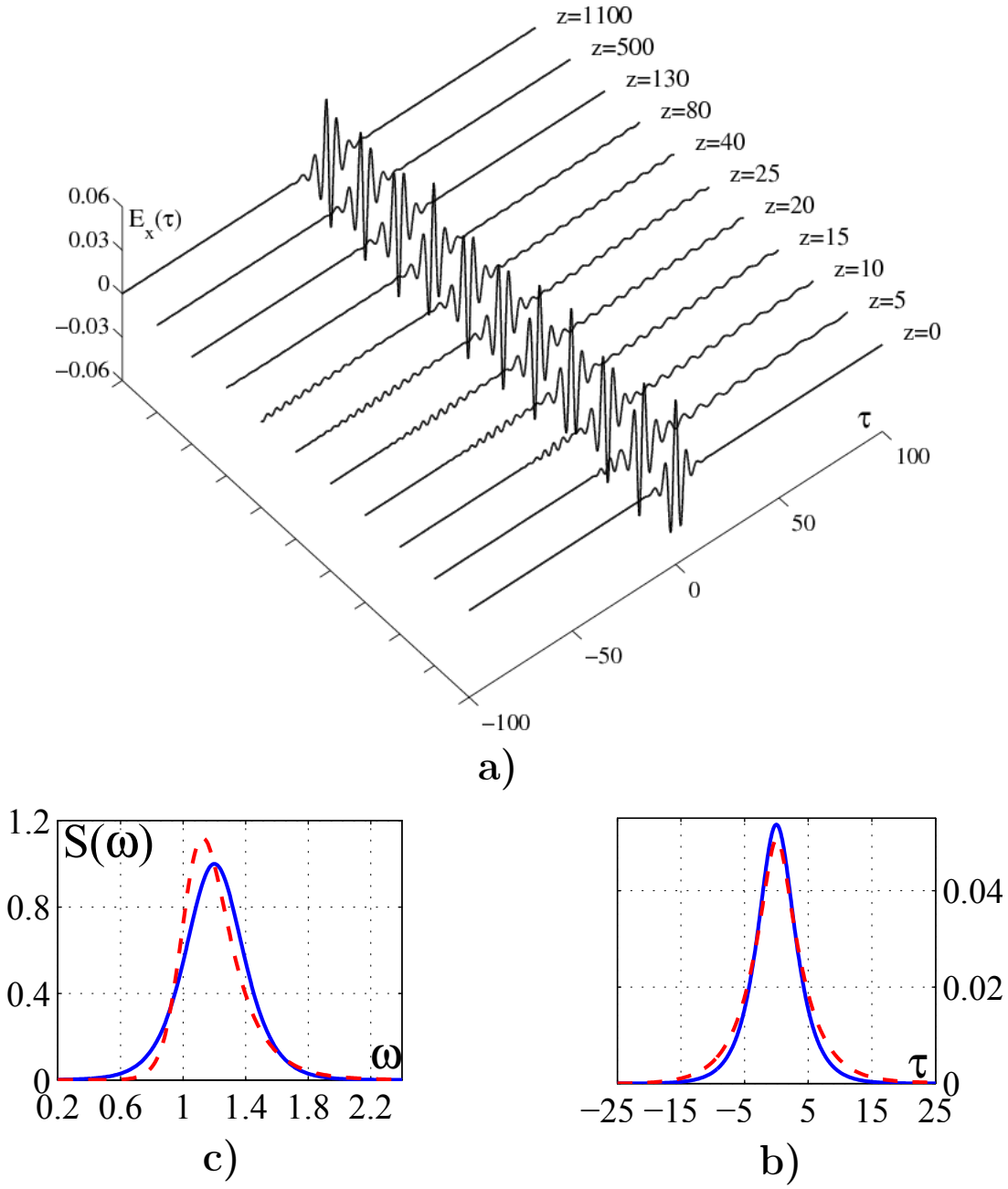


Рис. 1.27: Возбуждение циркулярно-поляризованного солитона с малым числом осцилляций поля. **(a)** Эволюция волнового поля; **(b)** Распределение огибающих поля $|\mathcal{E}| = \sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}$ на входе $z = 0$ (синяя сплошная линия) и при $z = 1100$ (красная пунктирная линия). **(c)** Спектральные мощности волновых пакетов $S(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_x \exp(i\omega\tau) d\tau \right|^2$ на входе $z = 0$ (синяя сплошная линия) и при $z = 1100$ (красная пунктирная линия).

должен содержать как минимум пару циклов, чтобы удовлетворить интегральному соотношению (1.83), которое выражается в том, что среднее поле должно быть равно нулю.

1.10.2 Численный анализ

Чтобы выполнить моделирование на больших дистанциях и найти различие между разными солитонами, мы выбрали сопутствующее окно, которое распространяется с линейной групповой скоростью μ^{-1}. В новых переменных $z \to z$, $\tau = t - \mu z$ уравнение (1.82) можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} = \mathcal{P} \ , \tag{1.97a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = 2\mu \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \tau} - (\mu^2 - 1)\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \tau^2} + n\mathcal{U} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(|\mathcal{U}|^2 \mathcal{U}) \ . \tag{1.97b}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\dfrac{\omega}{\omega_o} \to \omega$, $\dfrac{\omega_p^2}{\omega_o^2} = n$, $\mu = \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - n}}$. Данная система уравнений решалась численно с помощью метода Рунге - Кутты четвертого порядка. Причем временные производные численно вычислялись с использованием метода Фурье. Данная система уравнений (1.97) соответствует уравнению второго порядка по переменной z, поэтому для однозначного задания импульса на входе нелинейной среды ($z = 0$) необходимо определить не только начальное распределение волнового пакета $\mathcal{U}(\tau)\Big|_{z=0}$, но и производную $\dfrac{\partial \mathcal{U}(\tau)}{\partial z}\Big|_{z=0}$, чтобы импульс распространялся по нужной характеристике.

A. Возбуждение одиночного солитона

На рисунке 1.27 показано возбуждение и последующее стабильное распространение одиночного солитона из локализованного начального распределения, взятого как *sech – распределение*,

$$\mathcal{U}(\tau)\Big|_{z=0} = \delta \sqrt{\frac{2n}{\omega^2 - n}} \frac{\exp(i\omega\tau)}{\cosh(\delta\omega\tau)} \ , \tag{1.98a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}(\tau)}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\sqrt{2n}\delta n}{\omega^2 - n} \frac{i \exp(i\omega\tau)}{\cosh(\delta\omega\tau)} \tag{1.98b}$$

при $\omega = \omega_{in} = 1.2$, $n = 0.02$, $\delta = \delta_{in} = 0.32$. Стабильный солитонный импульс сформировался при $z \simeq 40$ [измеренные в линейных дисперсионных длинах для начального импульса ($L_{dis} = 600$)] и имеет параметры $\omega_s \simeq 1.02$ и $\delta_s \simeq 0.27$. Из рисунка

видно, что длительность сформировавшегося циркулярно-поляризованного солитона при распространении его в нелинейной среде не меняется, а динамика заключается в периодической эволюции внутренней структуры импульса. Следует отметить, что на начальном этапе возбуждения односолитонного решения наблюдается незначительная утечка энергии в виде убегающих волн. Общая доля потерь на рассчитанной трассе $L = 1100L_{dis}$ составила чуть более 4% от общей энергии начального импульса.

Дабы идентифицировать физические параметры сгенерированного солитона $(\delta,\ \omega)$ с малым числом осцилляций поля и доказать их солитонную природу, мы использовали приближенное решение (1.95), для которого амплитуда $\mathcal{E}_{max}$ и энергия W_s могут быть получены как

$$\mathcal{E}_{max}^2 = \frac{2\delta^2 n}{\omega^2 - n}\ , \tag{1.99a}$$

$$W_s = \frac{4\delta(1-3\delta^2)n}{\omega(\omega^2-n)}\ , \tag{1.99b}$$

где неравенства $\dfrac{n}{\omega^2} \ll 1$, $\delta^2 \ll 1$ были использованы. Из данных соотношений мы можем определить параметры солитона с малым числом колебаний поля как следующие:

$$\omega = \frac{\sqrt{W_s^2 n - 24\mathcal{E}_{max}^4 + \sqrt{(W_s^2 n - 24\mathcal{E}_{max}^4)^2 + 32W_s^2\mathcal{E}_{max}^2 n(1+3\mathcal{E}_{max}^2)}}}{\sqrt{2}W_s}\ , \tag{1.100a}$$

$$\delta = \mathcal{E}_{max}\sqrt{\frac{\omega^2-n}{2n}}\ . \tag{1.100b}$$

Sech–подобное распределение дает хорошую аппроксимацию огибающей солитона на рисунке 1.27**(b)**, но в режиме с малым числом осцилляций начальная текущая частота и спектр солитона существенно изменяется.

B. Динамика солитона высокого порядка

Продемонстрированная нами численно устойчивость волновых структур (1.89), (1.92) в процессе их распространения в нелинейной среде является очень важным обстоятельством, позволяющим определить их как солитоны волнового поля. Другое положение фундаментальных интересов – динамика солитонов высокого порядка, которые играют исключительно важную роль как в теории нелинейного уравнения Шредингера, так и для других областей применения, например, для метода компрессии оптических импульсов [2, 172]. По аналогии с формализмом нелинейного

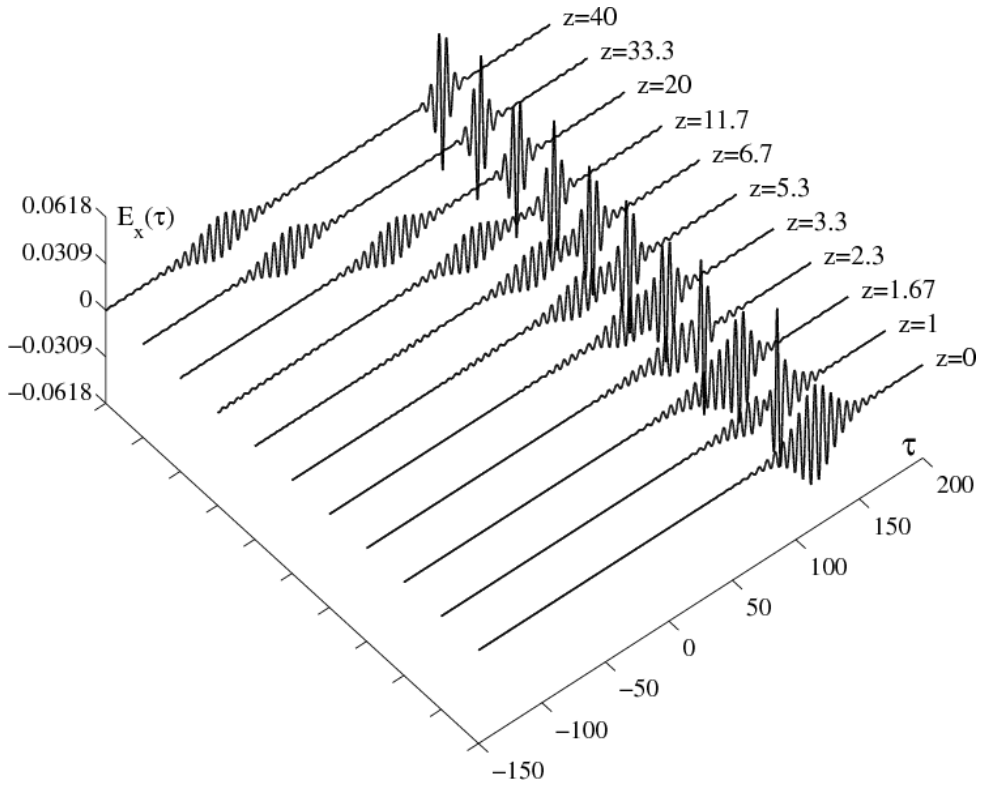


Рис. 1.28: Динамика поля (x компоненты) электромагнитного импульса с циркулярной поляризацией в процессе распространения в нелинейной среде в случае, когда на вход среды задан волновой пакет в форме солитона высокого порядка: $\mathcal{N} = 2.05$, $\delta = 0.08$, $\omega = 1$. В результате эволюции начальный волновой пакет распался на два солитона, которые имеют следующие параметры: $\delta_1 \simeq 0.24$, $\omega_1 \simeq 0.9$, $\delta_2 \simeq 0.08$, $\omega_2 \simeq 0.95$. Здесь координата z нормирована на характерную дисперсионную длину L_{dis}, которая для входного распределения составляет $L_{dis} = 7200$.

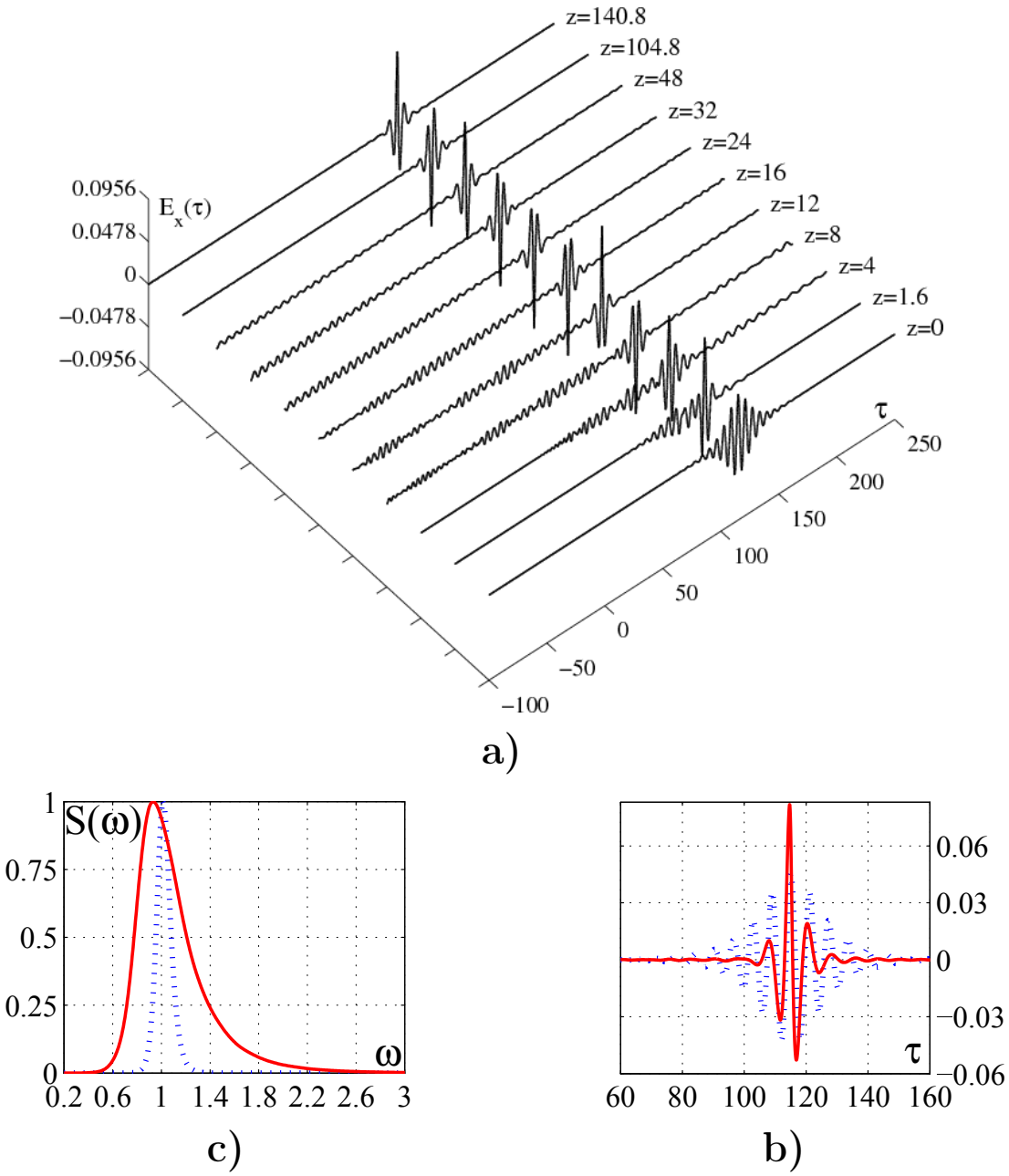


Рис. 1.29: **(a)** Эволюция волнового поля (x компонента) в нелинейной среде в случае, когда на вход нелинейной среды задан солитон высокого порядка: $\mathcal{N} = 2.05$, $\delta = 0.11$, $\omega = 1$. Распределение поля $E_x(\tau)$ при $z = 0$ (синяя пунктирная линия) и при $z/L_{dis} = 140.8$ (красная сплошная линия). **(c)** Спектральная мощность волнового пакета $S(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_x \exp(i\omega\tau) d\tau \right|^2$ на входе $z = 0$ (синяя пунктирная линия) и при $z/L_{dis} = 140.8$ (красная сплошная линия). Здесь координата z нормирована на характерную дисперсионную длину L_{dis}, которая для входного распределения составляет $L_{dis} = 3000$. В результате эволюции начальный волновой пакет распался только на один солитон с параметрами: $\delta \simeq 0.34$, $\omega \simeq 0.78$.

уравнения Шредингера мы ввели

$$\mathcal{K}_S = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_S(\tau) d\tau \tag{1.101}$$

и солитонное число

$$\mathcal{N} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(z=0,\tau) d\tau}{\mathcal{K}_S} \ . \tag{1.102}$$

Отметим, что амплитуда солитона НУШ однозначно связана с его длительностью, так, что интеграл под огибающей поля в солитоне есть постоянное число, определяемый только параметрами среды – величиной дисперсии групповой скорости и нелинейности. Как отмечалось ранее, амплитудное распределение солитонных структур волнового поля с высокой точностью аппроксимируется распределением (1.95). Поэтому в первом приближении интеграл от амплитудного профиля огибающей солитона также представляет собой некоторую универсальную постоянную

$$\mathcal{K}_S = \frac{\sqrt{2n}\pi}{\omega^2\sqrt{1-\dfrac{n}{\omega^2}}} \ . \tag{1.103}$$

Тем не менее, поскольку для солитонов с малым числом осцилляций $\mathcal{K}_S$ есть не универсальное значение как для НУШ случая (где он зависит только от параметров среды), мы определили начальное распределение в форме солитона высокого порядка как $\mathcal{E}(z=0,\tau) = \mathcal{N}\mathcal{E}_S$, где $\mathcal{E}_S$ – точное решение уравнения (1.92). Для очень малых значений δ ($\delta^2 \ll \dfrac{1}{8}$), когда НУШ приближение хорошо работает, результаты численного моделирования уравнения (1.82) хорошо соотносятся с классической предсказанной динамикой солитона высокого порядка в рамках НУШ. Тем не менее, при приближении к режиму с малым числом колебаний поля, новые характерные черты становятся важными. Во-первых, для промежуточных значений параметра δ ($\delta \lesssim 0.095$) начальное распределение солитона высокого порядка разбивается на число солитонов, определяемое $\mathcal{N}$, но несущая частота каждого солитона может отличаться от начального значения. Пример подобного решения приведен на рисунке 1.28, где начальные параметры импульса: $\mathcal{E} = 2.05\mathcal{E}_S$, $\omega = 1$, $\delta = 0.08$. Со временем этот начальный импульс разобьется на два солитона со следующими параметрами: $\omega_1 = 0.9$, $\delta_1 = 0.24$ и $\omega_2 = 0.95$, $\delta_2 = 0.08$. Как следует из восстановленных параметров сформировавшихся солитонов, в результате разбиения солитона высокого порядка длительность волновой структуры с меньшей амплитудой совпадает с на-

чальной длительностью исходного импульса, в то время как длительность волновой структуры с большей амплитудой в три раза меньше начальной длительности.

Для сравнительно коротких солитонов высокого порядка с $\delta \gtrsim 0.095$ значение параметра $\mathcal{N}$ не может быть использовано для предсказания динамики солитона высокого порядка, в частности, на асимптотике появления числа солитонов, как для случая НУШ. Однако, по-прежнему будет верно, что солитоны высокого порядка будут трансформироваться в солитон с короткой длительностью, который и будет одним из путей генерации экстремально коротких солитонов с малым числом осцилляций поля, даже с длительностью сопоставимой с периодом колебаний поля. На рисунке 1.29 показаны результаты численного моделирования, схожие с теми, что приводятся на рисунке 1.28, но с входным параметром $\delta = 0.11$. Теперь динамика полностью отлична от предыдущего случая, длительность сгенерированного солитона существенно укорачивается (импульс сжался в 5.9 раз), также имеет место значительное уширение спектра [см. рис. 1.29**(b, c)**] и несущая частота сдвинулась вниз к $\omega_1 = 0.78$.

В заключении мы разработали теоретический подход концепции солитонов для полного нелинейного волнового уравнения, описывающего распространение электромагнитных импульсов с произвольной длительностью в среде с Керровской нелинейностью, который предсказывает существование уединенных волн только с длительностью в несколько осцилляций поля. Мы доказали, что эти солитоны стабильны и могут легко возбуждаться с использованием концепции солитона высокого порядка, которая может также обеспечить путь для генерации солитонов с малым числом осцилляций поля.

1.11 Обсуждение результатов

Найден широкий класс уединенных решений одномерного волнового уравнения, описывающего распространение в прозрачной нерезонансной среде солитоноподобных структур циркулярно-поляризованного оптического излучения, включающих конечное число периодов колебаний поля. Особенностью этих решений является их плавная перестройка от солитонных решений шредингеровского типа, соответствующих длинным импульсам со многими осцилляциями, до предельно коротких, фактически одноперiодных видеоимпульсов. Рассмотрена реализуемость таких солитонных структур для поля с эллиптической поляризацией и численно показана их

структурная устойчивость.

На основе результатов численного моделирования проведено исследование задачи по парному взаимодействию волновых солитонов с циркулярной поляризацией, содержащих небольшое число колебаний поля. Режим взаимодействия солитонов зависит от взаимной поляризации волновых пакетов и несущих частот. В случае, когда сталкивающиеся уединенные волны вращаются в одном направлении и несущие частоты близки, существуют три различных режима столкновения импульсов в зависимости от абсолютной разности фаз полей:

1. солитоны проходят друг сквозь друга;

2. они полностью отражаются;

3. солитоны точно реплицируют друг друга в процессе взаимодействия.

Однако, если несущие частоты солитонов различны и/или свойственные ему амплитуды отличаются более чем на 40%, лишь один из сценариев реализуется: солитоны проходят друг через друга с полным сохранением своей волновой структуры, включая и частотные заполнения. Причем их взаимодействие достаточно близко к Шредингеровским солитонам. В случае когда сталкивающиеся солитоны вращаются в противоположных направлениях и амплитуды солитонов отличаются могут быть сформулированы следующие положения, которые отражают определенные динамические свойства соударений:

1. в случае, когда частоты сталкивающихся солитонов совпадают, имеет место упругое отталкивание волновых структур;

2. в случае, когда частоты слабо отличаются, имеет место неупругое взаимодействие солитонов;

3. в случае, когда частоты значительно отличаются, имеет место упругое прохождение волновых структур.

На основе результатов численного моделирования показано, что произвольный лазерный импульс, распространяющийся в среде с безынерционной нелинейностью керровского типа и плазменным законом дисперсии, распадается на найденные солитонные структуры нелинейного волнового уравнения. Был предложен алгоритм

для определения начальных распределений волнового поля, которые в дальнейшем распадаются на последовательность солитонов с предопределенными параметрами.

Найдены и проанализированы солитонные решения для циркулярно-поляризованного излучения в рамках полного волнового уравнения в отсутствии безотражательного приближения.

Глава 2

Структурные особенности самофокусировки лазерных импульсов с малым числом колебаний поля в среде с кубичной нелинейностью

Передовые рубежи нелинейной оптики сверхкоротких лазерных импульсов сегодня – это исследование самовоздействия импульсов, содержащих лишь несколько колебаний светового поля [35]. Понятие огибающей для таких предельно коротких импульсов (ПКИ) теряет свое физическое содержание. Перестает быть корректным и выводимое в приближении квазимонохроматического излучения привычное для нелинейной оптики уравнения движения огибающих [1,208]. В связи с этим возникает новая в теоретическом плане проблема исследования особенностей распространения *сверхкоротких импульсов* конечной амплитуды, дифракции их в неоднородной среде и взаимодействия *широкополосного излучения* с веществом. Необходимо также и получение материальных уравнений, адекватно описывающих линейную и нелинейную дисперсию показателя преломления среды в широком диапазоне частот в области прозрачности [7,30,242]. Следует отметить, что сходные задачи, связанные с описанием заметного уширения спектра излучения, возникают и в композитных средах, например, в кластерной плазме [111], и при изучении такого уникального явления, как сверхдальное распространение ионизирующего фемтосекундного лазерного

излучения в атмосфере [6, 29, 36, 109, 140, 238].

Теория нелинейного распространения ПКИ в различных средах, которой посвящены уже многое десятки работ, строится обычно на уравнениях, описывающих динамику не огибающей импульса, а непосредственно его поля (см. например, обзоры [30, 31, 44, 63, 115, 156, 157, 188, 190, 191, 213, 239, 240, 245, 252, 256]. В основной части этих публикаций изучаются закономерности нелинейной эволюции поля ПКИ с неизменной поперечной структурой (что предполагается в первом приближении справедливым в волноводах (см. *первую главу*)). Изменение поперечного пространственного распределения поля ПКИ (в объемных нелинейных средах) рассматривалось в значительно меньшем числе работ. Следует отметить, что в исследовании динамики самовоздействия подобных волновых пакетов преобладающим является *численное моделирование* [30, 63, 190, 203]. В то же время весьма привлекательными являются попытки *аналитического исследования*, позволяющие сформулировать некоторые общие выводы о динамике системы.

В этой главе диссертации продолжим исследования особенностей самовоздействия неодномерных волновых пакетов, содержащих малое число колебаний поля, на основе соответствующего обобщения волнового уравнения, рассмотренного в предыдущей главе. Получен ряд аналитических соотношений для преобразования продольного профиля огибающей волнового пакета в процессе его самофокусировки. Показано, что неограниченное возрастание амплитуды в среде с кубичной нелинейностью сопровождается укручением продольного профиля и формированием ударных фронтов и существенным уширением частотного спектра пакета. Аналитические оценки сопоставлены с результатами численного моделирования.

Следует заметить, что приближенное описание динамики сверхкоротких импульсов в предположении плавного однонаправленного распространения волнового пакета в среде применимо как для «видеоимпульсов», так и квазимонохроматических волновых пакетов. В данной главе будет проведено именно развитие такого подхода [26, 30, 215, 252, 257] для исследования динамики самовоздействия волновых полей в средах со слабой локальной нелинейностью. В разделе 2.1 получены уравнения, описывающие эволюцию волновых пакетов с конечным числом колебаний поля в параксиальном приближении. В разделе 2.2 проведено качественное исследование структурных особенностей трехмерных волновых полей и определено поведение эффективных параметров распределения поля (центра масс, ширины волнового поля и др.). Проведено обобщение линзового преобразования на случай широкополосного

излучения. В разделе 2.3.1 путем численного моделирования нелинейной динамики линейно поляризованного излучения (на основе уравнения (8)) показано, что процесс схлопывания протекает без заметного изменения амплитуды. Получены аналитические выражения на изменение максимальной амплитуды и размера пучка лазерного импульса в процессе самофокусировки. В разделе 2.3.2 приведено обобщение качественного исследования для волнового поля с круговой поляризацией. Преобразование уравнения в «схлопывающуюся систему координат»позволило установить определяющую роль нелинейной дисперсии (зависимости групповой скорости волнового пакета от амплитуды) в динамике системы. Качественное исследование дает возможность получить соответствующие законы изменения амплитуды и ширины волнового пучка как в случае линейно-поляризационного излучения. В разделе 2.4 исследовано влияние дисперсии среды на процесс самофокусировки циркулярно поляризованного волнового поля. В разделе 2.5 проведено исследование того, как повлияют на сделанные выше заключения о структурных особенностях самофокусировки сверхкоротких импульсов насыщение нелинейности и ионизация среды.

2.1 Постановка задачи. Основные уравнения

Развитие методов генерации и компрессии лазерных импульсов до длительностей менее десяти периодов колебаний поля стимулирует активный интерес к проблеме исследования особенностей распространения *сверхкоротких импульсов* конечной амплитуды, дифракции их в неоднородной среде и взаимодействия *широкополосного излучения* с веществом. Особенности теоретического описания пространственно-временной эволюции импульсов с шириной спектра порядка несущей частоты связаны с невозможностью применения традиционно используемой в теории волновых процессов приближения медленно меняющихся амплитуд для исследования динамики системы. Необходимо также и получение материальных уравнений, адекватно описывающих линейную и нелинейную дисперсию показателя преломления среды в широком диапазоне частот в области прозрачности [7, 30, 242].

На пути решения этой проблемы используется несколько подходов. Прежде всего следует отметить, что для исследования особенностей динамики сверхкоротких импульсов все чаще обращаются непосредственно к численному решению уравнений Максвелла. Однако даже при использовании самых сверхмощных компьютеров удается проводить исследование лишь волновых полей на довольно ограниченной трассе распространения [78].

Наибольшее распространение получило обобщение приближенного метода медленно меняющейся огибающей, связанное с учетом зависимости групповой скорости от амплитуды волнового поля, линейной дисперсии среды (см. например [29, 111, 228, 229, 232, 236, 238]). В результате задача сводится к анализу уравнения для огибающей волнового пакета, которое иногда называют нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) высокого порядка. Порядок определяется максимальной производной от показателя преломления среды по частоте, которую учитывают при получении уравнения. Третий подход основан на рассмотрении безотражательного распространения импульса в однородной среде. Предполагается, что пространственно-временная структура волнового поля плавно меняется в процессе однонаправленного распространения импульса по трассе из-за дифракции и нелинейности среды, т.е в пренебрежении эффектами отражения [26,30,115,213,215,252,257]. В случае квазимонохроматического излучения такой подход, очевидно, соответствует переходу к уравнению для огибающей. Учет конечной ширины спектра приводит к новым эффектам, которые проявляются в долговременной эволюции пространственно-ограниченного

импульса: *формирование дифракционного предвестника, образование характерной подковообразной структуры и дублета в спектре волнового поля* [26, 215, 252, 257].

Следует заметить, что приближенное описание динамики сверхкоротких импульсов в предположении плавного однонаправленного распространения волнового пакета в среде применимо как для видеоимпульсов, так и квазимонохроматических волновых пакетов. В данной главе будет проведено именно развитие такого подхода для исследования динамики самовоздействия волновых полей в средах со слабой локальной нелинейностью.

Волновое уравнение, описывающие распространение пакета электромагнитных волн вдоль оси z, удобно представить в виде

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z^2} + \Delta_\perp \boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{P}}}{\partial t^2} \ , \tag{2.1}$$

где $\Delta_\perp = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, вектор $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ – поляризационный отклик диэлектрической среды в поле интенсивного излучения.

В предыдущей главе диссертации для определения линейной части поляризационного отклика среды от напряженности поля $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{lin}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ [$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}_{lin} + \boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl}$] мы воспользовались соотношением Крамерса-Кронинга (1.2). При этом нелинейную часть отклика среды $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ мы определили феноменологическим образом. В данном разделе мы воспользуемся другим приемом для полного определения поляризационного отклика среды $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ (как линейной, так и нелинейной части).

Классический пример материальной связи $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ в слабом поле дает теория дисперсии Лоренца. При небольшом числе феноменологических параметров она приводит к той же частотной зависимости показателя преломления среды, что и в результате квантовомеханического расчета. Обобщение теории Лоренца на случай интенсивного излучения можно провести путем введения в уравнение осциллятора кубической нелинейности [242]. Обсуждение проблемы дисперсии электромагнитных волн[8] показывает [248], что для определения диэлектрической проницаемости в достаточно широком диапазоне частот в области слабого поглощения необходимо использование модели среды, представляющей собой два осциллятора с сильно различающимися частотами. Полагая $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}_1 + \boldsymbol{\mathcal{P}}_2$ и ограничиваясь минимальным числом феноменологических параметров, для нахождения отклика среды в поле линейно поляризо-

[8] В работе [248] показано, что в соответствии с отношениями Крамерса-Кронига диэлектрическая проницаемость как функция частоты должна проходить через нуль.

ванного излучения воспользуемся следующими уравнениями:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}_1}{\partial t^2} + \omega_o^2 \mathcal{P}_1 + \delta \mathcal{P}_1^3 + \tilde{\gamma} \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial t} = \chi \omega_o^2 \mathcal{E} \ , \tag{2.2a}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}_2}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \mathcal{E} \ . \tag{2.2b}$$

Здесь ω_o – собственная частота, χ – статическая линейная восприимчивость среды, δ и $\tilde{\gamma}$ – параметры нелинейности и диссипации, ω_p – «плазменная частота». Здесь мы предполагаем, что лишь «высокочастотный»осциллятор является нелинейным и описывается уравнением Дуффинга (2.2a)[9] [242]. Второй осциллятор обеспечивает «плазменную дисперсию»(2.2b) и имеет собственную частоту, равную нулю.

Для излучения с центральной частотой ω и шириной спектра $\Delta\omega$, много меньшей собственной частоты ω_o,

$$\Delta\omega < \omega \ll \omega_o \ , \tag{2.3}$$

методом последовательных приближений по параметру нелинейности δ и нестационарности можно получить из (2.2a) следующее выражение для поляризационного отклика среды $\mathcal{P}_1$:

$$\mathcal{P}_1 = \chi \mathcal{E} - \frac{\chi}{\omega_o^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \frac{\delta \chi^3}{\omega_o^2} E^3 - \tilde{\gamma} \frac{\chi}{\omega_o^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \ . \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) и (2.2b) в (2.1) и используя приближение однонаправленного (безотражательного) распространения волнового поля вдоль оси z, получаем:

$$\frac{2\sqrt{\varepsilon_o}}{c} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z \partial \tau} - \frac{4\pi\delta\chi^3}{(c\omega_o)^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}^3}{\partial \tau^2} - \frac{4\pi\chi}{(c\omega_o)^2} \frac{\partial^4 \mathcal{E}}{\partial \tau^4} - \frac{4\pi\chi\tilde{\gamma}}{(c\omega_o)^2} \frac{\partial^3 \mathcal{E}}{\partial \tau^3} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \mathcal{E} = \Delta_\perp \mathcal{E} \ , \tag{2.5}$$

где $\tau = t - \dfrac{z\sqrt{\varepsilon_o}}{c}$ – время в сопровождающей системе координат, $\varepsilon_o = 1 + 4\pi\chi$ – статическая диэлектрическая проницаемость среды.

Более точное описание поляризационного отклика должно учитывать дополнительно вклад от нерезонансного возбуждения других осцилляторов и индуцированной анизотропии осциллятора на частоте ω_o [7, 30, 242]. Оно приводит к некоторой модификации коэффициентов в уравнениях (2.2a), (2.5). В частности, благодаря этому обстоятельству удается добиться хорошего согласия с экспериментальными данными по измерению линейной дисперсии кварцевого стекла и благородных газов практически во всем диапазоне прозрачности при изменении частоты более чем на порядок [7, 30].

[9] Для простоты сначала мы ограничились наличием одной резонансной частоты ω_0.

Окончательно уравнение, описывающие динамику самовоздействия широкополосного линейно поляризованного волнового поля в среде с фокусирующей нелинейностью ($\chi \cdot \delta < 0$), представим в следующем виде [30, 252]:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}}{\partial z} + 3\tilde{\mathcal{E}}^2\frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}}{\partial\tau} - b\frac{\partial^3\tilde{\mathcal{E}}}{\partial\tau^3} - \gamma\frac{\partial^2\tilde{\mathcal{E}}}{\partial\tau^2}\right) + a\tilde{\mathcal{E}} = \Delta_\perp\tilde{\mathcal{E}}. \tag{2.6}$$

Здесь введены следующие новые (безразмерные) переменные:

$$z \to z\frac{2\sqrt{\varepsilon_o}\varpi c}{\omega_p^2}\ , \quad r \to r\frac{c}{\omega_p}\ , \quad \tau \to \frac{\tau}{\varpi}\ ,$$

$$\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}\sqrt{\frac{\omega_o^2\omega_p^2}{4\pi\delta\chi^3\varpi^2}}\ ; \quad \gamma = \frac{4\pi\chi\tilde{\gamma}\varpi^3}{\omega_o^2\omega_p^2}\ , \quad b = \frac{4\pi\chi\varpi^4}{\omega_o^2\omega_p^2}\ ,$$

где ϖ – центральная частота широкополосного излучения. Координаты обезразмерены на соответствующие характерные пространственные и временные масштабы задачи, поле $\mathcal{E}$ - на характерное нелинейное поле. Параметры $a > 0$, $b > 0$ характеризуют, соответственно, низкочастотную (плазменную) и высокочастотную дисперсию среды; $\gamma > 0$ определяет диссипацию поля. В дальнейшем для упрощения чтения формул символ тильде будет убран.

Масштабная инвариантность (2.6), как и в случае НУШ, дает возможность описывать особенности динамики системы с помощью лишь только двух дисперсионных параметров: $a > 0$ определяет низкочастотную дисперсию, $b > 0$ – высокочастотную. Подбором параметров ($a > 0$, $b > 0$) удается добиться хорошего согласия с экспериментальными данными: например, для кварцевого стекла и благородных газов, такое согласие реализуется при изменении частоты на порядок [30]. Уравнение (2.6) включает в себя минимальное необходимое число слагаемых для учета дисперсионных и нелинейных эффектов, достаточное для полного описания многих прозрачных сред, и может рассматриваться в качестве *базового уравнения* при анализе динамики широкополосного оптического излучения с учетом пространственных эффектов в нерезонансной среде с безынерционной нелинейностью керровского типа. Отметим, что в случае неизменной поперечной структуры волнового пакета ($\Delta_\perp \equiv 0$) уравнение (2.6) структурно совпадает с уравнением (1.7), которое было использовано нами в Главе 1 для анализа нелинейной динамики лазерных импульсов с малым числом колебаний поля с произвольной поляризацией в волноведущих системах [104, 172, 263]. Было продемонстрировано существование нового класса солитонных решений и показана устойчивость найденных волновых структур относительно парных взаимодействий. Следует отметить, что в работе [157] было показано, что в случае линейно

поляризованного поля в одномерной задаче ($\Delta_\perp \equiv 0$) в отсутствие высокочастотной дисперсии ($b \equiv 0$) существует точное преобразование, которое трансформирует уравнение (2.6) в уравнение синус-Гордона (*Sin-Gordon*). Очевидно, что это уравнение является интегрируемым [156].

В отсутствии линейной дисперсии среды ($a = b = 0$) уравнение (2.6) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} + 3\mathcal{E}^2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau} - \gamma\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\tau^2}\right) = \Delta_\perp\mathcal{E}\ . \tag{2.7}$$

Его можно рассматривать как неодномерное ($\Delta_\perp \neq 0$) обобщение модифицированного уравнения Бюргерса. Оно относится к типу обобщенных уравнений Хохлова-Заболоцкой и описывает, например, особенности самовоздействия акустических волновых полей в средах с кубичной нелинейностью [261, 262]. При $\gamma = 0$, $a = 0$ (2.6) имеет вид обобщенного уравнения Кадомцева-Петиашвили:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} + 3\mathcal{E}^2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau} - b\frac{\partial^3\mathcal{E}}{\partial\tau^3}\right) = \Delta_\perp\mathcal{E}\ . \tag{2.8}$$

Оно используется, например, для описания эволюции упругих волн конечной амплитуды в магнетиках [186, 255]. В зависимости от закона дисперсии фононов, линейно связанных с магнонами, коэффициент b может принимать как положительные $b > 0$, так и отрицательные $b < 0$ значения.

В рассматриваемом нами случае электромагнитного излучения параметры a ($a > 0$) и b ($b > 0$) определяют линейную дисперсию групповой скорости волнового поля в широком диапазоне частот. Важно отметить, что вид линейной части диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ уравнения (2.6)

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_o - \frac{a}{\omega^2} + b\omega^2 \tag{2.9}$$

является универсальным, поскольку в главном приближении (2.9) содержит необходимое число слагаемых для описания дисперсии в широкой области частот в области прозрачности. Данный закон (2.9) можно получить также из более общих соотношений теории дисперсии среды, например, воспользовавшись соотношением Крамерса-Кронинга (см. раздел 1.1)

В рассматриваемом нами случае соответствующий линейный закон дисперсии $k_z(\omega)$ в отсутствии пространственных эффектов ($\Delta_\perp \equiv 0$) для волны $\mathcal{E} \sim \exp(i\omega\tau - ik_z z)$, распространяющейся вдоль z, имеет вид

$$k_z = -\frac{a}{\omega} + b\omega^3\ . \tag{2.10}$$

Заметим, что изменяя центральную частоту ϖ широкополосного излучения, можно управлять ролью дисперсии в динамике системы. На рисунке 1.1 представлен закон дисперсии $k_z(\omega)$ для одномерного случая ($\Delta_\perp \equiv 0$) и параметр дисперсии групповой скорости $k_2 = \dfrac{\partial^2 k_z}{\partial \omega^2}$. В частности, для излучения с частотой $\omega_{bnd} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{3b}}$ параметр дисперсии групповой скорости $GVD = \dfrac{\partial^2 k_z}{\partial \omega^2}$ обращается в ноль. Соответственно, для волновых полей с частотой $\varpi \gg \omega_{bnd}$ спектр поля сосредоточен в основном в области с нормальной дисперсией групповой скорости ($GVD > 0$), а для $\varpi \ll \omega_{bnd}$ преобладающей является аномальная дисперсия ($GVD < 0$).

Для иллюстрации отличительных особенностей динамики самовоздействия обсудим отдельно те эффекты, которые не учитываются при переходе к НУШ. В случае квазимонохроматического волнового пакета вида

$$\mathcal{E} = \psi\left(z, \boldsymbol{r}_\perp, \tau\right) e^{i\varpi\tau} + c.c.$$

из (2.6) нетрудно получить уравнение, обобщающее известное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) для огибающей [28, 122]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \Delta_\perp\psi + \alpha(\varpi)\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{\tau}^2} + |\psi|^2\psi + i\beta|\psi|^2\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\tau}} + i\gamma\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{\tau}^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\alpha_n\frac{\partial^n\psi}{\partial\tilde{\tau}^n} = 0\ . \qquad (2.11)$$

Для этого нужно пренебречь смешанной производной $\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\tilde{\tau}}$, генерацией третьей гармоники частоты ϖ и перейти в систему координат, движущуюся с групповой скоростью. Здесь $\tilde{\tau} = \tau - z/v_{gr}$ – время в сопровождающей системе координат, $v_{gr} = \left(\dfrac{\partial k_z}{\partial\omega}\right)^{-1}$ – групповая скорость, $\alpha(\varpi) = \dfrac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}$. Параметры дисперсии высокого порядка $\alpha_n = \dfrac{i^n}{n!}\dfrac{\partial^n k_z}{\partial\omega^n}$ определяются коэффициентами разложения в ряд Тейлора дисперсионного соотношения (2.10) в окрестности несущей частоты; $\beta = \dfrac{\Delta\omega}{\varpi} \ll 1$, где $\Delta\omega$ – ширина спектра волнового пакета.

Видно, что в случае квазимонохроматического излучения нелинейное слагаемое в (2.6) распадается на два. Одно описывает обычную кубичную нелинейность в НУШ, второе – зависимость групповой скорости волнового пакета от амплитуды поля (нелинейную дисперсию). Последнюю обычно не учитывают в стандартном НУШ, поскольку соответствующее слагаемое в (2.11) мало по сравнению с первым по параметру малости $\dfrac{\Delta\omega}{\varpi} \ll 1$. Однако эти два члена описывают различные эффекты: кубичная нелинейность приводит к самофокусировке излучения, нелинейная дисперсия – к укручению продольного профиля импульса. Однако, несмотря на малость,

нелинейная дисперсия приводит к эффекту опрокидывания профиля огибающей импульса. С другой стороны, имеются случаи, например, в условиях электромагнитной индуцированной прозрачности, когда эффекты нелинейной дисперсии являются преобладающими.

Параметр $\alpha(\varpi)$ определяется дисперсией групповой скорости. Для сред с нормальной дисперсией групповой скорости данный параметр отрицателен ($\alpha < 0$), а для аномальной – положителен ($\alpha > 0$). Выбором центральной частоты $\varpi = \omega_{bnd}$ можно добиться обращения коэффициента α в ноль $[\alpha(\omega_{bnd}) = 0]$. В этом случае дисперсия волнового пакета определяется третьей и более высокими производными по τ.

Особенности динамики самовоздействия квазимонохроматического излучения довольно хорошо изучены и экспериментально исследованы в одномерных системах ($\Delta_\perp \equiv 0$) [2, 208, 209]. Следует отметить, что несмотря на малость слагаемых, описывающих дисперсию высших порядков и нелинейную дисперсию, они определяют как эволюцию волновых пакетов в фиберах, так и структуру частотно-модулированных солитонов [150] на больших трассах. Совместное их действие определяет, например, эффект самообострения импульса [2, 208, 209].

Ситуация заметно меняется в неодномерном случае ($\Delta_\perp \neq 0$) из-за эффекта самофокусировки излучения. Чтобы оценить роль различных слагаемых в (2.11) в режиме самофокусировки, удобно сделать преобразование к новым переменным

$$\psi = \frac{\mathcal{F}(\zeta, \boldsymbol{\eta}, \tilde{\tau})}{z_o - z} \exp\left[-\frac{i\eta^2 (z_o - z)}{4}\right] , \tag{2.12}$$

где

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{r}_\perp}{z_o - z}, \quad \zeta = \frac{z}{z_o (z_o - z)} , \tag{2.13}$$

которое выделяет в явном виде коллапс аксиально-симметричного волнового пакета на длине самофокусировки z_o. В результате для автомодельной функции $\mathcal{F}$ получим уравнение

$$i\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} + \Delta_\eta \mathcal{F} + |\mathcal{F}|^2 \mathcal{F} + i\beta |\mathcal{F}|^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{z_o^2}{(\zeta z_o + 1)^2} \left[\alpha(\varpi) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \tilde{\tau}^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n(\varpi) \frac{\partial^n \mathcal{F}}{\partial \tilde{\tau}^n}\right] = 0 , \tag{2.14}$$

которое описывает эволюцию волнового пакета на полубесконечном интервале изменения ζ. Видно, что коэффициент перед дисперсионным слагаемым уменьшается по закону $\sim \dfrac{1}{\zeta^2}$ и, следовательно, роль дисперсии (даже квадратичной) ослабляется по мере приближения импульса к точке фокуса. Довольно естественно предположить,

что в случае $\beta \ll 1$ при формировании коллапса кубичная нелинейность скомпенсирована дифракцией, как и в стандартном НУШ, т.е. $\Delta_\eta \mathcal{F} \simeq |\mathcal{F}|^2 \mathcal{F}$. При этом роль нелинейной дисперсии сильно возрастает, и основным эффектом в эволюции системы становится укручение продольного профиля поля и образование ударной волны огибающей [234]. Однако конечная крутизна продольного профиля определяется с учетом линейных дисперсионных эффектов. Таким образом, в отличие от стандартного НУШ, динамика рассматриваемой системы определяется не только темпом самофокусировки, но и конкуренцией линейной и нелинейной дисперсий. Этим динамика самовоздействия отличается от соответствующего процесса в стандартом НУШ.

Далее будут рассмотрены особенности пространственно-временной эволюции волновых полей на основе уравнения (2.6). В разделе 2.2 получен ряд аналитических соотношений, позволяющих качественно проанализировать характерные черты динамики самовоздействия, затем приведены результаты численного исследования отдельно для среды без линейной дисперсии (раздел 2.3) и с учетом специфики дисперсии (раздел 2.4).

2.2 Качественное исследование динамики самовоздействия

Для качественного исследования особенностей самовоздействия волнового поля, описываемых уравнением (2.6), воспользуемся методами, аналогичными используемым при анализе обобщенного НУШ. Для получения некоторых достаточно общих соотношений рассмотрим динамику самовоздействия в среде без поглощения. Полагая в уравнении (2.6) $\gamma = 0$, приходим к следующему уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + 3\mathcal{E}^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} - b\frac{\partial^3 \mathcal{E}}{\partial \tau^3}\right) + a\mathcal{E} = \Delta_\perp \mathcal{E} \ . \tag{2.15}$$

В дальнейшем более удобно перейти от уравнения (2.15) к уравнению для «потенциала» ϕ поля $\mathcal{E} = \dfrac{\partial \phi}{\partial \tau}$. В результате для локализованного распределения ϕ получаем уравнение Лангранжа

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)^3 - b\frac{\partial^4 \phi}{\partial \tau^4} = \Delta_\perp \phi - a\phi \ , \tag{2.16}$$

которому соответствует следующее выражение для плотности функции Лангранжа $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}\right)^4 + \frac{b}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\nabla_\perp \phi\right)^2 - a\frac{\phi^2}{2} \ . \tag{2.17}$$

В результате приходим к интегральным соотношениям

$$\mathcal{I} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{2.18a}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\nabla_\perp\phi \ d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{2.18b}$$

$$\mathcal{H} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[(\nabla_\perp\phi)^2 - b\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^4 + a\phi^2\right] d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{2.18c}$$

сохраняющимся в процессе эволюции системы. К ним следует добавить соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} d\tau = 0 \ , \tag{2.19}$$

которое означает отсутствие нулевой (нераспространяющейся) гармоники в спектре волнового пакета.

Существование этих соотношений связано с трансляционной симметрией исходного уравнения (2.15) ($z \to z + z_o,\ \tau \to \tau + \tau_o$). Они являются обобщением на случай широкополосного излучения хорошо известных выражений для энергии («числа квантов») $\mathcal{I}$, импульса $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ и гамильтониана $\mathcal{H}$ квазимонохроматического волнового пакета.

По аналогии со случаем квазимонохроматических пакетов [266] применим метод моментов для качественного исследования эволюции системы. Исходным для дальнейшего рассмотрения является уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 = -3\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 + b\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}\right)^2\right] - \frac{\partial}{\partial\tau}(\nabla_\perp\phi)^2 + \\ + b\frac{\partial^3}{\partial\tau^3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 + 2div_\perp\left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\nabla_\perp\phi\right] - a\frac{\partial}{\partial\tau}\phi^2 \ . \tag{2.20}$$

Оно получается умножением (2.15) на $2\dfrac{\partial\phi}{\partial\tau}$ и последующим преобразованием к дивергентному виду.

Вначале рассмотрим моменты первого порядка:

$$\mathcal{I}\cdot\langle\tau\rangle = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{2.21a}$$

$$\mathcal{I}\cdot\langle\boldsymbol{\rho}_\perp\rangle = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{r}_\perp\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{2.21b}$$

которые описывают движение центра масс волнового поля $\mathcal{E} = \dfrac{\partial\phi}{\partial\tau}$. Для них из (2.20) можно получить

$$\mathcal{I}\cdot\frac{d\langle\tau\rangle}{dz} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{(\nabla_\perp\phi)^2 + 3\left[b\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^4\right] + a\phi^2\right\}d\tau d\boldsymbol{r}_\perp\ , \tag{2.22a}$$

$$\mathcal{I}\cdot\frac{d\langle\boldsymbol{\rho}_\perp\rangle}{dz} = -2\boldsymbol{\mathcal{P}}\ . \tag{2.22b}$$

В (2.22b) использовано интегральное соотношение (2.18b).

Отсюда видно, что поперечная скорость волнового пакета (2.22b) остается постоянной и определяется начальными условиями (например, при $z = 0$). Для аксиально-симметричного волнового поля ($\boldsymbol{\mathcal{P}} = 0$) она равна нулю, а центр пакета (2.22a) неравномерно движется вдоль оси z. Из (2.22a) видно, что *все процессы (дифракция, дисперсия и нелинейность)* приводят к замедлению продольной скорости распространения электромагнитного сгустка в среде. В нелинейной среде без дисперсии ($a = b = 0$) продольная скорость движения центра масс (2.22a) определяется гамильтонианом системы $\mathcal{H}$ (2.18c). Это обстоятельство отражает факт формирования подковообразной структуры волнового поля в процессе его распространения. Эти соотношения могут быть полезны для наглядного тестирования программы численного расчета исходного уравнения.

В случае существования равномерно движущихся солитонов, правая часть в (2.22a) постоянна и представляет собой дополнительное интегральное соотношение для локализованных стационарных структур.

Моменты второго порядка

$$\mathcal{I}\cdot\langle\tau^2\rangle = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\tau - \langle\tau\rangle)^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp\ , \tag{2.23a}$$

$$\mathcal{I}\cdot\langle\boldsymbol{\rho}_\perp^2\rangle = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}r_\perp^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \tag{2.23b}$$

характеризуют эффективные продольные и поперечные размеры волнового поля. Из-за неравномерности движения центра масс сгустка (2.22a) не удается получить простого для анализа уравнения, описывающего эволюцию продольного размера поля. Соответствующее уравнение для изменения характерного поперечного размера

сгустка имеет вид:

$$\mathcal{I}\cdot\frac{d^2\langle\boldsymbol{\rho}_\perp^2\rangle}{dz^2}=8\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[(\nabla_\perp\phi)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^4\right]d\tau d\boldsymbol{r}_\perp\ . \tag{2.24}$$

Для качественного анализа поведения поля удобно переписать (2.24), выделив в правой части гамильтониан $\mathcal{H}$ (интеграл системы) (2.18c). В результате получим:

$$\mathcal{I}\cdot\frac{d^2\langle\boldsymbol{\rho}_\perp^2\rangle}{dz^2}=8\mathcal{H}+8\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[b\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}\right)^2-a\phi^2\right]d\tau d\boldsymbol{r}_\perp\ . \tag{2.25}$$

В отсутствии низкочастотной дисперсии ($a=0$) уравнение такого типа получено ранее в [186]. Видно, что для среды без дисперсии ($a=b=0$) правая часть (2.25) пропорциональна гамильтониану системы $\mathcal{H}$ (2.18c) и, таким образом, распределения волнового поля с отрицательным гамильтонианом ($\mathcal{H}<0$) схлопываются в поперечном направлении на конечной трассе распространения. Этот вывод остается в силе и для волновых пакетов, спектр которых локализован преимущественно в области аномальной дисперсии групповой скорости ($b\to 0$). В остальных случаях (2.25) указывает на возможность первоначального обужения поперечного распределения поля.

Сделанные выводы представляют собой обобщение соответствующих результатов для НУШ на случай широкополосного излучения. Формально модифицировалось лишь выражение для гамильтониана $\mathcal{H}$ (2.18c). Однако из (2.25) видна и новая возможность. Она относится к волновым пакетам, спектр которых захватывает как область нормальной, так и аномальной дисперсии. В подразделе 2.4.3 более детально остановимся на анализе (2.25) вблизи точки нулевой дисперсии групповой скорости ($\varpi\sim\omega_{bnd}$) в области, где $\partial^2k_z/\partial\omega^2\ll 1$. Например, для распределений поля вида $\exp(-\alpha|\tau|)\sin(\beta\tau)$ нетрудно подобрать α и β такими, чтобы подынтегральное слагаемое в (2.25) обратилось в нуль. Это означает, что начальный этап эволюции таких специально сконструированных распределений будет происходить как в среде без дисперсии.

Полученные соотношения позволяют расклассифицировать начальные распределения волнового поля по типу первоначального поведения – уменьшения характерного поперечного размера или увеличения. В дальнейшем будем рассматривать, в основном, распределения, характерный поперечный размер которых на начальном этапе эволюции системы уменьшается. Для таких распределений поля правая часть уравнения (2.25) меньше нуля. Начнем с самого простого случая самовоздействия волнового поля в среде без дисперсии, затем учтем влияние дисперсии.

В нелинейной теории неодномерных волновых полей решения с особенностью играют такую же важную роль, как солитоны в одномерных системах. Как и в теории самофокусировки, инвариантность уравнения (2.15) относительно определенного класса преобразований типа (2.12) дает возможность изучить пространственную структуру сингулярных решений. Это связано с более общими свойствами симметрии уравнения (2.15), чем те, которые привели к интегральным соотношениям (2.18).

Для качественного исследования модификации аксиально-симметричного волнового поля воспользуемся обобщенным линзовым преобразованием на случай лазерных импульсов произвольной длительности, чтобы представить решение уравнения (2.15) в автомодельном виде

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\rho\left(z\right)}\mathcal{F}\left[z, \frac{r}{\rho\left(z\right)}, \tau - \frac{\rho_z}{4\rho}r^2\right] \ , \tag{2.26}$$

где функция $\rho(z)$ описывает изменение поперечного размера поля, $\rho_z = \dfrac{d\rho}{dz}$. В теории самофокусировки волновых пучков преобразования такого типа приводят к переносу точки нелинейного фокуса $z = z_o$ на бесконечность [266]. В результате функция $\mathcal{F}$ оказывается регулярной на всей полуоси z. В рассматриваемом случае импульсного излучения переход в «схлопывающуюся систему координат»позволяет выделить в явном виде процесс продольной эволюции волнового поля. Разделение движений проявляется в том, что $\rho\left(z\right)$ определяет изменение поперечного размера поля в процессе самофокусировки, а продольная эволюция происходит по структурам подковообразного вида

$$\theta = \tau - \frac{\rho_z}{4\rho}r^2 \ .$$

В случае квазимонохроматического излучения θ описывает только искажения фазового фронта волны. Частичная потеря эффекта образования «подков» в (2.11) связана с пренебрежением слагаемым $\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\tau}$ при переходе от (2.6) к (2.11). Именно с этим слагаемым в уравнении Кадомцева-Петвиашвили связано возникновение изгибной неустойчивости и формирование подковообразной структуры [114, 247].

В новых переменных

$$\zeta = \int\frac{dz}{\rho^2\left(z\right)}, \quad \eta = \frac{r}{\rho\left(z\right)}, \quad \theta = \tau - \frac{\rho_z\rho}{4}\eta^2 \tag{2.27}$$

динамика самовоздействия волнового поля описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\zeta} + 3\mathcal{F}^2\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\theta} - \frac{d^2\rho}{dz^2}\frac{\rho^3}{4}\eta^2\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\theta}\right] - \rho^2\left(z\right)\left[b\frac{\partial^4\mathcal{F}}{\partial\theta^4} - a\mathcal{F}\right] = \Delta_\perp\mathcal{F} \ , \tag{2.28}$$

мало отличающимся от исходного, но гораздо более удобным для качественного исследования.

Преобразование в «коллапсирующую» систему координат позволяет, как и в случае квазимонохроматического излучения (2.12), «отделить» процесс самофокусировки в системе и свести задачу к исследованию квазиодномерной продольной эволюции импульса. Характерный поперечный масштаб квазиволноводной структуры в новых переменных порядка единицы.

Прежде всего, как видно из уравнения (2.28), темп самосжатия волнового пучка $\rho(z) \sim \sqrt{\rho_\perp^2(z)}$ определяет уровень ослабления дисперсионных эффектов при коллапсе $\left(\rho|_{z\to z_o} \to 0\right)$. Таким образом, формирование квазиволноводного распределения поля протекает как в среде без дисперсии. В итоге, по крайней мере, в среде без дисперсии ($a = b = 0$), а также в среде с аномальной дисперсией групповой скорости ($\varpi \ll \omega_{bnd}$) ключевым процессом наряду с самофокусировкой пучка становится укручение продольного профиля импульса. Следовательно, формирование квазиволноводного распределения поля протекает как в среде без дисперсии. Более того, в этом режиме самовоздействия задачу в приближении нелинейной геометрической оптики ($\Delta_\perp \approx 0$) удается свести к квазиодномерной

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} + 3\mathcal{F}^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} - \frac{d^2\rho}{dz^2}\frac{\rho^3}{4}\eta^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} \simeq 0 \ . \tag{2.29}$$

В случае среды с нормальной дисперсией ($a = 0$) необходимо дополнительное рассмотрение.

Рассмотрим сначала случай среды без дисперсии ($a = b = 0$). Для описания процессов в приосевой области ($\eta \simeq 0$) аппроксимируем поперечное распределение поля в виде

$$\mathcal{F}(\zeta, \eta, \theta) \simeq \mathcal{W}(\zeta, \theta) \cdot \left[1 - \frac{\eta^2}{2}\right] \ . \tag{2.30}$$

Здесь мы предположили, что характерный масштаб квазиволноводной структуры в новых переменных равен единице. Подставляя (2.30) в (2.29) и приравнивая нулю коэффициенты перед η^0 и η^2, найдем уравнения для $\mathcal{W}$ и ρ:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \zeta} + 3\mathcal{W}^2 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \theta} = 0 \ , \tag{2.31a}$$

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} = -6\frac{\overline{\mathcal{W}^2}}{\rho^3} \ . \tag{2.31b}$$

При получении уравнений (2.31b) опущен член с поперечным лапласианом ($\Delta_\perp \mathcal{F} \simeq 0$), который определяет порог для самофокусировки, а также проведено

усреднение $\mathcal{W}^2$ по длительности импульса τ_o

$$\overline{\mathcal{W}^2} = \frac{1}{\tau_o} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}^2 d\theta \ , \tag{2.32}$$

так как характерный масштаб поля $\rho(z)$ является по предположению функцией только z. Выражение (2.31b) справедливо, когда порог для самофокусировки волнового пакета значительно превышен.

Уравнение (2.31a) описывает опрокидывание продольного профиля и образование ударной волны в приосевой области. Этот процесс определяется амплитудой поля и происходит при конечном ζ, т.е. опережает коллапс волнового поля. Диссипация поля на фронте ударной волны будет приводить к уменьшению амплитуды импульса $\mathcal{W}(\zeta)$ по мере распространения.

Уравнение (2.31b) можно рассматривать как «обобщение» (2.25) для среды без дисперсии ($a = b = 0$) на неконсервативный случай. Следует заметить, что уравнения (2.31b) и (2.25) описывают поведение разных величин. Однако, если считать $\overline{\rho_\perp^2} \equiv \rho^2$, то закон схлопывания при $\overline{\mathcal{W}^2} = const$ получается один и тот же. Так, например, для коллимированного волнового пучка $\left[\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z=0} = 0\right]$ из (2.31b) находим хорошо известный в теории самофокусировки закон [266]

$$\rho \propto \sqrt{z_o^2 - z^2} \ . \tag{2.33}$$

В случае специальным образом сфокусированного излучения можно получить

$$\rho \propto (z_o - z) \tag{2.34}$$

и автомодельный режим самофокусировки типа (2.12). Для него преобразование (2.26) является инвариантным. При учете диссипации волнового поля на ударных фронтах подобно тому, как это делается в газодинамике, задача определения темпа схлопывания становится самосогласованной. Однако и в этом случае можно утверждать, что с уменьшением длительности импульса основным эффектом становится увеличение крутизны продольного профиля, темп которого возрастает при самофокусировке излучения.

Для более детального исследования этого процесса обратимся к результатам численного исследования долговременной эволюции системы. Сначала в разделе 2.3 рассмотрим особенности самовоздействия в среде без дисперсии. Как показывает проведенное выше качественное исследование, именно эти структурные особенности

должны доминировать и при наличии дисперсии среды вплоть до области коллапса и опрокидывания профиля пакета. В разделе 2.4 мы более детально проанализируем подавление эффектов дисперсии в процессе самофокусировки и приведем результаты численного моделирования процессов в среде с дисперсией.

2.3 Динамика самовоздействия волновых полей в среде без дисперсии

Рассмотрим два случая. Сначала приведем результаты исследования динамики самовоздействия линейно поляризованного поля (см. раздел 2.3.1). Оно описывается тем же уравнением (2.7)

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z}+3\mathcal{E}^2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau}-\gamma\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\tau^2}\right)=\Delta_\perp\mathcal{E}\ , \tag{2.35}$$

что и самовоздействие акустических сдвиговых волн в бездефектном твердом теле [261, 262]. Особенности динамики самовоздействия в бездисперсионной среде связаны с увеличением крутизны волновой структуры внутри огибающей и последующей диссипацией поля. В результате самофокусировка волновых полей с $\mathcal{H}<0$ протекает в условиях неустранимого поглощения на внутренних ударных фронтах.

Затем, во второй части этого раздела (см. раздел 2.3.2) мы рассмотрим особенности самофокусировки циркулярно поляризованного излучения.

2.3.1 Самовоздействие «скалярного» (линейно поляризованного) поля

Численное исследование самовоздействия в акустическом случае показывает, что динамика системы довольно хорошо качественно соответствует картине, описанной в [261, 262]. Результаты численного моделирования динамики самовоздействия начального распределения линейно поляризованного поля

$$\mathcal{E}=0.6\frac{\cos(\tau)}{\cosh(0.3\tau)}\exp\left(-\frac{r^2}{100}\right)$$

приведены на рисунке 2.1.

В случае параметров, для которых выполнено условие самосжатия волнового поля ($\mathcal{H}<0$), основным процессом является укручение крутизны профиля волнового

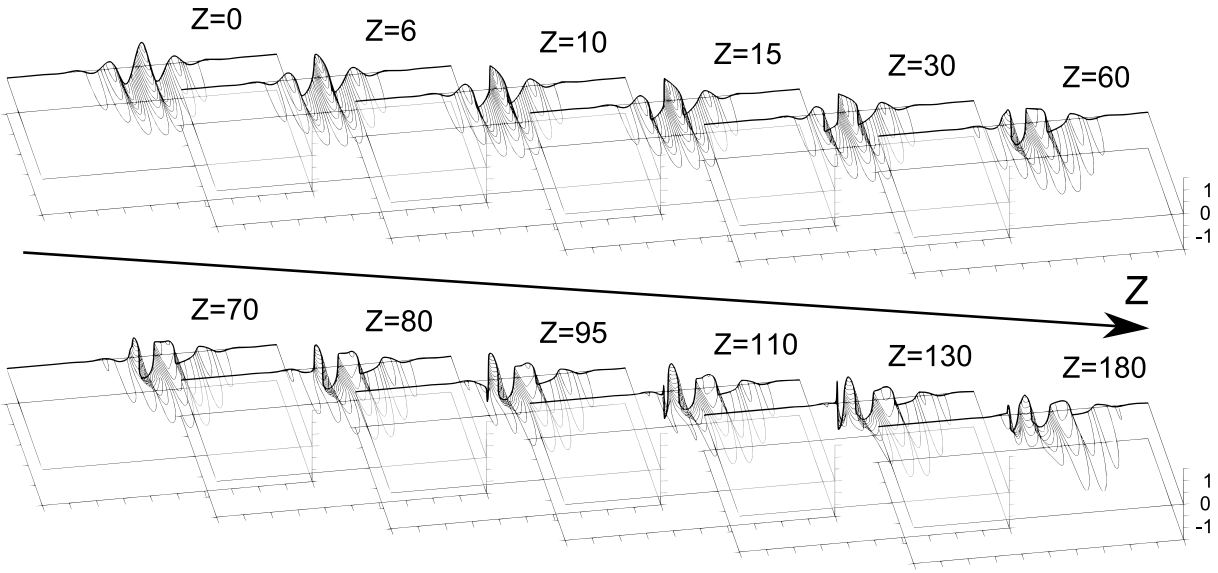


Рис. 2.1: Динамика линейно поляризованного поля $\mathcal{E}(z,\tau,r)$ в среде без дисперсии ($a=0$, $b=0$) при $\gamma=0.006$. Начальное распределение линейно поляризованного поля $\mathcal{E}=0.6\dfrac{\cos(\tau)}{\cosh(0.3\tau)}\exp\left(-\dfrac{r^2}{100}\right)$.

поля внутри каждой половины периода и образование ударных волн трапецеидальной формы. В этом состоит некоторое отличие «кубичной» среды от «квадратичной», в которой на каждом периоде поля происходит формирование характерного пилообразного профиля.

Поглощение излучения на ударных фронтах (внутри каждого полупериода) оказывается таким, что амплитуда волнового профиля в центральной части остается практически неизменной в процессе самовоздействия. Самофокусировка излучения проявляется лишь в заметном уменьшении поперечного размера волнового поля.

Интерпретация полученных результатов на основе соответствующего обобщения *безаберрационного приближения*[10], дана в [261, 262], где показано, что процесс схлопывания протекает без заметного изменения амплитуды. В наших численных расчетах уравнения (2.35) можно видеть и некоторые отличия от этой качественной картины. Прежде всего, следует отметить структурные изменения поперечного распределения (формирование двухмасштабного распределения), увеличение продольного размера фокальной области. Кроме того, видно различие в эволюции переднего

[10]Аппарата, разработанного для исследования самовоздействия квазимонохроматического излучения

и заднего полуволновых импульсов. Вблизи переднего фронта амплитуда импульса уменьшается, вблизи заднего растет и становится больше, чем у центрального.

Для качественного исследования процессов в рамках нашего подхода воспользуемся уравнениями для эволюции поля на оси системы (2.31a) и ширины волнового пучка (2.31b) в приосевой области ($\eta \simeq 0$). Умножая (2.31a) на $2\mathcal{W}$, получим уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{W}^2}{\partial \zeta} + 3\mathcal{W}^2 \frac{\partial \mathcal{W}^2}{\partial \theta} = 0 \ , \tag{2.36}$$

которое детально исследовано в газодинамике [249].

Для излучения с периодом θ_o из уравнения (2.36) нетрудно оценить длину опрокидывания

$$\zeta_B \simeq \frac{\theta_o}{\mathcal{W}_{max}^2} \ , \tag{2.37}$$

где $\mathcal{W}_{max}$ – максимальное значение поля в импульсе при $z = 0$ (на входе в среду).

Решения уравнения (2.36) детально исследованы в газодинамике [249]. В приложении к рассматриваемому нами волновому полю можно сделать следующие выводы. Процесс укручения крутизны профиля волнового поля внутри каждой половины периода приводит к градиентной катастрофе на длине ζ_B (2.37). Очевидно, что распределение поля по θ остается «периодическим» с прежним периодом. Образование универсального профиля в процессе опрокидывания каждого полупериода поля дает возможность определить закон затухания слабой ударной волны по мере ее распространения. Образование ударной волны сопровождается диссипацией поля на фронте. В случае слабых ударных волн уменьшение интенсивности за точкой опрокидывания ($\zeta > \zeta_B$) происходит по закону [249]:

$$\mathcal{W}^2 \sim \frac{1}{\zeta} \ . \tag{2.38}$$

К такому же выводу приводит и детальное рассмотрение нелинейной диссипации на основе уравнения (2.31a) в [261, 262]. Таким образом, для определения характерного поперечного масштаба поля в самосогласованном режиме находим из (2.31b) уравнение

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} = -\frac{6\alpha}{\zeta \rho^3} \ , \tag{2.39}$$

где α – коэффициент пропорциональности в (2.38). «Новая» и «старая» эволюционные переменные ζ и z связаны следующим дифференциальным соотношением (см. (2.27)):

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\rho^2(z)} \ . \tag{2.40}$$

Удобно записать систему (2.39) и (2.40) в виде одного линейного уравнения относительно $\dfrac{1}{\rho\,(\zeta)}$:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\frac{1}{\rho} = \frac{6\alpha}{\zeta}\frac{1}{\rho}\ . \tag{2.41}$$

Решениями этого уравнения являются модифицированные функции Бесселя. В результате, для описания процесса схлопывания ($z \to z_o,\ \zeta \to +\infty$) находим:

$$\frac{1}{\rho(\zeta)} \propto \sqrt{\zeta} I_1\left(2\sqrt{6\alpha\zeta}\right)\Big|_{\zeta\to+\infty} \approx \frac{1}{\sqrt[4]{\zeta}}\exp\left(2\sqrt{6\alpha\zeta}\right)\ . \tag{2.42}$$

Возвращаясь к «старой» переменной z (2.40), окончательно получаем

$$\rho(z) \propto \sqrt{z_o - z}\ , \quad \zeta \propto \frac{\ln(z_o - z)}{z_o}\ . \tag{2.43}$$

Этот вывод следует непосредственно из (2.39) и (2.40) в предположении, что ζ – медленная функция z. Таким образом, для изменения максимальной амплитуды волнового пакета $\mathcal{E}_{max}(z)$ в приосевой области в процессе распространения импульса имеем

$$\mathcal{E}_{max}(z) \simeq \frac{\mathcal{W}}{\rho(z)} \propto \frac{1}{\sqrt{z_o - z}\sqrt{\ln(z_o - z)/z_o}}\ . \tag{2.44}$$

Здесь увеличение амплитуды связано с уменьшением ширины пучка ($\rho \propto \sqrt{z_o - z}$), а убывание – с диссипацией на ударных фронтах (см. выражение (2.38)):

$$\propto \frac{1}{\sqrt{\zeta(z)}} = \frac{1}{\sqrt{\ln(z_o - z)/z_o}}\ . \tag{2.45}$$

Обращаясь к результатам численных расчетов (см. рисунок 2.1), можно видеть, что уменьшение характерного поперечного размера волнового поля при коллапсе находится в хорошем соответствии с законом $\rho \propto \sqrt{z_o - z}$. Несмотря на правильную тенденцию, формула (2.44) на амплитуду поля в приосевой области пучка не обеспечивает необходимого диссипативного снижения темпа возрастания амплитуды поля и дает явно завышенное значение, поскольку, как отмечалось ранее, при обсуждении результатов численного моделирования, в процессе самофокусировки амплитуда волнового пакета в центральной части оставалась практически неизменной. Видимо, универсального (не зависящего от коэффициента вязкости) поглощения не достаточно для стабилизации (ограничения роста) амплитуды на практически неизменном уровне. Этот вывод мы специально проверили на основе НУШ с дополнительным слагаемым,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \Delta_\perp\psi + |\psi|^2\psi + i\nu|\psi|^2\psi = 0\ , \tag{2.46}$$

описывающим нелинейную диссипацию излучения.

Такое уравнение получено в [261, 262] усреднением по «трапециидальной» периодической волне. Полагая $u = F\left[\tau - \sigma\left(r, z\right)\right]\psi\left(z, r\right)$ и разделяя переменные в предположении, что $F\left(\theta\right)$ – универсальный трапециидальный профиль, можно получить (2.46). Расчет поглощения на этом профиле дает значение $\nu = 0.184$ независимо от величины коэффициента вязкости γ [261, 262].

При численном моделировании нам не удалось добиться стабилизации амплитуды поля при заметном уменьшении (в $5 - 15$ раз) поперечного размера пучка. Ситуация существенно не менялась при изменении значения параметра ν в несколько раз. Более успешным оказался подход, связанный с увеличением степени нелинейной диссипации до 2.5

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \Delta_{\perp}\psi + |\psi|^2\psi + i\nu|\psi|^{2.5}\psi = 0\ . \tag{2.47}$$

При нелинейном диссипативном слагаемом $i\nu\left|\psi\right|^{2.5}\psi$ с $\nu = 0.3$ удалось добиться как стабилизации амплитуды, так и характерной двухмасштабной структуры поля при самосжатии поперечного размера волнового поля при коллапсе. Однако, остается не ясно, с чем связано такое усиление нелинейной диссипации: с «конечной» амплитудой ударной волны, неодномерностью ее или другими факторами.

Для более адекватного описания ситуации видимо необходимо учитывать следующие факторы:

- конечность коэффициента вязкости;
- «не слабость» ударной волны;
- «низкочастотную» (волноводную) дисперсию, связанную с поперечной ограниченностью волнового поля.

При наших численных расчетах мы увеличивали γ до тех пор, пока профиль (внутри полуволны) не становился гладким. Варианты, в которых наблюдалось переколебания поля вблизи ударного фронта, не обсуждались нами даже в условиях, когда претензии к результатам численного расчета не было. В принципе, такой эффект возможен здесь. Нелинейность приводит к генерации высоких гармоник, а волноводная дисперсия к пространственному разделению их. Одним из проявлений низкочастотной дисперсии может быть несколько необычная эволюция полуволнового импульса вблизи заднего фронта. Мы вернемся к обсуждению этих вопросов после

изложения результатов численного исследования нелинейной эволюции циркулярно-поляризованного волнового поля.

2.3.2 Самовоздействие циркулярно поляризованного поля

Образование многочисленных ударных фронтов (по два на каждой длине волны) сильно затрудняет численное исследование долговременной эволюции «скалярного» (линейно поляризованного) поля. Пришлось увеличивать коэффициент вязкости γ до тех пор, пока профиль (внутри полуволны) не становился гладким. Один из способов уменьшения резких продольных градиентов связан с переходом к циркулярно-поляризованному полю

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(\boldsymbol{x}_o + i\boldsymbol{y}_o) \ ,$$

где $\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o$ – единичные векторы вдоль соответствующих осей. Обобщение (2.6) для волнового поля с круговой поляризацией приводит к следующему уравнению[11] [30, 63, 104, 239, 252]:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}\right) - b\frac{\partial^3\mathcal{E}}{\partial\tau^3} - \gamma\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\tau^2} + \beta|\mathcal{E}|^6\mathcal{E}\right) = \Delta_\perp\mathcal{E} - a\mathcal{E} \ . \qquad (2.48)$$

Кроме диффузионного слагаемого в (2.48) добавлена нелинейная диссипация $\beta\dfrac{\partial}{\partial\tau}\left(|\mathcal{E}|^6\,\mathcal{E}\right)$ для стабилизации коллапса. Уравнение (2.48) может быть получено, например, посредством добавления к соответствующему одномерному уравнению для циркулярно-поляризованного поля [172, 246, 263] дополнительного слагаемого $\Delta_\perp\mathcal{E}$. В частности, в одномерном случае для среды с аномальной дисперсией ($b = 0$) в консервативном случае ($\gamma = 0$) найдены солитонные решения, численно показано их упругое взаимодействие [172, 240, 263] (см. главу 1).

Качественное исследование пространственной динамики системы в консервативном случае ($\gamma = 0,\ \beta = 0$), очевидно, можно провести методом моментов, как и в разделе 2.2, соответствующим образом обобщив интегральные соотношения для энергии $\mathcal{I}$ (2.18a), импульса $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ (2.18b) и гамильтониана $\mathcal{H}$ (2.18c) комплексного поля $\mathcal{E} = \dfrac{\partial\phi}{\partial\tau}$,

[11] Для импульсов длительностью порядка $\lambda \sim 2\pi c/\omega$ (ω – центральная частота в спектре импульса), когда формально нельзя пользоваться понятием циркулярно поляризованной волны, речь идет о суперпозиции двух ортогональных линейно поляризованных полей, сдвинутых друг относительно друга на $\lambda/4$.

где ϕ – «потенциал» поля:

$$\mathcal{I} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right|^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{2.49a}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\nabla_\perp\phi^* + \frac{\partial\phi^*}{\partial\tau}\nabla\phi\right] d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{2.49b}$$

$$\mathcal{H} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[|\nabla_\perp\phi|^2 - b\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right|^4 + a|\phi|^2\right] d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{2.49c}$$

сохраняющимся в процессе эволюции системы.

Существование этих соотношений связано с трансляционной симметрией исходного уравнения ($z \to z+z_o$, $\tau \to \tau+\tau_o$). Это обобщение хорошо известных выражений для «энергии» (числа квантов) и гамильтониана в НУШ на случай широкополосного импульса.

Для качественного исследования динамики трехмерных волновых пакетов используем метод моментов. Исходным для дальнейшего рассмотрения является уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial z}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right|^2 = -3\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right|^4 + b\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}\right|^2\right] - \frac{\partial}{\partial\tau}|\nabla_\perp\phi|^2 + \\ + b\frac{\partial^3}{\partial\tau^3}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right|^2 + 2div_\perp\left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\nabla_\perp\phi^* + \frac{\partial\phi^*}{\partial\tau}\nabla_\perp\phi\right] - a\frac{\partial}{\partial\tau}|\phi|^2 \ . \tag{2.50}$$

Благодаря «гамильтоновости» можно получить одно из самых информативных соотношений

$$\mathcal{I}\cdot\frac{d^2\langle\boldsymbol{\rho}_\perp^2\rangle}{dz^2} = 8\mathcal{H} + \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[b\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}\right|^2 - a|\phi|^2\right] d\boldsymbol{r}_\perp d\tau \tag{2.51}$$

для характерного поперечного размера волнового поля

$$\mathcal{I}\cdot\langle\boldsymbol{\rho}_\perp^2\rangle = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{r}_\perp^2\left|\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right|^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ . \tag{2.52}$$

Видно, что для среды без дисперсии ($a = b = 0$) правая часть (2.51) пропорциональна гамильтониану системы $\mathcal{H}$ (2.49c) и, таким образом, распределения волнового поля с отрицательным гамильтонианом $\mathcal{H} < 0$ схлопываются в поперечном направлении на конечной трассе распространения. Этот вывод остается в силе и для волновых пакетов, спектр которых находится преимущественно в области аномальной дисперсии групповой скорости ($b \to 0$). В остальных случаях (2.51) указывает

на возможность первоначального обужения поперечного распределения поля. В подразделе 2.4.3 мы более детально остановимся на анализе (2.51) вблизи точки нулевой дисперсии групповой скорости ($\varpi \sim \omega_{bnd}$) в области, где $\partial^2 k_z/\partial\omega^2 \ll 1$. Решение уравнения (2.48) существует на конечных трассах z_k, а для регуляризации возникающей особенности необходим учет дополнительных механизмов (насыщения нелинейности, нелинейного поглощения и др.).

Можно повторить исследование структурных особенностей поведения волнового поля $\mathcal{E}$ посредством преобразования уравнения (2.48) в «схлопывающуюся систему координат», воспользовавшись обобщенным линзовым преобразованием (2.26). При этом в консервативном случае ($\beta = \gamma = 0$) в тех же переменных (2.27) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\zeta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(|\mathcal{F}|^2\mathcal{F}\right) - \frac{d^2\rho}{dz^2}\frac{\rho^3}{4}\eta^2\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\theta}\right] - \rho^2(z)\left[a\mathcal{F} - b\frac{\partial^4\mathcal{F}}{\partial\theta^4}\right] = \Delta_\perp\mathcal{F}\ . \tag{2.53}$$

В процессе самофокусировки, как и в случае «скалярного» поля, формируется *квазиодномерное распределение* поля автомодельного типа. Можно сделать и вывод об ослаблении дисперсионных эффектов[12] в условиях самофокусировки. Поэтому, как и выше, исследование динамики в среде без дисперсии ($a = b = 0$) представляет особый интерес.

Преобразование в «коллапсирующую систему координат» позволяет, как и в случае *квазимонохроматического излучения* (2.12), «отделить» процесс самофокусировки в системе и свести задачу к исследованию квазиодномерной продольной эволюции импульса. Характерный поперечный масштаб квазиволноводной структуры в новых переменных порядка единицы.

Для описания процессов в приосевой области ($\eta \simeq 0$) аппроксимируем поперечное распределение поля в виде

$$\mathcal{F}(\zeta,\eta,\theta) \simeq \mathcal{W}(\zeta,\theta)\cdot\left[1 - \frac{\eta^2}{2}\right]\ . \tag{2.54}$$

Подставляя это выражение в (2.53) и приравнивая нулю коэффициенты перед η^0 и η^2, найдем уравнения для $|\mathcal{W}|^2$ и ρ

$$\frac{\partial|\mathcal{W}|^2}{\partial\zeta} + 3|\mathcal{W}|^2\frac{\partial|\mathcal{W}|^2}{\partial\theta} = 0\ , \tag{2.55a}$$

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} = -2\frac{\overline{|\mathcal{W}|^2}}{\rho^3}\ . \tag{2.55b}$$

[12]Видно из (2.53), что темп самосжатия $\rho(z)$ определяет уровень ослабления дисперсионных эффектов при самофокусировке $\rho(z)|_{z\to z_o} \to 0$.

При получении уравнений (2.55) опущен член с поперечным лапласианом, а также проведено усреднение $|\mathcal{W}|^2$ по длительности волнового пакета τ_o

$$\overline{|\mathcal{W}|^2} = \frac{1}{\tau_o} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{W}|^2 \, d\theta \ ,$$

так как характерный масштаб поля $\rho(z)$ является по предположению функцией только z. Выражение (2.55b) справедливо, когда порог для самофокусировки волнового пакета значительно превышен.

Видно из (2.55a), что для циркулярно поляризованного излучения нет «опрокидывания» внутри импульса, а происходит лишь укручение профиля огибающей волнового пакета. Для импульсов длительностью τ_o из (2.55a) нетрудно оценить длину опрокидывания ζ_B

$$\zeta_B \simeq \frac{\tau_o}{3\,|\mathcal{W}_{max}|^2} \ , \tag{2.56}$$

где $|\mathcal{W}_{max}|$ – максимальное значение поля в импульсе при $z = 0$ (на входе в нелинейную среду).

Решения уравнения (2.55a) детально исследованы в гидродинамике [249]. В приложении к рассматриваемому нами волновому полю можно сделать следующие выводы. Процесс укручения продольного профиля приводит к градиентной катастрофе на длине ζ_o (2.56). Образование ударной волны сопровождается диссипацией поля на фронте. В случае слабой ударной волны уменьшение интенсивности за точкой опрокидывания ($\zeta > \zeta_o$) происходит по закону[13] [249]

$$\overline{|\mathcal{W}(\zeta)|^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \ . \tag{2.57}$$

В результате, уравнение для эффективной ширины волнового поля с учетом поглощения на фронте ударной волны огибающей принимает вид:

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} \simeq -\frac{2\alpha}{\sqrt{\zeta}\rho^3} \ , \tag{2.58}$$

где α – коэффициент пропорциональности в (2.57).

Это уравнение, как и в случае линейно поляризованного поля (2.39), можно переписать для величины $\dfrac{1}{\rho}$:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\frac{1}{\rho} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\zeta}}\frac{1}{\rho} \ . \tag{2.59}$$

[13]Ослабление уровня поглощения на ударной волне огибающей сопровождается более медленным затуханием комплексной амплитуды поля [249], т.к. происходит формирование одиночного ударного фронта.

Решениями этого уравнения являются модифицированные функции Бесселя дробного порядка. В результате, для описания процесса схлопывания ($z \to z_o,\ \zeta \to +\infty$), находим:

$$\frac{1}{\rho(\zeta)} \propto \sqrt{\zeta} I_{\frac{2}{3}} \left(\frac{4\sqrt{2\alpha}}{3} \zeta^{\frac{3}{4}} \right) \Bigg|_{\zeta \to +\infty} \approx \zeta^{\frac{1}{8}} \exp\left(\frac{4\sqrt{2\alpha}}{3} \zeta^{\frac{3}{4}} \right) . \tag{2.60}$$

Однако, сравнение с уравнением (2.39) показывает, что зависимость (2.57) $\overline{|\mathcal{W}|^2}$ от ζ является еще более «плавная» и, следовательно, приводит примерно к тем же самым выражениям (2.43) для $\rho(z)$ и $\zeta(z)$

$$\rho(z) \propto \sqrt{z_o - z}\ , \qquad \zeta \propto \frac{\ln(z_o - z)}{z_o} \tag{2.61}$$

в процессе самофокусировки излучения ($z \to z_o$). Таким образом, для изменения амплитуды поля циркулярно поляризованного излучения получаем

$$\mathcal{E}_{max}(z) \simeq \frac{\mathcal{W}}{\rho(z)} \propto \frac{1}{\sqrt{z_o - z}\sqrt[4]{\ln(z_o - z)/z_o}}\ , \tag{2.62}$$

т.е. почти такой же закон, что и для линейно поляризованного поля (2.44).

Здесь увеличение амплитуды связано с уменьшением ширины пучка ($\rho \propto \sqrt{z_0 - z}$), а убывание – с диссипацией на ударных фронтах:

$$\propto \frac{1}{\sqrt[4]{\zeta}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\ln(z_o - z)/z_o}}\ . \tag{2.63}$$

Итак, из сравнения выражений (2.62) (2.44) следует, что, в отличие от линейно поляризованного излучения, в рассматриваемом случае ослабление амплитуды поля волнового пакета из-за диссипации на ударном фронте значительно слабее и приводит к формированию ударной волны огибающей. Формирование одиночного ударного фронта означает ослабление диссипации в переходной области и, следовательно, возможность не только уменьшения эффективной ширины волнового поля, но и неограниченного возрастания амплитуды поля. В результате следует ожидать возникновения более сложной структурной особенности поля – градиентной катастрофы в условиях коллапса. Таким образом, диссипация на фронте ударной волны огибающей оказывается, как правило, недостаточной, и для стабилизации коллапса приходится дополнительно вводить нелинейное поглощение.

Установим связь длины коллапса z_o $[\rho(z_o) = 0]$ с длиной градиентной катастрофы z_B. Оценку z_o можно получить из уравнения для эффективного поперечного размера пучка (2.51). В рассматриваемых условиях (среда без дисперсии) уравнения (2.51) и (2.55b) дают одинаковый закон изменения ширины пучка в процессе

самофокусировки [$\rho(z) \simeq \sqrt{\langle\rho_\perp^2(z)\rangle}$]. В частности, вблизи z_o ($z \sim z_o$, $\zeta \to +\infty$) для коллимированного волнового поля $\left[\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{z=0} = 0\right]$ имеем

$$\rho(z) \sim \sqrt{\langle\rho_\perp^2(z)\rangle} \simeq 2\sqrt[4]{\frac{\rho_o^2|\mathcal{H}|}{\mathcal{I}}}\sqrt{z_o - z}\ , \tag{2.64}$$

где ρ_o – начальный размер пучка волнового пакета на входе нелинейной среды. Координату точки фокуса z_o также можно определить через интегралы задачи

$$z_o = \frac{\rho_o}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{I}}{|\mathcal{H}|}}\ . \tag{2.65}$$

Преобразуя (2.64) к новой эволюционной переменной получим

$$\sqrt{\langle\rho_\perp^2(\zeta)\rangle} \simeq \sqrt{2}\rho_o \exp\left(-2\rho_o\zeta\sqrt{\frac{|\mathcal{H}|}{\mathcal{I}}}\right)\ . \tag{2.66}$$

Заметим,что коэффициент перед слагаемыми в (2.53), определяющими дисперсию, уменьшается по экспоненциальному закону. Это оправдывает сделанные выше предположения относительно пренебрежения дисперсией среды.

Решения уравнения (2.55а) детально исследованы в гидродинамике [249]. В приложении к рассматриваемому нами волновому полю можно сделать следующие выводы. Неодинаковость скорости перемещения точек продольного профиля приводит к укручению заднего фронта импульса и образованию ударной волны в процессе «опрокидывания» на длине ζ_B. Для импульсов длительностью τ_o длина опрокидывания определяется выражением (2.56). Это соответствует расстоянию в «старых» переменных

$$z_B = z_o\left[1 - \exp\left(-\frac{4}{3}\rho_o\sqrt{\frac{|\mathcal{H}|}{\mathcal{I}}}\frac{\tau_o}{|\mathcal{W}_{max}|^2}\right)\right]\ , \tag{2.67}$$

несколько меньшему длины самофокусировки z_o. При получении выражения (2.67) была использована связь между z и ζ в (2.26) следующего вида

$$\zeta = \int_0^z \frac{dz}{\rho^2(z)} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mathcal{I}}{\rho_o^2|\mathcal{H}|}}\ln\left(1 - \frac{z}{z_o}\right)\ . \tag{2.68}$$

Заметим, что по мере уменьшения $|\mathcal{H}|$, когда длина самофокусировки растет как $z_o \sim |\mathcal{I}/\mathcal{H}|^{1/2}$, область опрокидывания удаляется по экспоненциальному закону от точки схлопывания поперечного распределения поля по направлению к границе

нелинейной среды. Данный результат ($z_B < z_o$) находится в соответствии с автомодельным решением уравнения (2.48) при $a = b = 0$

$$|\mathcal{E}| = \frac{1}{z_o - z}\Phi\left[\tau - \frac{r^2}{4(z_o - z)} - \frac{3\Phi^2}{z_o - z}\right] , \tag{2.69}$$

где Φ - произвольная функция. Таким образом, в средах без дисперсии ($a = b = 0$) происходит образование особенности нового типа, в которой развитие градиентной катастрофы вблизи заднего фронта импульса несколько опережает коллапс волнового поля ($z_B < z_o$).

Для иллюстрации особенностей динамики самовоздействия сверхкоротких импульсов обратимся к компьютерному моделированию процессов в системе на основе уравнения (2.48). Качественное исследование показало, что самофокусировка излучения и укручение фронта импульса протекают одновременно. На рисунках 2.2–2.3 представлены результаты численного моделирования эволюции начального распределения поля

$$\mathcal{E} = 0.6\exp\left(-\frac{r^2}{100}\right)\frac{e^{i\tau}}{\cosh(0.3\tau)} . \tag{2.70}$$

в среде без дисперсии ($a = 0,\ b = 0$) для двух разных значения параметра γ. Результаты численного моделирования (см. рисунки 2.2–2.3) подтверждают ранее сделанные выводы, полученные на основе качественного анализа, что ключевым процессом в динамике самовоздействия сверхкороткого импульса здесь является укручение продольного профиля и образование довольно резкой переходной области. Этот сценарий является общим для рассматриваемых сред. Увеличение крутизны профиля огибающей вблизи заднего фронта импульса сопровождается возрастанием поля в переходной области. Как правило, диссипация на ударном фронте была недостаточной для стабилизации коллапса, и приходилось вводить нелинейное поглощение $\beta\dfrac{\partial}{\partial\tau}(|\mathcal{E}|^6\mathcal{E})$. Сравнение соответствующих процессов для линейно поляризованного и циркулярно поляризованного излучения показывает, что самофокусировка волнового поля приводит к увеличению темпа формирования ударной волны. В отличие от «обычных»ударных волн огибающих, коллапс обужает переходную область до масштабов, меньших половины длины волны. В результате вблизи заднего фронта возникает узкий интенсивный импульс электромагнитного поля. Очевидно, что размер переходной области может уменьшаться настолько, что в спектре поля появляются частоты, которые «обгонят»импульс. Это приведет к сглаживанию области сильного поля (см. рисунок 2.3 при $z > 65$). Более четкое формирование структуры,

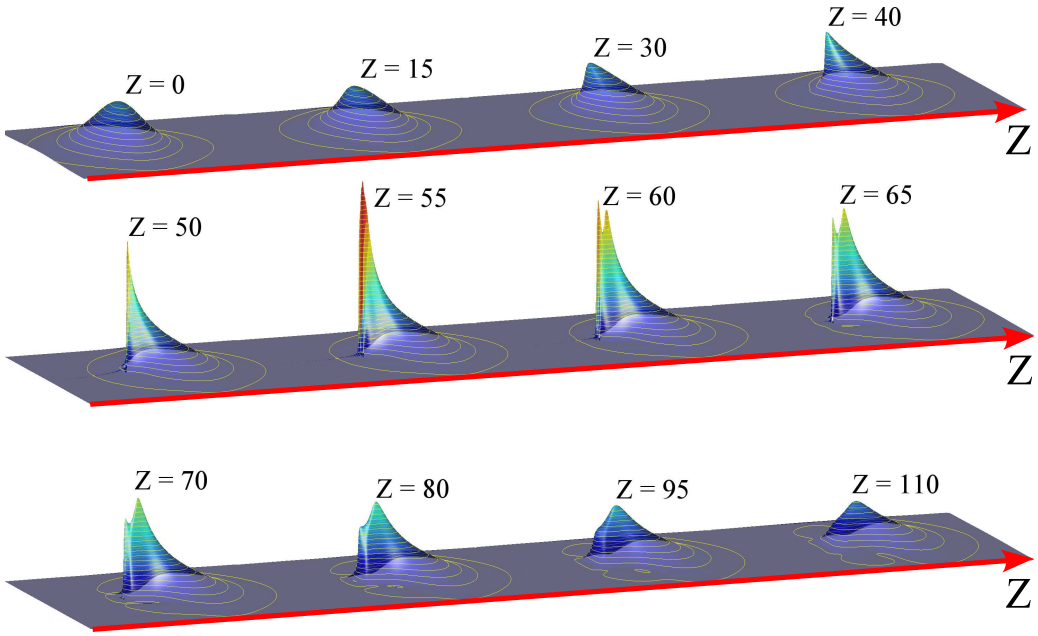


Рис. 2.2: Динамика циркулярно поляризованного поля $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|$ в среде без дисперсии ($a=0$, $b=0$) при $\gamma=0.035$. Начальное распределение циркулярно поляризованного поля $\mathcal{E}=0.6\exp\left(-\dfrac{r^2}{100}\right)\dfrac{e^{i\tau}}{\cosh(0.3\tau)}$.

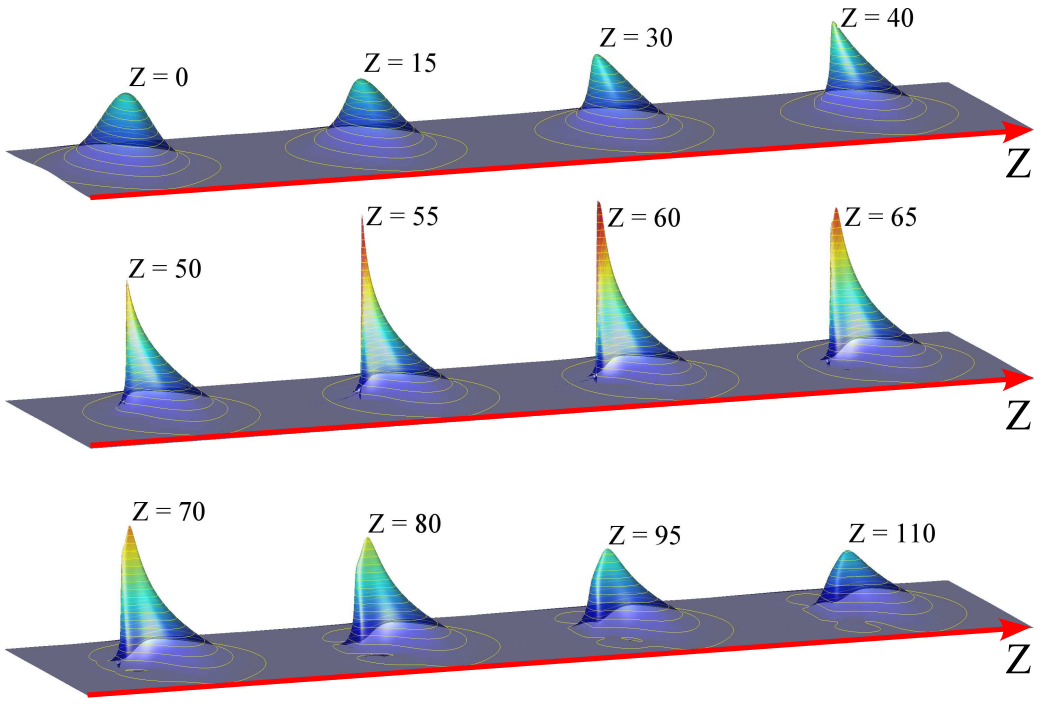


Рис. 2.3: Динамика циркулярно поляризованного поля $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|$ в среде без дисперсии ($a=0$, $b=0$) при $\gamma=0.04$. Начальное распределение циркулярно поляризованного поля $\mathcal{E}=0.6\exp\left(-\dfrac{r^2}{100}\right)\dfrac{e^{i\tau}}{\cosh(0.3\tau)}$.

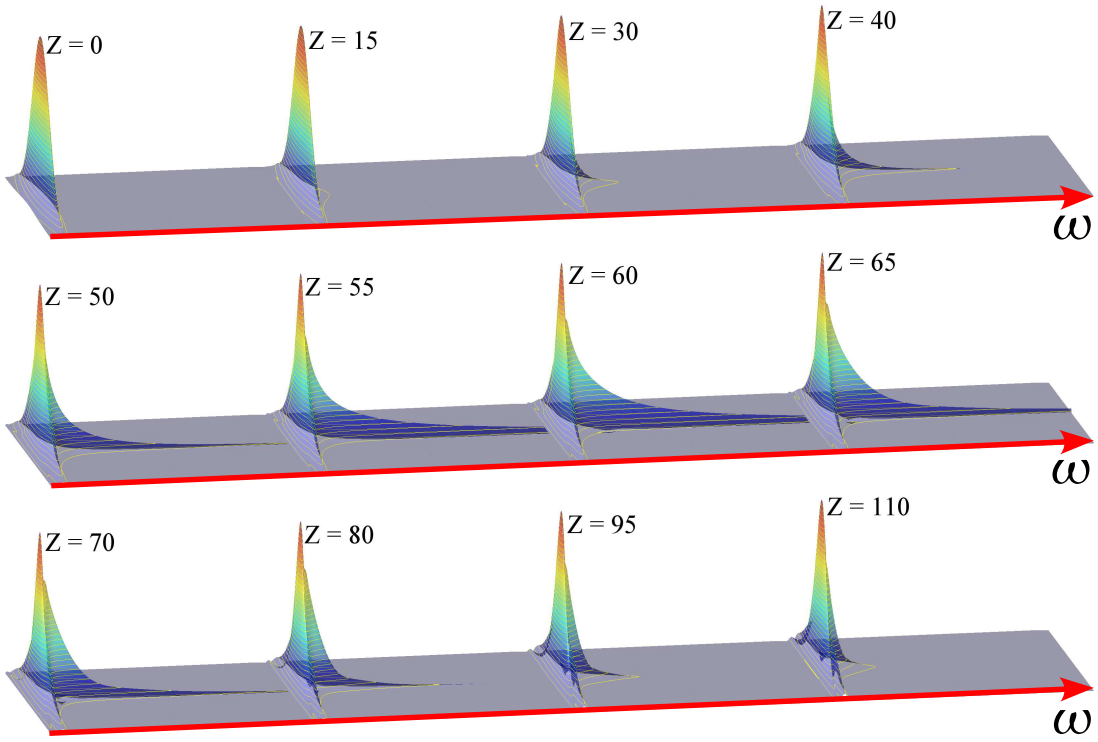


Рис. 2.4: Динамика спектра поля $S\,(z,\omega,r) = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Re[\mathcal{E}(z,\tau,r)]e^{i\omega\tau}d\tau\right|$ в среде без дисперсии ($a=0$, $b=0$) при $\gamma = 0.04$. Начальное распределение циркулярно поляризованного поля $\mathcal{E} = 0.6\exp\left(-\dfrac{r^2}{100}\right)\dfrac{e^{i\tau}}{\cosh(0.3\tau)}$. Частота ω меняется в пределах от $\omega_{min} = 0$ до $\omega_{max} = 20$.

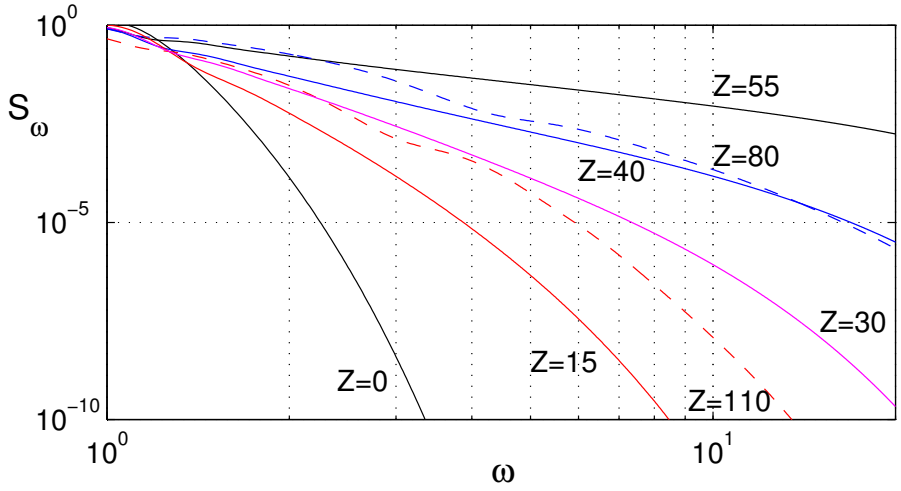


Рис. 2.5: Коротковолновая часть спектральной мощности поля $S^2(\omega > 1)$ на оси системы при $z = 0;\ 15;\ 30;\ 40;\ 55;\ 80;\ 110$ при $a = b = 0$, $\gamma = 0.04$ для начального распределения циркулярно поляризованного поля $\mathcal{E} = 0.6\exp\left(-\dfrac{r^2}{100}\right)\dfrac{\exp(i\tau)}{\cosh(0.3\tau)}$.

которая бежит от заднего фронта к переднему, видно при меньшем затухании на рисунке 2.2. Можно трактовать этот эффект как предвестник, источником которого является задний фронт импульса.

Как отмечалось ранее, самофокусировка волнового пакета и укручение заднего фронта импульса протекают практически одновременно. Это означает, что уменьшение поперечного размера пучка должно сопровождаться заметным уширением спектра излучения (см. рисунок 2.4). В этих случаях численные расчеты показывают наличие довольно протяженных участков, на которых спектр поля спадает по степенному закону. Так, в среде без дисперсии ($a = b = 0$) расчеты дают для спектра поля на оси системы ($r = 0$) закон:

$$S(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}\mathrm{e}[\mathcal{E}(\tau, r = 0)] e^{i\omega\tau} d\tau \right| \propto \frac{1}{\omega} \tag{2.71}$$

(см. рисунок 2.5), который реализуется на трассах от $z = 50$ до $z = 75$. *Это означает, что в этой области существует скачок поля, характерный для ударной волны.*

Исследования поведения поля при коллапсе показывают, что закон близок к найденной теоретической зависимости (2.63). Рисунок 2.6 иллюстрирует соответствующий вывод для импульсов разных длительностей. Штриховые линии соответствуют теоретической зависимости (2.63).

Дополнительным средством исследования структурных особенностей излучения может служить анализ фазы поля. В «ламинарном» режиме распределение фазовых фронтов показывает, например, какие части импульса самофокусируются. Более тонкие детали процессов проявляются в образовании *фазовых дефектов (фазовой турбулентности)*. Они возникают в областях, где *амплитуда поля равна нулю*. В случае обычно используемых колоколообразных начальных распределений получаемая информация относится к периферийной части поля. На рисунке 2.7 приведены фазовые фронты (сплошная линия) и линии интенсивности (синие линии) в среде без дисперсии ($a = 0$, $b = 0$) с $\gamma = 0.04$ в двух разных точках $z = 50$ **(a)** и $z = 70$ **(b)**. Из рисунка видно, что фазовые дефекты образуются прежде всего вблизи заднего фронта импульса, где происходит самофокусировка ударной волны огибающей. Затем, по мере распространения импульса, и в других областях возможно возникновение фазовых дефектов. Они связаны с аберрациями при самофокусировке излучения, которые в конечном счете приводят к образованию двухмасштабного поперечного распределения поля.

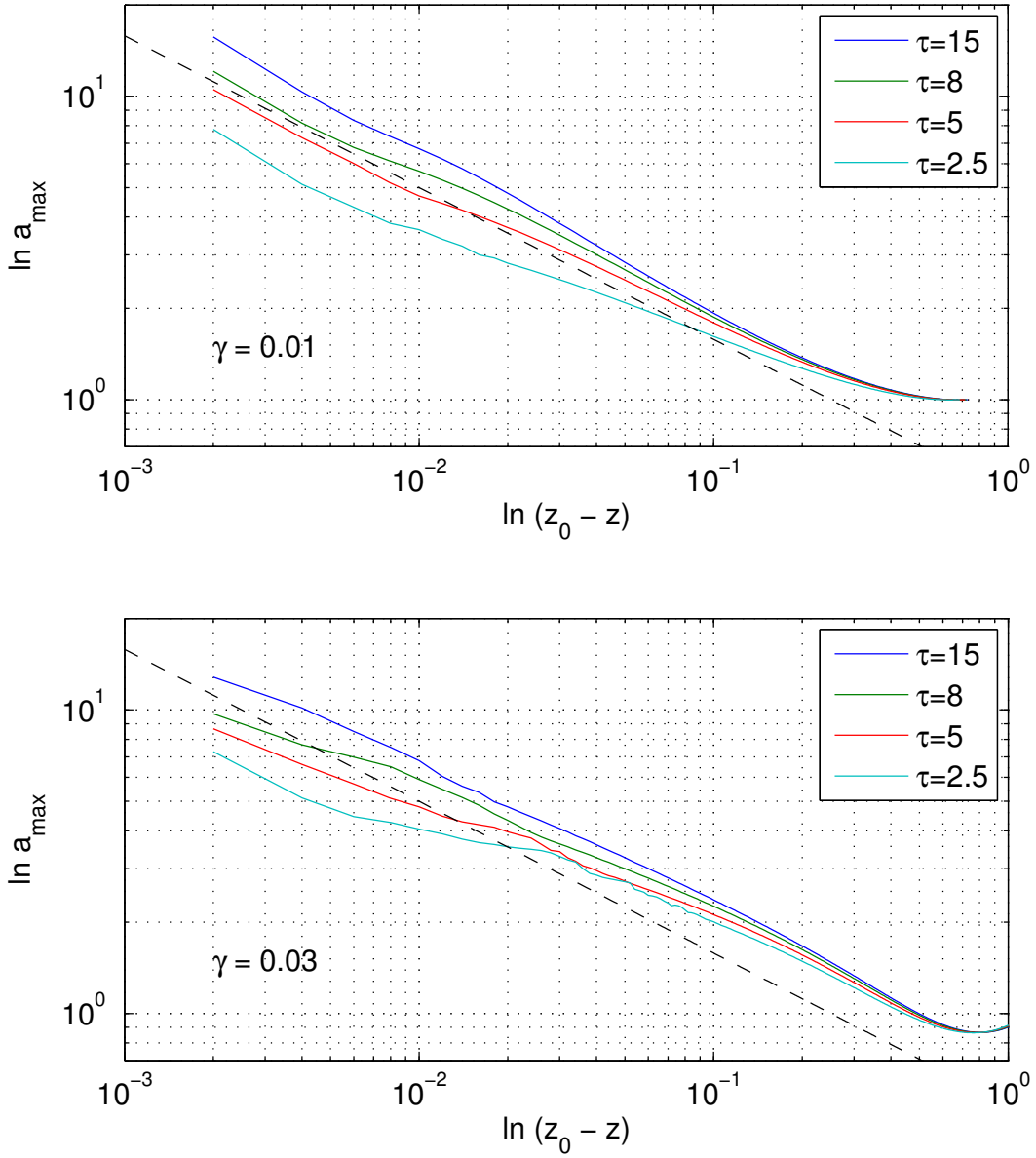
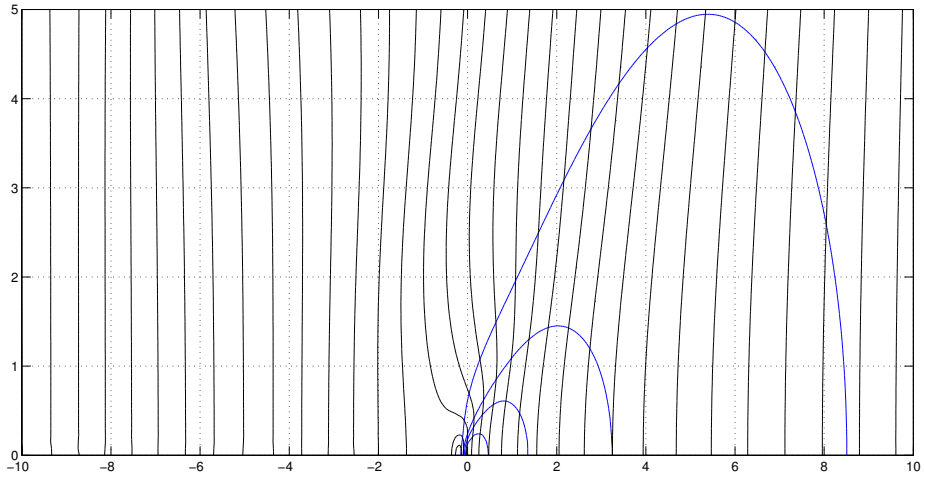


Рис. 2.6: Зависимость максимальной амплитуды волнового поля по мере приближения к особенности в логарифмических осях для различных начальных длительностей импульса: $\tau_o = 15$, $\tau_o = 8$, $\tau_o = 5$, $\tau_o = 2.5$. Штриховые линии соответствуют теоретической зависимости (2.63).

a)



b)

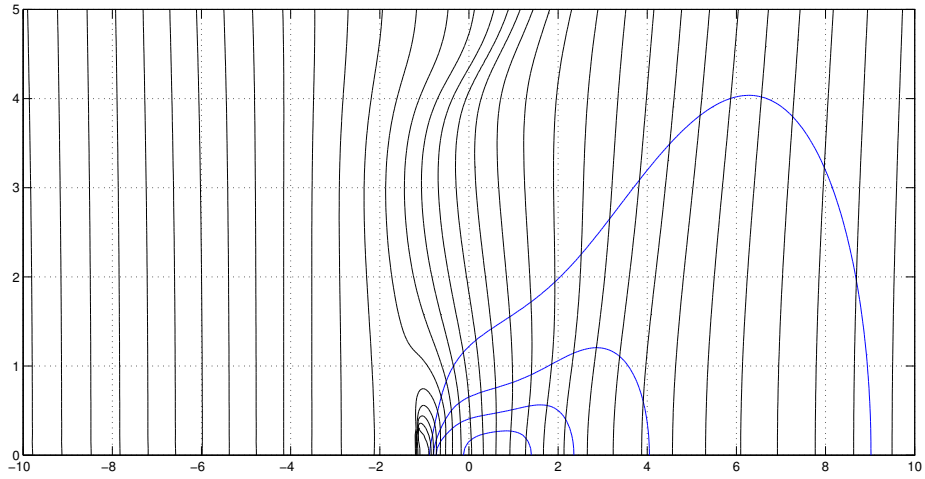


Рис. 2.7: Фазовые фронты циркулярно поляризованного поля (черные линии) и интенсивность $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|^2$ (синия линия) в среде без дисперсии ($a=0$, $b=0$) с $\gamma=0.04$ в двух разных точках $z=50$ **(a)**, $z=70$ **(b)**.

В заключении этого раздела получим оценку на длину формирования особенности z_o, воспользовавшись достаточным условием для самофокусировки волнового пакета (2.51) в среде без дисперсии ($a = b = 0$). Для распределения «потенциала» поля вида

$$\phi = \mathcal{A} \cdot \frac{\exp(i\omega\tau)}{\cosh\left(\dfrac{\tau}{\tau_p}\right)} \exp\left(-\frac{r^2}{2\rho_o^2}\right) \tag{2.72}$$

можно подсчитать гамильтониан $\mathcal{H}$, воспользовавшись выражением (2.49c) при $a = b = 0$:

$$\mathcal{H} = 2\pi\mathcal{A}^2\tau_p \left\{1 - \frac{\mathcal{I}\left[35\kappa^4 + 14\kappa^2 + 3\right]}{140\pi\tau_p^3\left(1 + 3\kappa^2\right)}\right\} \ , \tag{2.73}$$

где

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{A}^2\rho_o^2}{3\tau_p}\left(1 + 3\kappa^2\right) \ , \quad \kappa = \omega\tau_p \ . \tag{2.74}$$

Здесь параметр κ по сути определяет число колебаний поля, которые укладываются в лазерном импульсе. Так, для коллимированного волнового пучка $\left[\left.\dfrac{d\rho}{dz}\right|_{z=0} = 0\right]$ координата точки фокуса z_o имеет вид

$$z_o = \rho_o\sqrt{\frac{\mathcal{I}}{4|\mathcal{H}|}} = \frac{\rho_o^2}{2\sqrt{3}\tau_p}\frac{\sqrt{1 + 3\kappa^2}}{\sqrt{\dfrac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_{cr}} - 1}} \ , \tag{2.75}$$

где I_{cr} – критическая энергия для самофокусировки волнового пакета

$$I_{cr} = \frac{140\pi\tau_p^3[1 + 3\kappa^2]}{35\kappa^4 + 14\kappa^2 + 3} \ . \tag{2.76}$$

Из выражения (2.75) на длину коллапса волнового пакета z_o, в частности, следует хорошо известное в теории самофокусировки выражение на длину формирования особенности z_o^m для квазимонохроматического импульса ($\kappa = \omega\tau_p \gg 1$) [266]

$$\left. z_o\right|_{\omega\tau_p \gg 1} = z_o^m = \frac{\rho_o^2\omega}{2}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{cr}} - 1}} \ , \tag{2.77}$$

где $\mathcal{P}$ – мощность в пучке

$$\mathcal{P} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \left|\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right|^2 d\boldsymbol{r}_\perp = \pi\mathcal{A}^2\omega^2\rho_o^2 \ , \tag{2.78}$$

$\mathcal{P}_{cr}$ – критическая мощность для самофокусировки.

На рисунке 2.9 представлена зависимость длины формирования особенности z_o от длительности импульса τ_p при следующих фиксированных параметрах волнового поля: ρ_o, $\mathcal{A}$ и ω. Величина z_o нормирована на z_o^m. Как видно из рисунка 2.78,

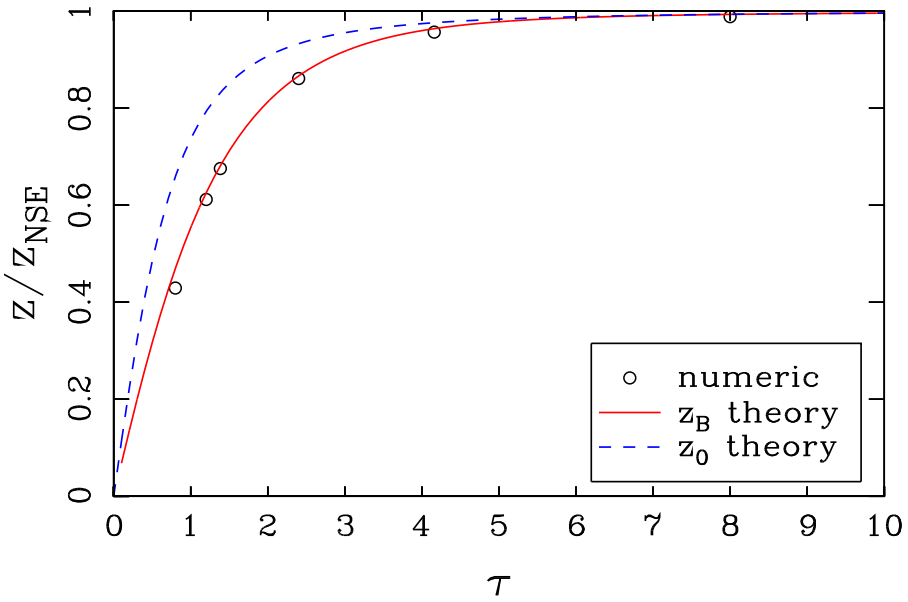


Рис. 2.8: Длина самофокусировки z_o (синяя пунктирная линия), вычисленная по формуле (2.75) ; красная линия – длина опрокидывания, вычисленная по выражению (2.67). ∘ – длина образования особенности, полученная в результате численного решения уравнения (2.48) при $a = b = 0$.

длина самофокусировки волнового пакета z_o уменьшается с уменьшением длительности электромагнитного излучения. Например, при длительности импульса $\tau_p = 0.5$ ($\omega = 1$) длина образования особенности составляет $z_0 \simeq 0.5 z_o^m$.

Из выражения (2.75) можно получить две асимптотики поведения длины коллапса волнового пакета z_o от длительности импульса τ_p

$$z_o = \rho_o \sqrt{\frac{\mathcal{I}}{4|\mathcal{H}|}} \propto \begin{cases} \dfrac{\rho_o^2 \omega}{2} \left(\dfrac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{cr}} - 1 \right)^{-1/2} \sim \dfrac{\rho_o}{\mathcal{A}} , & \kappa \gg 1 \\ \dfrac{\rho_o}{\mathcal{A}} \cdot \tau_p , & \kappa \simeq 1 \end{cases} . \tag{2.79}$$

Таким образом, при большом числе колебаний поля в лазерном импульсе ($\kappa \gg 1$) длина самофокусировки z_o определяется выражением (2.77) [266], т.е только отношением двух величин $\dfrac{\rho_o}{\mathcal{A}}$. Однако в случае, когда в лазерном импульсе содержится несколько колебаний поля, длина самофокусировки z_o зависит также от длительности волнового пакета τ_p.

Подводя итоги, можно говорить, что отличительная особенность динамики самовоздействия широкополосного излучения в среде с кубичной нелинейностью (*в условиях укручения продольного профиля импульса*), как следует из выражения (2.75),

связана с уменьшением длины самофокусировки излучения z_o по мере укорочения длительности импульса τ_p в сравнении с длиной коллапса квазимонохроматического волнового пакета z_o^m при фиксированных параметрах импульса: ρ_o, $\mathcal{A}$, ω. Причем этот эффект становится наиболее заметен для предельно коротких импульсов длительностью менее десяти периодов колебаний поля (см. рисунок 2.9). Причина такого уменьшения связана с дополнительным продольным потоком энергии к особенности, обусловленным неодинаковостью скорости перемещения точек продольного профиля, наряду с поперечным потоком энергии с периферии пучка к центру. Как видно из рисунка 2.9, имеется количественное согласие результатов численного моделирования уравнения (2.48) (кружочки) с качественным исследованием (2.75) (синяя сплошная линия).

2.4 Особенности динамики самовоздействия в среде с дисперсией

Для обсуждения качественных особенностей эволюции поля в среде с дисперсией рассмотрим уравнение (2.53) в «схлопывающейся системе координат» (2.26). Исследование его показывает, что комплексная амплитуда поля (2.57) довольно медленно уменьшается в процессе диссипации на ударном фронте. При этом изменение эффективной ширины волнового поля $\rho(z)$ при самофокусировке $z \to z_o$ можно описать следующим выражением

$$\rho(z) \simeq \rho_0 \sqrt{\frac{z_o - z}{z_o}} \,, \tag{2.80}$$

где ρ_o – начальный размер пучка. «Новая» и «старая» эволюционные переменные ζ и z связаны следующим дифференциальным соотношением (см. (2.27)):

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\rho^2(z)} \,. \tag{2.81}$$

Выражение (2.80) можно переписать через «новую»эволюционную переменную ζ

$$\rho(\zeta) \simeq \rho_o \exp\left(-\frac{\rho_o^2}{2}\frac{\zeta}{z_o}\right) \,. \tag{2.82}$$

В результате уравнение (2.53) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\zeta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(|\mathcal{F}|^2\mathcal{F}\right) + \frac{\rho_o^4}{16 z_o^2}\eta^2\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\theta}\right] + \\ + \underbrace{\rho_o^2 \exp\left(-\rho_o^2\frac{\zeta}{z_o}\right)}\left[a\mathcal{F} - b\frac{\partial^4\mathcal{F}}{\partial\theta^4}\right] = \Delta_\perp\mathcal{F} \,. \tag{2.83}$$

Как видно из уравнения (2.83), в процессе уменьшения поперечного размера волнового пакета в ходе самофокусировки имеет место «экспоненциальное» ослабление роли дисперсионных эффектов. Аппроксимируя, как и выше, распределение поля в квазиволноводном режиме параболой

$$\mathcal{F}(z,\tau,r) \simeq \mathcal{W}(z,\tau)\cdot\left[1-\frac{\eta^2}{2}\right] , \tag{2.84}$$

можно сделать следующие оценки. Подставляя это выражение в (2.83) и приравнивая нулю коэффициенты перед η^0 и η^2

$$\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\zeta}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W}\right)\simeq 0 , \tag{2.85a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(|\mathcal{W}|^2\mathcal{W}\right)-\frac{\rho_o^4}{16z_o^2}\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\theta}\simeq 0 , \tag{2.85b}$$

найдем в приближении нелинейной геометрической оптики ($\Delta_\perp\mathcal{W}\simeq 0$), связь между длиной самофокусировки z_o и амплитудой поля

$$|\mathcal{W}|^2\propto\frac{\rho_o^4}{16z_o^2} . \tag{2.86}$$

При получении уравнений (2.85) было сделано приближение, что $\exp\left(-\rho_o^2\dfrac{\zeta}{z_o}\right)\simeq 0$ при $\zeta\gg\dfrac{z_o}{\rho_o^2}$. Из соответствующего уравнения для поля на оси системы следует, что импульс длительностью τ_o и амплитудой (2.86) опрокидывается на трассе

$$\zeta^\star\simeq\frac{\tau_o}{|\mathcal{W}|^2}\simeq\frac{16z_o^2\tau_o}{\rho_o^4} . \tag{2.87}$$

Таким образом, для параметров системы

$$\frac{\zeta\rho_o^2}{z_o}\simeq\frac{16z_o\tau_o}{\rho_o^2}\simeq\frac{4\tau_o}{|\mathcal{W}|}\gg 1 \tag{2.88}$$

увеличение крутизны продольного профиля на длине $\zeta^\star$ (2.87) протекает как в среде без дисперсии. В процессе дальнейшей эволюции волнового пакета ($\zeta>\zeta^\star$) вывод о формировании ударной волны можно сделать лишь для среды с аномальной дисперсией. Ситуация в среде с преобладающей нормальной дисперсией групповой скорости более сложная. Однако, в условиях экспоненциального ослабления дисперсионных эффектов (2.83), возможность образования ударных волн огибающих сохраняется.

Рассмотрим далее особенности самофокусировки волновых полей в средах с преобладающей аномальной ($b\to 0$) и нормальной ($a\to 0$) дисперсией групповой скорости. Для этих случаев динамика самовоздействия квазимонохроматических волновых пакетов довольно хорошо изучена [27, 52, 208, 209, 235, 243], и мы обсудим

здесь специфику импульсов длительностью в несколько периодов колебаний поля. Затем приведем результаты для среды с «нулевой» дисперсией групповой скорости ($\varpi \simeq \omega_{bnd}$), в которой «вклады» квадратичной дисперсии компенсируют друг друга.

2.4.1 Аномальная дисперсия $\varpi \ll \omega_{bnd}$

В этом случае картина самовоздействия оказывается наиболее простой. Эволюция начального распределения поля

$$\mathcal{E} = 0.7 \exp\left(-\frac{r^2}{200}\right) \frac{\exp(i\tau)}{\cosh(0.3\tau)}$$

с $\mathcal{H} < 0$ представлена на рисунке 2.9. В соответствии с рассмотренной выше качественной картиной, процесс возрастания амплитуды поля сопровождается быстрым укручением заднего фронта волнового пакета. Отсутствие дисперсии на высоких частотах приводит к формированию ударной волны огибающей. Поскольку, как видно из выражения (2.83), по мере уменьшения поперечного размера волнового поля происходит уменьшение роли низкочастотной дисперсии. Коллапс способствует выделению вблизи заднего фронта интенсивного полуволнового импульса. Амплитуда его ограничивается в результате нелинейного поглощения поля. Для сравнительно небольших начальных амплитуд для стабилизации коллапса достаточно учета диссипации на фронте ударной волны. При увеличении начальной амплитуды для регуляризации особенности приходится вводить дополнительно нелинейную диссипацию поля, как в случае квазимонохроматического излучения. Дальнейшее распространение образовавшейся структуры сопровождается плавным уменьшением максимального значения поля.

В отличие от квазимонохромотического волнового пакета, самосжатие происходит лишь по поперечной (к направлению распространения) координате. Дисперсионное расплывание сверхкоротких импульсов приводит к некоторому увеличению длительности волнового поля.

В среде с низкочастотной дисперсией спектр поля спадает быстрее, чем в среде без дисперсии (2.71). Так, в среде с аномальной дисперсией расчеты дают для спектра поля на оси системы $r = 0$ закон:

$$S(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}\mathrm{e}[\mathcal{E}(\tau, r=0)] e^{i\omega\tau} d\tau \right| \propto \frac{1}{\omega^{3/2}} \ . \qquad (2.89)$$

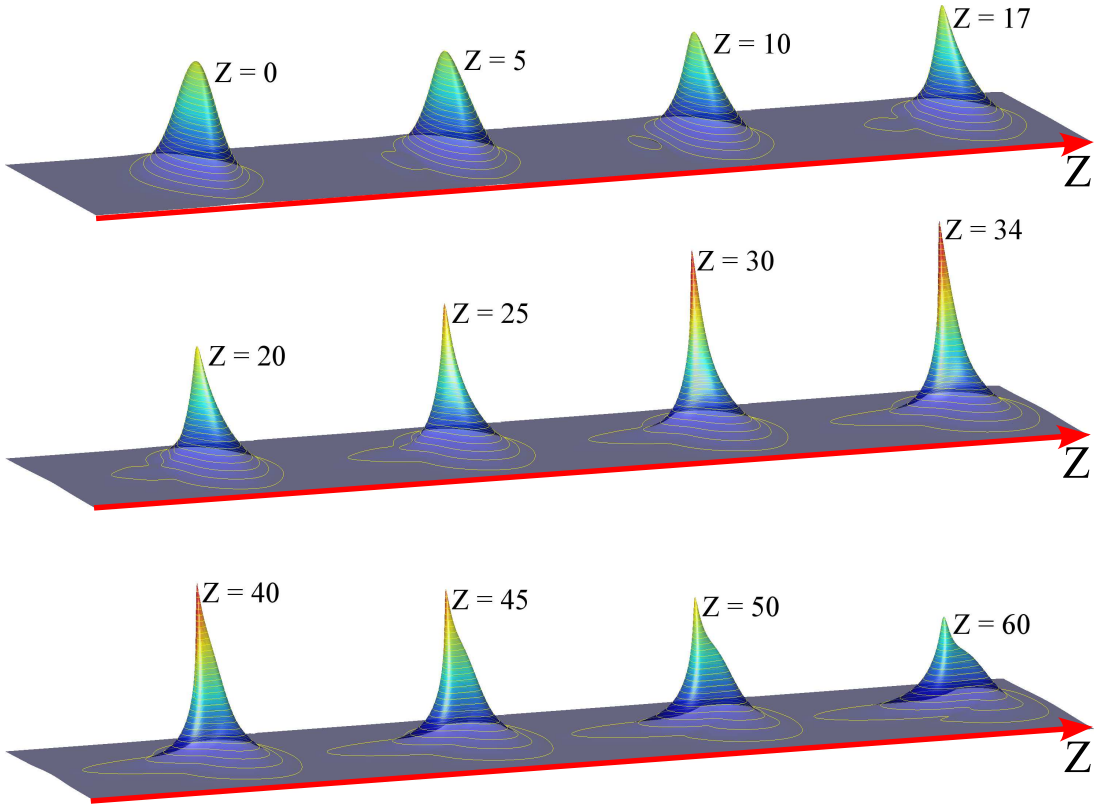


Рис. 2.9: Динамика циркулярно поляризованного поля $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|$ в среде без дисперсии ($a=1$, $b=0$) при $\gamma=0.06$. Начальное распределение циркулярно поляризованного поля $\mathcal{E}=0.7\exp\left(-\dfrac{r^2}{200}\right)\dfrac{\exp(i\tau)}{\cosh(0.3\tau)}$.

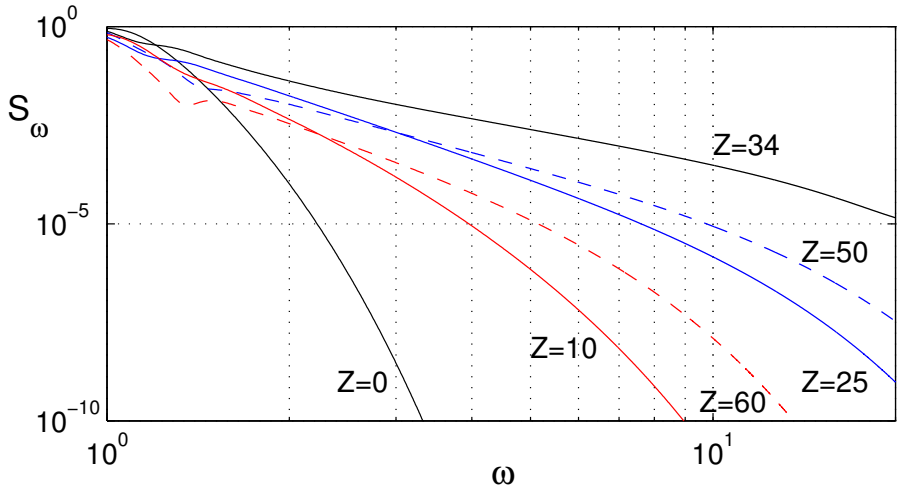


Рис. 2.10: Коротковолновая часть спектральной мощности $S^2(\omega>1)$ на оси системы при $z=0$; 10; 25; 34; 50; 60 при $a=1$, $b=0$ для начального распределения циркулярно поляризованного поля $u=0.7\exp\left(-\dfrac{r^2}{200}\right)\dfrac{\exp(i\tau)}{\cosh(0.3\tau)}$ при значении параметра $\gamma=0.06$.

Соответствующая временная зависимость $u \sim \sqrt{\tau}$ характеризуется бесконечной производной при $\tau = 0$. *В приложении к рассматриваемому случаю это означает, что низкочастотная дисперсия не может полностью предотвратить градиентную катастрофу, но модифицирует структуру поля в переходной области.* Численное моделирование показывает, что спектр $\dfrac{1}{\omega^{3/2}}$ имеет место на интервале от $z = 40$ до $z = 60$. Следует дополнительно отметить, что в процессе поглощения на фронте ударной волны энергия импульса (2.49a) уменьшается в несколько раз. В результате гамильтониан системы становится положительным и, в соответствии с (2.51), импульс начинает расплываться в поперечном направлении.

2.4.2 Нормальная дисперсия $\varpi \gg \omega_{bnd}$

На рисунке 2.11 представлены результаты численного расчета эволюции начального распределения вида

$$\mathcal{E} = \exp\left(-\frac{r^2}{100}\right)\frac{\exp(i\tau)}{\cosh(0.3\tau)}\ .$$

Видно, что самофокусировка протекает в условиях сильного возрастания длительности импульса. Однако и в этом случае, несмотря на заметную роль высокочастотной дисперсии, укручение волнового поля вблизи заднего фронта импульса играет определяющую роль в динамике системы.

Основной режим самовоздействия квазимонохроматического излучения в среде с нормальной дисперсией связан с развитием неустойчивости продольного дробления пополам [232, 234, 235]. Соответствующий процесс в случае сверхкороткого импульса

$$\mathcal{E} = 0.8\exp\left(-\frac{r^2}{200}\right)\frac{\exp(i\tau)}{\cosh(0.3\tau)}$$

представлен на рисунке 2.12. Видно, что укручение заднего фронта развивается одновременно с дроблением волнового пакета. В результате деления пополам вблизи заднего фронта образуется более интенсивный импульс. Высокочастотная дисперсия среды стабилизирует опрокидывание профиля огибающей, а в последующем приводит и к усиленному расплыванию заднего импульса. Как и в случае квазимонохроматического излучения, для сверхкороткого импульса не удается строго доказать существование коллапса. Ограничение максимальной амплитуды квазимонохроматического поля связывают с продольным дроблением пакета. Численное исследование самофокусировки сверхкоротких импульсов показывает, что небольшое увеличение

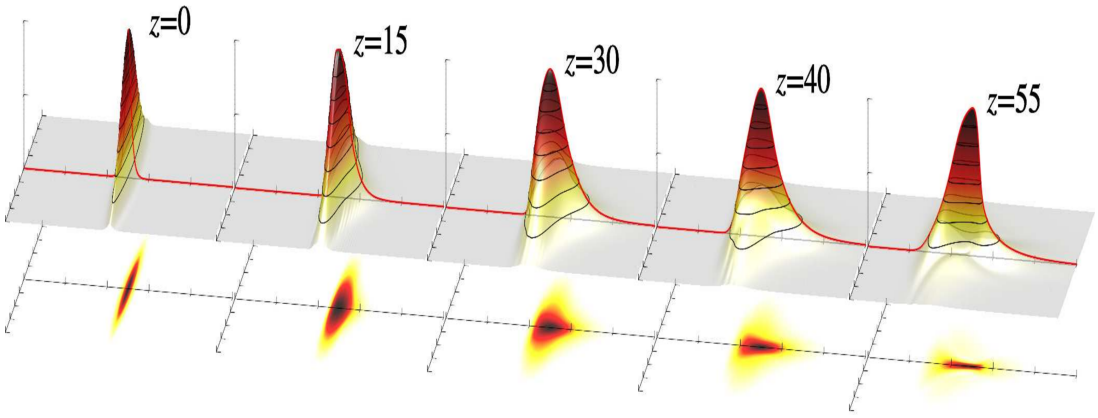


Рис. 2.11: Динамика циркулярно поляризованного поля $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|$ в среде с нормальной дисперсией ($a=0$, $b=1$). Начальное распределение циркулярно поляризованного поля $\mathcal{E}=\exp\left(-\dfrac{r^2}{100}\right)\dfrac{\exp(i\tau)}{\cosh(0.3\tau)}$.

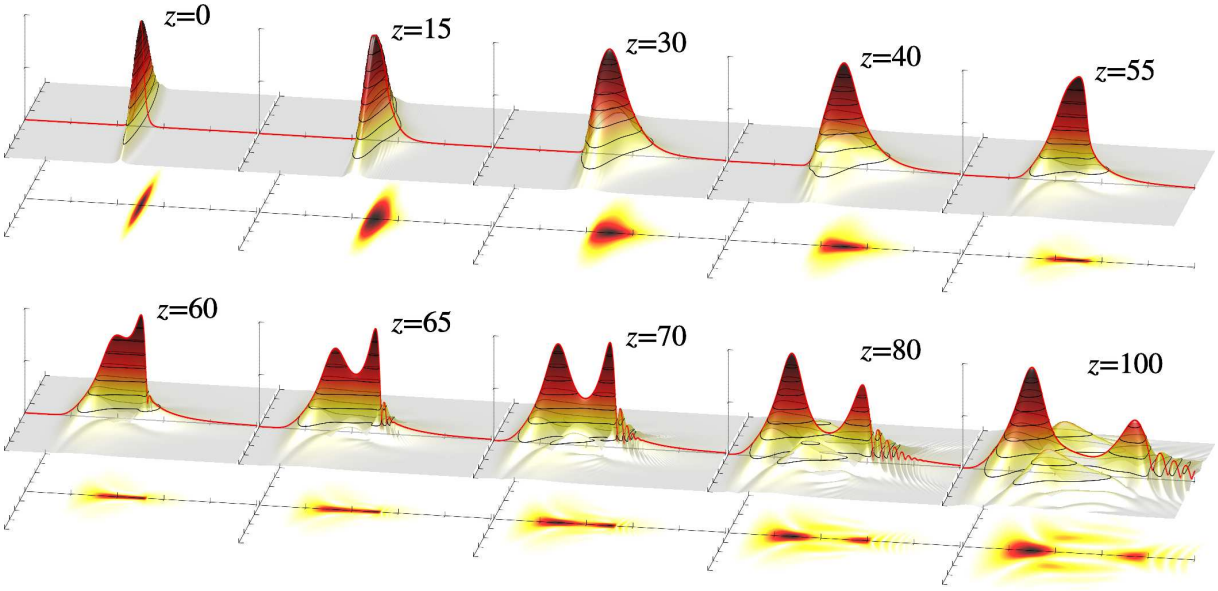


Рис. 2.12: Динамика циркулярно поляризованного поля $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|$ в среде с нормальной дисперсией ($a=0$, $b=1$) и $\beta=0.043$. Начальное распределение циркулярно поляризованного поля $\mathcal{E}=0.8\exp\left(-\dfrac{r^2}{200}\right)\dfrac{\exp(i\tau)}{\cosh(0.3\tau)}$.

начальной амплитуды (по сравнению со значением на рисунке 2.12) приводит к заметному возрастанию темпа укручения профиля огибающей и стабилизации неустойчивости дробления. При этом происходит «неограниченное»нарастание амплитуды поля, как и в случае аномальной дисперсии (см. рисунок 2.9), с той лишь разницей, что расплывание импульса более заметно.

Уширение импульса в рассматриваемом случае делает оправданным использование НУШ для описания динамики самовоздействия. Численное моделирование процессов на основе обобщенного НУШ (2.11), учитывающего лишь квадратичную дисперсию ($\alpha_n = 0$), приводит к сходным результатам [234]. По мере увеличения параметра нелинейной дисперсии можно видеть усиление процесса несимметричного дробления импульса на два в той же последовательности, что и на рисунке 2.12. При значении параметра, превышающем критическое, оставался лишь один наиболее интенсивный импульс вблизи заднего фронта, который «коллапсировал» в процессе дальнейшей эволюции. В этом случае приближение плавной огибающей, очевидно, нарушалось.

В заключении следует отметить, что в среде с высокочастотной (нормальной) дисперсией, несмотря на образование довольно крутых фронтов, в спектре нет участков со степенной зависимостью. Это можно объяснить тем, что в приосевой области динамика самовоздействия описывается модифицированным уравнением КдВ. В этом случае возможность стабилизации укручения хорошо известна.

2.4.3 «Нулевая» дисперсия групповой скорости ($\varpi \simeq \omega_{bnd}$)

Данный подраздел посвящен исследованию динамики самофокусировки широкополосного излучения, когда спектр волнового пакета $S(\omega)$ располагается как в области аномальной, так и нормальной дисперсии групповой скорости, что в случае квазимонохроматического излучения соответствует ситуации, когда $k_{\omega\omega} = \dfrac{\partial^2 k_z}{\partial \omega^2} \simeq 0$. Параметр дисперсии групповой скорости $k_{\omega\omega}$ принято вводить в одномерном случае. В рассматриваемой нами задаче зависимость параметра $k_{\omega\omega}$ от частоты ω приведена на рисунке 1.1. Из графика видно, что для квазимонохроматического излучения с частотой $\varpi = \omega_{bnd} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{3b}}$ «квадратичная» дисперсия отсутствует, т.е. в обобщенном нелинейном уравнении Шредингера (2.11) $\alpha(\varpi) = 0$.

Из анализа достаточного условия самофокусировки (2.51), как отмечалось выше, нельзя сделать определенного вывода о коллапсе. Однако можно видеть, что суще-

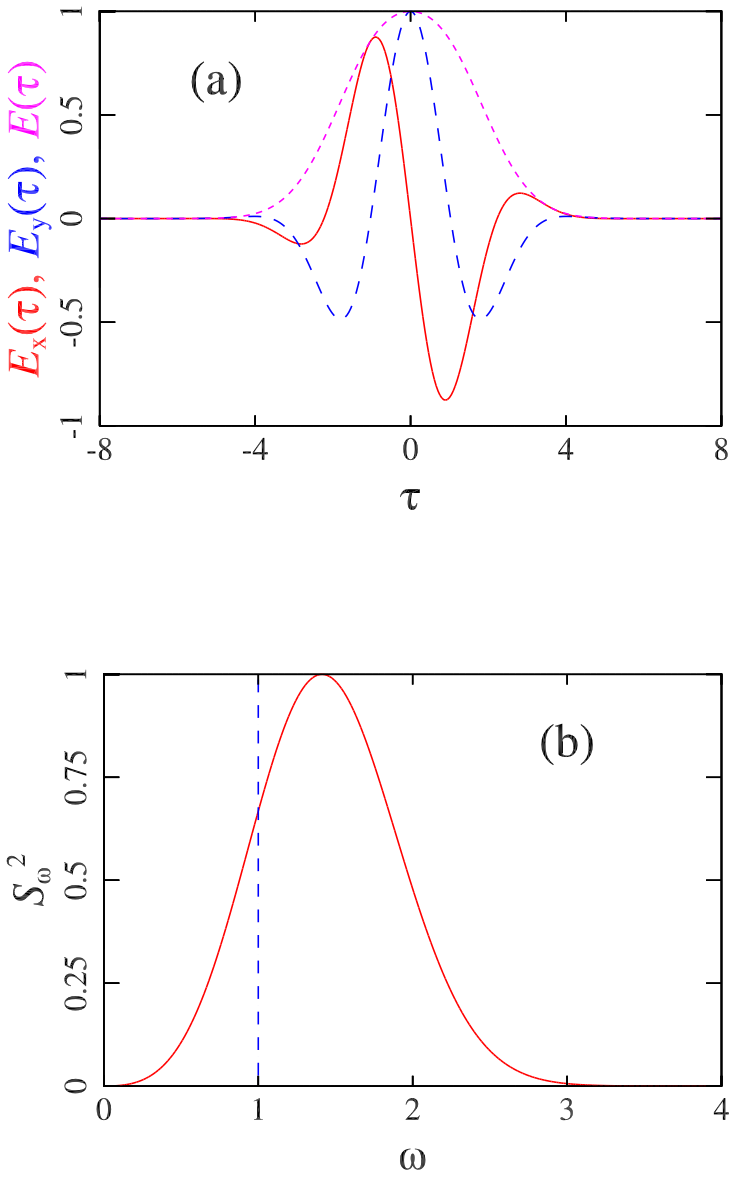


Рис. 2.13: **(a)** Распределение напряженности поля для $\omega = \omega_{bnd} = 1$. Здесь сплошная красная линия – компонента $\mathcal{E}_x(\tau) = \mathcal{R}\mathrm{e}[\mathcal{E}]$, пунктирная синяя линия – $\mathcal{E}_y(\tau) = \mathcal{I}\mathrm{m}[\mathcal{E}]$, пунктирная пурпурная линия – распределение огибающей поля $\mathcal{E}(\tau) = \sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}$. Период поля для этого случая составляет 2π. **(b)** Спектр мощности $S(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}\mathrm{e}[\mathcal{E}(\tau, r=0)] e^{i\omega\tau} d\tau \right|^2$. Здесь сплошная красная линия – спектральная интенсивность, пунктирная синяя линия – положение точки нулевой дисперсии групповой скорости.

ствует класс начальных распределений поля $\mathcal{E} = \dfrac{\partial\phi}{\partial\tau}$, для которых на начальном этапе выполнено соотношение

$$\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[b\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}\right|^2 - a\,|\phi|^2\right]d\tau d\boldsymbol{r}_\perp = 0\ , \tag{2.90}$$

являющееся интегральным условием компенсации вкладов областей нормальной и аномальной дисперсии групповой скорости. Для таких распределений достаточное условие самофокусировки ($\mathcal{H} < 0$) имеет тот же вид, что и для среды без дисперсии ($a = b = 0$).

Для распределений «потенциала» ϕ вида

$$\phi = \mathcal{A}\exp\left(-\frac{r^2}{\rho_o^2}\right)\exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_p^2} + i\omega\tau\right) \tag{2.91}$$

нетрудно подобрать ω и τ_p такими, чтобы удовлетворить соотношению (2.90). В результате для параметров импульса (ω, τ_p) получим связь

$$\tau_p^4\left(\omega^4 - 3\omega_{bnd}^4\right) + 6\omega^2\tau_p^2 + 3 = 0\ . \tag{2.92}$$

Это означает, что, по крайней мере, для таких специально сконструированных распределений (2.91), на начальном этапе динамика лазерного импульса будет происходить как в среде без дисперсии.

Для простоты рассмотрим случай, когда $\omega = \omega_{bnd}$. Из выражения (2.92) следует, что начальная длительность волнового пакета должна равняться

$$\tau_p = \sqrt{\frac{3+\sqrt{15}}{2\omega_{bnd}^2}}\ . \tag{2.93}$$

Распределения напряженности электрического поля и частотный спектр для этого случая представлены на рисунке 2.13. Как видно из рисунка 2.13**(a)**, длительность импульса по уровню половины максимальной интенсивности поля составляет $\tau_{1/2} \simeq 2.8$. В данном случае период колебаний поля составляет 2π. На рисунке 2.13**(b)** синяя пунктирная линия показывает положение точки нулевой дисперсии групповой скорости, которая определана на основе дисперсионного соотношения (2.10). Как видно из рисунка, положение точки нуля дисперсии групповой скорости ω_{bnd} расположено левее максимума спектра.

Интегралы задачи ($\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$) для распределения (2.91) имеют следующий вид

$$H = \frac{\pi^{3/2}\mathcal{A}^2\tau_p}{\sqrt{2}}\left\{1 - \frac{\sqrt{2}\mathcal{A}^2\rho_o^2}{16\tau_p^4}\left[\left(\omega\tau_p\right)^4 + \left(\omega\tau_p\right)^2 + \frac{3}{4}\right]\right\} = \frac{\pi^{3/2}\mathcal{A}^2\tau_p}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_{cr}}\right)\ , \tag{2.94}$$

где

$$\mathcal{I} = \frac{\pi^{3/2}\mathcal{A}^2\rho_o^2}{2^{3/2}\tau_p}\left[(\omega\tau_p)^2+1\right] \ , \tag{2.95a}$$

$$\mathcal{I}_{cr} = \frac{4\pi^{3/2}\tau_p^3\left[(\omega\tau_p)^2+1\right]}{(\omega\tau_p)^4+(\omega\tau_p)^2+3/4} \ . \tag{2.95b}$$

Из выражения (2.94) видно, что первоначальное обужение поперечного распределения поля будет иметь место, когда $\mathcal{H}<0$, т.е. когда $\mathcal{I}>\mathcal{I}_{cr}$.

Теперь обратимся к результатам численного моделирования. Для иллюстрации на рисунке 2.14 представлены результаты численного моделирования эволюции начального распределения поля (2.91)

$$\mathcal{E} = \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \ , \quad \phi = 0.26\exp\left(-\frac{r^2}{550}\right)\exp\left(i\omega_{bnd}\tau-\frac{\tau^2}{\tau_p^2}\right) \tag{2.96}$$

в среде с точкой нулевой дисперсии групповой скорости $\omega_{bnd}=1.2$. Здесь τ_p подчиняется выражению (2.93). На рисунке 2.14 видно, что ключевым процессом является самофокусировка поля в поперечном направлении. Следует отметить, что длительность волнового пакета в процессе нелинейной динамики увеличилась незначительно (в несколько раз (см. рисунок 2.16**(a)**)), поэтому наше предположение о том, что эволюция специально сконструированных распределение поля должно происходить как среде без дисперсии, оказалось оправданным.

Отличительной особенностью в рассматриваемом случае является сильная модификация спектра. Как видно из рисунка 2.16**(b)**, имеет место сильное уширение спектра примерно на две октавы в процессе эволюции поля. Следует отметить, что в процессе распространения импульса в нелинейной среде (см. рисунок 2.16**(b)**) происходит перестройка частоты излучения в коротковолновую область спектра в приосевой области волнового пучка. Такую модификацию спектра можно пояснить на основе четырехволнового взаимодействия

$$2\omega_\star = \omega_1+\omega_2, \tag{2.97a}$$

$$2k_z(\omega_\star) = k_z(\omega_1)+k_z(\omega_2) \ , \tag{2.97b}$$

где $\omega_\star$ – спектральная компонента падающего излучения. Полагая $\omega_1=\omega_\star+\Delta$, $\omega_2=\omega_\star-\Delta$ и используя дисперсионное соотношение в приосевой области (2.10)

$$k_z(\omega) = -\frac{a}{\omega}+b\omega^3 \ ,$$

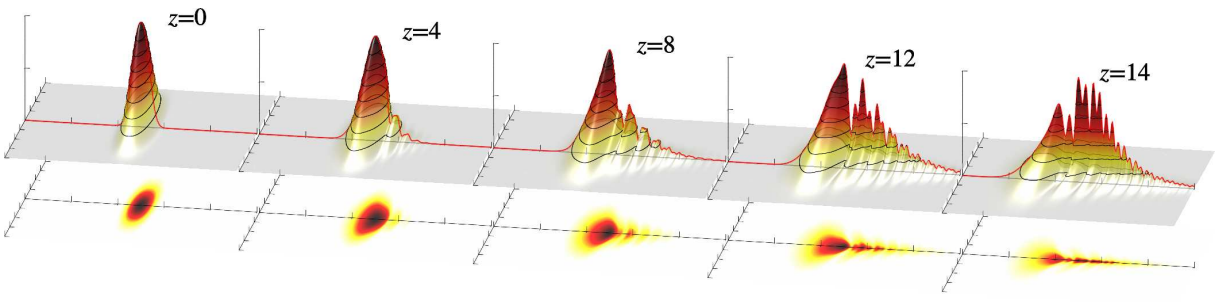


Рис. 2.14: Динамика циркулярно поляризованного поля $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|^2$ в среде с точкой нулевой дисперсией групповой скорости $\omega_{bnd} = 1.2$

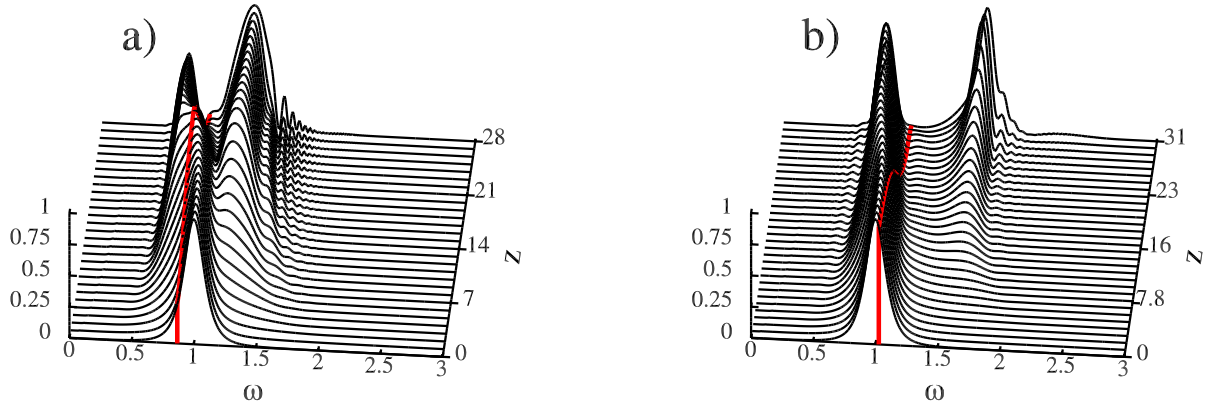


Рис. 2.15: Эволюция спектральной интенсивности $S(\omega)$ на оси пучка, нормированной на максимальное значение, вдоль эволюционной переменной для двух случаев: **(a)** – $\omega_{bnd} = 0.86$, **(b)** – $\omega_{bnd} = 1.02$. Здесь красной линией показано положение точки нуля дисперсии групповой скорости.

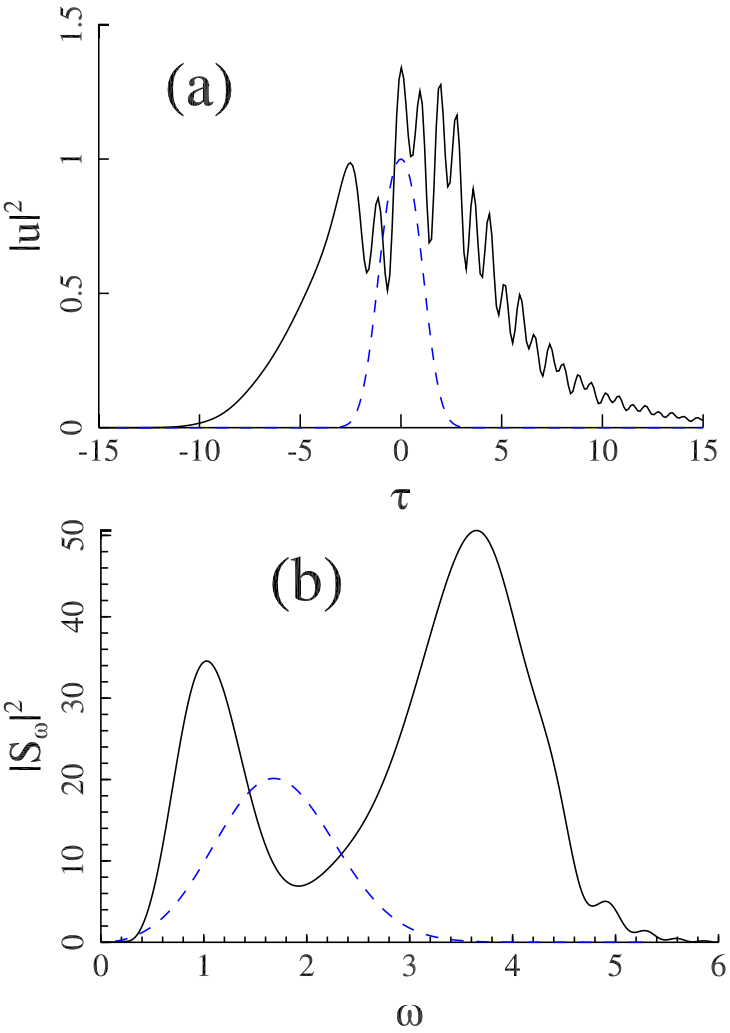


Рис. 2.16: **(a)** Распределение интенсивности поля $|\mathcal{E}|^2$. Здесь синяя пунктирная линия – распределение интенсивности на входе нелинейной среды, сплошная линия – вблизи фокальной области. **(b)** Распределение спектральной интенсивности $S(\omega) = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}\mathrm{e}[\mathcal{E}] e^{i\omega\tau} d\tau \right|^2$. Здесь синяя пунктирная линия – распределение спектральной интенсивности на входе нелинейной среды, сплошная линия – распределение спектра вблизи фокальной области. Точка нуля дисперсии групповой скорости расположена при $\omega = \omega_{bnd} = 1.2$

найдем для Δ следующее выражение

$$\Delta = \omega_\star \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{bnd}}{\omega_\star}\right)^4}\,. \tag{2.98}$$

Как следует из выражения (2.98), условие четырехволнового взаимодействия выполняется для любой спектральной гармоники $\omega_\star$, расположенной правее точки нуля дисперсии групповой скорости ω_{bnd} [$\omega_\star > \omega_{bnd}$]. В результате такого нелинейного процесса происходит перекачка энергии из высокочастотной части спектра как в коротковолновую [$\omega > \omega_{bnd}$], так и низкочастотную часть [$\omega < \omega_{bnd}$], т.е. имеет место дробление спектра вблизи точки нуля дисперсии групповой скорости $\omega \simeq \omega_{bnd}$.

Для исследования данного эффекта зафиксируем параметры импульса, но будем менять положение точки нулевой дисперсии групповой скорости по отношению к несущей частоты излучения. На рисунке 2.15 приведены результаты численного моделирования эволюции спектра на оси системы вдоль эволюционной переменной для двух случаев: $\omega_{bnd} = 0.86$, $\omega = 1$ **(a)** и $\omega_{bnd} = 1.02$, $\omega = 1$ **(b)**. Как видно из рисунка 2.15, на начальном этапе самофокусировки поперечного распределения волнового пакета происходит дробление спектра вблизи точки нулевой дисперсии групповой скорости $\omega \simeq \omega_{bnd}$ (положение ω_{bnd} показано красной сплошной линией). А затем, по мере самофокусировки излучения, происходит преобразование частоты оптического импульса в коротковолновую область. Причем, как показали результаты численного моделирования, можно управлять положением высокочастотного сателлита путем изменения частоты ω_{bnd} (см. рисунок 2.15). Как видно из рисунка 2.15, амплитуда спектральной интенсивности в коротковолновой части сравнима или больше, чем в области $\omega < \omega_{bnd}$. Этот результат отличается от одномерного случая [105, 172] (см. разделы 1.5, 1.7.2) и связан самофокусировкой излучения, которая приводит к дополнительному потоку энергии в приосевую область.

Важно отметить, что такая сильная модификация спектра лазерного импульса приводит к формированию пространственно-временного распределения поля в виде гофра (см. рисунок 2.14). Действительно, поскольку динамика поля происходит в среде с дисперсией, это приводит к пространственному разделению спектральных компонент, т.е. «синие» спектральные компоненты расположены в передней части импульса (слева), в то время как «красные» – в задней части импульса (справа). Ясно, что в результате нелинейного взаимодействия передняя часть импульса будет сильнее сфокусирована, чем задняя часть волнового пакета. Это связано с тем, что порог для самофокусировки для «синих» спектральных компонент ниже, чем для

«красных», так как критическая мощность для самофокусировки квазимонохроматического излучения обратно пропорциональна квадрату частоты ($\mathcal{P}_{cr} \sim \omega^{-2}$).

2.5 Учет процессов, ограничивающих коллапс волнового поля

Численное исследование самофокусировки импульсов в среде без дисперсии и аномальной дисперсией показало, что эволюция поля не зависела от величины «электромагнитной» вязкости (при достаточно малых ее значениях), т.е. была универсальной. При этом в процессе усиления поля амплитуда его может превысить значение, при котором необходим учет других факторов. В этом разделе мы рассмотрим, как повлияют на сделанные выше заключения о структурных особенностях самофокусировки сверхкоротких импульсов насыщение нелинейности (см. подраздел 2.5.1) и ионизация среды (см. подраздел 2.5.2).

2.5.1 Насыщение нелинейности

При численном исследовании насыщение нелинейности моделировалось посредством замены $|\mathcal{E}|^2$ на $|\mathcal{E}|^2 - \beta|\mathcal{E}|^4$ во втором слагаемом в исходном уравнении (2.15)

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[|\mathcal{E}|^2\mathcal{E} - \beta|\mathcal{E}|^4\mathcal{E}\right]\right) = \Delta_{\perp}\mathcal{E} - a\mathcal{E}\ . \tag{2.99}$$

Расчеты показывают, что полученные выше результаты остаются в силе до $\beta \simeq 0.15$. На рисунке 2.17**(a)** приведены данные по формированию степенных спектров при опрокидывании волнового поля в среде с аномальной дисперсией групповой скорости при различных значениях параметра насыщения β. Видно, что степенные спектры формируются и при $\beta > 0.15$, но с более быстрым законом спадания. Они соответствуют образованию бесконечной производной в распределении поля в процессе укручения продольного профиля. Как следует из рисунка 2.17**(b)**, насыщение нелинейности приводит к очевидному эффекту уменьшения максимальной амплитуды поля $\mathcal{E}_{max}$ и, следовательно, к увеличению длины формирования градиентной катастрофы. В результате распределение поля принимает характерный ступенчатый вид (см. рисунок 2.18**(a)**), заметно отличающийся от структуры при $\beta = 0$.

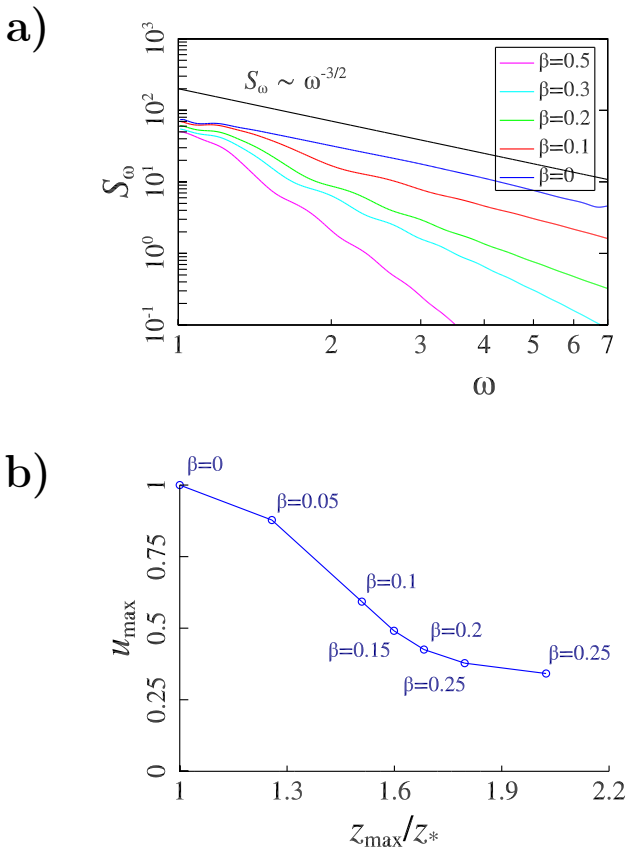


Рис. 2.17: **(a)** Коротковолновая часть спектральной мощности $S^2(\omega > 1)$ на оси в среде с аномальной дисперсией групповой скорости при различных значениях параметра насыщения β ($\beta = 0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.5$). **(b)** Зависимость максимальной амплитуды поля и длины самофокусировки от параметра насыщения нелинейности β. Здесь z_{max} - длина, на которой достигается минимальный размер пучка, $z_\star$ - длина самофокусировки для квазимонохроматического излучения.

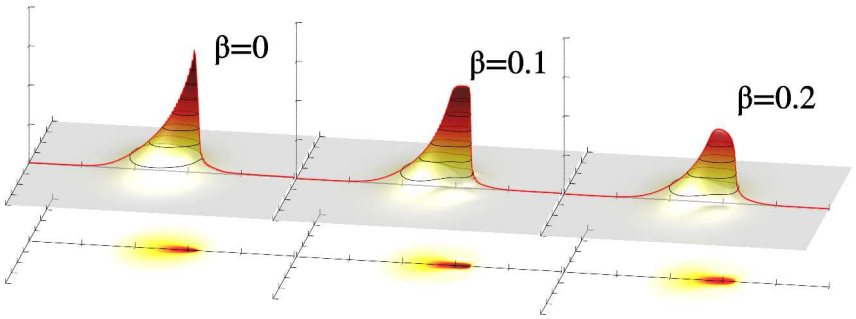


Рис. 2.18: Распределение волнового поля $|\mathcal{E}|$ с учетом влияния насыщения нелинейности $[\beta = 0,\ \beta = 0.1,\ \beta = 0.2]$.

2.5.2 Ионизация

Амплитуда волнового пакета в процессе самофокусировки может значительно возрасти и в какой-то момент превысить пороговое значение для ионизации среды. Очевидно, что рефракция излучения на возникающей плазме приведет к ограничению роста поля вблизи «особенности» и, следовательно, к увеличению длины формирования ударной волны. В этом разделе мы рассмотрим, в какой мере образование плазмы повлияет на сделанные выше выводы о структурных особенностях самовоздействия сверхкоротких импульсов в нелинейной среде.

Для исследования влияния ионизации среды на процесс самофокусировки волнового пакета обратимся к численному анализу динамики поля $\mathcal{E}$ в импульсе в среде только с низкочастотной дисперсией ($b = 0$) на основе следующей системы уравнений

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z \partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left(|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E}\right) + a_o \mathcal{E} + \delta a \mathcal{E} = \Delta_\perp \mathcal{E} \ , \tag{2.100a}$$

$$\frac{\partial \delta a}{\partial \tau} = \mu |\mathcal{E}|^8 (1 - \delta a) \ , \tag{2.100b}$$

в которой наряду с кубичной нелинейностью содержится также и нестационарная ионизационная нелинейность, которая описывается четвертым слагаемым в уравнении (2.100a). Уравнение (2.100b) описывает динамику образования плазмы. Здесь мы предположили, что механизм ионизации является многофотонным [27, 52]. Будем полагать, что в отсутствии лазерного импульса среда была неионизованной $\delta a(\to -\infty) = 0$. На вход нелинейной среды $z = 0$ задавался лазерный импульс с циркулярной поляризацией следующего вида

$$\mathcal{E}(\tau, r) = \exp\left(-\frac{r^2}{200} - \frac{\tau^2}{\tau_o^2} + i\tau\right) \tag{2.101}$$

при разных начальных длительностях τ_o: $\tau_o = 3$, $\tau_o = 10$, $\tau_o = 30$.

Результаты численного моделирования показывают следующее. При достаточно малых длительностях импульсов ионизация среды в силу своей инерционности не успевает проявиться на длине опрокидывания (см. рисунок 2.19**(a)** при $\tau_o = 3$) и, следовательно, динамика самовоздействия развивается как в среде без дисперсии (см. раздел 2.3.2).

По мере увеличения длительности импульса рефракция на возникающей плазме приводит к расширению (в поперечном направлении) волнового пучка в задней части импульса и образованию уплощения профиля интенсивности волнового пакета (см. рисунки 2.19**(a)** [при $\tau_o \geq 3$] и 2.19**(b)**), что характерно для ионизационной

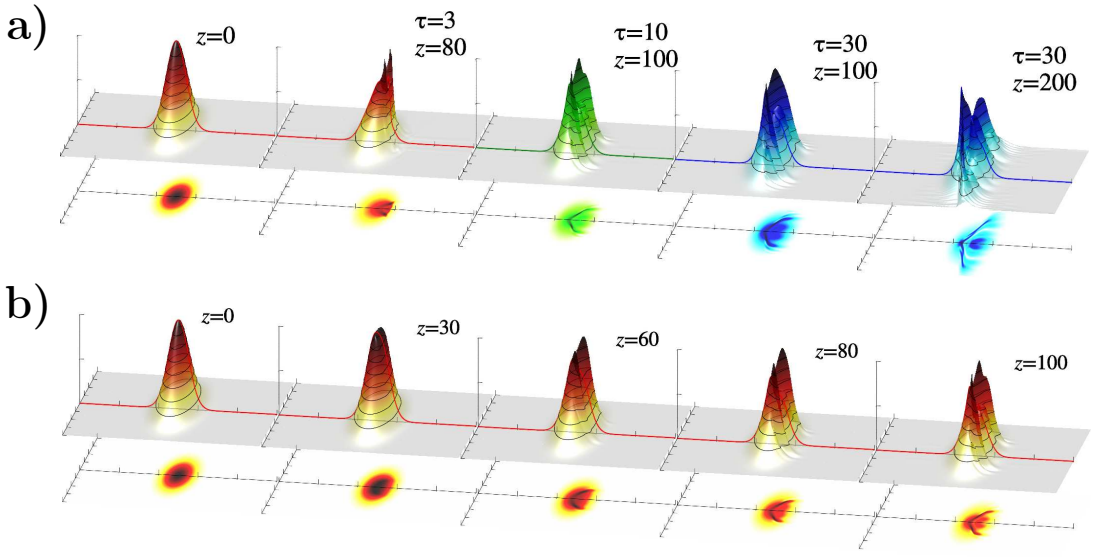


Рис. 2.19: **(a)** Результаты численного исследования самовоздействия трехмерного волнового пакета $\mathcal{E}(z,\tau,r)$ с учетом влияния ионизации среды на самофокусировку излучения при различных начальных длительностях импульса: $\tau_o = 3$, $\tau_o = 10$, $\tau_o = 30$. **(b)** Динамика циркулярно поляризованного импульса с начальной длительностью $\tau_o = 10$. Параметры среды $a_o = 1$, $b = 0$. Распределение циркулярно поляризованного поля на границе нелинейной среды $\mathcal{E} = \exp\left(-\dfrac{r^2}{200} - \dfrac{\tau^2}{\tau_o^2} + i\tau\right)$. Поперечная координата r перпендикулярна плоскости рисунка. Здесь распределение огибающей поля $|\mathcal{E}|$ нормирована на максимальное значение.

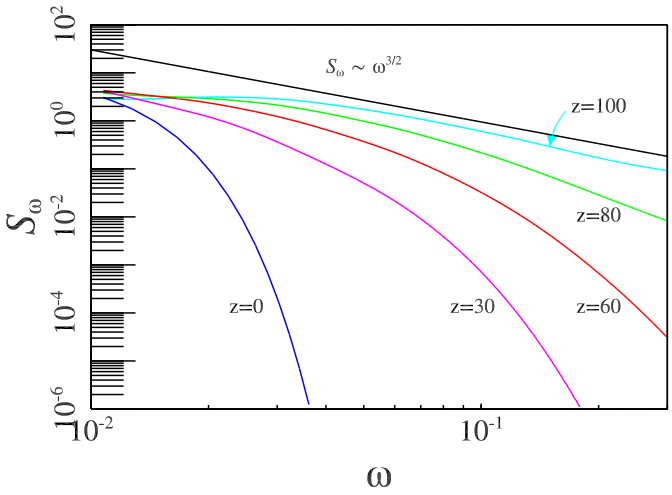


Рис. 2.20: Коротковолновая часть спектральной мощности $\int S^2(\omega > 1, r) r dr$ при $z = 0;\ 30;\ 60;\ 80;\ 100$ при $a_o = 1,\ b = 0,\ \tau_o = 10$.

нелинейности. При дальнейшем увеличении длительности импульса (или трассы распространения) амплитуда поля на оси уменьшается до значения, меньшего чем на периферии, и волновой пучок становится в большей своей части полым (см. рисунок 2.19). Конкуренция керровской (фокусирующей) и ионизационной (дефокусирующей) нелинейностей приведет к уменьшению максимальной интенсивности поля и, следовательно, к увеличению длины опрокидывания продольного волнового профиля.

Благодаря режиму самоканалирования, в этом случае нелинейная дисперсия приводит к опрокидыванию продольного профиля и образование ударной волны. Таким образом, в широком диапазоне изменения длительностей импульсов имеет место формирование достаточно резких переходных (в продольном направлении) областей и, следовательно, степенных «хвостов» в спектре волнового поля. Расчеты показывают, что поведение спектра определяется таким же показателем степени, как и в случае самовоздействия в среде с аномальной дисперсией (см. рисунок 2.20).

2.6 Обсуждение результатов

В данной главе предложен и развит новый подход в исследовании самовоздействия широкополосного излучения в среде с безынерционной нелинейностью керровского типа при достаточно общих предположениях относительно дисперсии среды. Получено и обосновано уравнение (2.6), описывающее динамику произвольного волнового поля (как квазимонохроматического, так и *видеоимпульса*). Замечательная особенность этого уравнения заключается в том, что с его помощью можно исследовать эволюцию поля в достаточно широком частотном диапазоне. Это представляется особенно важным, когда в процессе распространения импульса происходит заметное уширение спектра. Путем изменения коэффициентов a и b, которые соответствуют низкочастотной и высокочастотной дисперсии среды, можно провести исследование самофокусировки излучения как в среде без дисперсии, в среде с аномальной дисперсией, а также с нормальным законом дисперсии групповой скорости.

Применение методов теории нелинейных волн к эволюционному уравнению позволило провести качественное исследование долговременной эволюции трехмерных волновых пакетов. Оно связано с выделением класса особых решений уравнения: ударных волн, коллапсирующих и других более сложных структур. Достаточное условие коллапса волнового поля найдено методом моментов (2.51). Преобразование

уравнения в «схлопывающуюся» систему координат (2.53) позволило установить, что ключевую роль в динамике самовоздействия пространственно ограниченных импульсов в средах без дисперсии ($a = b = 0$) и с аномальной дисперсией ($\varpi \ll \omega_{bnd}$) играет зависимость групповой скорости волнового пакета от амплитуды. В условиях самофокусировки излучения она приводит к опережающему процессу опрокидывания продольного профиля поля и образованию ударной волны огибающей. В результате происходит формирование новой (комбинированной) особенности, в которой градиентная катастрофа развивается при неограниченном нарастании поля на фронте («коллапсе»). По существу, это означает, что для описания качественной картины самовоздействия на основе НУШ (2.11) принципиально важным является учет нелинейной дисперсии. Численное моделирование пространственно-временной эволюции поля подтверждает этот вывод.

Проведено детальное численное моделирование динамики самовоздействия с целью иллюстрации сделанных выводов. Наиболее трудным для численного расчета оказалось исследование самофокусировки линейно поляризованного излучения в среде без дисперсии. Образование многочисленных ударных фронтов (по два на каждом периоде) приводит к сильной нелинейной диссипации излучения. Особенность самофокусировки излучения в этом случае состоит в уменьшении поперечной локализации поля без сколько-нибудь заметного увеличения амплитуды. Для циркулярно-поляризованного излучения как в среде без дисперсии, так и с дисперсией, имеет место режим самовоздействия, в котором процесс опрокидывания продольного профиля сопровождается коллапсом. При дальнейшем распространении импульса амплитуда его уменьшается из-за диссипации на ударном фронте.

Для исследования тонких деталей динамики системы был проведен анализ спектра поля. В случае сред без дисперсии ($a = b = 0$) и сред с аномальной дисперсией групповой скорости ($\varpi \ll \omega_{bnd} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{3b}}, b \to 0$) численное моделирование показало наличие в спектре поля при больших частотах степенного поведения (см. рисунки 2.5, 2.10), характерного для возникновения резких переходных областей. Этот результат сохраняется как в условиях насыщения нелинейности (см. рисунок 2.17**(а)**), так и при учете ионизации среды (см. рисунок 2.20), несмотря на заметное ослабление поля в области «особенности». Уменьшение максимального значения поля приводит лишь к увеличению длины формирования ударной волны (см. рисунок 2.17).

В среде с нормальной дисперсией групповой скорости ($\varpi \gg \omega_{bnd},\ a \to 0$), несмот-

ря на образование довольно резких переходных областей, в спектре нет участков со степенной зависимостью. Это связано с тем, что в приосевой области динамика самовоздействия описывается модифицированным уравнением КдВ. Возможность стабилизации укручения продольного профиля в рамках уравнения КдВ хорошо известна и определяется высокочастотной дисперсией. Особенности самовоздействия в этом случае связаны с конкуренцией укручения волнового профиля и дробления импульса пополам. В результате нарушается симметрия деления импульса пополам (хорошо изученного в среде без нелинейной дисперсии) и происходит образование вблизи заднего фронта более интенсивного импульса.

Проведено исследование самофокусировки волнового поля вблизи точки нулевой дисперсии групповой скорости ($\varpi \simeq \omega_{bnd}$). Построен класс начальных распределений, на которых имеет место интегральная компенсация дисперсии. Показано, что такие распределения фокусируются при незначительном увеличении длительности импульса. Отличительные особенности самовоздействия импульсов с малым числом периодов поля в условиях нулевой дисперсии групповой скорости проявляются в спектральной области. В процессе эволюции поля имеет место сильное уширение спектра примерно на две октавы, а также дробление спектра вблизи точки нулевой дисперсии $\varpi \simeq \omega_{bnd}$ (см. рисунок 2.15). Такая сильная модификация спектра лазерного импульса приводит к формированию пространственно-временного распределения поля в виде гофры (см. рисунок 2.14)

Глава 3

Самокомпрессия лазерных импульсов в условиях самофокусировки в среде с аномальной дисперсией

Ультракороткие высокоэнергетичные лазерные импульсы в инфракрасном спектральном диапазоне $2-8\ \mu m$ особенно интересны ввиду их роли в процессе генерации высоких гармоник [35, 51, 99], филаментации [101, 166, 171], необычных режимов для явлений нелинейной оптики [149] и ускорения частиц [181]. Эти применения возможны за счет увеличения периода колебания поля управляющего электромагнитного импульса и требуют, помимо большой длины волны излучения, ультракороткого импульса длительностью несколько колебаний поля и высокой энергии в импульсе миллиджоульного уровня. Достижение всех трех этих условий одновременно – одна из главных проблем в современных технологиях генерации лазерных импульсов. Ограниченная полоса усиления оптических усилителей побудила к развитию различных подходов внешней компрессии импульса, основанных на нелинейном уширении спектра волнового пакета и/или последующей или одновременной дисперсионной компрессии, относящейся как к пост-компрессии, так и к технике нелинейной самокомпрессии, соответственно.

Наиболее яркий пост-компрессионный метод для генерации импульсов с небольшим числом колебаний поля в ближнем инфракрасном диапазоне миллиджоульного уровня энергии основан на уширении спектра в полых волноводах [82,141,160], заполненных газом, и имеет место вблизи нулевой или слегка положительной дисперсии групповой скорости. В режиме отрицательной дисперсии групповой скорости воз-

можность реализации солитоноподобной нелинейной самокомпрессии посредством компенсации фазовой самомодуляции, наведенной нелинейностью, дисперсией среды. Сценарий компрессии солитоноподобных импульсов широко реализован в волноводах, и соответствующий процесс может наблюдаться также в небольшой центральной области филаменты в газах благодаря аномальной дисперсии групповой скорости, связанной с плазмой [86, 163, 199]. Самокомпрессию лазерного импульса также наблюдали в объемных средах в режиме отрицательной дисперсии групповой скорости [66, 87]. Для подобных сред энергия самокомпрессированных импульсов в фемтосекундном диапазоне ограничена до низких микроджоулевых значений, поскольку критическая мощность самофокусировки находится на МВт уровне. Для миллиджоулевых импульсов, относящихся к применению лазерных импульсов с наиболее высокими полями, пиковая мощность превышает критическую на несколько порядков. Распространение волновых пакетов с мощностью, заметно превышающей критическую, из-за хорошо известной филаментационной неустойчивости приводит к быстрому разрушению пучка на множество филаментов, и конечная потеря когерентности делает источники таких импульсов непригодными для использования.

В данной главе диссертации будут представлены результаты детального исследования нового метода самокомпресиии лазерных импульсов миллиджоульного уровня энергии в среднем ИК диапазоне в среде с аномальной дисперсией групповой скорости в условиях самофокусировки волновых пакетов в случае, когда дисперсионная длина $z_{dis} \propto \frac{\tau_p^2}{|k_2|}$ (где τ_p – длительность импульса, k_2 – коэффициент, характеризующий дисперсию среды) много меньше дифракционной $z_{dif} \propto a_\perp^2$ (где $a_\perp$ – размер пучка). В процессе самофокусировки поперечного распределения волнового поля будет иметь место приток энергии с периферийной части пучка к приосевой, что приведет к увеличению максимальной амплитуды поля $\mathcal{E}_m$ и, соответственно, к уменьшению нелинейной длины ($L_{NL} \propto \frac{1}{\mathcal{E}_m^2}$). Учитывая, что солитон является нелинейным образованием, существующим при балансе нелинейности и дисперсии среды, это, соответственно, приведет к адиабатическому уменьшению длительности лазерного импульса.

Для практической реализации предложенного квазисолитонного метода самокомпрессии импульсов интерес представляют для сжатия импульса с большой энергией широкоапертурные волновые пучки, так как погонная энергия солитона по продольной координате $\mathcal{I}_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{E}|^2 d\tau$ полностью определяется параметрами среды (нели-

нейностью и дисперсией среды). В связи с этим встала важная проблема исследования устойчивости рассматриваемого нами режима компрессии волнового пакета по отношению к филаментационной неустойчивости (см. раздел 3.4). Проведены аналитические и численные исследования структурной устойчивости волнового пакета, которые показали, что самокомпрессия волновых пакетов с начальной длительностью порядка десяти периодов колебаний поля устойчива относительно данной неустойчивости из-за нелинейной дисперсии среды. Это связано с тем, что самофокусировочная неустойчивость при учете в НУШ зависимости групповой скорости от амплитуды волнового пакета становится конвективной.

Основываясь на проведенных аналитических и численных исследованиях нелинейной динамики волновых пакетов, можно считать, что предложенный метод самокомпрессии лазерных импульсов представляет собой надежный и засуживающий доверие подхода к получению лазерных импульсов с длительностью соизмеримой с периодом колебаний поля.

Структура данной главы следующая: в разделе 3.1 представлено базовое уравнение для описания самовоздействия импульсов с широким частотным спектром. В разделах (3.2), (3.3) проведено качественное исследование метода укорочения лазерных импульсов. В разделе 3.4 проведены исследования устойчивости волновых пакетов относительно филаментационной неустойчивости. В последнем разделе 3.5 приведены результаты численного моделирования и определены начальные параметры лазерного импульса для оптимальной самокомпресии волнового пакета.

3.1 Основные уравнения

Для адекватного описания пространственно-временной эволюции ультракоротких лазерных импульсов в процессе адиабатического уменьшения длительности в условиях самофокусировки поперечного распределения обратимся непосредственно к описанию динамики самовоздействия волнового пакета в среде в широкой спектральной области на основе волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z^2} + \Delta_\perp \boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{P}}}{\partial t^2} \ , \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x \boldsymbol{x}_o + \mathcal{E}_y \boldsymbol{y}_o$, $\mathcal{E}_x$ и $\mathcal{E}_y$ – соответствующие компоненты электрического поля, $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ – поляризационный отклик среды. В случае нерезонансного взаимодействия лазерного излучения с веществом данный отклик можно разбить на две составляющие $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}_{lin} + \boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl}$. Здесь слагаемое $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{lin} = \frac{1}{4\pi}[\int\limits_{-\infty}^{t} \varepsilon(t-t')\boldsymbol{\mathcal{E}}(t')dt' - \boldsymbol{\mathcal{E}}]$ ответственно за линейный отклик среды, $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl}$ описывает нелинейную часть поляризации $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$. Где ε – линейная диэлектрическая проницаемость в рассматриваемой системе, которая в ИК частотном диапазоне для большинства сред может быть записана в спектральной области в следующем виде [34, 55]:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_o - \frac{\omega_\beta^2}{\omega^2} \ , \tag{3.2}$$

где ε_o – статическая диэлектрическая проницаемость. Отметим, что при таком выборе зависимости диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ это соответствует случаю, когда среда характеризуется аномальной дисперсией по групповым скоростям (групповая скорость растет с ростом частоты).

Слагаемое $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl}$ в уравнении (3.1) описывает нелинейный отклик вещества, который в случае нерезонансной среды с безынерционной нелинейностью керровского типа можно записать в следующем виде [1,35,266] $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl} = \chi^{(3)}|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2\boldsymbol{\mathcal{E}}$, где $\chi^{(3)}$ – атомная кубическая нелинейная восприимчивость.

В результате получаем волновое уравнение (3.1)

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z^2} + \Delta_\perp \boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{\varepsilon_o}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - \frac{\omega_\beta^2}{c^2}\boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{4\pi\chi^{(3)}}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2\boldsymbol{\mathcal{E}}) = 0 \tag{3.3}$$

для описания пространственно-временной эволюции поля в лазерном импульсе, включающей все рассматриваемые ключевые физические феномены, такие как дисперсия, дифракция пучка, керровская нелинейность, самоукручение волнового пакета, самофокусировка поперечного распределения. В данной задаче не рассматривается влияние ионизационной нелинейности на динамику поля в лазерном импульсе,

так как мы ограничиваемся амплитудой поля меньше порога ионизации вещества. Это достигается за счет подбора начального размера волнового пучка для соответсвующей энергии в волновом пакете.

Для детального анализа динамической задачи удобно использовать эволюционное уравнение для поля в простейшей форме редуцированного волнового уравнения. Оно предполагает, что пространственно-временная структура волнового поля плавно меняется в процессе однонаправленного распространения импульса по трассе из-за дифракции и нелинейности среды, т.е в пренебрежении эффектами отражения. В случае квазимонохроматического излучения такой подход соответствует переходу к уравнению для огибающей. Используя приближение однонаправленного распространения волнового поля вдоль оси z, уравнение в безразмерных переменных представим в следующем виде [18,19,30,63,115,190,213,253] (см. также формулу (2.48) в разделе 2.3.2):

$$\frac{\partial^2\tilde{\mathcal{E}}}{\partial z\partial\tau}+\tilde{\mathcal{E}}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(|\tilde{\mathcal{E}}|^2\tilde{\mathcal{E}})=\Delta_\perp\tilde{\mathcal{E}}\ . \tag{3.4}$$

Здесь $\tilde{\mathcal{E}}=\omega_o\mathcal{E}\dfrac{\sqrt{4\pi\chi^{(3)}}}{\omega_\beta}$, $z\to z\dfrac{2\omega_o c}{\omega_\beta^2}$, $\tau=\omega_o(t-z\sqrt{\varepsilon_o}/c)$, ω_o – характерная несущая частота лазерного импульса, $r_\perp\to r_\perp\dfrac{c}{\omega_\beta}$. В дальнейшем для упрощения чтения формул символ тильде будет убран.

Для локализованных в пространстве и во времени распределений поля $\mathcal{E}$ сохраняются следующие величины (см. раздел 2.3.2):

$$\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}d\boldsymbol{r}_\perp d\tau=0\ , \tag{3.5a}$$

$$\mathcal{I}_{full}=\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right|^2 d\boldsymbol{r}_\perp d\tau\ , \tag{3.5b}$$

$$\mathcal{H}_{full}=\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[|\nabla_\perp\phi|^2-\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right|^4+|\phi|^2\right]d\boldsymbol{r}_\perp d\tau\ , \tag{3.5c}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{full}=\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\nabla_\perp\phi^\star+\frac{\partial\phi^\star}{\partial\tau}\nabla_\perp\phi\right]\ d\boldsymbol{r}_\perp d\tau\ , \tag{3.5d}$$

где $\mathcal{E}=\dfrac{\partial\phi}{\partial\tau}$. Соотношение (3.5a) отвечает за то, что в распределение поля $\mathcal{E}$ отсутствует нулевая гармоника. Интеграл определяет (3.5b) сохранение «числа квантов». Выражение (3.5c) есть гамильтониан. Последнее выражение (3.5d) определяет попе-

речный импульс $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{full}$. Благодаря «гамильтоновости»уравнения (3.4) можно получить соотношение

$$\mathcal{I}_{full} \cdot \frac{d^2\langle\rho_\perp^2\rangle}{dz^2} = 8\mathcal{H}_{full} - 8\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\phi|^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{3.6}$$

которое описывает изменение эффективного поперечного размера $\langle\rho_\perp^2\rangle$ волнового поля в процессе самофокусировки

$$\langle\rho_\perp^2\rangle = \frac{\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} r_\perp^2 \left|\dfrac{\partial\phi}{\partial\tau}\right|^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp}{\mathcal{I}_{full}} \ . \tag{3.7}$$

Далее мы будем рассматривать начальные распределения лазерных импульсов с отрицательным гамильтонианом $\mathcal{H}_{full} < 0$, которые определенно схлопываются в поперечном направлении на конечной трассе распространения (см. уравнение (3.6))[14].

В случае, когда пространственные эффекты не существенны ($\Delta_\perp \equiv 0$) [15], найден новый класс устойчивых солитонных решений [104,172]. Волновые солитоны уравнения (3.4) можно представить двухпараметрическим семейством решений вида

$$\mathcal{E}(z,\tau) = \sqrt{\gamma}\mathcal{U}(\xi)\exp[i\omega_s(\tau+\gamma z) + i\varphi(\xi)] \ , \tag{3.8}$$

где ω_s – характерная несущая частота, γ – параметр, определяющий групповую скорость солитона, $\xi = \omega_s(\tau - \gamma z)$. Огибающая солитона $\mathcal{U}(\xi)$ и нелинейная фаза $\varphi(\xi)$ подчиняются следующим уравнениям:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\mathcal{U}^2(3-2\mathcal{U}^2)}{2(1-\mathcal{U}^2)^2} \ , \tag{3.9a}$$

$$\int\limits_{\mathcal{U}_m}^{\mathcal{U}} \frac{1-3\mathcal{U}^2}{\mathcal{U}\sqrt{\delta^2 - F(\mathcal{U}^2)}} d\mathcal{U} = \pm(\xi - \xi_o) \ , \tag{3.9b}$$

где $F(\mathcal{U}^2) = \mathcal{U}^2\left[\dfrac{3}{2}(1+\delta^2) - \dfrac{(4-5\mathcal{U}^2)}{4(1-\mathcal{U}^2)^2}\right]$, $\mathcal{U}_m$ – максимальная амплитуда солитона, ξ_o - постоянная интегрирования, отвечающая положению максимума огибающей

[14]Более подробно смотрите главу 2, где проведен детальный анализ самофокусировки лазерных импульсов с малым числом колебаний поля при достаточно общих предположениях относительно дисперсии среды.

[15]Более подробно смотрите главу 1, в которой дан анализ нового класса уединенных решений волнового поля, описывающий распространение в прозрачной нерезонансной среде солитоноподобных структур циркулярно-поляризованного оптического излучения, включающих конечное число периодов колебаний поля.

солитона. Как видно из (3.9b), решения для огибающей солитона $\mathcal{U}(\xi)$ зависят лишь от параметра $\delta = \sqrt{\frac{1}{\omega_s^2\gamma} - 1}$ и существуют при $0 \leq \delta \leq \delta_{cr} \equiv \sqrt{1/8}$ (см. раздел 1.2). Важной особенностью рассматриваемых волновых солитонов является полуограниченный спектр их допустимых решений, т. е. наличие граничного решения, соответствующего предельному солитону с минимально возможной длительностью импульса и, соответственно, с максимально возможной амплитудой.

На рисунках 3.1**(a,c)** представлены для сравнения точные солитонные решения для двух разных значений параметра δ: **(a)** для $\delta = 0.06$, **(b)** для $\delta = 0.3$. Видно, что с увеличением значения δ длительность солитона уменьшается. На рисунках 3.1**(b,d)** представлены спектральные интенсивности для разных δ. Как следует из данного рисунка, по мере увеличения значения δ благодаря сильной частотной модуляции в импульсе (3.9a) спектр солитона становится широким и несимметричным.

Чтобы установить связь полученных решений с хорошо известными солитонами огибающей, существующих в рамках нелинейного уравнения Шредингера и его обобщений, разложим первый интеграл (3.9b) по степеням $\mathcal{U}$, так как переход к длинным квазимонохрамотическим импульсам соответствует случаю малых амплитуд $\mathcal{U} \ll 1$. Удерживая в уравнении (3.9b) слагаемые порядка $\mathcal{U}^4$, получаем решение на огибающую солитона $\mathcal{U}(\xi)$, которое соответствует шредингеровскому солитону

$$\mathcal{U}(\xi) = \frac{\sqrt{2}\delta}{\cosh(\delta\xi)}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} \simeq 0 \ . \tag{3.10}$$

Типичные распределения поля и спектральной интенсивности солитона при малом значении $\delta = 0.06$ представлены на рисунке 3.1**(a,b)**.

При увеличении амплитуды длительность солитона уменьшается, и все возрастающую роль начинают играть процессы, связанные с зависимостью групповой скорости от амплитуды, что, в первую очередь, отражается на фазомодулированной структуре импульса (3.9a). Его амплитудная зависимость трансформируется при этом в солитоны обобщенного нелинейного уравнения Шредингера, которые, как нетрудно получить из (3.9b), проводя разложение многочленов и удерживая слагаемые следующего порядка малости $\mathcal{U}^6$, имеют вид

$$\mathcal{U}(\xi) = \frac{2\delta}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 12\delta^2}\cosh(2\delta\xi)}} \ , \quad \frac{d\varphi}{d\xi} \simeq \frac{3}{2}\mathcal{U}^2 \ . \tag{3.11}$$

Типичные распределения поля и спектральной интенсивности солитона при значении $\delta = 0.3$ представлены на рисунке 3.1**(c,d)**.

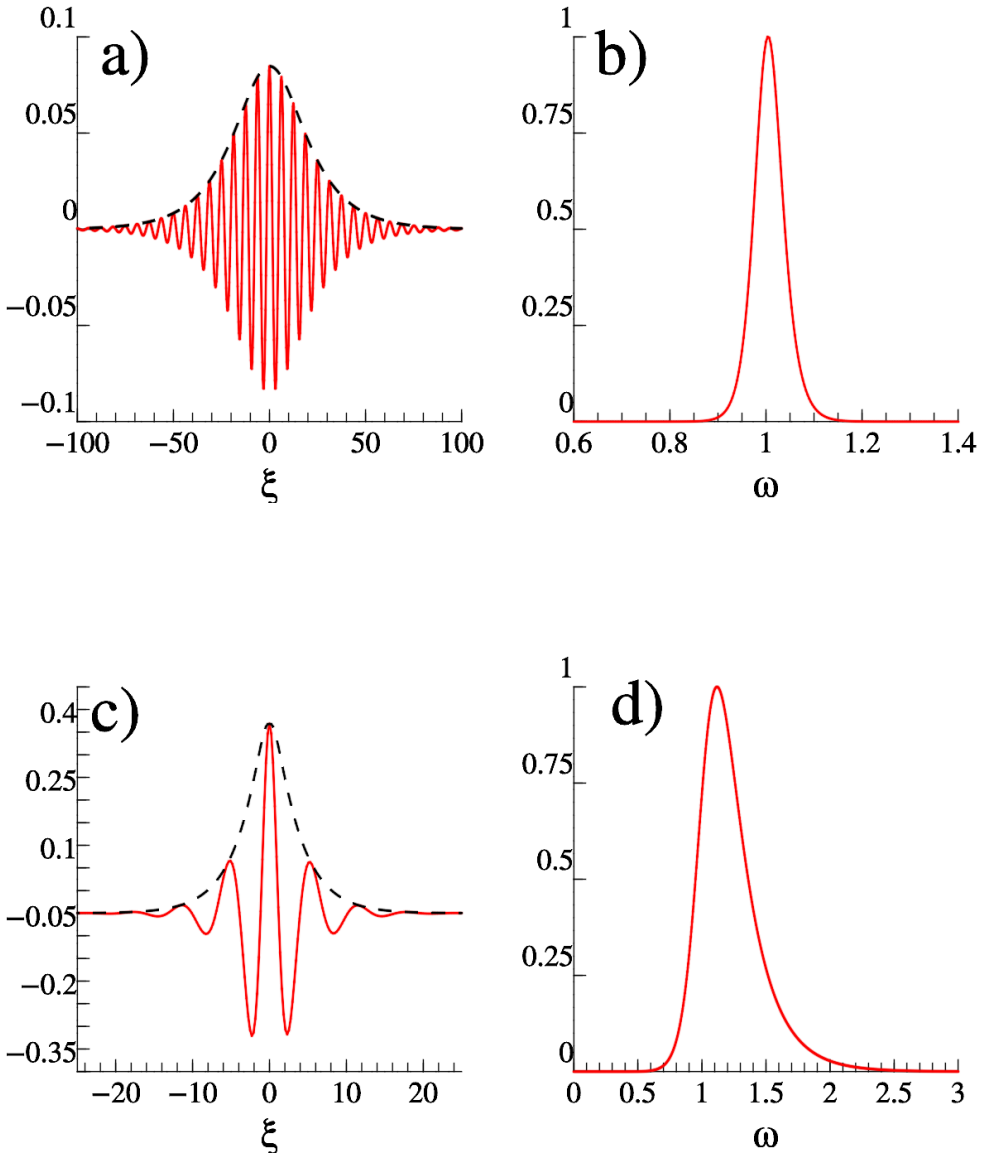


Рис. 3.1: Точные солитонные решения для одной из поляризаций поля $\mathcal{E}_x = \mathcal{R}\mathrm{e}(\mathcal{E})$ (красные сплошные кривые), отвечающие $\delta = 0.06$, $\omega_s = 1$ **(a)** и $\delta = 0.3$, $\omega_s = 1$ **(c)**. Пунктирной черной линией представлено распределение огибающей поля $\sqrt{\gamma}\mathcal{U}(\xi)$. На рисунках **(c)** и **(d)** представлены распределения спектральной интенсивности для разных δ: **(c)** для $\delta = 0.06$; **(d)** для $\delta = 0.3$.

Следует отметить, что, как следует из выражений (3.10), (3.11), амплитудные распределения солитонов близки. Однако отличительной особенностью решений является наличие достаточно сильной частотной модуляции в лазерном импульсе.

3.2 Качественный анализ самокомпрессии волнового пакета

Далее обратимся непосредственно к задаче самокомпрессии лазерных импульсов в процессе самофокусировки излучения. Уравнение (3.4) существенно более сложное и описывает большое число нелинейных эффектов, чем соответствующее ему уравнение для квазимонохроматического излучения. Поэтому для получения аналитических соотношений обратимся вначале к более простому и хорошо изученному нелинейному уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}+\Delta_{\perp}\Psi+|\Psi|^2\Psi=0\ , \tag{3.12}$$

которое описывает эволюцию медленно меняющейся амплитуды волнового пакета

$$\mathcal{E}=\Psi(z,\boldsymbol{r}_{\perp},\tau)\exp(i\tau)+c.c.$$

Второе слагаемое в уравнении (3.12) описывает аномальную дисперсию среды, третье слагаемое – дифракцию пучка, четвертое слагаемое – самовоздействие в среде с кубичной нелинейностью. В данном уравнении для локализованных распределений также сохраняются «число квантов» и гамильтониан:

$$\mathcal{I}_q=\int\limits_{\boldsymbol{r}_{\perp}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Psi|^2d\tau d\boldsymbol{r}_{\perp}\ , \tag{3.13a}$$

$$\mathcal{H}_q=\int\limits_{\boldsymbol{r}_{\perp}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\nabla_{\perp}\Psi|^2+\left|\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right|^2-\frac{1}{2}|\Psi|^4\right]d\tau d\boldsymbol{r}_{\perp}\ . \tag{3.13b}$$

Отметим, что вопросу о самофокусировке импульсов в средах с аномальной и нормальной дисперсии посвящено большое число работ [28, 110, 113, 132, 200, 235]. Когда волновой пакет распространяется в нелинейной среде, то он одновременно испытывает влияние дисперсии и дифракции, но в то же время эти два эффекта становятся связанными из-за нелинейности среды. Такая пространственно-временная связь приводит к возможности пространственно-временного коллапса.

Для данного уравнения (3.12) можно написать также соотношения для изменения эффективных размеров волнового пакета (подобно уравнению (3.6)), которые характеризуют глобальное поведение системы

$$\mathcal{I}_q \frac{d^2\langle \rho_\perp^2 \rangle}{dz^2} = 8\mathcal{H}_q - 8 \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right|^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{3.14a}$$

$$\mathcal{I}_q \frac{d^2\langle \rho_\perp^2 + \tau^2 \rangle}{dz^2} = 8\mathcal{H}_q - 2 \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^4 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{3.14b}$$

где $\mathcal{I}_q \cdot \langle \rho_\perp^2 \rangle = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r_\perp^2 |\Psi|^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp$ – эффективный поперечный размер волнового пакета, $\mathcal{I}_q \cdot \langle \rho_\perp^2 + \tau^2 \rangle = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (r_\perp^2 + \tau^2) |\Psi|^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp$ – полный эффективный размер волнового пакета. Отсюда, как и в случае соотношения (3.6), при отрицательном гамильтониане $\mathcal{H}_q < 0$ можно сделать определенный вывод о схлопывании не только эффективного поперечного размера (3.14a), но и полного эффективного размера лазерного импульса (3.14b) при его распространении в нелинейной среде.

Для более детального понимания эволюции волнового пакета в нелинейной среде обратимся к *методу Уизема (Whitham's method)* [119, 192], чтобы найти приближенное решение уравнения (3.12). Суть метода состоит в поиске решений для заданного класса функций $\Psi = f(\mathbf{r}; \boldsymbol{\alpha}(z))$, где набор параметров $\boldsymbol{\alpha}(z)$ зависит от эволюционной переменной и определяется из решений соответствующей системы дифференциальных уравнений. Данная система уравнений находится из требования минимизации функционала действия $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}[\Psi] = \iint \mathcal{L}(\Psi, \partial_z \Psi, \nabla \Psi) dz d\mathbf{r} = \int \tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha}\ , \partial_z \boldsymbol{\alpha}) dz \tag{3.15}$$

В результате «укороченный» лагранжиан

$$\tilde{\mathcal{L}} \equiv \int \mathcal{L} \left[f(\mathbf{r}; \boldsymbol{\alpha}), \dot{\alpha}_i \frac{\partial f(\mathbf{r}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i}, \nabla f(\mathbf{r}; \boldsymbol{\alpha}) \right] d\mathbf{r} \tag{3.16}$$

дает систему уравнений обычным образом:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \alpha_i} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\alpha}_i} = 0 \ , \tag{3.17}$$

где $\dot{\alpha}_i = \partial_z \alpha_i$. Важно отметить, что основная сложность данного метода состоит в выборе класса функций. Если он выбран неудачно, то и полученное приближенное решение будет мало похоже на истинное решение исходного уравнения.

3.2.1 Безаберационной приближение

Применим теперь *метод Уизема* для уравнения (3.12). Будем искать решение в классе гауссовых функций в так называемом безаберрационном приближении

$$\Psi = \sqrt{\frac{\mathcal{I}_q}{\pi^{3/2} a_\perp^2 a_{||}}} \exp\left[-\frac{(x^2+y^2)}{2a_\perp^2} - \frac{\tau^2}{2a_{||}^2} - \frac{i\alpha(x^2+y^2)}{2} - \frac{i\beta\tau^2}{2} \right] , \tag{3.18}$$

где $a_\perp(z)$, $a_{||}(z)$, $\alpha(z)$, $\beta(z)$ – параметры функции, которые зависят от эволюционной переменной z. Гауссов профиль решения (3.18) хорош тем, что он хорошо локализован и не имеет сингулярности в центре. Поиск решения в виде гауссова волнового пакета (3.18) с переменной шириной и амплитудой называют безаберрационным приближением.

Подставляя решение (3.18) в функционал действия $\mathcal{S}[\Psi]$ (3.15)

$$\mathcal{S}[\Psi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{i}{2}\left(\Psi^\star \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \Psi \frac{\partial \Psi^\star}{\partial z} \right) - \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right|^2 - |\nabla_\perp \Psi|^2 + \frac{1}{2}|\Psi|^4 \right] dz d\tau dx dy , \tag{3.19}$$

получаем «укороченный» лагранжиан $\tilde{\mathcal{L}}$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{I}_q}{4}\left(2a_\perp^2 \frac{d\alpha}{dz} + a_{||}^2 \frac{d\beta}{dz} \right) - \frac{\mathcal{I}_q}{2a_{||}^2}\left(1 + \beta^2 a_{||}^4\right) - \frac{\mathcal{I}_q}{a_\perp^2}\left(1 + \alpha^2 a_\perp^4\right) + \frac{\mathcal{I}_q^2}{4\sqrt{2}\pi^{3/2} a_\perp^2 a_{||}} . \tag{3.20}$$

Варьирование по переменным

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \sigma_i} - \frac{d}{dz}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\sigma}_i} = 0 , \quad \sigma = \{a_\perp, a_{||}, \alpha, \beta\} \tag{3.21}$$

дает следующие уравнения:

- из варьирования по α:

$$\alpha = -\frac{1}{2a_\perp}\frac{da_\perp}{dz} \tag{3.22a}$$

- из варьирования по β:

$$\beta = -\frac{1}{2a_{||}}\frac{da_{||}}{dz} \tag{3.22b}$$

- из варьирования по $a_\perp$:

$$\frac{d^2 a_\perp}{dz^2} = \frac{4}{a_\perp^3} - \frac{\mathcal{I}_q}{\sqrt{2}\pi^{3/2} a_\perp^3 a_{||}} \tag{3.22c}$$

- из варьирования по $a_{||}$:

$$\frac{d^2 a_{||}}{dz^2} = \frac{4}{a_{||}^3} - \frac{\mathcal{I}_q}{\sqrt{2}\pi^{3/2} a_\perp^2 a_{||}^2} \tag{3.22d}$$

Как видно из уравнений (3.22c-3.22d), уменьшение поперечного $a_{\perp}$ и продольного $a_{||}$ масштабов лазерного импульса в процессе самофокусировки излучения будет иметь место в случае, когда начальная длительность пакета $a_{||}(0)$ и начальный размер волнового пучка $a_{\perp}(0)$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2}a_{\perp}^{2}(0)}{\mathcal{I}_q} \ll a_{||}(0) \ll \frac{\mathcal{I}_q}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \ . \tag{3.23}$$

В случае большого отличия в размерах ($a_{\perp} \ll a_{||}$), как следует из уравнений, полное сжатие будет происходить только по поперечной координате. При этом в случае, если в начальный момент начальные размеры не сильно отличаются, в процессе нелинейной динамики размеры по двум координатам будут выравниваться [28]. Случай, когда продольный и поперечный масштабы совпадают ($a_{\perp} = a_{||}$), был исследован в работах (см. литературу в работе [113]).

Далее рассмотрим наиболее интересный частный случай, когда в продольном направлении задан шредингеровский солитон с продольным масштабом $a_{||(s)}$ много меньшим поперечного ($a_{||(s)} \ll a_{\perp}$), для которого выполнено следующие соотношение

$$\frac{d^2 a_{||(s)}}{dz^2} = 0 \ . \tag{3.24}$$

В этом случае, как следует из уравнения (3.22c), при распространении лазерного импульса в нелинейной среде в процессе самофокусировки пучка будет иметь место адиабатическое уменьшение длительности солитона $a_{||(s)}$

$$\frac{d^2 a_{\perp}}{dz^2} = \frac{4}{a_{\perp}^3} - \frac{\mathcal{I}_q^2}{8\pi^3 a_{\perp}^5} \ , \tag{3.25a}$$

$$a_{||(s)} = \frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2}a_{\perp}^{2}}{\mathcal{I}_q} \ . \tag{3.25b}$$

Как следует из уравнения (3.25b), длительность пакета пропорциональна квадрату размера пучка ($a_{||(s)} \propto a_{\perp}^2$). Отметим, что для вытянутых распределений волнового пакета ($a_{||(s)} \ll a_{\perp}$) условие для самофокусировки автоматически выполнено (правая часть уравнения (3.25a) должна быть меньше нуля), поскольку второе слагаемое в уравнении (3.25a), отвечающее за нелинейность среды, превышает первое слагаемое, ответственное за дифракцию пучка

$$\frac{a_{\perp}}{a_{||(s)}} = \frac{\mathcal{I}_q}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}a_{\perp}} \gg 1 \ , \qquad \frac{\mathcal{I}_q^2}{8\pi^3 a_{\perp}^5} = \frac{4}{a_{\perp}^3}\left(\frac{a_{\perp}}{a_{||(s)}}\right)^2 \gg \frac{4}{a_{\perp}^3} \ . \tag{3.26}$$

Поэтому в дальнейшем пренебрежем слагаемым, ответственным за линейную дифракцию пучка (правое первое слагаемое в уравнении (3.25a)).

Далее найдем законы изменения продольного $a_{||(s)}(z)$ и поперечного $a_{\perp}(z)$ масштабов волнового пакета от эволюционной переменной z. Решение уравнения (3.25a) с учетом (3.26) можно представить в квадратурах при следующих начальных условиях: $\left.\frac{da_{\perp}}{dz}\right|_{z=0} = 0$ (т.е. рассматриваем коллимированный волновой пучок), $\left. a_{\perp}\right|_{z=0} = a_{\perp o}$

$$\frac{da_{\perp}}{dz} = -\frac{\mathcal{I}_q}{4\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{1}{a_{\perp}^4} - \frac{1}{a_{\perp 0}^4}} \ . \tag{3.27}$$

Для решения данного уравнения воспользуемся тем фактом, что по мере уменьшения поперечного размера пучка ($a_{\perp} < a_{\perp o}$) второе слагаемое в уравнении (3.27) становится меньше первого и, соответственно, им можно пренебречь. В результате получаем приближенные решения для размера пучка $a_{\perp}(z)$ и длительности солитона $a_{||(s)}(z)$

$$a_{\perp}(z) \simeq a_{\perp o}\left(1 - \frac{3\mathcal{I}_q z}{4\pi^{3/2}a_{\perp o}^3}\right)^{1/3} , \tag{3.28a}$$

$$a_{||(s)}(z) \simeq a_{||(s)_o}\left(1 - \frac{3\mathcal{I}_q z}{4\pi^{3/2}a_{\perp o}^3}\right)^{2/3} , \tag{3.28b}$$

где $a_{\perp o}$ – начальный размер пучка, $a_{||(s)_o}$ – начальная длительность солитона. Важно отметить, что, как следует из выражений (3.28a), (3.28b), продольный масштаб солитона $a_{||(s)}$ всегда остается меньше поперечного размера пучка $a_{\perp}$ $[a_{\perp} \gg a_{||(s)}]$, т. е. анизотропность в распределении волнового пакета сохраняется.

Используя выражения (3.25b), (3.28b), можно получить оценку длины компрессии z_{comp}, на которой длительность солитона обратится в нуль $[a_{||(s)}(z_{comp}) = 0]$

$$z_{comp} = \frac{a_{\perp o}a_{||(s)_o}}{3\sqrt{2}} \ . \tag{3.29}$$

Далее перепишем данное выражение в размерных единицах

$$z_{comp} = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\omega_o}{\omega_\beta}a_{\perp o}\left(a_{||(s)_o}\omega_o\right) \ , \tag{3.30}$$

где последнее слагаемое $a_{||(s)_0}\omega_o$ есть ни что иное, как начальная длительность волнового пакета, измеряемая в обратных несущих частотах. Как видно из выражения (3.30), длина нелинейной среды z_{comp}, на которой длительность солитона обратится в нуль, возрастает пропорционально увеличению начальной длительности пакета $a_{||(s)_o}$ или увеличению начальному размеру пучка $a_{\perp o}$ и увеличивается с уменьшением линейной дисперсии среды ω_β.

3.2.2 Учет аберраций

Особенности режима адиабатической самокомпрессии волнового пакета можно исследовать более детально. Для этого представим решение уравнения (3.12) в следующем виде

$$\Psi(z, \boldsymbol{r}_\perp, \tau) = \frac{\mathcal{B}(z, \boldsymbol{r}_\perp)}{\pi^{1/4}\sqrt{\tau_p}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\tau_p^2}\right) , \tag{3.31}$$

где мы явно выделили временную зависимость импульса с характерным масштабом τ_p. Подставляя (3.31) в функционал действия (3.19), получаем «укороченный» лагранжиан $\tilde{\mathcal{L}}$ для изменения поперечной структуры волнового поля $\mathcal{B}(z, \boldsymbol{r}_\perp)$ (3.31)

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{i}{2}\left[\mathcal{B}^\star\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} - \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{B}^\star}{\partial z}\right] - \frac{|\mathcal{B}|^2}{2\tau_p^2} - |\nabla_\perp\mathcal{B}|^2 + \frac{|\mathcal{B}|^4}{2\sqrt{2}\tau_p} . \tag{3.32}$$

Варьируя «укороченный» лагранжиан $\tilde{\mathcal{L}}$ по переменной τ_p, получаем выражение для длительности лазерного импульса

$$\tau_p(z, r_\perp) = \frac{2\sqrt{2}}{|\mathcal{B}(z, \boldsymbol{r}_\perp)|^2} . \tag{3.33}$$

Данное выражение определяет локально длительность пакета в каждой точке $\boldsymbol{r}_\perp$ через значение интенсивности $|\mathcal{B}|^2$. В результате, подставляя выражение (3.33) в уравнение (3.32), можно получить «укороченный» лагранжиан

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{i}{2}\left[\mathcal{B}^\star\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} - \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{B}^\star}{\partial z}\right] - |\nabla_\perp\mathcal{B}|^2 + \frac{|\mathcal{B}|^6}{16} \tag{3.34}$$

варьируя который по $\mathcal{B}^\star$ получаем окончательное уравнение, описывающее эволюцию поперечной структуры пучка

$$i\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} + \Delta_\perp\mathcal{B} + \frac{3}{16}|\mathcal{B}|^4\mathcal{B} = 0 . \tag{3.35}$$

Таким образом, зная поведение зависимости интенсивности $|\mathcal{B}|^2$, можно с помощью выражения (3.33) определить характерную длительность лазерного импульса τ_p для искомого решения (3.31).

Отметим, что уравнение (3.35) отличается от стандартного нелинейного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} + \Delta_\perp\mathcal{B} + |\mathcal{B}|^2\mathcal{B} = 0 , \tag{3.36}$$

описывающего процесс самофокусировки пучка в двумерной задаче, более высокой степенью у нелинейности. Хорошо известно, что в рамках уравнения (3.36) самофокусировка пучка имеет место в случае, когда мощность $\mathcal{P} = \iint |\mathcal{B}|^2 dxdy$ превышает критическое значение P_{cr} [266], что соответствует в безразмерных переменных

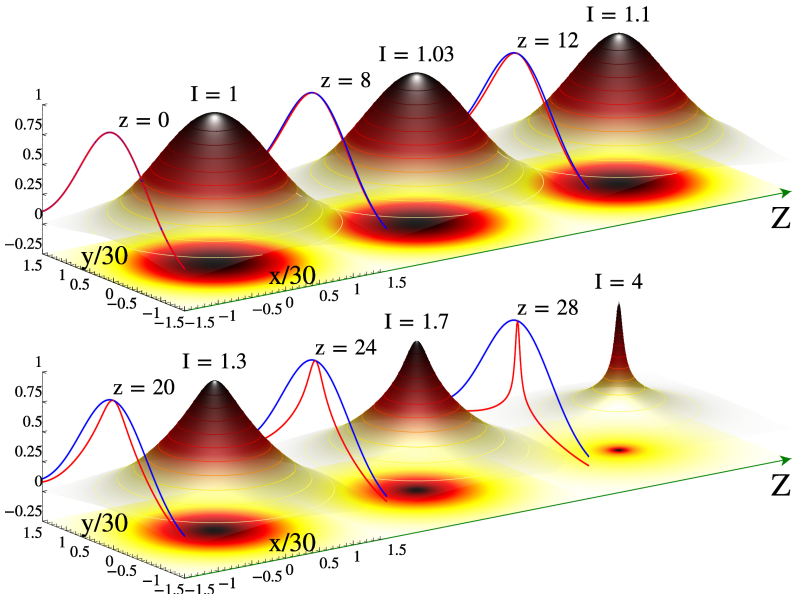


Рис. 3.2: Эволюция интенсивности волнового поля $\mathcal{B} = 0.75 \exp\left[-\dfrac{(x^2+y^2)}{1800}\right]$. На рисунке синей линией представлено начальное распределение интенсивности в сечении $x = 0$, а красной линией – текущее распределение интенсивности в сечении $x = 0$. Здесь интенсивность поля нормирована на максимальное значение.

значению $P_{cr} = 4\pi$. Т.е. критическая мощность не зависит от масштаба пучка, а определяется только свойствами среды.

Для определения порога начала самофокусировки пучка в рамках уравнения (3.35) обратимся опять к *методу к Уизема* с тестовой структурой

$$\mathcal{B}(z,x,y) = \frac{\sqrt{\mathcal{P}}}{\sqrt{\pi}a} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{i\alpha}{2}(x^2+y^2)\right] , \tag{3.37}$$

где a – размер пучка. Подставляя эту структуру в лагранжиан $\tilde{\mathcal{L}}$ (3.34) и интегрируя по пространственным координатам (x,y), а затем варьируя по параметрам a и α, получаем уравнение типа (3.25а) для размера пучка a

$$\frac{d^2a}{dz^2} = \frac{4}{a^3} - \frac{\mathcal{P}^2}{6\pi^2 a^5} . \tag{3.38}$$

Как следует из данного уравнения, самофокусировка пучка в данном случае будет иметь место при

$$\mathcal{P} > \mathcal{P}_{cr} = \sqrt{24}\pi a , \tag{3.39}$$

т.е. критическая мощность $\mathcal{P}_{cr}$ в данном случае принципиально зависит от первоначального размера пучка a в отличие от случая, описываемого уравнением (3.36).

Пучок с меньшим размером a_1 имеет порог для самофокусировки ниже, чем для пучка с большим размером a_2 ($a_2 > a_1$). Следовательно, самофокусировка пучка по-разному протекает в зависимости от степени у нелинейности. Отметим, что уравнения (3.25а) и (3.38) структурно совпадают.

Были проведены дополнительно численные исследования уравнения (3.35), которые количественно подтвердили порог для самофокусировки для данного случая (3.39). В качестве примера на рисунке 3.2 представлена характерная динамика интенсивности поля $|\mathcal{B}|^2$, в случае, когда на вход нелиненой среды задан гауссов пучок

$$\mathcal{B} = 0.75 \exp\left[-\frac{(x^2+y^2)}{1800}\right] . \tag{3.40}$$

Как видно из рисунка 3.2, в процессе самофокусировки пучка распределение поля становится двухмасштабным ($z = 28$). Следовательно, рассмотренный нами ранее (см. раздел 3.2.1) механизм адиабатического уменьшения длительности шредингеровского солитона в процессе самофокусировки пучка (3.25) следует рассматривать только там, где поперечное распределение пучка является одномасштабным, т.е. можно рассматривать только в приосевой области волнового пучка. Для определения характерной эффективной длительности волнового пакета τ_p с учетом имеющихся аббераций можно воспользоваться формулой (3.33), которая связывает локально длительность сжатого импульса со значением максимальной интенсивности. Из рисунка 3.2 видно, что интенсивность волнового поля при $z = 28$ увеличилась в четыре раза, следовательно, длительность скомпрессированного волнового пакета уменьшилась в соответствии с данной формулой (3.33) также в четыре раза.

3.3 Предельные возможности самокомпрессии лазерного импульса в процессе самофокусировки излучения

Как показал качественный анализ в предыдущем разделе (см. раздел 3.2) на основе нелинейного уравнения Шредингера (3.12), шредингеровский солитон по мере распространения в нелинейной среде будет испытывать адиабатическое сжатие в продольном направлении вплоть до нулевой длительности благодаря процессу самофокусировки пучка (3.25), в связи с чем возникает резонный вопрос о предельном сжатии лазерного импульса. Очевидно, что по мере уменьшения длительности

волнового пакета начнут сказываться дополнительные эффекты [зависимость групповой скорости пакета от амплитуды поля $i|\Psi|^2\dfrac{\partial\Psi}{\partial\tau}$, дисперсия групповой скорости более высокого порядка $\sum\limits_n \dfrac{i^n}{n!}\dfrac{\partial^n k(\omega)}{\partial\omega^n}\dfrac{\partial^n\Psi}{\partial\tau^n}$, где $k(\omega)$ – волновое число], которые могут ограничить дальнейшее укорочение импульса. В этом случае необходимо непосредственно обратиться к волновому уравнению (3.4) для исследования самокомпрессии оптического импульса. Как отмечалось нами ранее, начальные распределения, для которых $\mathcal{H}_{full} < 0$, будут также испытывать самофокусировку в поперечном направлении, поскольку для таких распределений выполнено условие для коллапса (3.6).

Для дальнейшего анализа уравнения (3.4) удобно перейти из лабораторной в систему координат, всесторонне сжимающуюся к некоторой точке ($r_\perp = 0$, $z = z_o$). Представим $\mathcal{E}(z, r_\perp, \tau)$ в виде

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{F}(\zeta, \eta, \theta)}{\rho(z)} \ , \tag{3.41}$$

где новые переменные

$$\zeta = \int \frac{dz}{\rho^2(z)} \ , \quad \eta = \frac{r_\perp}{\rho(z)} \ , \ \theta = \tau - \frac{\rho_z}{4\rho} r_\perp^2 \ , \tag{3.42}$$

ζ – новая шкала отсчета эволюционной переменной, для которой момент образования особенности унесен на бесконечность. Функция $\rho(z)$ описывает изменение поперечного размера волнового поля. Такое представление решения уравнения (3.4) одновременно учитывает два процесса: самофокусировку излучения и образование характерной «подковообразной» структуры распределения поля, определяемой переменной θ.

В результате преобразования (3.41), (3.42) приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\zeta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(|\mathcal{F}|^2\mathcal{F}\right) - \frac{\rho^3}{4}\frac{d^2\rho}{dz^2}\eta^2\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\theta}\right] + \rho^2(z)\mathcal{F} = \Delta_{\eta\eta}\mathcal{F} \ . \tag{3.43}$$

Преобразование в «коллапсирующую» систему координат позволяет, как и в случае квазимонохроматического излучения (3.12), «отделить»процесс самофокусировки в системе и свести задачу к исследованию квазиодномерной продольной эволюции импульса по переменной θ. Характерный поперечный масштаб квазиволноводной структуры в новых переменных порядка единицы.

Представим поле в приосевой области ($\eta \approx 0$) в виде

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}(\zeta, \theta) \cdot \left[1 - \frac{\eta^2}{4}\right] \ . \tag{3.44}$$

Подставляя выражение (3.44) в уравнение (3.43) и приравнивая к нулю коэффициенты перед η^0 и η^2, найдем уравнения для $\mathcal{A}$ и ρ:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial\zeta\partial\theta} + \rho^2\mathcal{A} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}) \simeq 0 \ , \tag{3.45a}$$

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} \simeq -2\frac{\langle|\mathcal{A}|^4\rangle}{\rho^3} \ . \tag{3.45b}$$

При получении уравнения (3.45b) проведено усреднение $|\mathcal{A}|^4$ по форме импульса

$$\langle|\mathcal{A}|^4\rangle = \frac{1}{\mathcal{I}_{full}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\mathcal{A}|^4 d\theta \ , \tag{3.46}$$

так как характерный масштаб поля $\rho(z)$ является по предположению функцией только от эволюционной переменной z. Выражение (3.45b) справедливо, когда порог для самофокусировки волнового пакета значительно превышен. Как отмечалось нами ранее в предыдущем разделе (см. раздел 3.2.1), для анизотропных распределений волнового пакета порог самофокусировки значительно превышен (3.26).

Видно, что уравнение (3.45a), описывающее динамику поля в приосевой области ($\eta \approx 0$), совпадает с уравнением (3.4) при $\Delta_\perp \equiv 0$ (в отсутствие пространственных эффектов). Второе слагаемое в уравнении (3.45a) описывает ослабление роли аномальной дисперсии среды по мере уменьшения поперечного размера пучка $\rho(z)$. Как отмечалось в конце раздела 3.1, в рамках уравнения (3.45a) при постоянном значении ρ существует семейство солитонных решений (3.8-3.9) [более подробно смотри Главу 1], которые по форме близки к шредингеровскому солитону (3.10), но важным отличием этих решений является наличие сильной частотной модуляции в солитоне при небольшой длительности (3.11).

Далее учтем, что в новых переменных функция $\rho(\zeta)$ плавно меняется на дисперсионной $L_{dis} \propto \dfrac{\varpi^2}{\Delta\omega\rho^2}$ и нелинейной $L_{nl} \propto \dfrac{\Delta\omega}{\varpi^2\mathcal{A}_{max}^2}$ длинах, где ϖ – характерная, например, центральная частота в спектре импульса, $\Delta\omega$ – его спектральная ширина, а $\mathcal{A}_{max}$ – максимальная амплитуда лазерного импульса. Поэтому можно предположить, что параметры солитона будут плавно изменяться в процессе самофокусировки лазерного импульса. Следовательно, будет иметь место адиабатическое увеличение амплитуды солитона $\mathcal{E}(z) \propto \dfrac{\mathcal{A}}{\rho(z)}$ по мере уменьшения поперечного размера пучка $\rho(z)$ (3.45b). Решение уравнения (3.45a) можно записать в следующем виде в

зависимости от текущей длительности лазерного импульса $\tau_p \propto \dfrac{1}{\delta}$:

$$\mathcal{A}(\zeta,\theta) \simeq \frac{\sqrt{2}\rho\delta}{\cosh(\delta\theta)} e^{i\varphi}, \quad \frac{d\varphi}{d\theta} \simeq 0, \quad \text{при } \delta \ll 1 \ , \tag{3.47a}$$

$$\mathcal{A}(\zeta,\theta) \simeq \frac{\sqrt{2}\rho\delta}{\cosh(\delta\theta)} e^{i\varphi}, \quad \frac{d\varphi}{d\theta} \simeq \frac{3}{2}|\mathcal{A}|^2 \ , \quad \text{при } \delta \gtrsim 0.1 \ . \tag{3.47b}$$

С учетом сохранения полного «числа квантов»

$$\mathcal{I}_{full} = 4\pi\delta\rho^2 \tag{3.48}$$

удобно переписать решения (3.47) через этот интеграл задачи $\mathcal{I}_{full}$. Тем самым удается избавиться от параметра δ, который теперь связан через энергию в лазерном импульсе $\mathcal{I}_{full}$ и через размер волнового пучка ρ. В результате получаем окончательную систему уравнений для динамики волнового пакета

$$\mathcal{A}(\zeta,\theta) \simeq \frac{\mathcal{I}_{full}}{2^{3/2}\pi\rho} \frac{\exp(i\varphi)}{\cosh\left(\dfrac{\mathcal{I}_{full}}{4\pi\rho^2}\theta\right)} \ , \tag{3.49a}$$

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} \simeq -\frac{\alpha\mathcal{I}_{full}^2}{8\pi^3\rho^5} \ , \tag{3.49b}$$

где α – число порядка единицы. Причем частотная модуляция в солитоне $\varphi(\theta)$ в зависимости от текущей длительности солитона

$$\tau_p \propto \frac{4\pi\rho^2}{\mathcal{I}_{full}} \tag{3.50}$$

подчиняется выражению (3.47).

Из выражения (3.49a) видно, что с уменьшением поперечного размера пучка ρ происходит уменьшение длительности солитона τ_p в приосевой области ($\eta \approx 0$). Таким образом, благодаря процессу самофокусировки пучка, длительность солитона будет адиабатически уменьшаться. Кроме того, скорость солитона $\dfrac{1}{\gamma} \simeq \dfrac{\omega^2}{\rho^2}$ будет стремиться к величине $\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_o}}$. Как видно, уравнение (3.49b) для поперечного размера пучка ρ с точностью до коэффициента совпадает с уравнением[16] (3.25a).

Причем, если на входе был задан шредингеровский солитон [с большой длительностью ($\delta \ll 1$) и соответственно без частотной модуляции $\varphi(\theta) \simeq 0$], то по мере уменьшения длительности в импульсе появится сильная частотная модуляция

[16]Как отмечалось ранее (см. раздел 3.2.1), порог для самофокусировки волнового пакета значительно превышен.

$\varphi(\theta) \simeq \frac{3}{2}\int\limits_{-\infty}^{\theta} |\mathcal{A}(\theta')|^2 d\theta'$, которая проявится, в первую очередь, в спектре волнового пакета (см. рисунок 3.1**(d)**). Важно отметить, что, поскольку в уравнении (3.45a) важной особенностью рассматриваемых волновых солитонов является полуограниченный спектр их допустимых решений, т. е. наличие граничного решения $0 \leq \delta \leq \delta_{cr} = \sqrt{\frac{1}{8}}$, то максимальная степень компрессии будет определяться предельным солитоном, длительность которого соизмерима с периодом поля.

В процессе дальнейшей эволюции волнового пакета вклад дисперсии будет ослабевать ($\rho \to 0$), что приведет к формированию ударной волны [18, 19] (см. Главу 2), поскольку в этом случае аномальная дисперсия среды не сможет скомпенсировать нелинейность среды. Тогда при описании динамики лазерного импульса необходимо обратиться к следующей системе уравнений

$$\frac{\partial|\mathcal{A}|^2}{\partial\zeta} + 3|\mathcal{A}|^2\frac{\partial|\mathcal{A}|^2}{\partial\theta} \simeq 0 \ , \tag{3.51a}$$

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} \simeq -2\frac{\langle|\mathcal{A}|^2\rangle}{\rho^3} \ . \tag{3.51b}$$

При получении уравнения (3.51b) проведено усреднение $|\mathcal{A}|^2$ по длительности импульса τ_p $\left[\langle|\mathcal{A}|^2\rangle = \frac{1}{\tau_p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{A}|^2 d\theta\right]$, так как характерный масштаб поля $\rho(z)$ является по предположению функцией только z.

Во второй главе было проведено детальное исследование самофокусировки в среде без дисперсии, а также в среде с аномальной дисперсией. Было показано, что укручение продольного профиля импульса играет определяющую роль в процессе коллапса пучка. Детальное исследование показало, что длина укручения z_B импульса всегда меньше длины самофокусировки пучка z_o ($z_B < z_o$). Данный результат был также подтвержден результатами численного анализа. Численные расчеты показали наличие довольно протяженного участка в приосевой части, на которых спектр поля спадает по степенному закону $S(\omega) \propto \frac{1}{\omega}$. Это означает, что в этой области существует формирование резкого изменения волнового поля, что характерно для ударной волны. Данный результат находится в соответствии с автомодельным решением в среде без дисперсии

$$|\mathcal{E}| = \frac{1}{z_o - z}\Phi\left[\tau - \frac{r^2}{4(z_o - z)} - \frac{3\Phi^2}{z_o - z}\right] \ , \tag{3.52}$$

где Φ – произвольная функция. Таким образом, в средах без дисперсии и с аномальным законом дисперсии групповой скорости происходит образование особенно-

сти нового типа, в которой развитие градиентной катастрофы вблизи заднего фронта импульса несколько опережает коллапс волнового поля ($z_B < z_o$).

Важно отметить, что обогащение спектра вверх по спектру по степенному закону на заднем фронте импульса в процессе укручения волнового пакета может быть использовано для генерации аттосекундных импульсов. В частности, в работе [164] было проведено более детальное численное исследование и приведены параметры для экспериментальной реализации данной возможности.

Таким образом, когда в продольном направлении задано квазисолитонное распределение поля, то в процессе самофокусировки пучка длительность волнового пакета будет монотонно уменьшаться вплоть до значения, которое соответствует длительности предельного солитона с параметром $\delta \sim \delta_{cr} = \sqrt{\frac{1}{8}}$. При дальнейшем уменьшении поперечного размера пучка это приводит к формированию ударной волны, так как в этом случае аномальная дисперсия среды уже не сможет скомпенсировать нелинейность. Этим заключительный режим самокомпрессии лазерного импульса, описываемый системой уравнений (3.51), отличается от режима, который мы рассматривали на основе нелинейного уравнения Шредингера (3.12).

3.4 Исследование устойчивости лазерного импульса относительно возмущений

Ключевой идеей сжатия импульса является адиабатическое уменьшение длительности солитона в процессе самофокусировки. Начальная амплитуда солитона связана с его длительностью следующим соотношением

$$\mathcal{E}_{in} = \sqrt{2\gamma}\delta_o = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\frac{1}{\tau_p^{in}} \ , \tag{3.53}$$

где γ – скорость солитона, $\tau_p^{in} = \dfrac{1}{2\delta_o}$ – начальная длительность, δ_o – начальный параметр солитона. Полная энергия в пространственно-ограниченном квазисолитонном распределении поля определяется выражением (3.48). Для практической реализации предложенного квазисолитонного метода самокомпрессии импульсов интерес представляют широкоапертурные волновые пучки, в которых поток энергии $\mathcal{I}_s = \int |\mathcal{E}|^2 d\tau$ полностью определяется нелинейностью и дисперсии среды. В связи с этим встает важная проблема исследования устойчивости рассматриваемого нами режима компрессии волнового пакета по отношению к различным пространственно-временным

возмущениям исходной структуры. Отметим, что модуляционная неустойчивость может быть чисто временной (приводящей к формированию последовательности импульсов) или же чисто пространственной (ведущей к филаментации пучка). Однако в данном случае, когда два фактора одновременно присутствуют, то неустойчивость приобретает пространственно-временной характер.

Исследование пространственной модуляционной неустойчивости применительно к двумерной задаче (3.36), описывающей распространение пучка непрерывного излучения в нелинейной среде, было впервые выполнено Беспаловым и Талановым [218]. О характере развития филаментационной неустойчивости непрерывного излучения обычно делают вывод на основе анализа инкремента неустойчивости плоской волны. Было продемонстрировано, что плоская волна

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_o + v)e^{i\mathcal{B}_o^2 z} \tag{3.54}$$

неустойчива относительно поперечных возмущений волнового фронта $v \propto \exp(ipz - i\kappa_{\perp} r_{\perp})$ в интервале $0 < \kappa_{\perp} \leq \kappa_{cr} = \sqrt{2}\mathcal{B}_o$. Эти возмущения v экспоненциально нарастают $\exp(\Gamma z)$ при распространении волнового пучка по z с инкрементом

$$\Gamma^2 = -p^2 = \kappa_{\perp}^2(2\mathcal{B}_o^2 - \kappa_{\perp}^2) \ . \tag{3.55}$$

Инкремент Γ имеет максимальное значение $\Gamma_{max} = \mathcal{B}_o^2$ при $\kappa_{\perp m} = \mathcal{B}_o$. Мощность в отдельной нити с точностью до коэффициента порядка единицы равна критической мощности для стационарной самофокусировки [47,266]. Таким образом, в двумерном случае это свидетельствует о расслоении волнового поля на набор пучков с мощностью порядка критической для самофокусировки.

Рассмотренный выше линейный анализ устойчивости в работе [218] относится к неустойчивости однородной плоской волны. Захаров в работе [201] провел исследование устойчивости неоднородных волновых структур относительно поперечных возмущений в рамках уравнения (3.36). В частности, по пространственной координате x задавалось точное солитонное решение в одномерном случае

$$\mathcal{B}_{1D} = \frac{\sqrt{2}\beta}{\cosh(\beta x)} \ , \tag{3.56}$$

а по координате y задавались возмущения $\propto \exp(i\kappa_{\perp} y + i\beta^2 z + ipz)$. Для анализа устойчивости такого солитона по отношению к поперечным возмущениям искали решение уравнения (3.36) в виде

$$\mathcal{B}(x, y, z) = (\mathcal{B}_{1D} + u + iv)\exp(ipz + i\beta^2 z + i\kappa_{\perp} y) \ , \tag{3.57}$$

где $u, v \ll \mathcal{B}_{1D}$. Как показал анализ в длинноволновом приближении [201], солитонное решение (3.56) неустойчиво относительно возмущений при $0 \leq \kappa_{\perp} \leq \sqrt{2}\beta$. Причем максимальный инкремент неустойчивости $\Gamma = -p^2$ достигает максимального значения $\Gamma_m \simeq \beta^2$ при $\kappa_{\perp} \simeq \beta$. Из этого видно, что инкремент неустойчивости такой же, как в задаче неустойчивости однородной плоской волны. Следовательно, сделанный вывод о расслоение волнового поля на набор пучков с мощностью порядка критической для самофокусировки в двумерном случае сохраняется и для неоднородных волновых структур, имеющих солитонное распределение по одной из координат.

Отметим, что более общее рассмотрение на основе нелинейного уравнения Шредингера с учетом временной дисперсии (3.12) так же приводит к существованию неустойчивости плоской волны $\Psi = (\Psi_o + v)e^{i\Psi_o^2 z}$ относительно возмущений $v \propto \exp(\Gamma z - i\Omega\tau - i\kappa_{\perp} r_{\perp})$ с инкрементом [254]

$$\Gamma = \pm\sqrt{(\Omega^2 + \kappa_{\perp}^2)(2\Psi_o^2 - \Omega^2 - \kappa_{\perp}^2)} \; . \tag{3.58}$$

В случае частоты модуляции Ω, равной нулю ($\Omega = 0$), выражение (3.58) описывает неустойчивость плоской волны, последствия развития которой обсуждались выше. Для $\kappa_{\perp} = 0$ соответствующая неустойчивость известна как модуляционная. В общем неустойчивость имеет пространственно-временной характер.

Далее рассмотрим случай, когда длительность лазерного импульса относительно небольшая, так что для адекватного описания динамики волнового пакета в рамках квазимонохроматического приближения необходимо учитывать слагаемое, ответственное за зависимость групповой скорости пакета от амплитуды поля

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} + \Delta_{\perp}\Psi + |\Psi|^2\Psi - 2i|\Psi|^2\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = 0 \; , \tag{3.59}$$

где Ψ – медленно меняющаяся амплитуда волнового пакета. Здесь второе слагаемое описывает аномальную дисперсию среды, третье слагаемое – дифракцию пучка, четвертое слагаемое – самовоздействие в среде с кубичной нелинейностью, пятое слагаемое ответственно за укручение огибающей импульса. Для анализа устойчивости плоской волны относительно возмущений будем искать решение в виде

$$\Psi(z, \tau, r_{\perp}) = [u(z) + v(z, \tau, r_{\perp})]e^{i\phi(z,\tau)} \; , v \ll u \; . \tag{3.60}$$

Подставляя выражение (3.60) в уравнение (3.59), получаем в нулевом приближении по v, что $\phi = u_o^2 z + 2u_o^2\tau$, где u_o – амплитуда падающей волны. В результате линеаризованное уравнение в первом порядке малости по v примет вид:

$$i\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2} + \Delta_{\perp}v + u_o^2(v + v^{\star}) + 2iu_o^2\frac{\partial v}{\partial\tau} = 0 \; . \tag{3.61}$$

Данное уравнение отличается от обычного уравнения для анализа устойчивости плоской волны [218] наличием последнего слагаемого и связано с учетом нелинейной дисперсии среды. Будем искать решение уравнения в виде $v = a + ib$, где $a, b \propto \exp(\Gamma z + i\Omega\tau + i\kappa_\perp r_\perp)$. В результате получаем систему двух однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, в случае когда Ω и $\kappa_\perp$ удовлетворяют следующему дисперсионному соотношению

$$\Gamma = -2iu_o^2\Omega \pm \sqrt{(\Omega^2 + \kappa_\perp)(2u_o^2 - \Omega^2 - \kappa_\perp^2)} \ . \tag{3.62}$$

В результате получаем, что в системе координат, связанной с импульсом $\tau = \omega_o(t + z/v_{gr})$, в структуре возмущений $a, b \propto \exp[\Gamma(\Omega, \kappa_\perp) + i\Omega\tau + i\kappa_\perp r_\perp]$ наряду с экспоненциальным возрастанием возмущений при $0 \leq \sqrt{\Omega^2 + \kappa_\perp^2} \leq \sqrt{2}u_o$ (которое описывается вторым слагаемым в выражении (3.62)) имеет место снос возмущений v относительно накачки u со скоростью, определяемой мнимой частью инкремента Γ (3.62). Это легко увидеть, если рассмотреть зависимость v от времени

$$v \propto \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}(\Omega) \exp(-2iu_o^2\Omega z - i\Omega\tau) d\Omega \propto f(\tau + 2u_o^2 z) \ , \tag{3.63}$$

где $\mathcal{S}(\Omega)$ – спектр возмущений. Как видно из выражения (3.63), возмущения смещаются со скоростью $2u_o^2$. Таким образом, однородное решение остается неустойчивым. Однако тип неустойчивости меняется – она становится конвективной. Следовательно, для лазерных импульсов с длительностью меньше некоторого значения $\tau_p < \tau_{cr}$ филаментационная неустойчивость должна быть подавлена.

Далее проведем оценку длительности волнового пакета τ_{cr}, когда растущие возмущения стабилизируются в результате выноса их на заднюю часть импульса, так как в задней части пакета будет отсутствовать возможность их дальнейшего усиления. Как видно из выражения (3.62), максимальный инкремент $\Gamma_{max} = u_o^2$. Для оценки длительности импульса τ_{cr} в качестве характерной трассы рассмотрим длину, на которой возмущения в отсутствии сноса должны были бы усилиться в e^{15} раз, т. е. $z_\star = \dfrac{15}{\Gamma_{max}}$. Следовательно, неустойчивость стабилизируется в случае, когда возмущения v на длине $z = z_\star$ сместятся на половину длительности волнового пакета, т.е.

$$2u_o^2 z_\star > \frac{\tau_{cr}}{2} \ . \tag{3.64}$$

Следовательно, для длительности лазерного импульса τ_p

$$\tau_p < \tau_{cr} = 60 \tag{3.65}$$

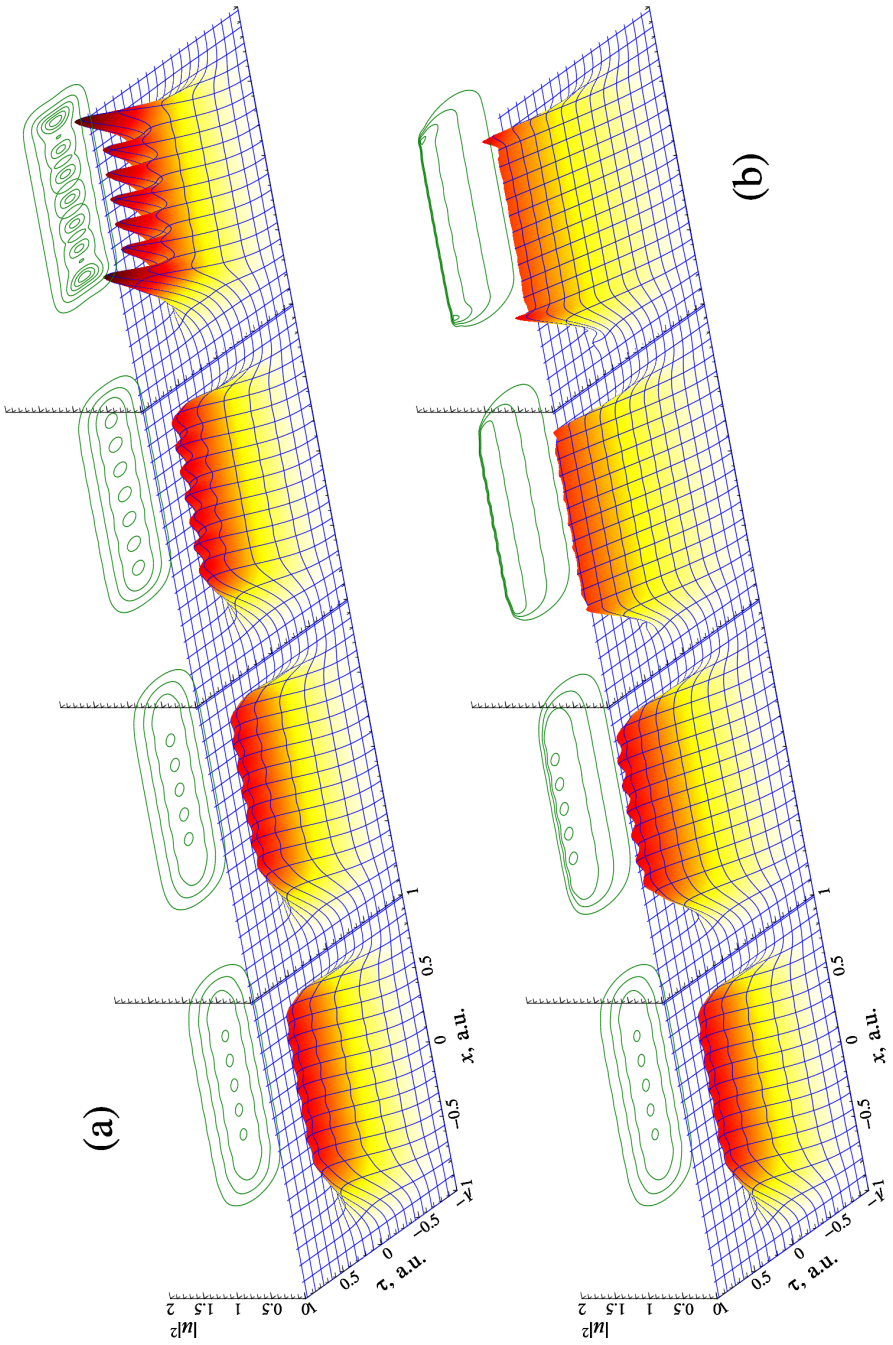


Рис. 3.3: Динамика интенсивности волнового пакета $|\Psi(z,x,\tau)|^2$ в рамках уравнения (3.59) для двух разных случаев: **(a)** в отсутствии слагаемого, ответственного за нелинейную дисперсию; **(b)** с учетом слагаемого, ответственного за нелинейную дисперсию среды. Здесь зеленой линией представлены линии уровни. На вход нелинейной среды задавался импульс следующей формы $\Psi(z=0,x,\tau) = \Psi_o \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_x}\right)^8\right]$

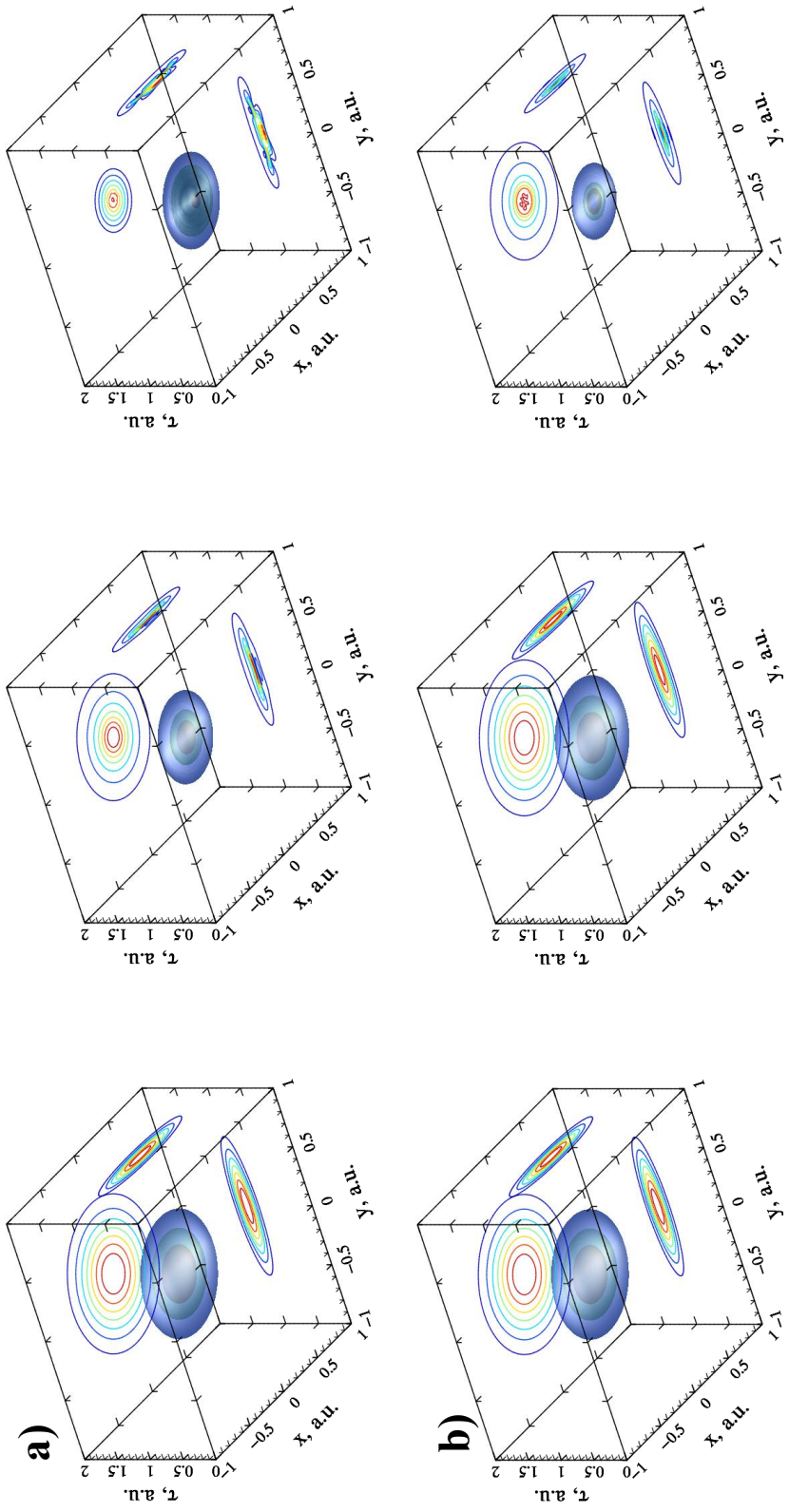


Рис. 3.4: Динамика циркулярно поляризованного солитона $|\mathcal{E}(z,x,y,\tau)|$ в рамках уравнения (3.4) для двух разных начальных длительностей лазерного импульса в процессе самофокусировки излучения: **(a)** $\tau_p = 10 \cdot T_o$, **(b)** $\tau_p = 30 \cdot T_o$, где T_o – период поля.

неустойчивость плоской волны относительно пространственных возмущений должна отсутствовать. В размерных единицах это соответствует десяти периодам поля. Отметим, что неустойчивость по продольной координате будет автоматически отсутствовать, поскольку по ней мы задаем солитонное решение.

Для подтверждения результатов качественного анализа обратимся далее к результатам численного моделирования на основе уравнения (3.59). Поскольку нас интересует задача структурной устойчивости распределения относительно филаментационной неустойчивости, то для упрощения анализа ограничимся вначале случаем (2D+1), так как результат слабо зависит от размерности задачи. На рисунке 3.3 представлены результаты численного моделирования для входного распределения волнового пакета

$$\Psi(x,\tau) = \Psi_o \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_x}\right)^8\right] \tag{3.66}$$

для двух разных случаев, чтобы продемонстрировать в различие развития филаментационной неустойчивости. На рисунке 3.3**(a)** представлена эволюция интенсивности импульса $|\Psi(z,x,\tau)|^2$ в случае, когда мы пренебрегаем пятым слагаемым в уравнении (3.59), ответственным за укручение импульса. А на рисунке 3.3**(b)** для сравнения представлена эволюция импульса с учетом нелинейной дисперсии. Как следует из рисунка 3.3**(a)**, волновой пакет в поперечном направлении в результате филаментационной неустойчивости расслаивается на отдельные пучки [113]. Здесь зеленым цветом представлены линии уровни. Однако, с учетом пятого слагаемого в уравнении (3.59) происходит стабилизация данной неустойчивости. Как видно из рисунка 3.3**(b)**, неоднородности смещаются к задней части импульса и перестают нарастать. Этим рассматриваемый режим существенно отличается от эволюции лазерного импульса в рамках обычного нелинейного уравнения Шредингера (3.12).

Аналогичный процесс стабилизации филаментационной неустойчивости для лазерных импульсов с малом числом колебаний поля наблюдается также и при исследовании динамики волнового пакета в рамках исходного волнового уравнения (3.4) для (3D+1) случая. На рисунке 3.4 представлены результаты расчетов динамики лазерного импульса $|\mathcal{E}(z,x,y,\tau|$ в процессе самофокусировки излучения, когда на вход нелинейной среды по продольной координате задавался солитон для двух разных начальных длительностей: **(a)** для десяти периодов поля; **(b)** для 30 периодов поля. Как видно из рисунка 3.4, в процессе распространения лазерного импульса в нелинейной среде имеет место процесс самофокусировки пучка, который наглядно

представлен в плоскости (x, y). В то же время импульс по продольной координате сильно сжимается, как наглядно это отображено в плоскости (y, τ). Однако, как видно из рисунка 3.4**(b)**, по мере увеличения длительности волнового пакета по поперечной координате развивается филаментационная неустойчивость (см. сечение (x, y)), т.е пучок разбивается на отдельные нити, которые, как отмечалось ранее, являются асимптотической стадией неустойчивости плоской волны. Одновременно при меньшей начальной длительности волнового пакета, как следует из рисунка 3.4**(a)**, в процессе адиабатического уменьшения длительности солитона пространственная структура остается гладкой (см. сечение (x, y)). Поскольку с уменьшением длительности солитона амплитуда солитона увеличивается $\mathcal{E}_s \sim \tau_p^{-1}$, то темп самофокусировки пучка (см. рисунок 3.4) и, соответственно, темп самокомпрессии импульса увеличивается.

Таким образом, как показали результаты аналитического и численного исследования, самокомпрессия солитона в процессе самофокусировки излучения может быть устойчивой относительно филаментационной неустойчивости для волновых пакетов с длительностью короче десяти периодов колебаний поля.

3.5 Результаты численного моделирования

Как было показано в предыдущем разделе, пространственная модуляционная неустойчивость может быть подавлена и нарушение симметрии пучка, соответственно, не будет наблюдаться. Для проведения детального численного анализа самокомпрессии солитона в процессе самофокусировки пучка на основе уравнения (3.4) обратимся далее к исследованию динамики импульса для аксиально-симметричных пучков.

В качестве начального распределения лазерного импульса будем задавать в продольном направлении распределение солитонного типа, а в поперечном – гауссово распределение с характерным масштабом a

$$\mathcal{E}(\tau, r) = \mathcal{N}\sqrt{\gamma}\mathcal{U}(\tau)\exp\left[i\tau + i\varphi(\tau) - \frac{r^2}{2a^2}\right] , \tag{3.67}$$

где γ - скорость солитона, $\mathcal{U}(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ есть амплитудное и фазовое распределения солитона, которые находятся при решении системы уравнений (3.9). Здесь параметр $\mathcal{N}$ характеризует количество солитонов, на которые разобьется на асимптотической

стадии начальное распределение лазерного импульса в рамках одномерной задачи ($\Delta_{\perp} \equiv 0$).

3.5.1 Односолитонная динамика ($\mathcal{N} \simeq 1$)

На рисунке 3.5 представлены результаты численного моделирования уравнения (3.4), описывающего эволюции начального распределения поля солитонного типа по продольной координате (3.67) с $\mathcal{N} = 1$, $\delta_o = 0.03$, $\omega_s = 1$, $a = 400$. Длительность волнового пакета в данном случае соответствует десяти периодам колебаний поля ($\tau_p^{in} = 10 \cdot T_o$, где T_o – период поля). Важно отметить, что на входе нелинейной среды задано распределение лазерного импульса, у которого продольный масштаб много меньше поперечного. Другими словами, так как уравнение (3.4) безразмерно, это соответствует тому, что дисперсионная длина волнового пакета много меньше дифракционной. Из рисунка 3.5**(a)** видно, что самофокусировка пучка в поперечном направлении сопровождается монотонным уменьшением длительности солитона. Эволюция поля в импульсе на оси пучка $\mathcal{E}_x(r = 0) = \mathcal{R}\mathrm{e}(\mathcal{E})$ представлена синей линией. Как видно из рисунка, размер пучка значительно уменьшился. Для дальнейшего согласования результатов численного моделирования с приведенным выше качественным анализом задачи удобно определить размер пучка $\rho_{\perp}$ на основе интегральной характеристики, вычисленной с помощью формулы (3.7). Анализ показал, что средний размер пучка $\sqrt{\langle \rho_{\perp}^2 \rangle}$ уменьшился в 3 раза с $\sqrt{\langle \rho_{\perp}^2 \rangle} = 400$ до $\sqrt{\langle \rho_{\perp}^2 \rangle} \simeq 133$. Причем интенсивность в сжатом импульсе увеличилась в 230 раз.

На рисунке 3.5**(b)** пунктирной линией представлено начальное распределение огибающей импульса $|\mathcal{E}| = \sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}$ на оси пучка и распределение поля в сжатом импульсе для $\mathcal{E}_x = \mathcal{R}\mathrm{e}(\mathcal{E})$ на выходе нелинейной среды $z = 2700$. Из рисунка видно, что лазерный импульс по уровню половины интенсивности сжался в 14 раз с $\tau_p^{in} = 10 \cdot T_o$ до $\tau_p^{out} = 0.71 \cdot T_o$, что соответствует длительности чуть менее периода колебаний поля. Причем среднеквадратичная длительность импульса, вычисленная на основе момента второго порядка τ_{pulse}

$$\tau_{pulse} = \sqrt{\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} (\tau - \langle\tau\rangle)^2 |\mathcal{E}|^2 r dr d\tau}{\mathcal{I}_{full}}}\,, \tag{3.68}$$

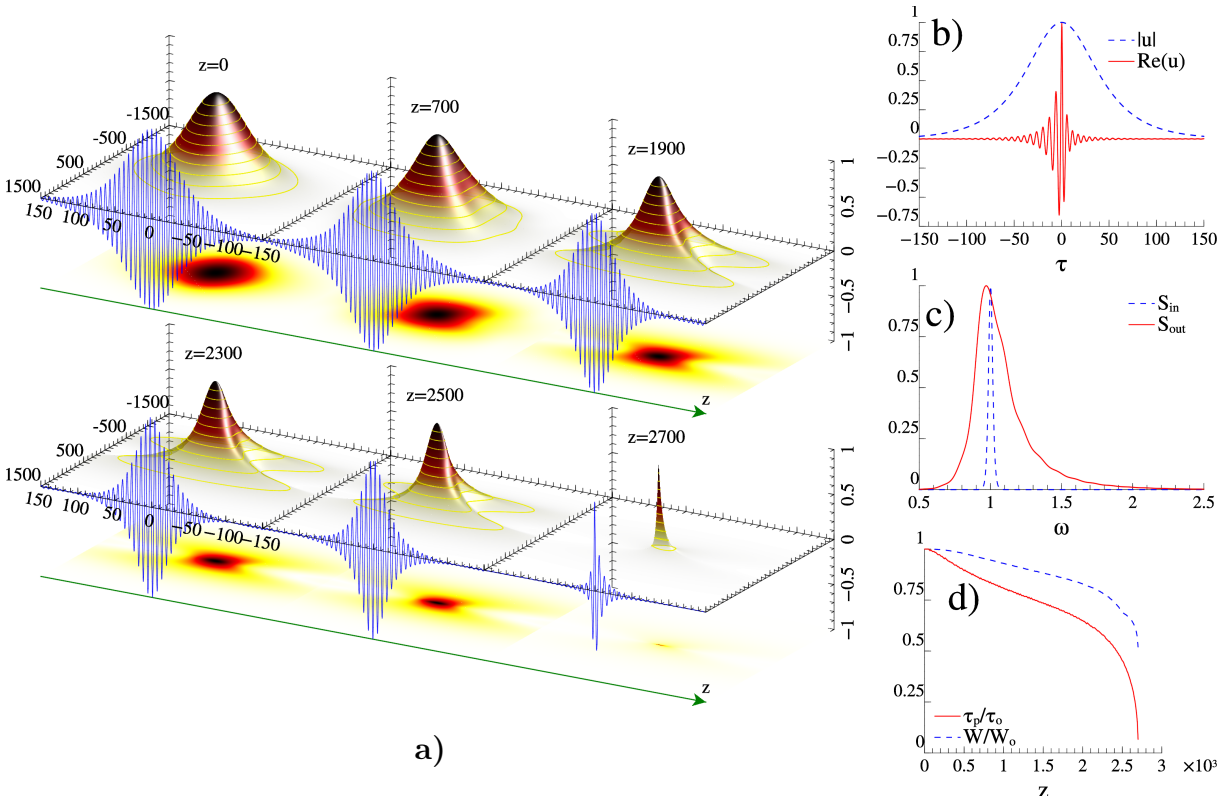


Рис. 3.5: **(a)** Динамика циркулярно поляризованного поля $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|$. В качестве начального распределения лазерного импульса по продольной координате задан волновой солитон (3.8)-(3.9) с $\delta = 0.03$, $\omega_s = 1$ с гауссовым распределением в поперечном направлении с размером $a = 400$: $\mathcal{E}(\tau,r)\Big|_{z=0} = \sqrt{\gamma}\mathcal{U}(\tau)\exp\left[i\tau + i\varphi(\tau) - \dfrac{r^2}{2a^2}\right]$. Здесь поле нормировано на максимальное значение. Синей линией представлена эволюция импульса на оси пучка ($r = 0$) для одной из поляризаций поля $\mathcal{E}_x = \mathcal{R}\mathrm{e}(\mathcal{E})$, поле нормировано на максимальное значение. **(b)** Синяя пунктирная линия – распределение огибающей поля входного лазерного импульса на оси пучка $|\mathcal{E}(\tau, r=0)| = \sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}$, красная линия – распределение поля сжатого импульса на оси пучка $\mathcal{E}_x = \mathcal{R}\mathrm{e}(\mathcal{E})$. **(c)** Синяя пунктирная линия – начальный спектр, красная линия – спектр сжатого импульса. **(d)** Красная линия – зависимость длительности волнового пакета, нормированной на начальную длительность от z; синяя пунктирная линия – зависимость доли энергии в сжатом импульсе от z.

составляет $\tau_{pulse} = 1.1 \cdot T_o$. Здесь $\langle\tau\rangle$ - центр масс волнового пакета

$$\langle\tau\rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \tau|\mathcal{E}|^2 r dr d\tau}{\mathcal{I}_{full}} \ . \tag{3.69}$$

Как здесь видно, длительность импульса τ_{pulse}, усредненная по поперечному распределению интенсивности поля, в 1.5 раза выше, чем длительность импульса волнового пакета на оси пучка.

Далее воспользуемся формулой (3.25b) для оценки длительности скомпрессированного лазерного импульса. Средний размер пучка уменьшился, как отмечалось ранее, в 3 раза. Поэтому длительность лазерного импульса, оцененная по формуле (3.25b), должна уменьшиться до $a_{||(s)} = 1.05 \cdot T_o$, что мало отличается от среднеквадратичной длительности τ_{pulse} лазерного импульса. Следовательно, результаты численного моделирования согласуются с приведенным выше качественным анализом.

Важно отметить, что в процессе нелинейной динамики лазерного импульса продольный масштаб всегда остается меньше поперечного, т. е. симметризация распределения волнового пакета не происходит, и, соответственно, самофокусировка импульса не переходит в режим сферически-симметричного коллапса, что согласуется с проведенным ранее качественным анализом (см. раздел 3.2.1).

Очевидно, что такое значительное укорочение длительности лазерного импульса должно сопровождаться значительным уширением спектра волнового пакета. На рисунке 3.5**(c)** синей пунктирной линией представлена спектральная интенсивность входного импульса на оси пучка, а сплошной красной линией – спектральная интенсивность сжатого лазерного импульса. Из данного рисунка видно, что спектр волнового пакета на выходе нелинейной среды не симметричный и похож на спектр, приведенный на рисунке 3.1**(d)** для точного солитонного решения, найденного в рамках одномерной задачи ($\Delta_\perp \equiv 0$). Данная несимметрия спектральной интенсивности связанна с тем, что по мере уменьшения длительности импульса начинает сказываться слагаемое, ответственное за укручение профиля волнового пакета. Как отмечалось ранее, солитонные решения при малой длительности обладают давольно сильной частотной модуляцией (3.9a), что отражается значительным уширением спектра в коротковолновую часть. Отметим, что сжатие импульса на оси пучка более сильное, чем в среднем по пучку, поскольку в приосевой области пучка величина интенсивности поля выше и, соответственно, уширение спектра больше.

На рисунке 3.5(**d**) сплошной красной линией представлена зависимость от эволюционной переменной z длительности импульса, определяемой по уровню половины интенсивности, нормированной на начальное значение. Как видно из данного графика, зависимость длительности импульса является двухмасштабной. Это следует, в частности, из системы уравнений на длительность волнового пакета (3.25) в рамках нелинейного уравнения Шредингера. В случае, когда поперечный размер пучка много меньше начального значения ($a_{\perp} \ll a_{\perp o}$), что соответствует значительному уменьшению длительности волнового пакета, поведение длительности импульса описывается выражением (3.28b). Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда размер пучка $a_{\perp}$ незначительно уменьшился $a_{\perp} - a_{\perp o} = \delta a_{\perp} \ll 1$, что соответствует незначительному уменьшению длительности лазерного импульса. В этом случае можно получить уравнение на $\delta a_{\perp}$

$$\frac{d\delta a_{\perp}}{dz} = \frac{\mathcal{I}_q}{2\pi^{3/2} a_{\perp o}^{5/2}} \sqrt{\delta a_{\perp}} \ . \tag{3.70}$$

Решением уравнения (3.70) является

$$\delta a_{\perp} = \frac{\mathcal{I}_q^2}{16\pi^3 a_{\perp o}^5} z^2 \ . \tag{3.71}$$

С учетом выражения (3.25b) получаем окончательное выражение для длительности волнового пакета $a_{||(s)}$ на начальной стадии самокомпрессии импульса

$$a_{||(s)} \simeq \frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\mathcal{I}_q} \left(1 - \frac{\mathcal{I}_q^2 z^2}{8\pi^3 a_{\perp o}^5} \right) \ . \tag{3.72}$$

В результате в рамках квазимонохроматического уравнения (3.12) на основе безаберрационного приближения получаем две асимптотики поведения зависимости длительности лазерного импульса $a_{||(s)}$ от эволюционной переменной z. При $z \ll \dfrac{4\pi^{3/2} a_{\perp o}^3}{\mathcal{I}_q}$ длительность волнового пакета определяется выражением (3.72), а при $z \lesssim \dfrac{4\pi^{3/2} a_{\perp o}^3}{3\mathcal{I}_q}$ длительность определяется выражением (3.28b).

На рисунке 3.5(**d**) пунктирной синей линией представлена зависимость доли энергии, содержащейся в сжатом лазерном импульсе, от эволюционной переменной z. Из приведенного рисунка видно, что в скомпрессированном волновом пакете содержится более 55% начальной энергии, и т.к. длительность импульса уменьшилась в десять раз, пиковая мощность сжатого импульса возросла в 5 раз.

Таким образом, самокомпрессия лазерного импульса с временным профилем в форме солитона (3.8)–(3.9) связана с тем, что по мере самофокусировки пучка в

поперечном направлении будет наблюдаться приток энергии с периферийной части пучка к приосевой, что приведет к увеличению амплитуды поля и, соответственно, к уменьшению нелинейной длины $L_{NL} \propto \dfrac{1}{\mathcal{E}_m^2}$, где $\mathcal{E}u_m$ – максимальная амплитуда в лазерном импульсе. Поскольку солитон есть нелинейное образование как баланс нелинейности и дисперсии среды, в связи с чем длительность волнового пакета должна уменьшаться, чтобы дисперсионная длина $L_{DIS} \propto \tau_p^2$ также уменьшалась. Важно отметить, что данный метод самокомпрессии лазерных импульсов не чувствителен к длине нелинейной среды, поскольку укорочение волнового пакета монотонно происходит по мере распространения импульса в нелинейной среде.

3.5.2 Многосолитонная динамика ($\mathcal{N} \geq 2$)

Далее обратимся к случаю, когда параметр $\mathcal{N} \geq 2$. В рамках одномерной задачи ($\Delta_\perp \equiv 0$) это соответствует возможности разбиения на асимптотической стадии исходного лазерного импульса на два солитона. Данный интерес связан с тем, что с увеличением параметра $\mathcal{N}$ мы сможем оперировать с большими энергиями в лазерном импульсе наряду с увеличением поперечного размера пучка a (3.67). Это является важным в задаче по оптимизации самокомпрессии лазерных импульсов, поскольку длина нелинейной среды, на которой длительность лазерного импульса обратится в нуль, возрастает пропорционально с увеличением начального поперечного размера пучка a (см. уравнение (3.30)). Как будет показано в дальнейшем, в случае $\mathcal{N} > 1$ длина компрессии лазерного импульса уменьшится в несколько раз по сравнению с односолитонным решением.

В рамках одномерной задачи ($\Delta_\perp \equiv 0$), т.е. в отсутствие пространственных эффектов, нелинейная динамика лазерного импульса полностью определяется параметром $\mathcal{N}$ (см. Главу 1). Как отмечалось ранее, случай $\mathcal{N} = 1$ соответствует тому, что начальное распределение волнового пакета в точности совпадает с солитонным решением (3.8)–(3.9). Однако в трехмерной задаче, благодаря процессу самофокусировки поперечного распределения лазерного импульса, длительность солитона будет адиабатически уменьшаться.

Одномерная задача ($\Delta_\perp \equiv 0$)

В отсутствии пространственных эффектов ($\Delta_\perp \equiv 0$) при $\mathcal{N} \geq 2$ первоначальный волновой пакет на асимптотической стадии будет разбиваться на последовательность

солитонов с параметрами $\delta^{(n)} = (2n-1)\delta_o$, где $n = 1, \ldots, [\mathcal{N}]$ есть последовательность целых чисел [172] (см. раздел 1.6). Как отмечалось ранее, важной особенностью рассматриваемых волновых солитонов (3.8)–(3.9) является полуограниченный спектр их допустимых решений, то есть наличие граничного решения δ_{cr}, соответствующего предельному солитону с минимально возможной длительностью импульса и, соответственно, с максимально возможной амплитудой. Поэтому число солитонов, на которые на самом деле разобьется начальный волновой пакет, есть целое число $[N]$, которое подчиняется фактически следующему неравенству: $\delta^{([N])} < \delta_{cr}$, т.е.

$$(2[N] - 1)\,\delta_o < \delta_{cr} = \sqrt{\frac{1}{8}}\,. \tag{3.73}$$

Иначе динамика импульса будет более сложной, но, в конечном счете, солитоны с $\delta^{([N])} < \delta_{cr}$ будут сформированы.

На рисунке 3.6 показаны результаты численного моделирования уравнения (3.4) для одномерного случая ($\Delta_\perp \equiv 0$), демонстрирующие процесс дробления первоначального импульса на последовательность солитонов для двух случаев: **(a)** случай $\mathcal{N} = 2.04$, $\delta_o = 0.03$; **(b)** случай $\mathcal{N} = 4.02$, $\delta_o = 0.025$. Как видно из рисунка, по мере распространения импульса в среде благодаря фазировке нелинейных структур, содержащихся в начальном распределении волнового пакета, будет наблюдаться эффективное сжатие импульса на дистанциях $z \sim 0.89 z_{dis}$ и $z \sim 0.36 z_{dis}$ [263]. Здесь z_{dis} – длина на которая длительность импульса увеличится в $\sqrt{2}$ (в линейном случае).

Таким образом, на промежуточной стадии импульс сильно сжимается. Однако следующий важный вопрос – финальная стадия. Как видно из рисунка 3.6, после самокомпрессии волновой пакет расплывается и в дальнейшем разбивается на последовательность импульсов, определяющихся параметром $\mathcal{N}$, и впоследствии формируются солитоны, которые хорошо разделены в пространстве. Мы восстановили δ образовавшихся солитонов, сформировавшихся на асимптотической стадии: $\delta^{(1)} \simeq 0.03$, $\delta^{(2)} \simeq 0.09$ на рисунке 3.6**(a)**; $\delta^{(1)} \simeq 0.025$, $\delta^{(2)} \simeq 0.075$, $\delta^{(3)} \simeq 0.125$, $\delta^{(4)} \simeq 0.175$ на рисунке 3.6**(b)**. Важно отметить, что длительность первого солитона, расположенного на переднем части временной коробки (слева), совпадает с начальной длительностью импульса, заданного на вход нелинейной среды. В то время как длительность солитона, расположенного в задней части временной коробки (справа), в несколько раз короче начальной длительности. В частности, на рисунке 3.6**(a)** длительность в 3 раза меньше начальной длительности падающего импульса, а на рисунке 3.6**(b)**

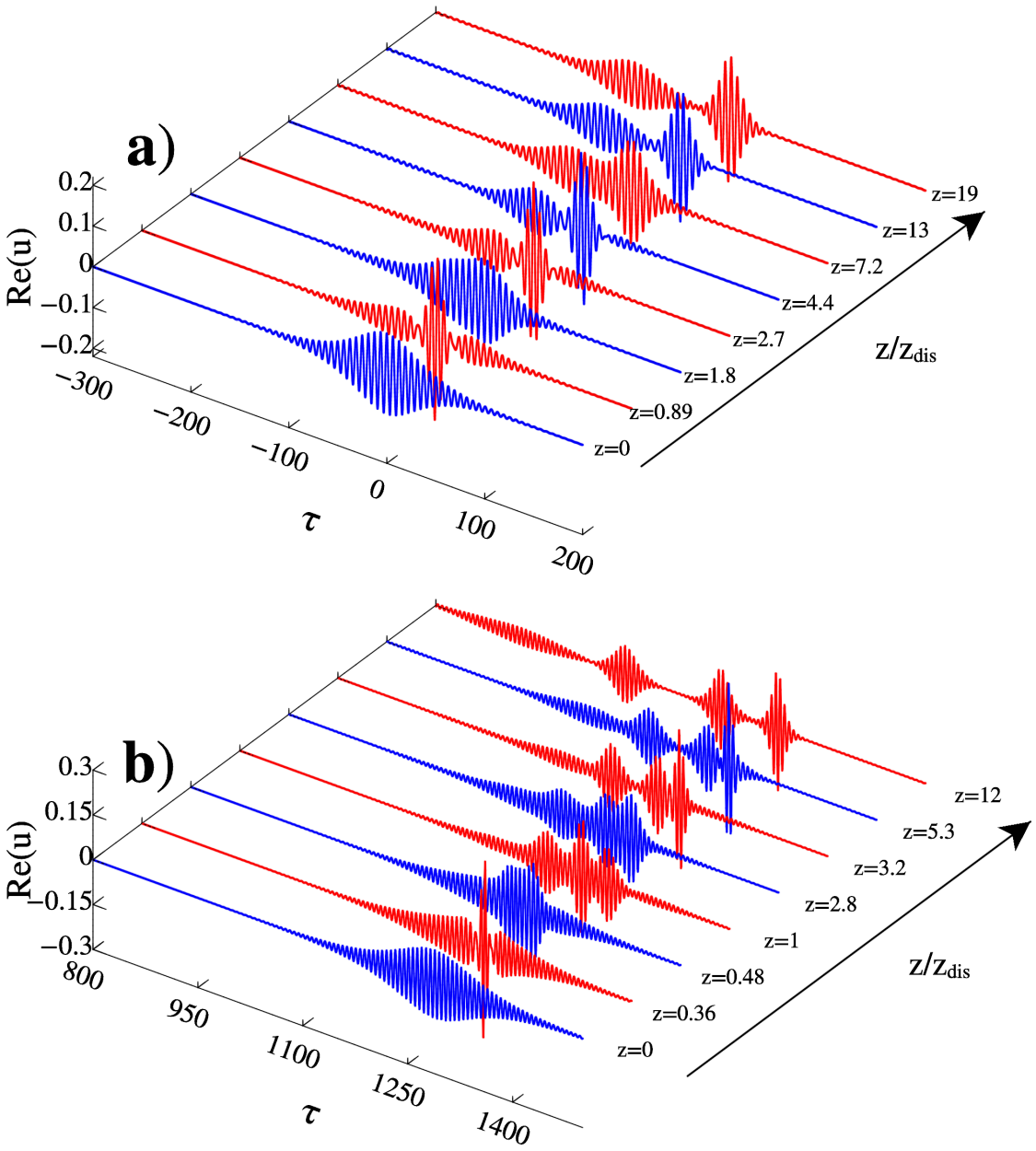


Рис. 3.6: Динамика волнового поля $\mathcal{E}_x = \mathcal{R}\mathrm{e}(\mathcal{E})$ вдоль трассы распространения в рамках уравнения (3.4) в одномерном случае ($\Delta_\perp \equiv 0$) для случая $\mathcal{N} = 2.02$, $\delta_o = 0.03$ **(a)** и $\mathcal{N} = 4.02$, $\delta_o = 0.025$ **(b)**.

длительность в 7 раз меньше начальной длительности. Важно отметить, что возникает резонный вопрос о том, как в дальнейшем работать с таким сложным выходным распределением лазерного импульса (при $z \simeq 12 z_{dis}$ на рисунке 3.6**(a)** и $z \simeq 19 z_{dis}$ на рисунке 3.6**(b)**). Поскольку на переднем фронте расположен солитон с большой длительностью, а на заднем фронте импульс с малой длительностью.

Трехмерная задача ($\Delta_\perp \neq 0$) и $\mathcal{N} \simeq 2$

Далее обратимся к исходной задаче и проанализируем динамику лазерного импульса (3.67) в рамках уравнения (3.4) с учетом пространственных эффектов. На рисунке 3.7**(a)** представлена пространственно-временная эволюция лазерного импульса при $\mathcal{N} = 2.05$, $a = 400$, когда в продольном направлении было задано солитонное решение при $\delta_o = 0.03$, $\omega_s = 1$. Из данного рисунка видно, что на начальном этапе ($z \simeq 70$) лазерный импульс существенно укоротился, как и в рамках одномерной задачи (см. рисунок 3.7 при $z \simeq 0.89 z_{dis}$ и $z \simeq 0.36 z_{dis}$) [172]. При этом поперечный размер пучка незначительно уменьшился, т. е. усиление поля в приосевой области поперечного распределения, в первую очередь, связано, как и в рамках одномерной задачи, с фазировкой нелинейных мод, содержащихся в начальном распределении.

Далее, как и в рамках одномерной задачи, волновой пакет начинает расплываться в продольном направлении ($z \sim 132$), что приведет к уменьшению темпа самофокусировки пучка, поскольку амплитуда поля уменьшилась. При этом где-то в середине пучка $r \sim a/2$ поле также начнет нарастать, и в какой-то момент оно будет превышать поле на оси системы. Рост поля в этой области ($r \sim a/2$) связан с тем, что в этой части пучка тоже идет укорочение импульса, но с некоторой задержкой относительно процесса сжатия импульса в центральной части пучка, так как в начальный момент времени величина поля в приосевой части пучка была больше, чем области $r \sim a/2$. Как видно из рисунка, при $z = 132$ начинает формироваться подковообразное распределение поля, что является характерной чертой волнового уравнения. Далее, как следует из рисунка, при $z \sim 170$ импульс начинает дробиться в продольном направлении на два солитона. Солитон с небольшой длительностью, и соответственно с большой амплитудой, расположен на заднем фронте импульса ($-25 \lesssim \tau \lesssim 25$), а солитон с большей длительностью, и соответственно с небольшой амплитудой – на переднем фронте временного распределения ($-150 \lesssim \tau \lesssim 0$). Отметим, что в приосевой части пучка поле становится опять больше, чем в области

$r \sim a/2$. В дальнейшем, благодаря процессу самофокусировки пучка, длительность данных солитонов будет адиабатически уменьшаться. В соответствии с формулой (3.28b) для длительности волнового пакета, короткий солитон будет быстрее сжиматься, так как в нем содержится больше энергии $\mathcal{I}_2 \simeq 12\pi\delta_o \left(\frac{a_o}{a_{cur}}\right)^2$, чем в длинном солитоне $\mathcal{I}_1 \simeq 4\pi\delta_o \left(\frac{a_o}{a_{cur}}\right)^2$, где a_{cur} - текущий размер пучка, a_o – начальный размер пучка. В результате процесса самофокусировки лазерного импульса будет выделяться солитон с меньшей длительностью, что и отражено на рисунке 3.7**(a)** при $z \sim 202$.

На рисунке 3.7**(b)** синей пунктирной линией представлено начальное распределение огибающей импульса $|\mathcal{E}| = \sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}$ на оси пучка и красной линией распределение поля в сжатом импульсе для $\mathcal{E}_x = \mathcal{R}\mathrm{e}(\mathcal{E})$ на выходе нелинейной среды $z = 2010$. Из рисунка видно, что лазерный импульс по уровню половины интенсивности сжался в 19 раз с $\tau_p^{in} = 10 \cdot T_o$ до $\tau_p^{out} = 0.52 \cdot T_o$, что соответствует чуть менее периода колебаний поля. Как видно из рисунка, на переднем фронте временного распределения лазерного импульса $-125 \lesssim \tau \lesssim -25$ расположен длинный солитон, который практически не заметен и представлен небольшим пьедесталом на уровне $2 \cdot 10^{-2}$. Следовательно, в распределение интенсивности этот пьедестал вообще не будет заметен на фоне основного сигнала.

Такое значительное укорочение длительности выходного пакета, как отмечалось ранее, должно сопровождаться значительным уширением спектра скомпрессированного импульса. На рисунке 3.7**(c)** синей пунктирной линией представлена спектральная интенсивность входного импульса на оси пучка, а сплошной красной линией – спектральная интенсивность сжатого импульса. Отметим, что изрезанность спектральной интенсивности лазерного импульса на выходе нелинейной среды $z \simeq 202$ связана с интерференцией двух разнесенных волновых структур. Для построения спектральной интенсивности только одного солитона с меньшей длительностью была применена временная маска $\mathcal{M}(\tau)$

$$\mathcal{M}(\tau) = \exp\left[-2\log 2\left(\frac{\tau}{28}\right)^2\right] \tag{3.74}$$

к сжатому импульсу, чтобы удалить солитон с большей длительностью, расположенный с левой стороны. Распределение маски $\mathcal{M}(\tau)$ (3.74) представлено на рисунке 3.7**(b)** пурпурной штрихпунктирной линией. А на рисунке 3.7**(c)** пурпурной штрихпунктирной линией представлена спектральная интенсивность выходного лазерного

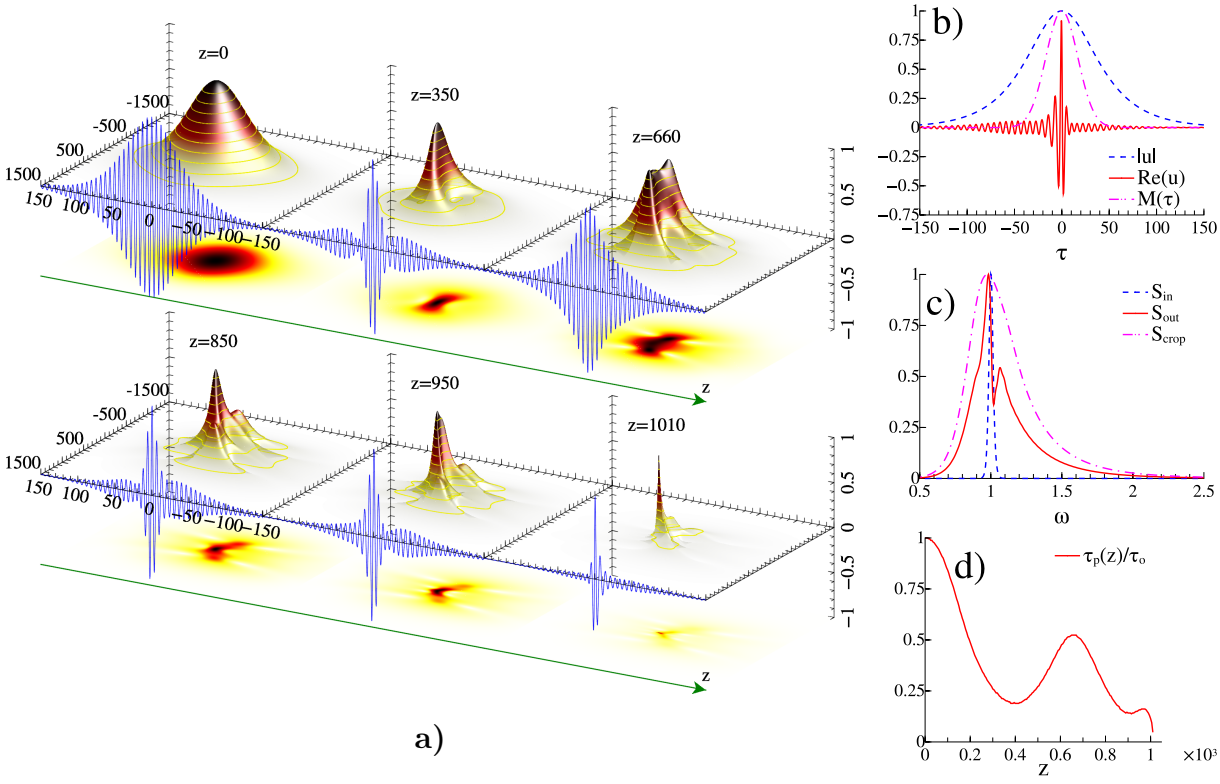


Рис. 3.7: **(a)** Динамика циркулярно поляризованного поля $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|$ для $\mathcal{N}=2.05$ $\delta_o=0.03$, $\omega_s=1$ с гауссовым распределением в поперечном направлении с размером $a=400$: $\mathcal{E}=\mathcal{N}\sqrt{\gamma}\mathcal{U}(\tau)\exp\left[i\tau+i\varphi(\tau)-\dfrac{r^2}{2a^2}\right]$. Синей линией представлена эволюция импульса на оси пучка $(r=0)$для одной из поляризаций поля $\mathcal{E}_x=\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathcal{E})$. Здесь поле нормировано на максимальное значение. **(b)** Синяя пунктирная линия – распределение огибающей поля входного лазерного импульса на оси пучка $|\mathcal{E}(\tau,r=0)|$, красная линия – распределение поля сжатого импульса на оси пучка $\mathcal{E}_x=\mathcal{R}\mathrm{e}(\mathcal{E})$, пурпурная штрих пунктирная линия – распределение временной маски; пурпурная штрих пунктирная линия – распределение спектральной интенсивности после применения временной маски над сжатым импульсом. **(c)** Синяя пунктирная линия – начальный спектр, красная линия – спектр сжатого импульса; **(d)** красная линия – зависимость длительности волнового пакета, нормированной на начальную длительность от z.

импульса на оси пучка после применения временной маски $\mathcal{M}(\tau)$. Как видно из рисунка 3.7**(c)**, результирующий спектр стал гладким и более асимметричным и похож на спектры, приведенные на рисунках 3.1**(d)**, 3.5**(c)**. Причем в данном случае спектральная интенсивность короткого солитона более широкая, нежели спектральная интенсивность сжатого лазерного импульса для случая, когда в исходном волновом пакете содержался только один солитон ($\mathcal{N} = 1$).

На рисунке 3.7**(d)** сплошной красной линией представлена зависимость от эволюционной переменной z длительность импульса $\left[\frac{\tau_p}{\tau_o} = f(z)\right]$, определяемая по уровню половины интенсивности, нормированная на начальное значение τ_o. Данный рисунок демонстрирует два этапа в эволюции лазерного импульса, которые обсуждались нами ранее при интерпретации результата компрессии импульса, представленного на рисунке 3.7**(a)**. В частности, как следует из рисунка 3.7**(d)**, длительность волнового пакета достигает промежуточного минимума $\tau_p \simeq 0.18 \cdot \tau_o$ при $z \simeq 380$, что связано с фазировкой двух нелинейных мод, содержащихся в начальном распределении. Пространственно-временное распределение для близкого значения $z \simeq 350$ представлено на рисунке 3.7**(a)**. В принципе, для сжатия начального лазерного импульса можно ограничиться и данной длиной среды $z \simeq 380$. Однако в этом случае самокомпрессия волнового пакета очень чувствительна к длине нелинейной среды, поскольку, как видно из рисунка 3.7**(d)**, при $z \sim 400$ длительность импульса начинает снова возрастать, как и в рамках одномерной задачи (см. рисунок 3.6**(a)**) и достигает значения $\tau_p = 0.52 \cdot \tau_o$ при $z \simeq 650$. Как отмечалось ранее, импульс дробится на два солитона, которые начинают адиабатически сжиматься. Поскольку амплитуда солитона в области $-25 \lesssim \tau \lesssim 25$ значительно превышает амплитуду солитона в интервале $-150 \lesssim \tau \lesssim 0$, то длительность лазерного импульса, представленного на рисунке 3.7**(d)** при $z \gtrsim 700$ соответствует более интенсивному солитону. Как видно из рисунка, длительность импульса незначительно увеличивается на длине $z \sim 900$. Это связано с тем, что волновые структуры еще не до конца разошлись друг от друга, в отличие от результатов одномерной задачи, поскольку трасса относительно небольшая. В результате этого они еще взаимодействуют своими хвостами, и это косвенно проявляется в незначительном увеличении длительности короткого солитона. Однако в целом длительность интенсивного солитона монотонно уменьшается. С практической точки зрения желательно сжимать импульс при $z \gtrsim 800$, так как в этом случае самокомпрессия лазерного импульса не чувствительна к длине среды, потому что уменьшение длительности волнового пакета происходит монотонно по

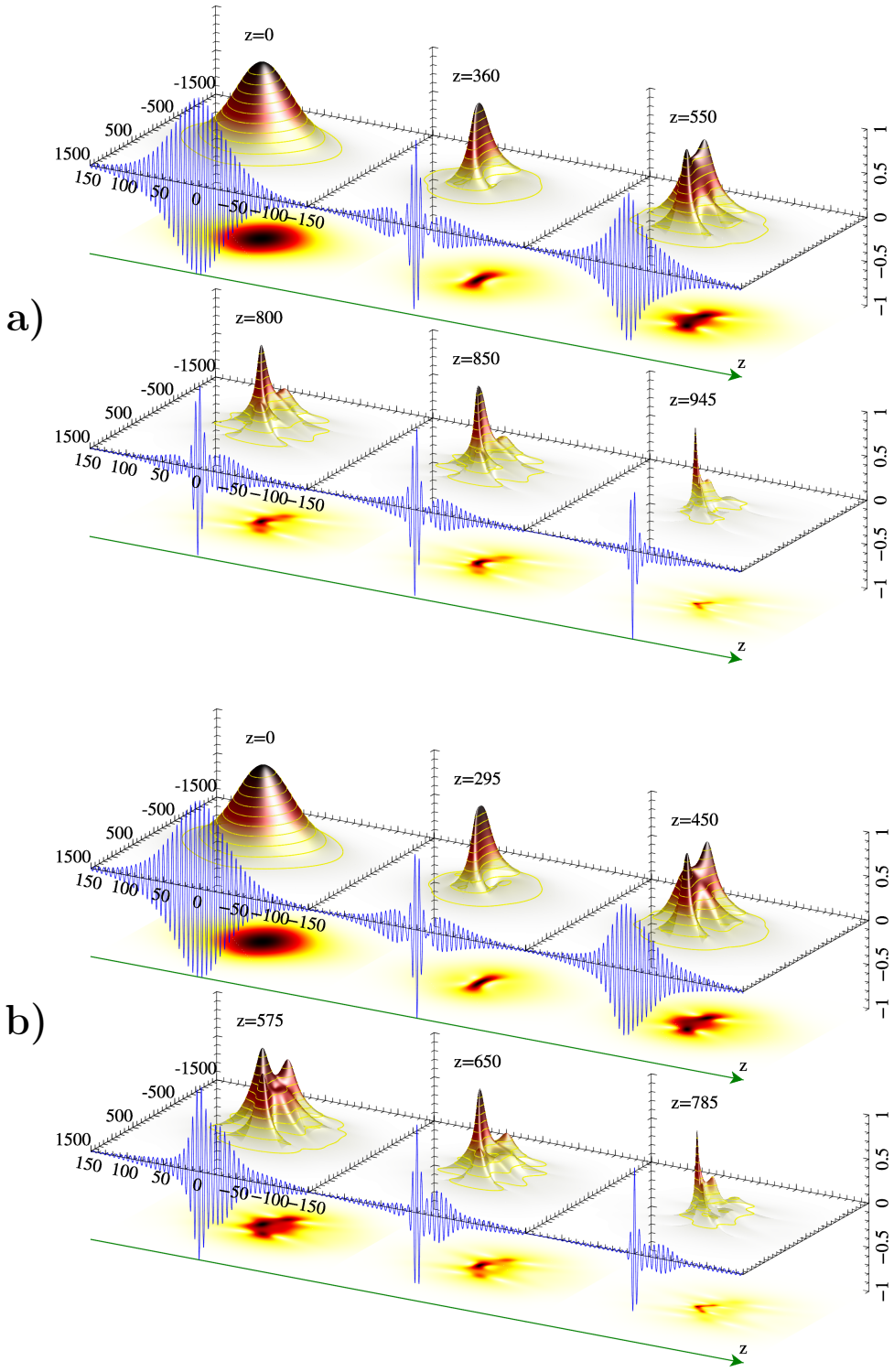


Рис. 3.8: Динамика циркулярно поляризованного поля $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|$, заданного на вход среды в виде $u = \mathcal{N}\sqrt{\gamma}\mathcal{U}(\tau)\exp\left[i\tau + i\varphi(\tau) - \dfrac{r^2}{2a^2}\right]$ для $\delta_o = 0.03$, $\omega_s = 1$ с гауссовым распределением в поперечном направлении с размером $a = 400$ для разных значений параметра $\mathcal{N}$: **(a)** $\mathcal{N} = 2.3$, **(b)** $\mathcal{N} = 2.5$. Здесь поле нормировано на максимальное значение.

мере распространения лазерного импульса в нелинейной среде.

Отметим, что на длине среды $z \simeq 1010$ длительность лазерного импульса в 3.9 раза короче, чем на длине $z \simeq 380$. Как следует из сравнения рисунков 3.5**(d)**, 3.7**(d)**, начальный лазерный импульс при $\mathcal{N} = 2.05$ сжимается на трассе $z \simeq 1010$, которая значительно меньше, чем трасса $z \simeq 2700$ для случая $\mathcal{N} = 1$. Важно отметить, что такое существенное уменьшение длины компрессии волнового пакета связано с тем, что в процессе дробления лазерного импульса на две волновые структуры длительность более короткого импульса уменьшается в три раза по сравнению с начальной длительностью, что в конечном счете и приведет к уменьшению длины компрессии.

Трехмерная задача ($\Delta_\perp \neq 0$) и $\mathcal{N} \lesssim 2$

При дальнейшем увеличении параметра $\mathcal{N}$ самокомпрессия лазерного импульса в процессе самофокусировки поперечного распределения сохраняется 3.8**(a, b)**. На данном рисунке представлена эволюция лазерного импульса для двух разных значениях параметра $\mathcal{N}$: **(a)** – $\mathcal{N} = 2.3$, **(b)** – $\mathcal{N} = 2.5$. Как и при $\mathcal{N} = 2.05$, начальный лазерный импульс разбивается на два солитона, но, как видно из данных рисунков, на переднем фронте волнового пакета при $-150 \lesssim \tau \lesssim 0$, солитон с меньшей амплитудой при увеличении параметра $\mathcal{N}$ становится все более заметным на фоне второго. Однако длительность волновой структуры с большей амплитудой имеет примерно такую же длительность, что и на рисунке 3.7**(b)**. Из сравнения рисунков 3.7**(a)**, 3.8**(a, b)** следует, что с увеличением параметра $\mathcal{N}$ уменьшается длина нелинейной среды, на которой длительность выходного импульса достигает значения $\tau_p \sim 0.5 \cdot T_o$, с $z = 1010$ до $z = 790$ при увеличении параметра $\mathcal{N}$ с $\mathcal{N} = 2.05$ до $\mathcal{N} = 2.5$. При этом с ростом параметра $\mathcal{N}$ энергия в солитоне с максимальной амплитудой не увеличивается, поскольку в нем она полностью определяется одномерной задачей, и, соответственно, в нем содержится $\dfrac{3}{4}$ от начальной энергии в лазерном импульсе, а все оставшиеся излишки ее будут сброшены с солитона в виде убегающих волн.

Трехмерная задача ($\Delta_\perp \neq 0$) и $\mathcal{N} \sim 3$

В заключении данного раздела рассмотрим случай, когда в начальном распределении волнового пакета в продольном направлении содержатся три нелинейные структуры $\mathcal{N} \sim 3$. На рисунках 3.9**(a, b)** представлены эволюции лазерного импуль-

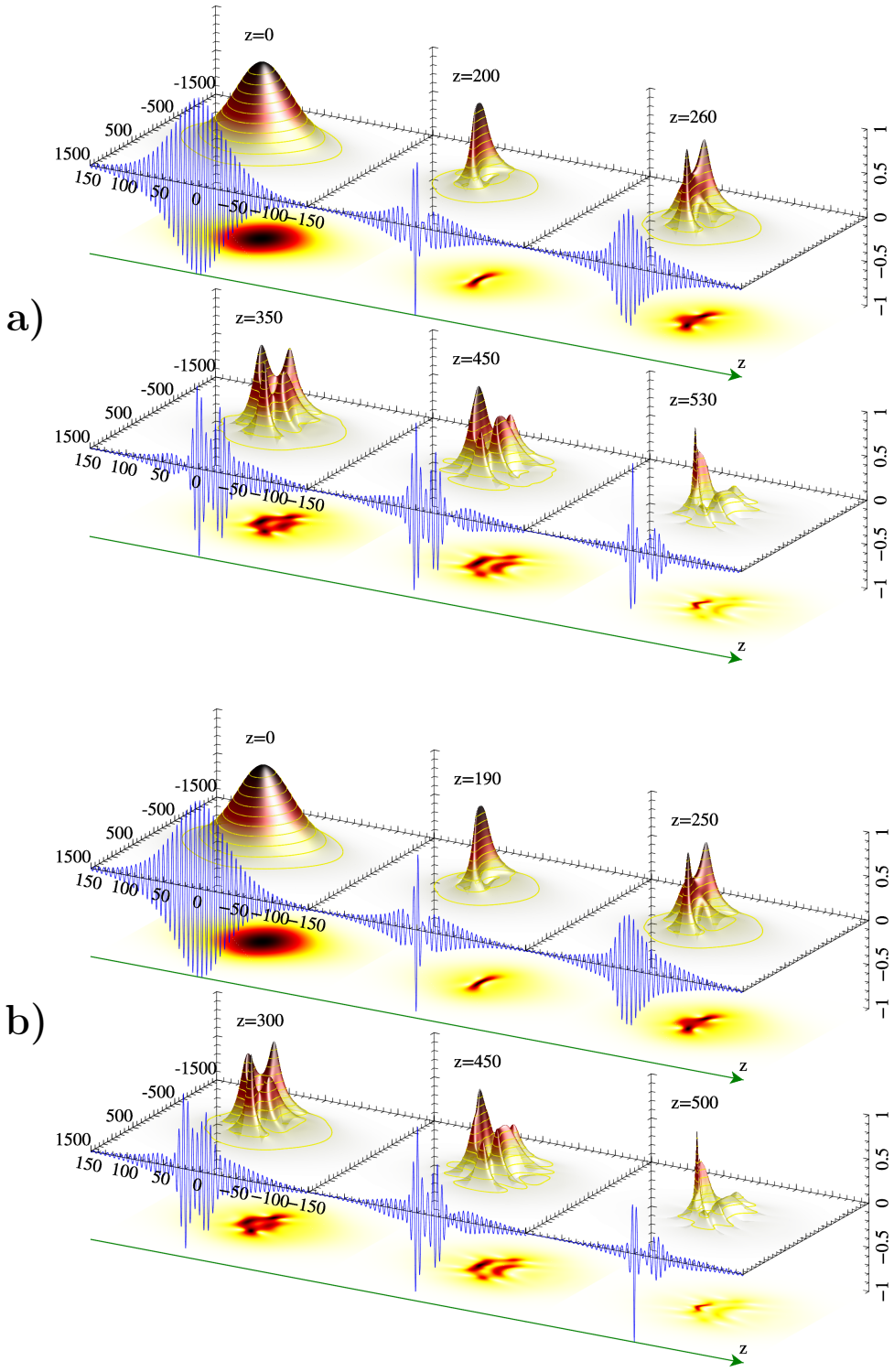


Рис. 3.9: Динамика циркулярно поляризованного поля $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|$, заданного на вход среды в виде $\mathcal{E} = \mathcal{N}\sqrt{\gamma}\mathcal{U}(\tau)\exp\left[i\tau + i\varphi(\tau) - \dfrac{r^2}{2a^2}\right]$ для $\delta_o = 0.03$, $\omega_s = 1$ с гауссовым распределением в поперечном направлении с размером $a = 400$ для разных значений параметра $\mathcal{N}$: **(a)** $\mathcal{N} = 3.02$, **(b)** $\mathcal{N} = 3.2$. Здесь поле нормировано на максимальное значение.

са для двух разных значений $\mathcal{N}$: **(a)** $\mathcal{N} = 3.02$, **(b)** $\mathcal{N} = 3.2$. Из рисунков видно, что на начальном этапе ($z \simeq 200$ для $\mathcal{N} = 3.02$, $z \simeq 190$ для $\mathcal{N} = 3.2$) начальное распределение сильно сжимается в продольном направлении при незначительном уменьшении поперечного размера пучка, как и в рамках одномерной задачи, в результате фазировки нелинейных мод. Далее длительность лазерного импульса увеличивается и возвращается примерно к исходному значению. Отметим, что при $z \simeq 260$ **(a)** и $z \simeq 250$ **(b)** формируется подковообразная структура. Как следует из рисунков, при $z \sim 350$ **(a)** и $z \sim 300$ **(b)** лазерный импульс дробится на три волновые структуры, которые в дальнейшем будут удаляться друг от друга. В качестве примера более подробно рассмотрим рисунок 3.9**(a)**. Из него видно, что в интервале $-10 \lesssim \tau \lesssim 10$ расположен солитон с минимально возможной длительностью, второй солитон расположен в интервале $-45 \lesssim \tau \lesssim -10$, третий солитон в интервале $-150 \lesssim \tau \lesssim -45$ с длительностью порядка начальной длительности лазерного импульса. Следует отметить, что каждый образовавшийся солитон испытывает самофокусировку в поперечном направлении на подковообразной структуре ($z \sim 450$). Очевидно, что для самокомпрессии входного лазерного импульса желательно ограничиться длиной нелинейной среды $z \sim 200$ для случая $\mathcal{N} = 3.02$ и $z \sim 190$ для $\mathcal{N} = 3.2$, поскольку в дальнейшем временная структура лазерного имупульса становится довольно сложной.

Таким образом, при самокомпрессии лазерных импульсов в условиях самофокусировки пространственного распределения, когда линейная дисперсионная длина много меньше дифракционной длины, ключевую роль в динамике импульса определяют солитоны, найденный в рамках одномерной задачи [172] (см. Главу 1). В этом случае начальное распределение волнового пакета разобьется на последовательность солитонов, которые в дальнейшем благодаря процессу самофокусировки будут по отдельности монотонно сжиматься в продольном направлении на подковообразной структуре. Как показал анализ, для самокомпрессии лазерного импульса предпочтительно задавать на вход нелинейной среды распределение волнового поля (3.67) при $N \lesssim 2$.

3.6 Обсуждение результатов

В данной главе предложен и детально исследован новый метод самокомпрессии лазерных импульсов в условиях самофокусировки излучения в среде

с аномальной дисперсией групповой скорости в случае, когда дисперсионная длина $z_{dis} \propto \dfrac{\tau_p^2}{|k_2|}$ (τ_p – длительность импульса, k_2 – коэффициент, характеризующий дисперсию среды) много меньше дифракционной длины $z_{dif} \propto a_\perp^2$ ($a_\perp$ – размер пучка). Для таких «сильно» вытянутых в поперечном направлении волновых пакетов развито качественное исследование процессов на основе теории нелинейных волн (вариационный метод, обобщенное линзовое преобразование, метод моментов и т. д.). Прежде всего, на основе уравнений для характерных размеров волнового пакета в продольном и в поперечном направлениях ((3.28b), (3.72)) показано, что распределение солитонного типа монотонным образом укорачиваются в процессе самофокусировки лазерного импульса. Это связано с тем, что благодаря процессу самофокусировки излучения будет наблюдаться приток энергии с периферийной части пучка к приосевой, что приведет к увеличению максимальной амплитуды поля $\mathcal{E}_m$ и, соответственно, к уменьшению нелинейной длины $\left(L_{NL} \propto \dfrac{1}{\mathcal{E}_m^2}\right)$. Учитывая, что солитон является нелинейным образованием, существующим на балансе нелинейности и дисперсии среды, это соответственно приведет к уменьшению длительности волнового пакета. Анализ показывает, что длительность солитона уменьшается пропорционально квадрату характерного размера волнового пучка (см. формулы (3.25b), (3.50)). Важно отметить, что сильно вытянутое эллипсоидальное распределение волнового пакета сохраняется в процессе эволюции, и симметризация не происходит. Самокомпрессия лазерного импульса протекает в условиях заметного превышения порогового значения мощности излучения для самофокусировки (см. формулу (3.26)).

Для практической реализации предложенного квазисолитонного метода самокомпрессии лазерных импульсов интерес представляют широкоапертурные волновые пучки, для сжатия импульса с большой энергией, так как погонная энергия солитона по продольной координате $\mathcal{I}_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{E}|^2 d\tau$ полностью определяется параметрами среды (нелинейностью и дисперсией среды). В связи с этим встала важная проблема исследования устойчивости рассматриваемого нами режима самокомпрессии волнового пакета по отношению к филаментационной неустойчивости. Проведены аналитические и численные исследования структурной устойчивости волнового пакета, которые показали, что самокомпрессия волновых пакетов с начальной длительностью порядка десяти периодов колебаний поля устойчива относительно данной неустойчивости из-за нелинейной дисперсии среды. Это связано с тем, что самофо-

кусировочная неустойчивость при учете в НУШ зависимости групповой скорости от амплитуды волнового пакета становится конвективной.

Были проведены детальные численные исследования динамики импульса для аксиально-симметричных пучков. Результаты, полученные на основе качественного анализа, были подтверждены результатами численного моделирования. В случае, когда в продольном направлении задано квазисолитонное распределение поля, то в процессе самофокусировки пучка длительность волнового пакета будет монотонно уменьшаться вплоть до значения, которое соответствует длительности предельного солитона с параметром $\delta \sim \delta_{cr} = \sqrt{\frac{1}{8}}$. При дальнейшем уменьшении поперечного размера пучка это очевидно приведет к формированию ударной волны, так как в этом случае дисперсия среды уже не сможет скомпенсировать нелинейность. Обогащение спектра вверх по спектру по степенному закону на заднем фронте импульса в процессе укручения волнового пакета может быть использовано для генерации аттосекундных импульсов. Этим заключительный режим самокомпрессии лазерного импульса отличается от режима, который мы рассматривали на основе нелинейного уравнения Шредингера. В случае, когда в начальном импульсе содержится несколько квазисолитонных структур, начальное продельное распределение волнового пакета будет разбиваться на последовательность солитонов, которые в дальнейшем благодаря процессу самофокусировки будут по отдельности монотонно самокомпрессироваться и разбегаться в продольном направлении. Как показал детальный анализ, для самокомпрессии лазерных импульсов предпочтительно задавать на вход нелинейной среды распределения волнового поля, в котором содержится не более двух квазисолитонных структур.

Глава 4

Экстремальная самокомпрессия солитонов в режиме ионизации газа

В данной главе предложен и исследован новый режим экстремальной самокомпрессии оптических солитонов длительностью в один период поля с последующим укорочением наряду с сверхширокимсмещением спектра в коротковолновую область, когда керровская и ионизационная нелинейности независимо управляются. Этот режим заключается в эффективной компрессии оптического импульса в целом по направлению к экстремально коротким лазерным импульсам с одним периодом поля на существенно коротких длинах волн, и может открыть новый способ к генерации оптических импульсов с длительности в сотни аттосекунд в ультрафиолетовой области.

Концепция оптических солитонов сыграла важную роль в развитии нелинейной оптики в последнее время. Генерация суперконтинуума и самокомпрессия лазерного импульса длительностью менее одного периода поля [64, 90, 139] – замечательное достижение солитонной динамики. Не так давно концепция обычных оптических солитонов была расширена до импульсов с малым числом осцилляций поля, для которых традиционное приближение огибающей поля неприменимо [31, 104, 105, 115, 157, 172, 246]. Конечно, существуют более ранние примеры оптической нелинейной физики, где волновое уравнение для реального лазерного поля рассматривалось в контексте солитонов или экстремально коротких импульсов, однако большая их часть имела дело с распространением света в двухуровневых системах [25, 41, 67, 98, 115, 216, 256] или средах с рамановской активностью [97].

С практической точки зрения генерация перестраиваемых импульсов с малым

числом осцилляций поля и с высокой энергией до сих пор является труднопреодолимой задачей в современной лазерной физике. В то время как в инфракрасном диапазоне подобные импульсы могут быть сформированы на определенных длинах волн обычными твердотельными лазерными системами, например, основанных на титан-сапфире, или оптических параметрических усилителях, в ультрафиолетовой и оптической диапазонах аналогичных техник нет. Тем не менее, для импульсов с высокой энергией существует ряд нелинейностей, которые могут быть использованы для укорочения импульсов, например, релятивистская нелинейность и плазменные эффекты (см. [21, 79, 103, 137, 148, 167]). Здесь мы уделим особое внимание ионизационной нелинейности, оказывающей значительное влияние на динамику распространения импульса. Фундаментальный вопрос такого взаимодействия следует из быстрой ионизации атомов, сильно модифицирующей индекс преломления даже на временных масштабах менее оптического периода. Это приводит к ряду интересных нелинейных явлений: ионизационной неустойчивости [12, 123], смещению частоты в синюю область спектра [14, 75, 194–196, 210], генерации высоких гармоник и терагерцовых импульсов [38, 54, 76, 180, 225]. Это также важно для акцентуации того, что ионизационная нелинейность способна самостоятельно обеспечить самоповышение частоты и самокомпрессию лазерного импульса [75, 102, 188, 264]. Основываясь на данных эффектах, недавно был предложен новый путь достижения петаваттных импульсов с длительностью в несколько колебаний поля [173].

С появлением газонаполненных фотонно-кристаллических волокон с полой сердцевиной возникла нелинейная волоконная оптика, где керровская и ионизационная нелинейности могут быть самосогласованно совместно использованы, создавая новые возможности для управления спектра и эволюции импульса [155]. В частности, в работах [44, 71, 89, 94, 154, 158] смещение спектра солитона в его коротковолновую область, так же, как и эффекты самокомпрессии, обсуждаются, основываясь на традиционной схеме компрессии, позволяющей укорачивать импульсы вплоть до длительности в один период поля. Однако наиболее животрепещущий вопрос состоит в том, сможем ли мы ожидать дальнейшего укорочения импульса с одним периодом поля в целом?

В данной главе диссертации мы прольем свет на неожиданную новую особенность динамики солитонов с малым числом колебаний поля в режиме ионизации. Мы продемонстрируем, что в среде с независимым контролем керровской и ионизационной нелинейностей, таких как смесь двух газов с заметно отличающимися потенциалами

ионизации, может иметь место экстремальная самокомпрессия импульса. Газ с более высокими потенциалом и плотностью обеспечивает керровскую нелинейность и, таким образом, обеспечивает солитону как структуре стабильность, когда как второй ионизированный газ – повышение частоты. Предлагается использовать волноводную систему для обеспечения контроля дисперсии групповых скоростей. В таком случае, режим самокомпрессии солитона включает в себя две качественно отличающиеся друг от друга последовательные стадии. На первой солитонный импульс сжимается обычным образом, когда процесс адиабатически развивается, согласуясь с солитонными соотношениями (см., например [44]). При этом экстремальная компрессия имеет место на втором этапе, когда солитон с малым числом колебаний поля становится по-настоящему однопериодным со сверхширокими спектром. Мы продемонстрировали, что на данной стадии процесс дальнейшей самокомпрессии значительно ускоряется и сопровождается повышением сверхширокого спектра, сохраняя однопериодичность солитона на протяжении всего времени. Оценки показывают, что это в перспективе может привести к прорыву в генерации импульсов с длительностью в сотни аттосекунд в ультрафиолетовой области.

Отметим, что в работе [222] в рамках нелинейного уравнения Клейна-Гордона, содержащего малые инерционные (нелокальные) поправки, развито самосогласованное описание одномерных солитоноподобных волновых сигналов в плавно неоднородных нестационарных нелинейных средах. Данное описание сводится к решению замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений для скорости квазисолитона и интегральных характеристик волнового поля. Была показана возможность существенного повышения частоты на примере распространения в исходно однородной и стационарной плазме релятивистских квазисолитонов при наличии в среде слабой дополнительной ионизации.

Структура данной главы следующая. В разделе 4.1 предложена базовая система уравнений для описания одномерной нелинейной динамике в системе с независимыми типами нелинейностей (кубическая, ионизационная). В качестве главного механизма формирования плазмы рассматривается полевая ионизация. В разделе 4.2 приведены результаты численных расчетов, демонстрирующих возможность самокомпрессии лазерного импульса, когда на вход нелинейной среды задано солитонное решение (4). В разделе 4.3 проведены результаты численных исследований демонстрирующие, что режим самокомпрессии лазерного импульса является устойчивым и слабо зависит от начального профиля и частотной модуляции в волновом пакете.

В разделе 4.4 на основе упрощенной системы уравнений проведен качественный анализ задачи. В разделе 4.5 проведены исследования по оптимизации самокомпрессии лазерного импульса, основанные на концепции солитонов высокого порядка.

4.1 Постановка задачи. Основные уравнения

Для адекватного анализа экстремальной самокомпрессии лазерных импульсов в волноводе, заполненном двумя сортами газа с заметно отличающимися потенциалами ионизации, необходимо обратиться непосредственно к описанию динамики самовоздействия электромагнитного поля в среде в широкой спектральной области на основе волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{P}}}{\partial t^2} \ , \tag{4.1}$$

где c – скорость света, $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ – поляризационный отклик среды.

4.1.1 Применимость двухуровневой системы

В случае резонансного взаимодействия лазерного излучения с веществом, когда частота сигнала ω_o близка к частоте резонансного перехода ω_R, поляризационный отклик среды $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ можно определить на основе модели двухуровневой системы [25, 26, 41, 98, 217]. Эта модель позволяет качественно описать многие явления взаимодействия атома с полем, обладает большой наглядностью и широко используется в квантовой электронике.

Однако по отношению к рассматриваемому нами нерезонансному случаю, когда несущая частота лазерного импульса много меньше частоты перехода ($\omega_o \ll \omega_R$), эта модель неприменима, поскольку при нерезонансном взаимодействии необходимо учитывать вклад других уровней атомной системы. Хорошо известно, что обобщение системы до трехуровневой приводит к изменению знака керровской нелинейности (с дефокусирующей на фокусирующую) [57].

Сделаем небольшое отступление. Смену знака у нелинейности можно понять также из другой наглядной модели. Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны с напряженностью электрического поля $\mathcal{A}$ с линейной поляризацией в среде двухуровневых частиц, имеющих частоту перехода ω_R, и дипольный момент μ. Самосогласованная система уравнений, описывающая распространение лазерного

импульса вдоль оси z, включает уравнения для материальных переменных среды

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \mathcal{N}}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} \ , \tag{4.2a}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} + \omega_R^2 \mathcal{P} = \frac{\mu^2 \omega_R}{\hbar}\mathcal{A}\mathcal{N} \ , \tag{4.2b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = -\frac{\mathcal{A}}{\hbar\omega_R}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \ , \tag{4.2c}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, $\mathcal{N}$ – разность населенностей уровней. Учитывая также, что характерные временные масштабы в рассматриваемой системе существенно меньше, чем времена релаксаций в среде, поэтому мы пренебрегли релаксационными членами. В системе уравнений (4.2b), (4.2c) есть интеграл:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}\right)^2 + \omega_R^2 \mathcal{P}^2 + \mu^2 \omega_R^2 \mathcal{N}^2 = \mu^2 \omega_R^2 \mathcal{N}_o^2 \ , \tag{4.3}$$

где $\mathcal{N}_o = \mathcal{N}(t=0)$. В рассматриваемой задаче есть еще малый параметр: $\omega_o \ll \omega_R$. Действительно, $\omega_o \simeq 10^{15}\ c^{-1}$, в то время как $\omega_R \simeq \omega_{at} \simeq 10^{16}\ c^{-1}$ (ω_{at} – атомная частота). Поэтому в уравнении (4.2b) слагаемое $\dfrac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2} \simeq \omega_o^2 \mathcal{P} \ll \omega_R^2 \mathcal{P}$ и его можно учесть по теории возмущения $\mathcal{P} = \mathcal{P}_o + \mathcal{P}_1$. В первом порядке малости получаем

$$\omega_R^2 \mathcal{P}_o \simeq \frac{\mu^2 \omega_R}{\hbar}\mathcal{A}\mathcal{N} \ , \tag{4.4a}$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\mu}\sqrt{\mu^2 \mathcal{N}_o^2 - \mathcal{P}_o^2} \ . \tag{4.4b}$$

В результате получаем решение для отклика среды $\mathcal{P}_o(\mathcal{A})$

$$\mathcal{P}_o(\mathcal{A}) = \frac{\mu^2 \mathcal{A}\mathcal{N}_o}{\hbar\omega_R}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\mu\mathcal{A}}{\hbar\omega_R}\right)^2}} \ . \tag{4.5}$$

Учтем также, что $\mathcal{A} \ll \dfrac{\hbar\tilde{\omega}_R}{\mu}$ (поскольку $\dfrac{\hbar\tilde{\omega}_R}{\mu} \simeq \mathcal{E}_{at}$, где $\mathcal{E}_{at}$ – атомное поле). В этом случае выражение (4.5) можно переписать в следующем виде

$$\mathcal{P}_o(\mathcal{A}) \simeq \frac{\mu^2 \mathcal{A}\mathcal{N}_o}{\hbar\omega_R}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu\mathcal{A}}{\hbar\omega_R}\right)^2\right] \tag{4.6}$$

Теперь отметим очень важный эффект, который очень часто не учитывают, хотя он радикально меняет вид для отклика $\mathcal{P}_o(\mathcal{A})$. Речь идет об эффекте Штарка. В случае близости частоты поля ω_o к частоте перехода, когда справедливо резонансное приближение, этим эффектом можно пренебречь, поскольку в этой ситуации частица колеблется между уровнями и основная нелинейность связана с зависимостью

частоты этих колебаний от поля $\mathcal{A}$. Если же мы находимся вдали от резонанса, то пренебрежение эффекта Штарка недопустимо. Учет эффекта Штарка выражается в том, что $\omega_R = \tilde{\omega}_R + \alpha\mathcal{A}^2$. Здесь $\tilde{\omega}_R$ – частота перехода без поля. Квадратичная по полю поправка объясняется тем, что в первом порядке теории возмущения поправка к энергии уровней равна нулю [250]. С учетом поправки второго порядка имеем:

$$\omega_R = \tilde{\omega}_R - \frac{2\mu^2\mathcal{A}^2}{\hbar^2\tilde{\omega}_R} \ . \tag{4.7}$$

Подставляя выражение (4.7) в уравнение (4.6) получаем решение для $\mathcal{P}(\mathcal{A})$

$$\mathcal{P}_o(A) \simeq \frac{\mu^2\mathcal{A}\mathcal{N}_o}{\hbar\tilde{\omega}_R}\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{\mu\mathcal{A}}{\hbar\tilde{\omega}_R}\right)^2\right] \ . \tag{4.8}$$

С учетом второго порядка малости поляризации $\mathcal{P}_1$

$$\mathcal{P}_1 \simeq -\frac{1}{\tilde{\omega}_R^2}\frac{\partial^2\mathcal{P}_o}{\partial t^2} \tag{4.9}$$

получаем окончательное выражение для отклика среды $\mathcal{P}$ без учета эффекта Штарка и с учетом его

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) \simeq \frac{\mu^2\mathcal{A}\mathcal{N}_o}{\hbar\tilde{\omega}_R}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu\mathcal{A}}{\hbar\tilde{\omega}_R}\right)^2\right] - \frac{\mu^2\mathcal{N}_o}{\hbar\tilde{\omega}_R^3}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial t^2} \ , \tag{4.10a}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) \simeq \frac{\mu^2\mathcal{A}\mathcal{N}_o}{\hbar\tilde{\omega}_R}\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{\mu\mathcal{A}}{\hbar\tilde{\omega}_R}\right)^2\right] - \frac{\mu^2\mathcal{N}_o}{\hbar\tilde{\omega}_R^3}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial t^2} \ . \tag{4.10b}$$

Хорошо известно, что в газах, в случае, когда $\omega_o \ll \omega_R$, дисперсия групповых скоростей нормальная, а нелинейность фокусирующего типа. Однако, как следует из выражения (4.10a), нелинейность является дефокусирующей. При этом двухуровневая модель с учетом эффекта Штарка в нерезонансном случае дает правильный ответ для отклика среды $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ (см. выражение (4.10b)).

4.1.2 Феноменологическая модель среды с двумя сортами газа

Вернемся теперь к исходной задаче. В случае нерезонансного взаимодействия лазерного излучения с веществом поляризационный отклик среды можно разбить на две составляющие $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathcal{E}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}_{lin} + \boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl}$. Здесь слагаемое

$$\boldsymbol{P}_{lin}(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(t-t')\boldsymbol{\mathcal{E}}(t')dt' - \boldsymbol{\mathcal{E}}\right] \tag{4.11}$$

ответственно за линейный отклик среды, $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl}(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ описывает нелинейную часть поляризации $\boldsymbol{\mathcal{P}}$. Где ε – линейная диэлектрическая проницаемость в рассматриваемой системе, которая в среднем ИК и оптическом частотных диапазонах может быть записана в спектральной области в следующем виде:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_o + a\omega^2 - \frac{\omega_D^2}{\omega^2} \ . \tag{4.12}$$

Отметим, что диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ определяется наряду с материальной дисперсией газов [55, 219], так же и дисперсией волновода. Причем коэффициент ω_D определяется в основном диаметром волновода. В рассматриваемом нами случае закон дисперсии в линейном случае для волны $\boldsymbol{\mathcal{E}} \sim \exp(i\omega\tau - i\kappa z)$, распространяющейся вдоль z, имеет вид $\kappa = -\dfrac{\omega_D^2}{\omega} + a\omega^3$. Изменяя центральную частоту ω широкополосного излучения, можно управлять ролью дисперсии в динамике системы. В частности, для излучения с частотой $\omega_{bnd} = \left(\dfrac{\omega_D^2}{3a}\right)^{1/4}$ параметр дисперсии групповой скорости (GVD) $k_2 = \dfrac{\partial^2\kappa}{\partial\omega^2}$ обращается в ноль. Соответственно, для волновых полей с частотой $\omega \gg \omega_{bnd}$ спектр поля сосредоточен в области с нормальной дисперсией групповой скорости $k_2 > 0$, а для $\omega \ll \omega_{bnd}$ дисперсия является аномальной ($k_2 < 0$). В данной работе будет рассматриваться случай аномальной дисперсии, когда $\omega \ll \omega_{bnd}$, поэтому второе слагаемое в выражении (4.12) мало. Отметим, что данная ситуация может достаточно легко реализована путем подбора диаметра капилляра и давления газа (см, например [44, 154]), поскольку в обычных условиях дисперсия газа мала по сравнению с дисперсией волновода.

Слагаемое $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{nl} = \boldsymbol{\mathcal{P}}_1 + \boldsymbol{\mathcal{P}}_2$ в уравнении (4.1) описывает нелинейный отклик смеси газа с сильно различными потенциалами ионизации, например, гелий и аргон.

Газ с большим потенциалом ионизации

Газ с большим потенциалом ионизации будет обеспечивать безынерционную нелинейность керровского типа

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_1 = \chi^{(3)}\mathcal{N}_a|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2\boldsymbol{\mathcal{E}} \ , \tag{4.13}$$

где $\chi^{(3)}$ – кубичная восприимчивость атома (см., например, [2, 35]), $\mathcal{N}_a$ – плотность атомов с большим потенциалом ионизации. Приближение безынерционной нелинейности является оправданным в силу того, что при малых длительностях лазерного излучения единственным физическим механизмом, обеспечивающим нелинейность показателя преломления на этих временах, является нелинейность поляризационного

отклика электронных оболочек. Характерное время задержки электронного отклика составляет, по сути, порядка периода вращения электрона вокруг ядра. Учитывая, что гелий обладает значительным потенциалом ионизации (24 ev), это соответствует времени нелинейного отклика порядка 70 ас, что мало по сравнению с длительностями, которые мы рассматриваем в данной работе.

Газ с меньшим потенциалом ионизации

Второй сорт газа будет ионизоваться в присутствии лазерного импульса для обеспечения нестационарной нелинейности, которая будет приводить к повышению частоты волнового пакета. Для определения явного вида поляризационного члена $\boldsymbol{\mathcal{P}}_2$, связанного с образованием плазмы, мы должны определить режим ионизации. Известно [231, 241], что ионизация атома в лазерном поле может протекать в трех различных режимах, определяемых величиной параметра Келдыша: $\gamma = \sqrt{\dfrac{I_p}{2U_p}}$, где I_p – потенциал ионизации, $U_p = \dfrac{e^2\mathcal{E}^2}{4m\omega_o^2}$ – пондеромоторный потенциал, ω_o – несущая частота лазерного импульса. При $\gamma \gg 1$ имеет место многофотонная ионизация. Вероятность ионизации в единицу времени в этом случае можно записать в следующем виде: $W \propto \mathcal{E}^{2n}$, $n = 1 + \left[\dfrac{I_p}{\hbar\omega_o}\right]$ – число фотонов, которое необходимо поглотить электрону, чтобы стать свободным, квадратные скобки обозначают целую часть. Параметр Келдыша γ имеет и другой физический смысл. Именно он определяет отношение характерного времени ионизации атома к характерному времени изменения электрического поля в импульсе $\dfrac{1}{\omega_o}$. Значение параметра Келдыша $\gamma \gg 1$ соответствует многофотонной ионизации, т. е. время туннелирования электронов через потенциальный барьер велико по сравнению с периодом оптических колебаний. Такая ситуация реализуется для фемтосекундных лазеров ультрафиолетового диапазона длин волн или в оптическом и инфракрасном диапазоне при низких интенсивностях излучения. При значении параметра Келдыша $\gamma \leq 1$ имеет место режим туннельной ионизации атома. Этот механизм ионизации является доминирующим при больших интенсивностях лазерного излучения фемтосекундного диапазона длительностей. Следует отметить, что при еще больших интенсивностях ($\gamma \ll 1$) существует также механизм ионизации подавлением потенциального барьера [231]. Этот механизм, однако, требует быстрого нарастания амплитуды электрического поля в импульсе, когда в течение промежутка времени, малого по сравнению с оптическим

периодом, его значение возрастает с величины, меньшей чем порог ионизации газа, до существенно ее превосходящей, когда потенциальный барьер подавляется полностью. Поскольку основной интерес для нас представляет исследование возможности компрессии лазерных импульсов, имеющих исходно достаточно большую длительность, этот последний режим ионизации в диссертации не рассматривается.

Для туннельного механизма ионизации поляризационный отклик $\boldsymbol{\mathcal{P}}_2$, связанный с процессом образования плазмы, может быть найден в явном виде (более подробно см. раздел 5.2.1).

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{P}}_2}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \boldsymbol{\mathcal{E}} \ , \tag{4.14}$$

где $\omega_{p,n}^2 = 4\pi e^2 \mathcal{N}_{e,n}/m$, $\mathcal{N}_e$ – плотность плазмы, $\mathcal{N}_n$ – концентрация нейтралов ($\mathcal{N}_n \ll \mathcal{N}_a$).

В данной работе мы рассмотрим одномерную самокомпрессию лазерного импульса в волноведущей системе. Будем предполагать, что пространственная структура поля определяется модой капилляра. Структурная модификация распределения поля в капилляре под действием керровской и ионизационной нелинейностей рассматривались в работах [182,183]. Были получены соответствующие ограничения на мощность лазерного излучения и плотность плазмы, при которых сохраняется одномодовый режим самовоздействия. Соответствующие условия выполняются, например, для капилляра диаметром 80 мкм и лазерного импульса с длительностью 25 фс и энергией в несколько сотен мкДж.

Дабы пролить свет на физику и предложить регулярный метод экстремальной солитонной конверсии, мы, сначала рассмотрим солитоны с малым числом колебаний поля. Для этого мы используем хорошо зарекомендовавший себя подход медленно эволюционирующей волны [35] и применим уравнение однонаправленного распространения волны, которое замыкается балансовым уравнением с туннельной ионизацией как главным механизмом формирования плазмы [260]. Подобная система уравнений может быть представлена следующим образом [172, 246]:

$$2c\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z \partial t} + \omega_D^2 \mathcal{U} + \omega_p^2 \mathcal{U} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(|\mathcal{U}|^2 \mathcal{U}) = 0 \tag{4.15a}$$

$$\frac{\partial \omega_p^2}{\partial t} = (\omega_n^2 - \omega_p^2) W(|\mathcal{U}|) \ . \tag{4.15b}$$

Здесь $\mathcal{U} = \mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_x$ и $\mathcal{E}_y$ – соответсвующие компоненты электрического поля в единицах $\sqrt{2\pi\chi^{(3)}\mathcal{N}_a}$, $t - \dfrac{z\sqrt{\varepsilon_o}}{c} \to t$, $W(|\mathcal{U}|)$ – вероятность тунельной ионизации [260]. Отметим, что уравнения (4.15) описывают случай аномальной дисперсии групповых

скоростей и подобны тем, что наблюдаются в ситуации с фотонно-кристаллическими волокнами с полой сердцевиной, заполненной газами, рассмотренной в работе [44]. Мы пренебрегли лишь квантовым поглощением, которое связано с атомный потенциалом, необходимым для ионизации атомов. Однако в уравнении (4.15) содержатся потери, которые соответствуют тому факту, что рожденные электроны приобретают осцилляторную энергию, которая в туннельном режиме для циркулярной поляризации превышает потенциал ионизации [75]. Эти энергетические потери можно свести к минимуму для линейно поляризованного поля, но мы уделим пристальное внимание случаю циркулярно поляризованного света, для которого солитонные решения могут быть найдены в явной форме, и этот факт в значительной мере позволяет нам предложить способ экстремальной компрессии импульса.

4.1.3 Особенности самовоздействия лазерных импульсов в среде с различными типами нелинейностями

Обсудим далее отличия в динамике волновых пакетов в среде, когда присутствует чисто керровская или ионизационная нелинейность.

Керроская нелинейность ($\omega_p = 0$)

В среде с чистой керровской нелинейностью ($\omega_p = 0$)

$$2c\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z \partial t} + \omega_D^2 \mathcal{U} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(|\mathcal{U}|^2 \mathcal{U}) = 0 \tag{4.16}$$

существует класс солитонов с малым числом колебаний поля (см. Главу 1) [104,172,240]. В безразмерных переменных ($\tau = \omega_o t$, $\tilde{z} = z\dfrac{\omega_D^2 c}{2\omega_o}$, ω_o – входная несущая частота) эти решения могут быть представлены в следующей форме:

$$\mathcal{U} = \frac{\omega_D}{\omega_o}\sqrt{\gamma}a(\xi)\exp[i(\tau + \gamma\tilde{z}) + i\phi(\xi)] \ , \tag{4.17}$$

где $\xi = (\tau - \gamma\tilde{z})$ и $\dfrac{1}{\gamma}$ – групповая скорость солитона. Огибающая солитона $a(\xi)$ и нелинейная фаза $\phi(\xi)$ подчиняются обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{da}{d\xi} = \pm\frac{a}{(1-3a^2)}\left[\delta^2 - \frac{3}{2}(\delta^2+1)a^2 + \frac{(4-5a^2)a^2}{4(1-a^2)^2}\right]^{1/2} \ , \tag{4.18a}$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{a^2(3-2a^2)}{2(1-a^2)^2} \ , \tag{4.18b}$$

где $\delta = \sqrt{\frac{1}{\gamma} - 1}$. Можно заметить, что уравнения (4.18) могут быть непосредственно проинтегрированы, и их решения зависят исключительно от параметра δ, изменяющегося в интервале $0 \leq \delta \leq \sqrt{\frac{1}{8}}$. Важно отметить, что в пределе $\delta \to 0$, соответствующего длинным импульсам, содержащих большое число оптических периодов колебаний поля, солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера имеют форму *sech* без фазовой модуляции [243]:

$$a(\xi) = a_s = \frac{\sqrt{2}\delta}{\cosh(\delta\xi)} \ , \quad \phi \simeq 0 \ . \tag{4.19}$$

Для простоты в дальнейшем мы будем ссылаться на эти решения как Шредингеровские солитоны. Однако для больших δ, то есть солитонов с малым числом колебаний поля, их огибающая $a(\xi)$ по-прежнему может быть охарактеризована формой *sech* с высокой точностью (максимальное отклонение – менее 3%), но с сильной фазовой модуляцией, определяемой уравнением (4.18b):

$$\mathcal{U}(\xi) = \frac{\omega_D}{\omega_o}\sqrt{\gamma}a_s \exp\left[i(\tau + \gamma\tilde{z} + \int_{-\infty}^{\xi} \frac{a_s^2(3-2a_s^2)}{2(1-a_s^2)^2}d\xi)\right] \ . \tag{4.20}$$

Это позволяет получить сверхширокий спектр, играющий крайне важную роль в ионизационно-индуцированной компрессии импульса, особенно принимая во внимание, что наибольшие частоты спектра локализованы в центральной части импульса, где имеет место быть процесс ионизации. Далее мы исследуем динамику солитоподобных импульсов в режиме ионизации.

Ионизационная нелинейность

Рассмотрим теперь случай, когда преобладает ионизационная нелинейность (более подробно смотрите Главу 5)

$$2c\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial z\partial t} + (\omega_D^2 + \omega_p^2)\mathcal{U} = 0 \tag{4.21a}$$

$$\frac{\partial\omega_p^2}{\partial t} = (\omega_n^2 - \omega_p^2)W(|\mathcal{U}|) \ . \tag{4.21b}$$

В процессе ионизации газа имеют место потери энергии лазерного импульса

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{U}|^2 dt \ , \tag{4.22}$$

связанные с преобразованием части энергии электрического поля в лазерном импульсе в энергию дрейфового движения электронов, остающуюся у них после окончания действия лазерного импульса. Эти потери непосредственно можно проиллюстрировать, если воспользоваться методом моментов

$$\frac{d\mathcal{I}}{dz} = -\frac{1}{2c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\omega_p^2}{\partial t}|\Phi|^2 dt' < 0 \ , \tag{4.23}$$

где $\mathcal{U} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$. Отметим, что в процессе изменения показателя преломления среды, связанное с образованием плазы, имеется возможность значительной перестройки частоты лазерного излучения в коротковолновую область спектра. Уравнение на смещение спектра волнового пакета (более подробно смотри Главу 5)

$$\langle\omega^2\rangle = \frac{1}{\mathcal{I}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial t}\right|^2 dt \tag{4.24}$$

можно получить, воспользовавшись, например, хорошо известным методом моментов

$$\frac{d\langle\omega^2\rangle}{dz} = -\langle\omega^2\rangle\frac{d}{dz}\ln\mathcal{I} + \frac{1}{\mathcal{I}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\omega_p^2}{\partial t}|\mathcal{U}|^2 dt > 0 \ . \tag{4.25}$$

При этом конечная картина преобразования спектра зависит не только от темпа ионизации газа при данной амплитуде электромагнитного поля, но и от величины потерь энергии лазерного импульса, связанные с нагревом плазмы.

Механизм компрессии лазерного лазерного импульса в форме Шредингеровского солитона

Таким образом, если на вход волновода, заполненного двумя сортами газа с существенно различными потенциалами ионизации, задать солитонное решение (4.20), которое определяется газом с большим потенциалом ионизации и дисперсией системы, то в процессе увеличения средней несущей частоты ω лазерного импульса, вследствии ионизацией газа с меньшим потенциалом ионизации, будет иметь место уменьшение дисперсии групповой скорости $k_2(\omega) \propto \dfrac{2\omega_D^2}{\omega^3}$, которая в первую очередь определяется диаметром волновода. Следовательно, чтобы рассматриваемая волновая структура оставалась солитоном, необходимо, чтобы длительность ее уменьшалась таким образом, чтобы на ней дисперсионная $L_D \simeq \dfrac{2c\omega^3\tau_s^2}{\omega_D^2}$ и нелинейная длины $L_{NL} \simeq \dfrac{2c}{\omega\mathcal{U}_s^2}$ совпадали. В результате, качественное расссмотрение показывает, что длительность

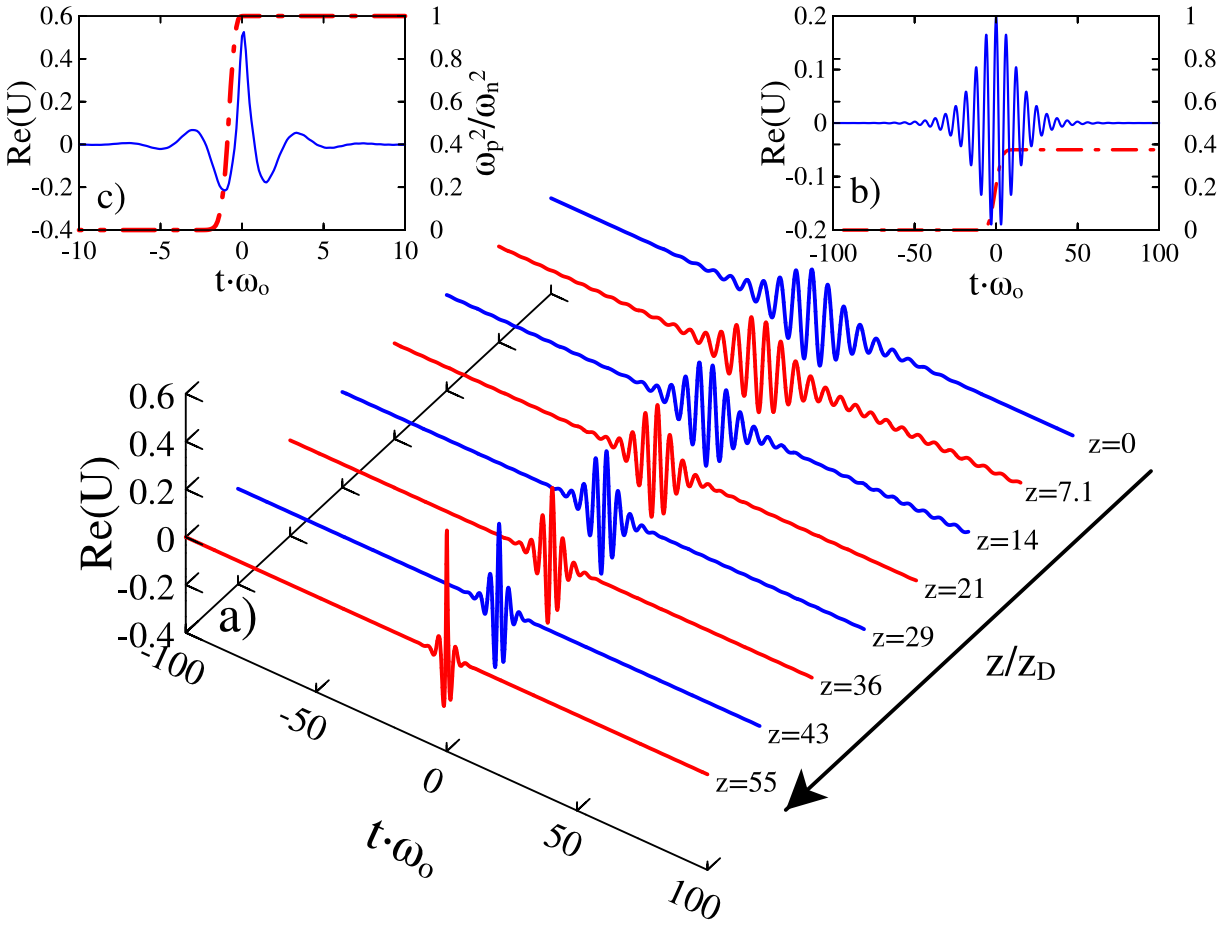


Рис. 4.1: Динамика лазерного импульса $\mathcal{U}_x = \mathcal{R}\mathrm{e}[\mathcal{U}]$ с начальным профилем, определяемым на основе системы уравнений (4.18), при $\delta = 0.1$ и $\beta = 0.01$. Интенсивность волнового пакета нормирована на максимальное значение, и эволюционная координата z мерится в дисперсионных длинах L_D, при которой длительность лазерного импульса увеличивается в $\sqrt{2}$ раз в линейном случае. На левой верхней вставке синей линией представлено распределение сжатого лазерного импульса, красной штрихпунктирной линией – распределение концентрации плазмы. На правой верхней вставке синей линией предварительно распределение импульса на вход нелинейной среды, красная штрихпунктирная линия – распределение концентрации плазмы.

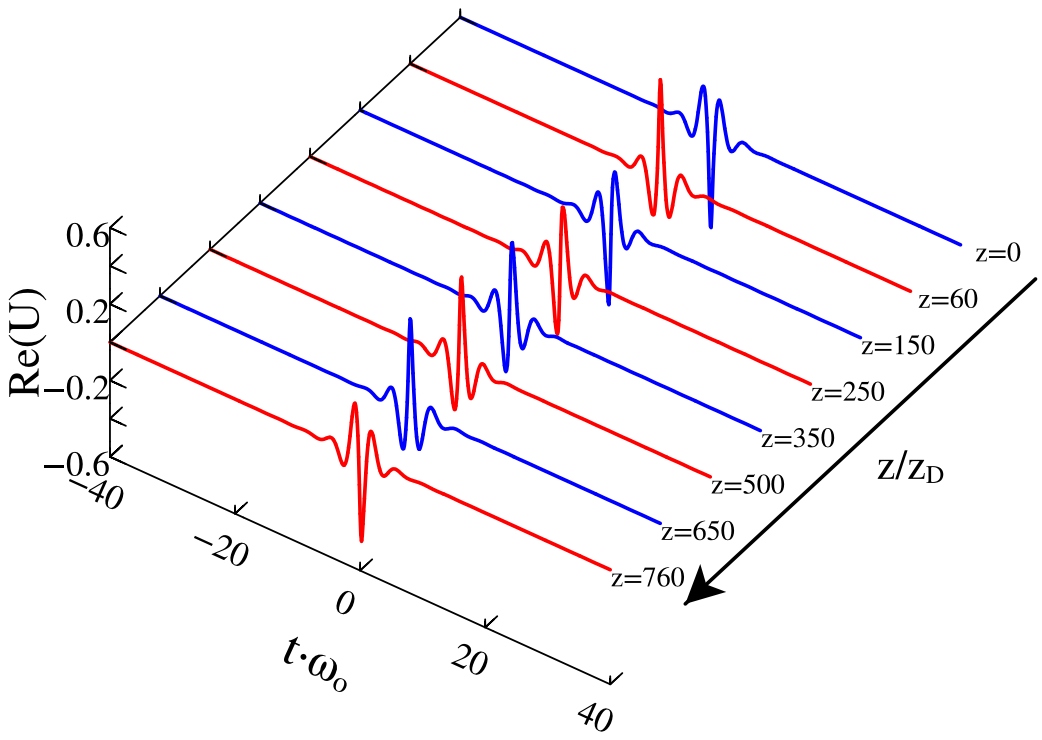


Рис. 4.2: Динамика лазерного импульса в среде без ионизации ($\beta = 0$). На входе задано начальное временное распределение волнового пакета как распределение поля, сформированное в условиях ионизации газа ($\beta = 0.01$) при $z = 55z_D$ [см. рисунок 4.1**(a)**]. Здесь z_D – дисперсионная длина сжатого импульса и равна $z_D = 5$.

солитона τ_s должна уменьшаться в процессе повышения частоты волнового пакета в принебрежении диссипации энергии в солитоне $\mathcal{I}_s$ по закону

$$\tau_s(\omega) \propto \frac{\omega_D^2}{\omega^4 \mathcal{I}_s} \ . \tag{4.26}$$

4.2 Самокомпрессия солитона

Мы моделируем распространение лазерного импульса на основе системы уравнений (4.15) со специфичным начальным условием в форме точного солитонного решения, даваемого уравнениями (4.18). На рисунке 4.1**(a)** показана динамика волнового пакета $\tilde{\mathcal{U}} = \frac{\omega_o}{\omega_D} \mathcal{R}\mathrm{e}[\mathcal{U}]$ при $\beta = \frac{\omega_n^2}{\omega_D^2} = 0.01$ и $\delta = 0.1$, в котором содержится четыре оптических периода. В дальнейшем координата z нормирована на дисперсионную длину L_D, при которой длительность волнового пакета увеличивается в $\sqrt{2}$ раз в линейном случае. Из данного рисунка видно, что импульс непрерывно укорачивается, достигая минимальной длительности на длине $z = 55L_D$; в этой точке лазерный импульс скомпрессировался в 40 раз, что соответствует длительности 250 аттосекунд для *Ti:Sa* лазера ($\lambda = 0.8\ \mu m$, начальная длительность импульса 10 фемтосекунд). Важно отметить, как мы видим из рисунка 4.1**(a)**, что в процессе укорочения временная структура огибающей не изменяется, то есть это соответствует адиабатическому уменьшению длительности лазерного импульса $\tau_p(z)$ и увеличению несущей частоты $\omega(z)$. Таким образом, мы делаем вывод, что в этом случае адиабатическая самокомпрессия солитона имеет место при $z = 55L_D$. Более того, солитонный импульс достигает длительность даже в один цикл, приобретая компрессию посредством повышения своей несущей частоты (точнее, увеличением частоты центральной части солитона в одну осцилляцию).

Дабы подтвердить нашу гипотезу, согласно которой мы работаем с солитонными структурами в каждой точке z, мы провели дополнительное численное моделирование: мы выбрали начальное временное распределение волнового пакета как распределение поля, сформированное при $z = 55L_D$ [см. рисунок 4.1**(a)**], и моделировали распространение импульса при $\beta = 0$ (то есть при отсутствии ионизации) [см. рисунок 4.2]. В таком случае, как следует из рисунка 4.2, для подобной структуры поля распределение огибающей не претерпевает изменений в процессе распространения в несколько сотен дисперсионных длин сжатого импульса ($z \leq 760 z_D$). Важно отметить, что, на самом деле, частоты в центральной части импульса лежат в фиолетовой

области спектра. Поэтому главный вопрос в том, как это произошло.

Следует также подчеркнуть, что мы не смогли получить столь экстремальную компрессию лазерного импульса, используя газ с одним сортом атомов. Это легко понять из вставок на рисунке 4.1**(b,c)**: если на начальной стадии распространения степень ионизации может быть мала (правая вставка **(b)**) и импульс компрессируется по принципу шредингеровского солитона, то благодаря увеличению амплитуды солитона газ полностью ионизируется (левая вставка **(c)**), чем можно погасить керровскую нелинейность и остановить компрессию. Подобную ситуацию можно избежать, используя смесь из двух газов с существенно различными потенциалами ионизации: газ с высоким потенциалом (например, гелий) обеспечивает керровскую нелинейность, а другой – с низким потенциалом (например, аргон) – отвечает за ионизационную.

4.3 Устойчивость процесса самокомпрессии относительно модификации начального профиля волнового пакета

Рассмотрим далее вопрос устойчивости процесса самокомпрессии лазерного импульса относительно модификации начального профиля волнового пакета. В случае широких квазимонохроматических импульсов решение (4.18) уравнения (4.16) при $\delta \ll 1$ трансформируется к хорошо известному солитону нелинейного уравнения Шредингера [172, 240]

$$\mathcal{U} \simeq \frac{\sqrt{2}\mathcal{N}\delta}{\cosh(\delta\tau)} \exp(i\tau) \ . \tag{4.27}$$

Обсудим далее различие поведения солитона НУШ и точного солитонного решения в рамках уравнения (4.15) при $\delta \ll 1$. Задание распределения (4.27) является гораздо более удобным, чем определяемое начальное распределение (4.18), поскольку для каждого параметра δ нужно их численно находить. Параметр $\mathcal{N}$ в дальнейшем будем менять в задаче по оптимизации процесса компрессии лазерного импульса. Однако в начале приведем результаты при $\mathcal{N} = 1$.

Отметим, что амплитудный профиль солитона (4.18a) хорошо совпадает с временным профилем (4.27) в отличие от спектрального состава, поскольку, как видно из выражения (4.18b), волновая структура обладает достаточно сильной частотной мо-

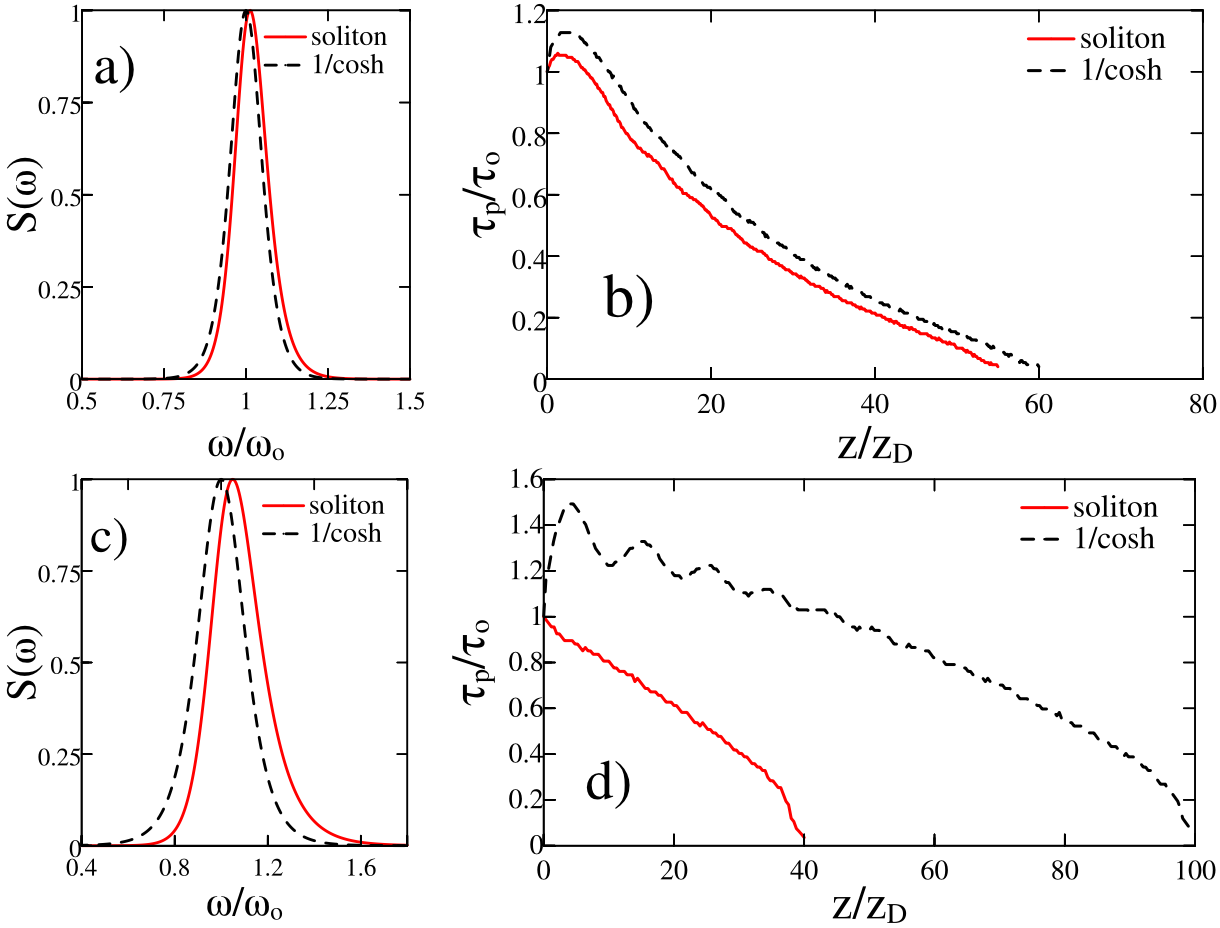


Рис. 4.3: **(a, c)** Спектры мощности волновых пакетов $S(\omega)$ при $z = 0$ для разных значений δ: **(a)** $\delta = 0.1$, **(c)** $\delta = 0.2$. Здесь черной пунктирной линией представлено распределение спектра солитона НУШ (4.27), красной сплошной линией – распределение спектра солитонного решения (4.18). **(b, d)** Зависимость изменения длительности волнового пакета $\tau_p(z)$ от z для разных значений δ: **(b)** $\delta = 0.1$, **(d)** $\delta = 0.2$. Черная пунктирная линия – зависимость $\tau_p(z)$ для входного распределения (4.27), красная сплошная линия – для распределения (4.18)

дуляцией при малой длительности лазерного импульса ($\phi \sim \int |\mathcal{U}|^2 d\xi$). Как показал численный расчет, если на входе нелинейной среды задать временное распределение в виде (4.27) при $\delta = 0.1$, то динамика волнового пакета будет слабо отличаться от той, что была показана нами ранее (см. рисунок 4.1**(a)**), так как начальный спектр солитона близок к спектру распределения (4.27). Незначительность в отличие спектров можно увидеть на рисунке 4.3**(a)**, на котором черной пунктирной линией показан спектр распределения (4.27) при $\delta = 0.1$, а красной сплошной линией – распределения точного солитонного решения (4.18), который задавался нами ранее для демонстрации самокомпрессии солитона (см. рисунок 4.1**(a)**). На рисунке 4.3**(b)** представлена зависимость длительности волнового пакета $\tau_p(z)$, нормированной на начальное значение $\tau_p(z = 0)$, от эволюционной координаты z. Черная пунктирная линия соответствует начальному распределению (4.27), а красная сплошная линия – распределению (4.18).

Однако, если на входе нелинейной среды задать более короткий лазерный импульс, то различие будет более заметным, поскольку частотная модуляция $\phi(\tau)$ (4.18b) становится уже существенной. Данный факт представлен на рисунке 4.3**(c)**, на котором видны спектры для распределений (4.18), (4.27) при $\delta = 0.2$. Как показали результаты численного моделирования, в этом случае лазерный импульс, заданный на входе нелинейной среды, в виде распределения (4.27) будет значительно медленно сжиматься, чем импульс с распределением (4.18). Поскольку на начальном стадии эволюции процесс трансформации распределения (4.27) к распределению (4.18) будет сопровождаться потерями в виде излучения, что приведет к уменьшению пиковой интенсивности в волновом пакете. Учитывая, что вероятность ионизации газа очень чувствительна к амплитуде поля, это приведет к уменьшению темпа укорочения длительности лазерного импульса. На рисунке 4.3**(d)** представлена зависимость длительности волнового пакета для различных начальных распределений при $\delta = 0.2$. Здесь черной пунктирной линией представлена зависимость $\tau_p(z)$ для распределения НУШ солитона (4.27), а красной сплошной линией – для точного солитонного решения (4.18). Как видно из рисунка, лазерный импульс без частотной модуляции на начальном этапе $z \sim 5$ расплывается (длительность увеличилась на 40 %), но в дальнейшем начинает укорачиваться, но при этом темп укорочения ниже, чем для импульса с частотной модуляцией (4.18).

Таким образом, даже в случае, когда мы задали распределение поля, которое значительно отличается от распределения (4.18), компрессия волнового пакета со-

храняется. Следовательно, режим компрессии является устойчивым и слабо зависит от начального профиля и частотной модуляции в импульсе. Важно отметить, что отсутствие начальной частотной модуляции приводит лишь к некоторому увеличению длины компрессии (см. рисунки 4.3**(b,d)**). Видно, что при $\delta \leq 0.1$ отличие в динамике распределений (4.18), (4.27) вообще мало заметно. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением в качестве начальных волновых структур распределения без частотной модуляции с $\delta \leq 0.1$. Отметим, что данное ограничение является оправданным, так как данная работа посвящена компрессии относительно длинных лазерных импульсов.

4.4 Отличительные особенности компрессии солитонов НУШ от солитонов с малым числом колебаний поля

Для лучшего понимания механизма самокомпрессии лазерных импульсов мы рассмотрим отличия компрессии шредингеровских солитонов от солитонов с малым числом колебаний поля.

Исходная система уравнений (4.15) является довольно сложной для качественного анализа динамики волнового пакета $\mathcal{U}(z,t)$. Поэтому для получения аналитических соотношений

- зависимости длительности волнового пакета τ_p от эволюционной координаты z;
- зависимости длительности волнового пакета τ_p от несущей частоты ω,

которые полностью характеризует процесс самокомпрессии лазерного импульса, обратимся к более простой к системе уравнений.

4.4.1 Приближенное уравнение

Для получения упрощенной системы уравнений воспользуемся приближением огибающей в форме

$$\mathcal{U}(z,\tau) = \mathcal{A}(z,t)e^{i\varphi(z,t)} \ . \tag{4.28}$$

Подставляя выражение (4.28) в систему уравнений (4.15) получаем следующую систему уравнений для амплитуды $\mathcal{A}(z,t)$ и фазы $\varphi(z,t)$

$$2c\left[\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial z\partial t}-\underbrace{\mathcal{A}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial t}}+i\mathcal{A}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t}+i\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+i\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]+$$

$$+\underbrace{\omega_D^2\mathcal{A}+\omega_p^2\mathcal{A}}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}+2i\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}\right)=0\ , \quad (4.29a)$$

$$\frac{\partial\omega_p^2}{\partial t}=(\omega_n^2-\omega_p^2)W(|\mathcal{A}|)\ . \quad (4.29b)$$

Из уравнения (4.29a) можно получить линейное дисперсионное соотношение, для этого положив равной нулю сумму слагаемых, выделенных нижними фигурными скобками

$$2c\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\omega_D^2+\omega_p^2\ . \quad (4.30)$$

Далее перепишем систему уравнений (4.29) в лабораторной системе координат, связанную с лазерным импульсом $z\to z$, $\tau=t-q(z)$,

$$2c\left[\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial z\partial\tau}-\frac{dq}{dz}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\tau^2}+\underline{i\mathcal{A}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\tau}-\frac{dq}{dz}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}\right)}+\underbrace{i\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{dq}{dz}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)}+\right.$$

$$\left.+i\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}-\underbrace{\frac{dq}{dz}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\tau}}\right)\right]+2i\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}\right)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}=0\ , \quad (4.31a)$$

$$\frac{\partial\omega_p^2}{\partial\tau}=(\omega_n^2-\omega_p^2)W(|\mathcal{A}|) \quad (4.31b)$$

и определим параметр $q(z)$ таким образом, чтобы исключить часть слагаемых в уравнении (4.31a) (которые выделены нижней фигурной скобкой)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=2\frac{dq}{dz}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\ . \quad (4.32)$$

Используя линейное дисперсионное соотношение (4.30) и полагая, что дисперсия групповой скорости в первую очередь определяется волноводной дисперсией, т.е. $\omega_D^2\gg\omega_p^2$

$$2c\omega\kappa\simeq-\omega_D^2 \quad (4.33)$$

можно переписать уравнение (4.32) для $q(z)$ в следующе виде

$$q(z)=\frac{\omega_D^2}{2c}\int\limits_0^z\frac{dz'}{\omega^2(z')}\ , \quad (4.34)$$

где $\omega = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}$ – локальная несущая частота, $\kappa = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ – локальный волновой вектор. Обратимся теперь к слагаемому в уравнении (4.31a), которое выделено нижней линией. Его можно переписать с учетом соотношения (4.32) в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{dq}{dz}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial z} \ . \tag{4.35}$$

Уравнение (4.31a) с учетом выражений (4.32), (4.34), (4.35) и в пренебрежении слагаемого $\dfrac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial z\partial\tau}$ можно записать в окончательном виде

$$2ic\left[\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\mathcal{A}}{2\omega}\right] + \frac{\omega_D^2}{\omega^3}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\tau^2} + \omega|\mathcal{A}|^2\mathcal{A} - 2i\frac{\partial}{\partial\tau}\left(|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}\right) = 0 \ . \tag{4.36}$$

Как отмечалось ранее, в процессе ионизации газа с меньшим потенциалом ионизации возможно значительное повышение частоты вверх по спектру (4.25). Получим теперь уравнение на частоту волнового пакета $\omega(z)$. В новых переменных ($z \to z$, $\tau = t - q(z)$) соотношение (4.30) можно представить в следующем виде

$$2c\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{dq}{dz}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right) = \omega_D^2 + \omega_p^2 \ . \tag{4.37}$$

Далее, дифференцируя данное выражение по τ и учитывая соотношение (4.32), можно получить уравнения на изменение локальной частоты лазерного импульса

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial\omega_p^2}{\partial\tau} \ . \tag{4.38}$$

В результате получаем окончательную упрощенную систему уравнений, которая позволяет исследовать динамику волнового пакета $\mathcal{A}(z,\tau)$ в среде с двумя сортами газа с существенно различными потенциалами ионизации в случае, когда несущая частота лазерного импульса ω может существенно меняться в процессе ионизации газа

$$2ic\left[\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\mathcal{A}}{2\omega}\right] + \frac{\omega_D^2}{\omega^3}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\tau^2} + \omega|\mathcal{A}|^2\mathcal{A} - 2i\frac{\partial}{\partial\tau}\left(|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}\right) = 0 \ , \tag{4.39a}$$

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial\omega_p^2}{\partial\tau} \ , \tag{4.39b}$$

$$\frac{\partial\omega_p^2}{\partial\tau} = (\omega_n^2 - \omega_p^2)W(|\mathcal{A}|) \ . \tag{4.39c}$$

Здесь газ с меньшим потенциалом ионизации будет давать ионизационную нелинейность, а газ с большим потенциалом ионизации – керровскую нелинейность. Эволюция поля описывается самосогласованной системой двух уравнений:

- уравнением для огибающей поля $\mathcal{A}(z,\tau)$ (см. уравнение (4.39a));

- уравнением пространственно-временной геометрической оптики (4.39b), описывающем изменение спектрального состава лазерного импульса в процессе ионизации газа.

Важно отметить, что система уравнений (4.39) непротиворечива, и в число наиболее важных проблем входят:

1. повышение частоты может быть существенным, зависящим от расстояния распространения;

2. второе слагаемое описывает потери энергии из-за ионизации.

Хотя уравнения (4.39) достаточно сложны, они довольно ясны с физической точки зрения, особенно по отношению к солитонам. Отметим, что в уравнении (4.39a) третье слагаемое описывает дисперсию, которая определяется волноводом. Четвертое слагаемое описывает кубичную нелинейность, пятое слагаемое – укручение продольного профиля импульса.

4.4.2 Самокомпрессия солитонов НУШ

Рассмотрим вначале наиболее простой случай. На вход нелинейной среды задается волновой пакет $\mathcal{A}(z,\tau)$ с шириной спектра много меньше несущей частоты ($\Delta\omega/\omega \ll 1$). В результате можно пренебречь последним слагаемым в уравнении (4.39a), ответственным за укручение продольного профиля импульса. В этом случае система уравнений, описывающая динамику лазерного импульса, имеет следующий вид

$$2ic\left[\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\mathcal{A}}{2\omega}\right]+\frac{\omega_D^2}{\omega^3}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\tau^2}+\omega|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}=0\ , \tag{4.40a}$$

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial z}=\frac{1}{c}(\omega_n^2-\omega_p^2)W(|\mathcal{A}|)\ . \tag{4.40b}$$

Без учета потерь

В нулевом приближении при анализе самокомпрессии волнового пакета пренебрежем потерями, связанными с нагревом плазмы, т. е. пренебрегаем вторым слагаемым

в уравнении (4.40a). Отметим, что в отсутствии ионизации газа в данном уравнении (4.40a) существует солитонное решение нелинейного уравнения Шредингера

$$\mathcal{A} = \Psi(\tau)\exp(ihz)\ , \tag{4.41}$$

где огибающая солитона Ψ соответствует сепаратриссе

$$\frac{d\Psi}{\sqrt{\dfrac{2c\omega^3}{\omega_D^2}\Psi^2 - \dfrac{\omega^4}{2\omega_D^2}\Psi^4}} = \pm d\tau\ . \tag{4.42}$$

Возвращаясь к исходным переменным получим:

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{2}\alpha\omega_D}{\omega^2}\frac{1}{\cosh(\alpha\tau)}\exp\left(\frac{i\alpha^2\omega_D^2 z}{4c\omega^3}\right)\ . \tag{4.43}$$

Отметим, что в случая слабой ионизации газа, когда несущая частота волнового пакета медленно изменяется в масштабах формирования солитона, мы можем представить решение системы уравнений (4.40) в виде (4.43). Как видно из решения (4.43), на фундаментальный солитон оно определяется двумя параметрами: несущая частота ω и α. Отметим, что эти два параметра можно связать, поскольку в уравнении (4.40a) в принебрежении ионизационных потерь существует интеграл задачи

$$\mathcal{I}_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{A}|^2 d\tau\ . \tag{4.44}$$

Наличие данного интеграла позволяет переписать солитонное решение (4.43) только через одну величину ω, которая увеличивается в процессе ионизации газа

$$|\mathcal{A}| = \frac{\mathcal{I}_s\omega^2}{\sqrt{8}\omega_D}\frac{1}{\cosh\left(\dfrac{\mathcal{I}_s\omega^4\tau}{4\omega_D^2}\right)}\ . \tag{4.45}$$

Как видно из выражения (4.45), длительность солитона можно определить как $\tau_p = \dfrac{4\omega_D^2}{\mathcal{I}_s\omega^4}$. Следовательно, фактор сжатия волнового пакета

$$\frac{\tau_o}{\tau_p} = \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^4 \tag{4.46}$$

будет увеличиваться с повышением частоты в процессе распространения. Здесь τ_o – входная длительность импульса, ω_o – начальная частота. В то же время амплитуда лазерного импульса будет увеличиваться с увеличением несущей частоты по закону $|\mathcal{A}| \propto \omega^2$.

С учетом потерь ($\mathcal{I}_s \neq const$)

Как отмечалось ранее, второе слагаемое в уравнении (4.40a) описывает потери энергии в процессе ионизации газа. В этом случае можно также получить аналитические соотношения. Будем полагать, что несущая частота волнового пакета медленно изменяется ω на масштабе формирования солитона в процессе ионизации газа. В дальнейшем мы будем опираться на солитонные решения, на которых временной чирп мал по сравнению со средней несущей частотой, поэтому будем считать, что частота в главном приближении зависит только от эволюционной переменной z. Поэтому представим решение уравнения (4.40a) в следующем виде

$$\mathcal{A}(z,\tau) = \frac{\mathcal{B}(z,\tau)}{\sqrt{\omega(z)}} \tag{4.47}$$

где знаменатель в выражении как раз и описывает уменьшение амплитуды волнового пакета из-за потерь, связанных с ионизацией газа. В результате уравнение на огибающую волнового пакета примет следующий вид

$$2ic\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} + \frac{\omega_D^2}{\omega^3}\frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial \tau^2} + |\mathcal{B}|^2\mathcal{B} = 0 \ , \tag{4.48a}$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial z} = \frac{1}{c}(\omega_n^2 - \omega_p^2)W(|\mathcal{B}|) \ . \tag{4.48b}$$

Будем искать решение уравнения (4.48a) в виде

$$\mathcal{B} = \Psi(\tau)\exp(ihz) \ , \tag{4.49}$$

где огибающая солитона Ψ соответствует сепаратриссе

$$\frac{d\Psi}{\sqrt{\dfrac{2c\omega^3}{\omega_D^2}\Psi^2 - \dfrac{\omega^3}{2\omega_D^2}\Psi^4}} = \pm d\tau \ . \tag{4.50}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим:

$$|\mathcal{B}| = \frac{\sqrt{2}\alpha\omega_D}{\omega^{3/2}}\frac{1}{\cosh(\alpha\tau)} \ . \tag{4.51}$$

Как следует из уравнения (4.48a), величина

$$\mathcal{I}_B = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{B}|^2 d\tau = const \tag{4.52}$$

является интегралом задачи. Перепишем далее решение (4.51) через данный интеграл

$$|\mathcal{B}| = \frac{\mathcal{I}_B \omega^{3/2}}{\sqrt{8}\omega_D} \frac{1}{\cosh\left(\dfrac{\mathcal{I}_B \omega^3 \tau}{4\omega_D^2}\right)} \ . \tag{4.53}$$

В результате получаем решение уравнения (4.40a)

$$|\mathcal{A}| = \mathcal{A}_o \frac{\omega}{\omega_o} \frac{1}{\cosh\left(\dfrac{\mathcal{A}_o \omega^3 \tau}{\sqrt{2}\omega_D \omega_o}\right)} \ , \tag{4.54}$$

где $\mathcal{A}_o = \dfrac{\mathcal{I}_B \omega_o}{\sqrt{8}\omega_D}$ – начальная амплитуда солитона, ω_o – начальная частота.

Как видно, фактор компрессии лазерного импульса

$$\frac{\tau_o}{\tau_p} = \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^3 \tag{4.55}$$

увеличивается с повышением частоты в процессе распространения. Здесь τ_o – входная длительность импульса. Таким образом, с учетом энергетических потерь лазерный импульс сжимается медленнее, чем в отсутствии потерь (4.46). Также следует отметить, что несмотря на энергетические потери, амплитуда солитоноподобного импульса $\mathcal{A}$ увеличивается с повышением частоты ω. Это отражено в экспоненциально ускоряющемся процессе компрессии импульса, поскольку скорость ионизации $W(|\mathcal{A}|)$ – экспоненциально растущая функция.

Далее найдем закон изменения длительности солитона τ_p от эволюционной координаты z в случае, когда степень ионизации газа мала $\omega_n^2 \gg \omega_p^2$ (см. уравнение (4.40b)). Как отмечалось выше, длительность волнового пакета уменьшается с увеличением несущей частоты по закону $\tau_p \propto \dfrac{1}{\omega^3}$, поэтому найдем выражение для частоты $\omega(z)$. Для простоты воспользуемся аппроксимацией вероятности ионизации $W(|\mathcal{A}|)$ в степенном виде:

$$W(|\mathcal{A}|) = \mu_m |\mathcal{A}|^{2m} \ , \quad m > 1 \ . \tag{4.56}$$

В рассматриваемом случае циркулярно-поляризованного излучения скорость ионизации не зависит от фазы поля даже для импульсов длительностью в несколько колебаний поля [198]. Отметим, что при этом диссипация лазерного излучения, характерная для туннельной ионизации, сохраняется и описывается вторым слагаемым в уравнении (4.40a).

В этом случае уравнение (4.40b) на частоту можно переписать в следующем виде

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial z} = \frac{\omega_n^2 \mu_m}{c} |\mathcal{A}|^{2m} \ . \tag{4.57}$$

Учитывая, что частота лазерного импульса ω , главным образом, зависит только от переменной z, в этом случае необходимо усреднить правую часть уравнения (4.57) по форме импульса

$$\frac{d\omega^2}{dz} = \frac{\omega_n^2 \mu_n}{c\mathcal{I}_s} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{A}(z,\tau)|^{2(m+1)} d\tau \ , \tag{4.58}$$

где $\mathcal{I}_s$ – энергия в лазерном импульсе (4.44). Воспользовавшись ранее найденным решением на солитон (4.54), получим выражение для несущей частоты $\omega(z)$ при $m > 1$

$$\omega(z) = \frac{\omega_o}{\left[1 - z\dfrac{m\omega_n^2 \mu_m \alpha_m \mathcal{A}_o^{2m}}{2c}\right]^{1/2m}} \ , \tag{4.59}$$

где $\alpha_m = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{\cosh^{2(m+1)} x}$ есть число. Учитывая, что длительность солитона связана с несущей частотой по закону $\tau_p = \tau_o \left(\dfrac{\omega_o}{\omega}\right)^3$, получаем окончательное решение для τ_p

$$\tau_p(z) = \tau_o \left[1 - z\frac{m\omega_n^2 \mu_m \alpha_m \mathcal{A}_o^{2m}}{2c}\right]^{3/2m} \ . \tag{4.60}$$

Таким образом, несмотря на неустранимые энергетические потери, связанные с преобразованием части энергии электрического поля в лазерном импульсе в энергию дрейфового движения электронов, остающуюся у них после окончания лазерного импульса, как следует из выражения (4.60), длительность солитона обратится в нуль на конечной длине z_c нелинейной среды

$$z_c = \frac{2c}{m\omega_n^2 \mu_m \alpha_m \mathcal{A}_o^{2m}} \ . \tag{4.61}$$

Далее проведем сравнение результатов численного моделирования с рассмотренным выше качественным анализом.

На рисунке 4.4**(a)** красной пунктирной линией представлена зависимость длительности лазерного импульса τ_p от эволюционной координаты z, полученная на основе результатов численного моделирования системы уравнений (4.15). На вход нелинейной среды задавался волновой солитон (4.17)-(4.18) при $\delta = 0.1$. Временная динамика лазерного импульса при данных параметрах представлена на рисунке 4.1**(a)**. На рисунке 4.4**(a)** зеленой линией представлена зависимость длительности солитонного решения пакета от z, полученная на основе численного анализа приближенной системы уравнений (4.40), где в качестве вероятности ионизации $W(|\mathcal{A}|)$

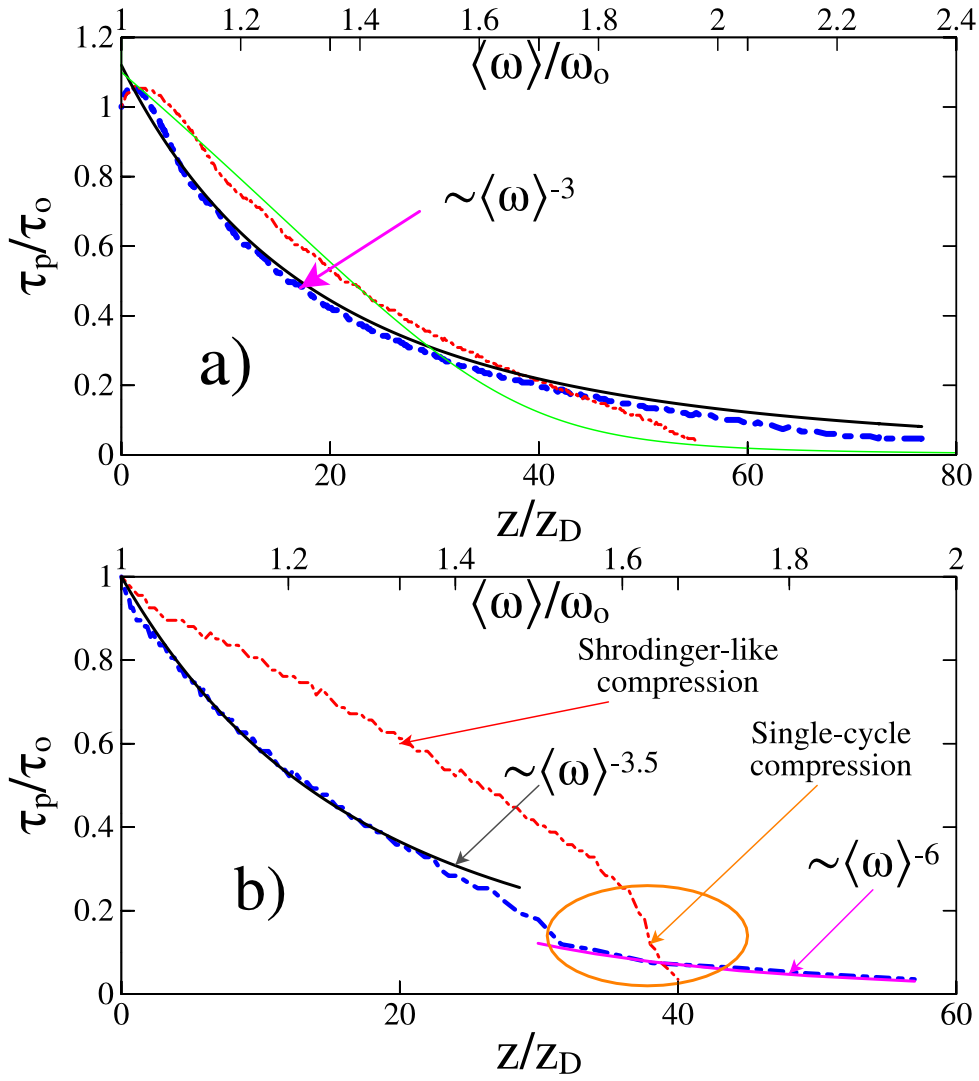


Рис. 4.4: Зависимости длительности лазерного импульса τ_p от эволюционной координаты z (красная пунктирная линия), а также от средней несущей частоты $\langle\omega\rangle$ (синяя штрих-пунктирная линия) для разных значений параметра δ: **(a)** $\delta = 0.1$ и **(b)** $\delta = 0.2$. Кроме того, черной и пурпурной линиями представлены аппроксимации зависимости длительности лазерного импульса от средней несущей частоты. Зеленой сплошной линией на рисунке **(a)** представлена зависимость $\tau_p(z)$, вычисленная на основе упрощенной системы уравнений (4.40) в случае туннельной ионизации. Здесь на оси ординат представлена длительность волнового пакета τ_p, нормированная на начальное значение τ_o. На нижней оси абсцисс приведена координата z, нормированная на линейную дисперсионную длину z_D. На верхней оси абсцисс приведена средняя несущая частота $\langle\omega\rangle$, нормированная на начальное значение.

задавалась уже туннельная. На нижней оси абсцисс приведена эволюционная координата z, нормированная на линейную дисперсионную длину L_D. По оси ординат приведена длительность волнового пакета, нормированная на начальное значение.

На рисунке 4.4**(a)** мы также представили синей штрихпунктирной линией зависимость длительности лазерного импульса τ_p от средней несущей частоты $\langle\omega\rangle$, полученной на основе результатов численного моделирования системы уравнений (4.15) для входного волнового солитона ((4.17)-(4.18)) при $\delta = 0.1$, и сравнили ее с зависимостью $\tau_p(\omega) \propto \dfrac{1}{\omega^3}$, полученной на основе качественного анализа упрощенной системы уравнений (4.40). На верхней оси абсцисс приведена средняя несущая частота $\langle\omega\rangle$, нормированная на начальное значение. Из данного рисунка видно, что для достаточно длинных лазерных импульсов имеется довольно хорошее согласие результатов численного моделирования с результатами качественного анализа, и, таким образом, подтверждается стадия компрессии Шредингеровского солитона. На этой стадии лазерный импульс укорачивается в 8 раз при увеличении средней несущей частоты только в два раза.

4.4.3 Самокомпрессия солитонов DNLS

Как следует из рисунка 4.4**(a)**, в долговременной эволюции волнового пакета в нелинейной среде ($z/z_D \sim 50$), когда лазерный импульс становится фактически однопериодным, процесс самокомпрессии резко ускоряется, но с медленным изменением средней несущей частоты $\langle\omega\rangle$. В качестве иллюстрации на рисунке 4.4**(b)** мы представили результаты численного моделирования, когда на вход нелинейной среды был задан волновой солитон ((4.17)-(4.18)), содержащий всего два колебания поля ($\delta = 0.2$). Как отмечалось ранее, особенностью солитона с небольшим числом колебаний поля является наличие довольно сильной фазовой модуляции $\phi(\tau)$, как следует из выражения (4.20), и это делает сильное влияет на процесс ионизационно-индуцированной самокомпрессии лазерного импульса.

Далее получим оценку на закон уменьшения длительности волнового пакета от несущей частоты для данного случая. Отметим, что при дальнейшем увеличении ширины спектра волнового пакета $\Delta\omega$ в процессе укорочения длительности лазерного импульса или при уменьшении исходной начальной длительности волнового пакета, который задается на вход нелинейной среды, система уравнений (4.40) будет некорректно описывать динамику волнового пакета, так как данное уравнение

справедливо при $\dfrac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1$. Для адекватного качественного описания поля в волновом пакете для случая $\dfrac{\Delta\omega}{\omega} \lesssim 1$ необходимо вернуться к первоначальной системе уравнений (4.39), в которой содержится дополнительное слагаемое, ответственное за зависимость групповой скорости импульса от амплитуды поля

$$2ic\left[\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\mathcal{A}}{2\omega}\right]+\frac{\omega_D^2}{\omega^3}\frac{\partial^2\mathcal{A}}{\partial\tau^2}+\omega|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}-2i\frac{\partial}{\partial\tau}\left(|\mathcal{A}|^2\mathcal{A}\right)=0\ , \tag{4.62a}$$

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial\omega_p^2}{\partial\tau}\ , \tag{4.62b}$$

$$\frac{\partial\omega_p^2}{\partial\tau}=(\omega_n^2-\omega_p^2)W(|\mathcal{A}|)\ . \tag{4.62c}$$

В рамках уравнения (4.62a) в отсутствии ионизационной нелинейности ($\omega_p = 0$) существует солитонное решение [150]. Воспользуемся данным решением для получения оценки изменения длительности волнового пакета в случае плавного изменения несущей частоты импульса в процессе ионизации газа на масштабах дисперсионной и нелинейной длин. С учетом энергетических потерь, связанных с ионизацией газа, представим решение уравнения (4.62), как и выше, в следующем виде

$$\mathcal{A}(z,\tau)=\frac{\mathcal{B}(z,\tau)}{\sqrt{\omega}}\ . \tag{4.63}$$

При такой записи решения учитывается уменьшение амплитуды волнового пакета из-за ионизационных потерь. В результате уравнение на огибающую волнового пакета примет следующий вид

$$2ic\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}+\frac{\omega_D^2}{\omega^3}\frac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial\tau^2}+|\mathcal{B}|^2\mathcal{B}-\frac{2i}{\omega}|\mathcal{B}|^2\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\tau}=0\ , \tag{4.64a}$$

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial z}=\frac{1}{c}(\omega_n^2-\omega_p^2)W(|\mathcal{B}|)\ . \tag{4.64b}$$

Далее представим решение уравнений в виде

$$\mathcal{B}(z,\tau)=\mathcal{F}(\tau)\exp[ihz+i\varphi(\tau)]\ . \tag{4.65}$$

Тогда для амплитуды $\mathcal{F}(\tau)$ и фазы $\varphi(\tau)$ солитона получаем следующую систему уравнений

$$-2ch\mathcal{F}+\frac{\omega_D^2}{\omega^3}\left[\frac{d^2\mathcal{F}}{d\tau^2}-\mathcal{F}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right]+\mathcal{F}^3+\frac{2\mathcal{F}^3}{\omega}\frac{d\varphi}{d\tau}=0\ , \tag{4.66a}$$

$$\omega_D^2\left(\mathcal{F}\frac{d^2\mathcal{F}}{d\tau^2}+2\frac{d\mathcal{F}}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau}\right)-2\omega^2\mathcal{F}^2\frac{d\mathcal{F}}{d\tau}=0 \tag{4.66b}$$

решение которой можно записать в следующем виде

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2\omega_D^2} \int\limits_{-\infty}^{\tau} \mathcal{F}^2 d\tau' \ , \tag{4.67a}$$

$$\mathcal{F}^2 = \frac{8hc}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{4\kappa}{\omega^2}} \cosh(2\sqrt{\kappa}\tau)} \ , \tag{4.67b}$$

где $h = \dfrac{\mathcal{F}_m^2}{4c}\left(1 + \dfrac{\omega \mathcal{F}_m^2}{2\omega_D^2}\right)$, $\mathcal{F}_m$ – максимальная амплитуда солитона, $\kappa = \dfrac{2c\omega^3}{\omega_D^2}h$. Как следует из выражения, на фазе (4.67a) солитона отличительной особенностью решения $\mathcal{A}$ от солитонов НУШ является достаточно сильная частотная модуляция в лазерном импульсе. Отметим, что данная частотная модуляция (4.67a) структурно схлжа с частотной модуляцией, которая содержится в точном солитоном решении (4.18b) волнового уравнения. Из выражения (4.67b) видно, что длительность солитонноподобного решения можно определить через параметр κ. Уменьшение длительности солитона сопровождается монотонным увеличением несущей частоты ω и максимальной амплитуды волнового пакета $\mathcal{F}_m$. Отметим, что в рамках уравнения (4.64a) в процессе эволюции лазерного импульса сохраняется следующая величина

$$\mathcal{I}_B = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{B}|^2 d\tau \ , \tag{4.68}$$

которая на найденной волновой структуре (4.68) равна

$$\mathcal{I}_B = \frac{4\omega_D^2}{\omega^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}} \ , \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{4\kappa}{\omega^2}} \ . \tag{4.69}$$

Учитывая, что $\sqrt{\kappa}$ по сути является шириной спектра волнового пакета ($\sqrt{\kappa} \simeq \dfrac{1}{\tau_p} \sim \Delta\omega$) и мы рассматриваем ситуацию $\dfrac{\Delta\omega}{\omega} \lesssim 1$, поэтому параметр ϵ можно упростить

$$\epsilon \simeq 1 + \frac{2\kappa}{\omega^2} \ . \tag{4.70}$$

С учетом последнего соотношения, выражение для энергии $\mathcal{I}_B$ можно записать в следующем виде

$$\mathcal{I}_B \simeq \frac{4\omega_D^2}{\omega^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega^2}} \ . \tag{4.71}$$

В результате получаем окончательное выражение для длительности волнового пакета в зависимости от несущей частоты

$$\tau_p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \simeq \frac{1}{\left[\omega \tan\left(\dfrac{\mathcal{I}_B \omega^2}{4\omega_D^2}\right)\right]} \ . \tag{4.72}$$

Таким образом, длительность лазерного импульса τ_p уменьшается с увеличением несущей частоты ω в процессе ионизации газа значительно быстрее, чем для солитона нелинейного уравнения Шредингера (4.55).

На рисунке 4.4**(b)** черной линией показана полученная зависимость $\tau_p(\omega)$, которая хорошо согласуется с результатами численных расчетов, базирующихся на исходной системе уравнений (4.15), что можно увидеть на рисунке. Отметим, что в данной области частот ω длительность солитона может быть аппроксимирована законом $\tau_p(\omega) \propto \dfrac{1}{\omega^{3.5}}$. Фактически, из-за резкой зависимости скорости ионизации $W(|\mathcal{U}|)$ от интенсивности поля, газ существенно ионизируется только в пределах макушки импульса, где самые высокие частоты спектра солитона с малым числом осцилляций как раз и локализованы (см. выражение (4.20)). Это, очевидно, позволяет обеспечить эффективную экстремальную компрессию в центральной части лазерного импульса посредством медленного увеличения средней частоты ω, что означает факт существенно меньших ионизационных потерь по сравнению со случаем на рисунке 4.4**(b)** при $z/z_D \lesssim 35$. Это связано с тем, что из-за более высоких амплитуд для солитонов с малым числом колебаний поля ионизация газа имеет место лишь в малой центральной части, даже при достижении полной степени ионизации, что отражено на рисунке 4.1**(a)**, таким образом, в меньшей мере затрагивая другую большую часть солитона. Подобный эффект проявляется в большей степени на втором этапе экстремальной компрессии при $z/z_D \sim 36 - 40$, где солитон с одной осцилляцией в дальнейшем укорачивается за счет увеличения частоты в узкой центральной части импульса, как это видно из левой вставки рисунка 4.1. Так как на этой стадии средняя частота должна медленно изменяться, как мы видим в этой области частот, зависимость длительности импульса $\tau_p(\omega) \propto \dfrac{1}{\omega^6}$ (см. рисунок 4.4**(b)**).

Таким образом, в волноведущей системе с двумя независимыми типами нелинейностей (кубической и ионизационной) имеет место адиабатическое уменьшение длительности лазерного импульса вплоть до одного колебания поля, сопровождаемая сверхшироким смещением спектра в коротковолновую область. Кубичная нелинейность определяет структуру солитона, а ионизационная приводит к перестройки частоты вверх по спектру, и соответственно, к уменьшению длительности. В таком случае, режим самокомпрессии солитона включает в себя две качественно отличающиеся друг от друга последовательные стадии. На первой солитонный импульс сжимается обычным образом, когда процесс адиабатически развивается, согласуясь с солитонными соотношениями. При этом экстремальная компрессия имеет место

на втором этапе, когда солитон с малым числом колебаний поля становится по-настоящему однопериодным со сверхширокими спектром. Продемонстрировано, что на данной стадии процесс дальнейшей самокомпрессии значительно ускоряется и сопровождается повышением сверхширокого спектра, сохраняя однопериодичность солитона на протяжении всего времени.

4.5 Оптимизация режима самокомпрессии лазерного импульса

Чтобы избежать сложную динамику солитона высокого порядка [158] и, таким образом, достигнуть максимальной эффективной самокомпрессии лазерного импульса, порядок солитона $\mathcal{N}$ (см. выражение (4.27)) не должен превышать 2. Мы провели серию расчетов для различных значений параметра солитона высокого порядка $\mathcal{N}$, и на рисунках 4.5**(a,b)** представлена характерная зависимость длительности волнового пакета τ_p от эволюционной координаты z для трех различных значениях параметра $\mathcal{N} = 1,\ 1.2,\ 1.4$ и для двух значений параметра $\beta = 0.01$, $\beta = 0.04$, который, как отмечалось ранее, характеризует концентрацию газа с меньшим потенциалом ионизации $\beta = \dfrac{\omega_n^2}{\omega_D^2}$ при фиксированном значении параметра дисперсии ω_D^2. Как видно из представленных рисунков, с увеличением β и $\mathcal{N}$ скорость укорочения длительности лазерного импульса увеличивается. При $\mathcal{N} \leq 1.4$ на начальном этапе в процессе формирования солитона наблюдается незначительное излучение энергии в непрерывный спектр, поскольку в первоначальном распределении содержатся излишки энергии. В дальнейшем длительность солитона монотонно уменьшается (см. рисунки 4.5**(a,b)**). Однако при $\mathcal{N} \sim 1.4$ проявляются осцилляции в зависимости длительности лазерного импульса $\tau_p(z)$. С увеличением параметра $\mathcal{N}$ характер взаимодействия меняется. При $\mathcal{N} > 1.4$ формирующийся солитон начинает взаимодействовать с окружающем его излучением. В результате появляются колебания в зависимости длительности волнового пакета τ_p от эволюционной координаты z. Для демонстрации данного режима на рисунке 4.6 приведена характерная динамика лазерного импульса, когда на вход нелинейной среды с $\beta = \dfrac{\omega_n^2}{\omega_D^2} = 0.04$ задан солитон высокого порядка (4.27) с параметрами $\delta = 0.1$, $\mathcal{N} = 1.6$. Как видно из данного рисунка, длительность волнового пакета достигает минимального значения при $z \sim 11 z_D$. Однако, как видно из вставки на рисунке 4.6, при дальнейшем распространении лазерного импульса в

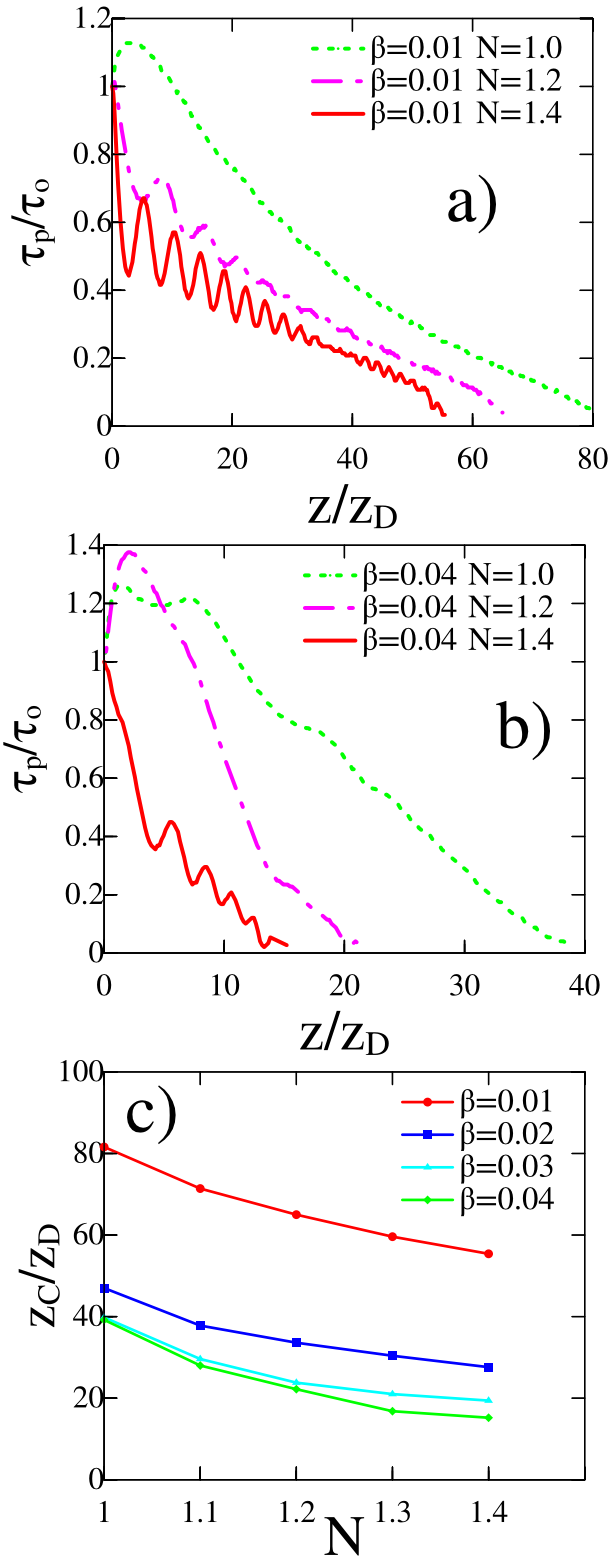


Рис. 4.5: Зависимость длительности волнового пакета τ_p от эволюционной координаты z для трех различных значений параметра $\mathcal{N}$ (4.27) и для двух значений параметра $\beta = \dfrac{\omega_n^2}{\omega_D^2}$: $\beta = 0.01$ **(a)** и $\beta = 0.04$ **(b)**. **(c)** Зависимость длины компрессии лазерного импульса z_C, на которой длительность волнового пакета сжимается до 250 ас от параметров $\mathcal{N}$ и β. Здесь $z_D = 40$ – линейная дисперсионная длина.

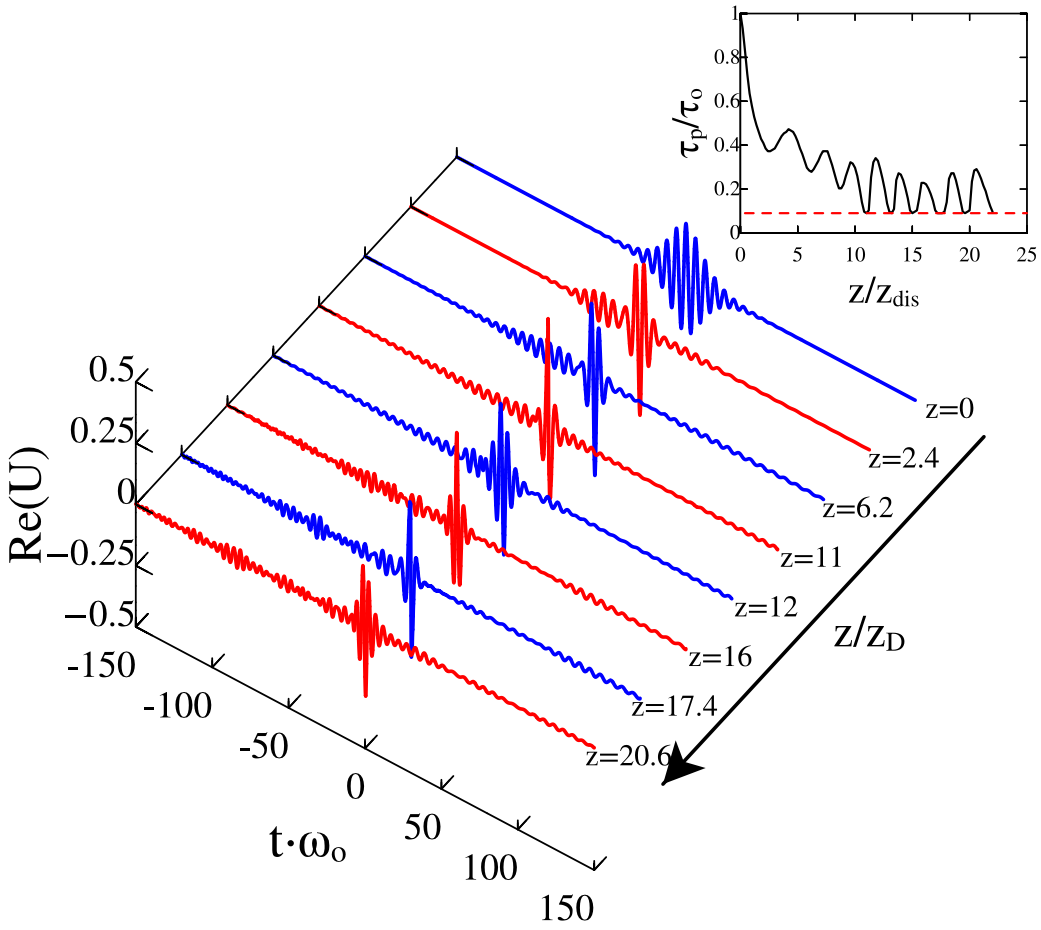


Рис. 4.6: Динамика лазерного импульса $\mathcal{E}_x = \mathcal{R}\mathrm{e}(U)$, когда на вход нелинейной среды с $\beta = \dfrac{\omega_n^2}{\omega_D^2} = 0.04$ задан солитон высокого порядка (4.27) с параметрами $\mathcal{N} = 1.6$, $\delta = 0.1$. На вставке приведена зависимость длительности лазерного импульса τ_p, нормированная на начальное значение τ_o, от эволюционной координаты z. Здесь $z_D = 40$ – дисперсионная длина.

нелинейной среде длительность волнового пакета $\tau_p(z)$ не уменьшается, а начинает осциллировать вблизи значения $\tau_p \simeq 0.15\tau_o$, где τ_o – начальная длительность лазерного импульса.

На рисунке 4.5**(c)** представлена зависимость длины компрессии лазерного импульса z_C, на которой длительность волнового пакета сжимается до 250 ас, от параметров β и $\mathcal{N}$. Из представленного рисунка видно, что путем подбора параметров β и $\mathcal{N}$ можно существенно уменьшить длину компрессии z_C волнового пакета. Например, если на вход нелинейной среды с параметром $\beta = 0.01$ задать лазерный импульс с параметрами: $\delta = 0.1$, $\mathcal{N} = 1$, то волновой пакет скомпрессируется до длительности 250 ас на длине $z_C = 83z_D$. Для лазерного импульса с параметрами: $\delta = 0.1$, $\mathcal{N} = 1.4$ при $\beta = 0.04$ длина компрессии в этом случае уменьшится в 5.5 раз, т.е. $z_C = 15z_D$.

Обратимся к полученной ранее оценке (4.61) на длину компрессии волнового пакета, в которой начальная амплитуда солитона $\mathcal{A}_o \propto \dfrac{1}{\tau_o}$ обратно пропорциональна длительности волнового пакета τ_o. Как следует из данного выражения, для более длинных лазерных импульсов длина компрессии значительно возрастает. В этом случае, для сокращения длины компрессии мы воспользуемся начальным профилем (4.27) для $\mathcal{N} \geq 2$, который в отсутствии ионизации ($\beta = 0$) распадется на последовательность волновых солитонов (4.18) с параметрами $\delta^{(n)} = (2n-1)\delta^{(0)}$, где $n = 1, \ldots, [\mathcal{N}]$ – есть последовательность целых числе (см. Главу 1), $\delta^{(0)}$ – параметр, характеризующий начальную длительность солитона. На рисунке 4.7**(a)** представлены результаты численного моделирования для лазерного импульса с начальным профилем (4.27) при $\delta = 0.03$, $N = 2.1$. Как следует из рисунка, при $z = 0.89z_D$ волновой пакет сжимается наиболее эффективно, а затем он дробится на два солитона с δ: $\delta^{(1)} = 0.03$, $\delta^{(2)} = 0.09$. Таким образом, длительность второго солитона в три раза меньше, чем длительность начального распределения. Отметим, что второй солитон отстает от первого, поскольку скорость солитона γ уменьшается с увеличением δ.

Еще более эффективную самокомпрессию лазерного импульса можно ожидать в режиме дополнительной ионизации газа ($\beta \neq 0$). На рисунке 4.7**(b)** представлена динамика волнового пакета с теми же параметрами, но с учетом ионизации газа с меньшим потенциалом ионизации для $\beta = 0.02$. На начальном этапе ($z < z_D$), когда ионизация отсутствует (из-за малости амплитуды в лазерном импульсе), динамика лазерного поля близка к рассмотренному выше случаю для $\beta = 0$ (см. рисунок 4.7**(a)**). В результате дробления начального распределения волнового пакета происходит возбуждение высокоинтенсивного солитона (4.17), который начинает дополни-

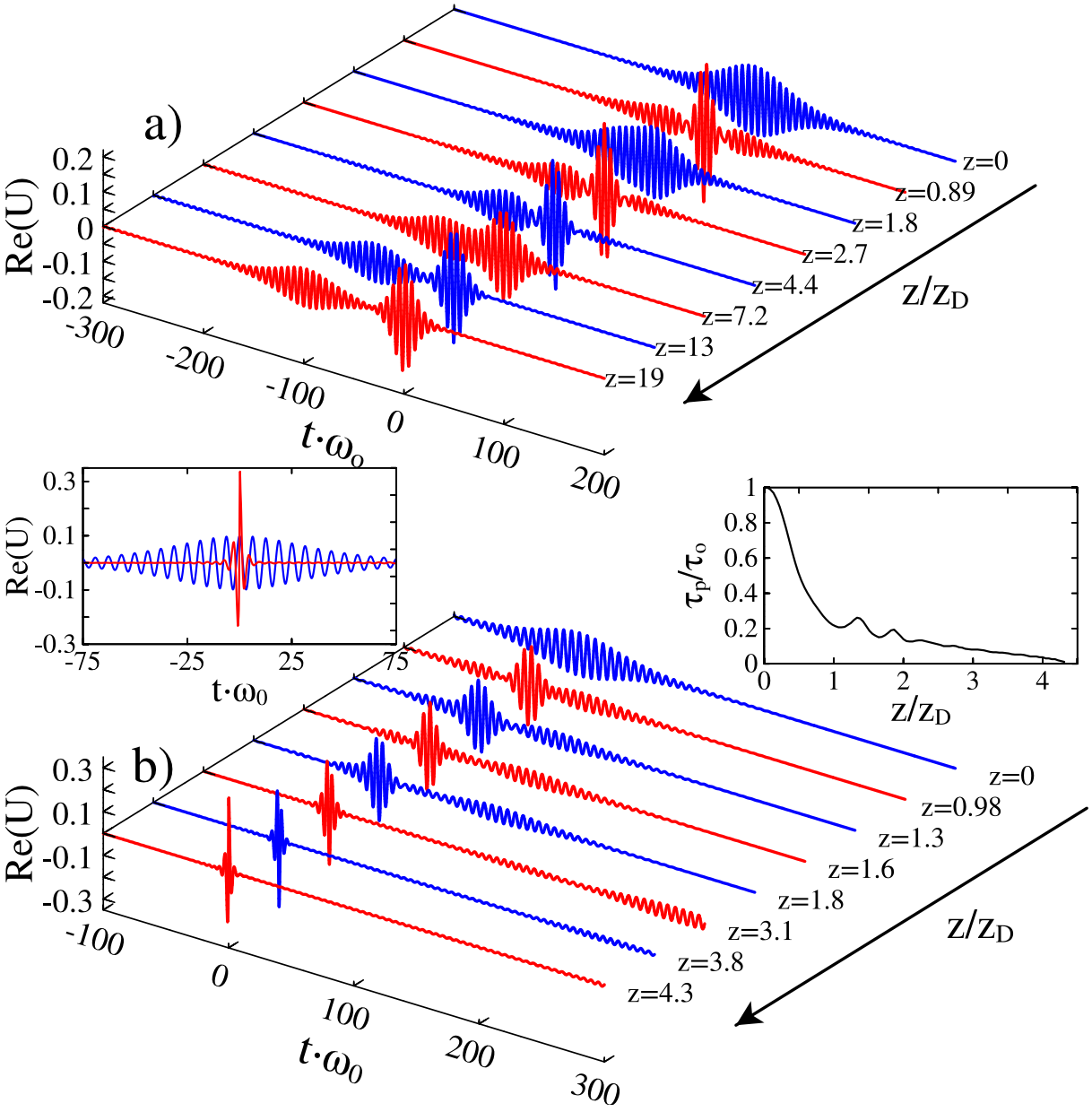


Рис. 4.7: Динамика лазерного импульса (4.27) с $\delta = 0.03$, $\mathcal{N} = 2.1$ для двух качественно разных случаев: **(a)** для $\beta = 0$ (ионизация отсутствует); **(b)** $\beta = 0.02$. На левой вставке на рисунка **(b)** представлены распределения импульсов при $z = 0$ (синяя линия), $z = 4.3 z_{diss}$ (красная линия). На правой вставке рисунка **(b)** представлена зависимость от эволюционной координаты z длительность лазерного импульса τ_p, нормированная на начальное значение τ_o. Здесь $z_D = 360$.

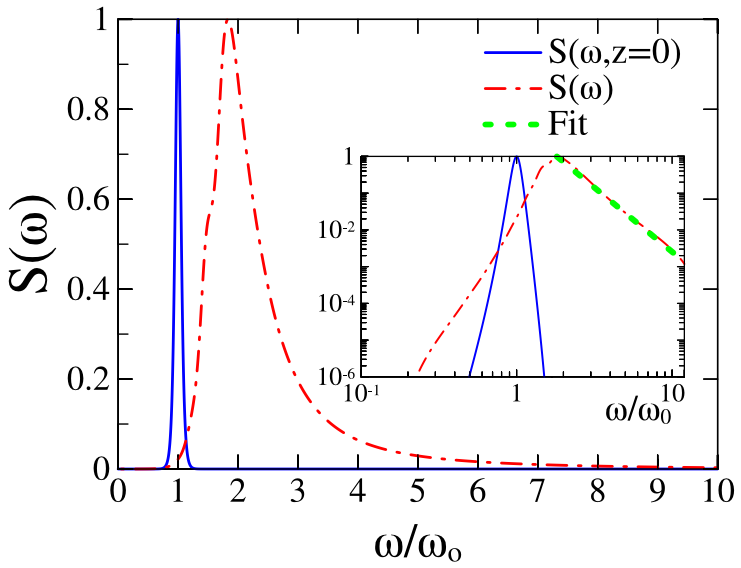


Рис. 4.8: Распределения спектра мощности для входного и сжатого импульса при $\mathcal{N} = 2.1$, $\delta = 0.03$, $\beta = 0.02$. Синяя линия соответствует начальному спектру, а красная пунктирная линия – спектру сжатого импульса. На вставке представлены спектры в логарифмических осях. Зелеными точками представлена аппроксимация правой части спектра сжатого импульса степенным законом $S(\omega) \propto 1/\omega^{3.5}$.

тельно ионизовать газ с меньшим потенциалом ионизации. В результате интенсивный волновой солитон начинает быстро укорачиваться и обгонять первый волновой солитон, поскольку групповая скорость волнового пакета $\frac{1}{\gamma} \propto \omega^2$ растет из-за повышения несущей частоты солитона в процессе ионизации газа. На левой вставке рисунка 4.7**(b)** представлены распределения импульса при $z = 0$ (синяя линия) и при $z = 4.3z_D$ (красная линия), а на правой вставке – зависимость от эволюционной координаты z длительность лазерного импульса τ_p, которая нормирована на начальную длительность τ_o. Как следует из данного рисунка, входной лазерный импульс сжался в 100 раз. В размерных единицах начальная длительность соответствует 25 фс, а длительность сжатого импульса – 250 ас. Отметим, что в сжатом импульсе содержится примерно 55 % начальной энергии.

На рисунке 4.8 приведены нормированные распределения спектра мощности $|S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}\mathrm{e}[U(\tau)]e^{i\omega\tau}d\tau|^2$ для начального (синяя линия) и сжатого волнового пакета (красная пунктирная линия). Как следует из данного рисунка, спектр выходного импульса существенно уширился и плавно спадает в коротковолновую область. В частности, средняя несущая частота возросла в 2.5 раза ($\langle\omega_{out}\rangle \simeq 2.5\langle\omega_{in}\rangle$), а средняя ширина спектра увеличилась в 60 раз ($\langle\Delta\omega_{out}\rangle \simeq 60\langle\Delta\omega_{in}\rangle$). Для определения закона спадания спектра построим спектры в логарифмических осях. Зелеными точками показана аппроксимация спектра сжатого импульса. Как показал анализ, коротковолновая часть спектра сжатого импульса хорошо описывается законом $S_{Fit} \propto 1/\omega^{3.5}$. Степенное поведение спектра связано с тем, что имеет место эффективная перекачка энергии из основной части импульса в коротковолновую часть спектра, поскольку дисперсия на высоких частотах практически отсутствует. Это свидетельствует об образовании разрыва поля несколько более слабого, чем на ударной волне.

Были проведены дополнительные исследования влияния слабой несимметрии профиля солитонного типа на укорочение длительности лазерного импульса. Результаты численных расчетов для начального распределения

$$\mathcal{U} = \frac{\sqrt{2}\mathcal{N}\delta(1+\alpha\tau)\exp(i\tau)}{\cosh(\delta\tau)}\ , \tag{4.73}$$

с разными значениями параметра $\alpha = 10^{-2}\ldots 10^{-1}$ ($\mathcal{N} = 2.1$, $\delta = 0.03$) показали, что режим самокопрессии является устойчивым. Имеет место лишь некоторое увеличение длины самокомпрессии, которое связано с трансформацией исходного распределения в солитонное.

4.6 Обсуждение результатов

Показано, что в волноведущей системе с двумя независимыми типами нелинейностей (кубической и ионизационной) имеет место адиабатическое уменьшение длительности лазерного импульса вплоть до одного колебания поля, сопровождаемая сверхшироким смещением спектра в коротковолновую область. Кубичная нелинейность определяет структуру солитона, а ионизационная приводит к перестройки частоты вверх по спектру, и соответственно, к уменьшению длительности. Режим самокомпрессии солитона, в таком случае, включает в себя две качественно отличающиеся друг от друга последовательные стадии. На первой лазерный импульс солитонного типа сжимается обычным образом, когда процесс адиабатически развивается, согласуясь с солитонными соотношениями. При этом экстремальная компрессия имеет место на втором этапе, когда солитон с малым числом колебаний поля становится однопериодным со сверхшироким спектром. Продемонстрировано, что на данной стадии процесс дальнейшей самокомпрессии значительно ускоряется и сопровождается повышением сверхширокого спектра, сохраняя однопериодичность солитона на протяжении всего времени. Предложенный метод позволяет получить лазерные импульсы с длительностью в несколько сотен аттосекунд в ультрафиолетовой области с эффективностью в десятки процентов.

Для качественного анализа самокомпрессии солитонно-подобных лазерных импульсов получена упрощенная система уравнений, которая позволяет исследовать динамику волнового пакета в случае, когда несущая частота лазерного импульса может существенно меняться в процессе ионизации газа с меньшим потенциалом ионизации. Детальное исследование эволюция поля описывается самосогласованной системой двух уравнений:

- уравнением для медленно огибающей поля;
- уравнением пространственно-временной геометрической оптики, описывающим изменение спектрального состава лазерного импульса в процессе ионизации газа.

В рамках данной приближенной системы уравнений, показано, что на конечной длине нелинейной среды длительность волнового пакета обращается в нуль. Показано, что длительность солитонов нелинейного уравнения Шредингера уменьшается с увеличением несущей частоты в процессе ионизации газа по закону $\tau_p(\omega) \propto \frac{1}{\omega^3}$, в

то время как для солитонов DNLS, существующих в рамках нелинейного уравнения Шредингера с учетом слагаемого ответсвенного за укручение продольного профиля, длительность уменьшается по закону $\tau_p(\omega) \propto \frac{1}{\omega^{3.5}}$. Продемонстрировано хорошее согласие результатов численного моделирования с проведенным качественным анализом. В работе проведены исследования по оптимизации самокомпрессии лазерного импульса, основанные на концепции солитонов высокого порядка.

Далее приведем оценки для экспериментальной реализации самокомпрессии лазерного импульса. Численные расчеты демонстрируют возможность самокомпрессии лазерного импульса с начальной длительностью 25 фемтосекунд, с энергией 0.2 мДж на длине волны $\lambda = 0.8$ μm до 250 аттосекунд с энергией в сжатом импульсе 0.11 мДж на выходе капилляра диаметром 40 μm, заполненного двумя сортами газа с параметрами: газ He при давлении 1 Бар и газ Ar при давлении 2 Торра.

Для укорочения лазерных импульсов с большей энергией имеет смысл рассмотреть волновые пакеты на длине волны $\lambda = 4$ μm [11]. Аналогичные оценки для той же самой величине дисперсии можно получить, если рассмотреть волновод с большим диаметром. Если взять диаметр капилляра 90 μm, то на той же самой длине капилляра можно сжать лазерный импульс с начальной длительностью 90 фемтосекунд с с энергией 3.6 мДж до 0.9 фемтосекунды с энергией 1.98 мДж.

Глава 5

Ионизационно-индуцированная самокомпрессия лазерных импульсов мультитераваттного уровня мощности

Генерация лазерных импульсов с малым числом колебаний поля высокой энергии, которые играют важную роль в исследованиях экстремальной нелинейной оптики, является вызовом в современной лазерной физике. Это по-настоящему справедливо для физики сверхсильных полей, где большинство экспериментов отличаются большей чувствительностью к электрическим полям лазерного импульса, нежели к профилю интенсивности, так, что использование лазерных импульсов с малым числом осцилляций приводит к устойчивой генерации аттосекундных [112] и терагерцовых импульсов [38, 54, 76, 180, 225]. В настоящее время существуют два пути для получения лазерных импульсов высокой энергии с ультракороткой длительностью. Первый основан на впечатляющем прогрессе современных твердотельных лазерных систем. В частности, базирующиеся на титан-сапфировых технологиях лазерные импульсы выше петаваттного уровня с длительностью $25 - 30$ фемтосекунд могут быть получены в настоящее время [179]. Второй путь, направленный на длительности с небольшим числом осцилляций, например, особенно ниже 10 фемтосекунд, для титан-сапфировой длины волны порядка 800 нм, зиждется на технологии оптического параметрического усиления чирпованных импульсов (OPCPA) [88], который имеет более медленный прогресс в получении лазерных импульсов высокой энергии, однако имеет более высокий потенциал, включающий возможность ультраширокополосного усиления наряду с высоким коэффициентом усиления.

Другие подходы для получения импульсов с малым числом колебаний поля базируются на спектрально-временном преобразовании фемтосекундных импульсов при распространении через нелинейные среды. В самом процессе компрессии удобно выделить два основных момента – спектральное уширение и собственно сжатие импульса. В силу определенной взаимозависимости между длительностью импульса и его спектральной шириной сильное спектральное уширение является необходимым условием получения наиболее короткого импульса. Для увеличения спектральной ширины лазерного импульса обычно используют различного типа нелинейные механизмы его уширения, в частности, для мощных импульсов предложено использовать полые диэлектрические капилляры, заполненные газообразной средой, в которой преобладают керровская [141] или ионизационная [182, 210] нелинейности. Однако само по себе уширение автоматически не ведет к укорочению импульса – необходимы специальные меры, позволяющие компенсировать дисперсию групповой скорости. Для непосредственного сжатия обычно используют пару призм или дифракционных решеток. Для получения предельно коротких импульсов также эффективно применение зеркал с управляемой дисперсией. Однако в последние годы весьма активно обсуждаются различные схемы самокомпрессии, также использующие керровскую [85, 86, 163, 199] и ионизационные [188] нелинейности. По-видимому, лучшие результаты, достигнутые на сегодняшний день, связаны с самокомпрессией лазерного импульса ниже одного периода поля на одиночной филаменте, формирующейся в газе сравнительно высокого давления. Однако главное ограничение происходит из факта того, что мощность лазерного импульса не должна превышать критическую мощность для самофокусировки, и, кроме того, энергетическая эффективность данного метода компрессии довольно низка, менее 10% [109,174]. Эти ограничения могут быть преодолены благодаря использованию газов низкого давления и самой ионизационной нелинейности для компрессии импульса. Идея ионизационной самокомпрессии впервые была предложена в работе [102], где показано, что ионизационно-индуцированная частотная модуляция в волновом пакете может быть компенсирована в плазме, приводя к компрессии импульса. В работе [188] впервые была экспериментально продемонстрирована ионизационно-индуцированная самокомпрессия с 26 до 13 фемтосекунд [188] для лазерного импульса, распространяющегося в капилляре. Однако такое распространение существенно неодномерно, и механизм компрессии до сих пор был не ясен.

В данной главе диссертации теоретически и экспериментально исследован эф-

фект ионизационно-индуцированной самокомпрессии лазерных импульсов вплоть до одного колебания поля, реализующегося при распространении фемтосекундного лазерного излучения в условиях полого сверхразмерного капилляра, заполненного газом. Данный механизм способен обеспечить самокомпрессию лазерных импульсов до длительности в один период поля благодаря формированию нелинейного плазменного волновода, чья аномальная дисперсия групповой скорости позволит сгруппировать спектральные компоненты, смещенные в коротковолновую часть спектра, из-за ионизации газа. Будет показано, что предложенная концепция укорочения волновых пакетов может быть промасштабирована к высоким энергиям в лазерном импульсе, покрывая диапазон от суб-миллиджоульного до мультиджоульного уровня, которая направлена к формированию выходных лазерных импульсов петаваттного уровня мощности. Эти результаты открывают возможность получения источников высокоэнергетичных лазерных импульсов с малым числом колебаний поля, в частности, используя традиционную титан-сапфировую лазерную систему высокой мощности.

Структура данной главы следующая: в разделе 5.2 приведена базовая система уравнений, описывающая пространственно-временную эволюцию ионизирующего лазерного импульса в полом диэлектрическом капилляре, заполненного газом. Как отмечалось ранее, уширение спектра волнового пакета является необходимым условием укорочения длительности последнего. Поэтому в разделе 5.3 будет проведено качественное исследование для определения закона изменения спектральных характеристик лазерного излучения. В разделе 5.4 будут приведены результаты динамики лазерного импульса в диэлектрическом капилляре в условиях квазиодномодового распространения. В разделе 5.6 будет предложена концепция укорочения лазерных импульсов в диэлектрическом капилляре в условиях возбуждения нелинейного плазменного волновода. В заключительном разделе будут приведены результаты экспериментальных исследований эффекта ионизационно-индуцированной самокомпрессии волнового пакета.

5.1 Структура «холодных» мод диэлектрического капилляра

Одной из ключевых проблем физики взаимодействия сверхсильного лазерного излучения с веществом является проблема увеличения длины взаимодействия, ограниченной в свободном пространстве дифракционной расходимостью лазерного пучка. Одним из эффективных способов решения этой проблемы в задачах взаимодействия мощного лазерного излучения с газами и газовой плазмой является использование в качестве волноводов диэлектрических капилляров. Такие капилляры при этом используются для обеспечения достаточно большой длины нелинейного взаимодействия излучения с веществом. Идея использования полых сверхразмерных (диаметр много больше длины волны) диэлектрических волноводов для транспортировки лазерного излучения впервые, по-видимому, обсуждалась в работе [129]. В этой же работе проведен детальный анализ волноводных свойств диэлектрических капилляров. Достоинствами таких капилляров как квазиоптических волноводов для транспортировки лазерного излучения является высокая эффективность транспортировки (малая величина потерь при достаточно большом диаметре), легкость изготовления и изменения параметров волновода, возможность создания дополнительных структур на стенках волновода (например, гофрировки), меняющих условия взаимодействия излучения с газом или плазмой, относительная простота настройки. В то же время существует ряд технических проблем при использовании капилляров для транспортировки мощного лазерного излучения. В частности, максимальная мощность, которая может быть транспортирована в данном волноводе, ограничена полевым пробоем стенок. Кроме того, существует проблема образования плазмы на входном торце капилляра вследствие его ионизации входным лазерным пучком.

Ключевым моментом при получении системы уравнений, описывающая динамику лазерного импульса в диэлектрическом капилляре, является граничное условие на стенке волновода, учитывающее эффект утечки излучения. Поэтому сначала остановимся на кратком анализе собственных мод капилляра.

Диэлектрический капилляр представляет собой сверхразмерный оптический волновод, в котором волноводный режим распространения излучения поддерживается за счет скользящего падения излучения на стенку капилляра. При этом френелевский коэффициент отражения поля от стенки оказывается близким к единице, что

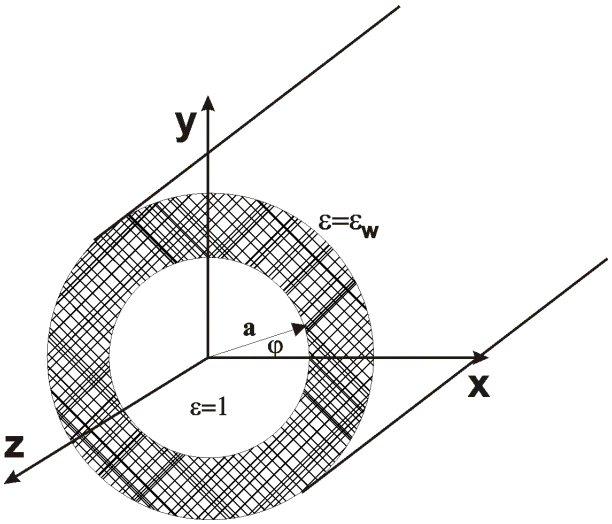


Рис. 5.1: Схема диэлектрического капилляра.

обеспечивает достаточно высокую добротность этого волновода. Электрическое и магнитное поля в любом сечении капилляра можно представить в виде разложения по его собственным модам, которые являются собственными функциями цилиндрически симметричной краевой задачи. Собственные функции и дисперсионное уравнение для сверхразмерного стеклянного волновода (радиус волновода a удовлетворяет условию $k_o a \gg 1$, где k_o – волновой вектор электромагнитной волны, a – радиус капилляра) детально исследованы в работах [53, 129]. Следует отметить, что эта задача является частным случаем классической задачи о распространении монохроматического электромагнитного поля в электродинамической системе, состоящей из цилиндрически симметричной внутренней области и внешней однородной среды.

Продольные компоненты полей внутри капилляра (см. рисунок 5.1) имеют вид

$$\mathcal{E}_z(r) = \mathcal{A} J_\nu \left(k_\perp \frac{r}{a} \right) \exp\left(i\nu\varphi - ik_z z \right) \ , \tag{5.1a}$$

$$\mathcal{B}_z(r) = \mathcal{B} J_\nu \left(k_\perp \frac{r}{a} \right) \exp\left(i\nu\varphi - ik_z z \right) \ , \tag{5.1b}$$

где $k_\perp = a\sqrt{k_o^2 - k_z^2}$ – безразмерное поперечное волновое число внутри капилляра, J_ν – функция Бесселя порядка ν, φ – азимутальный угол, k_z – продольное волновое число (постоянная распространения).

Вне капилляра ($r > a$) поле имеет вид

$$\mathcal{E}_z(r) = \mathcal{C} H_\nu \left(k_{\perp w}\frac{r}{a}\right) \exp\left(i\nu\varphi - ik_z z\right) \ , \tag{5.2a}$$

$$\mathcal{B}_z(r) = \mathcal{D} H_\nu \left(k_{\perp w}\frac{r}{a}\right) \exp\left(i\nu\varphi - ik_z z\right) \ , \tag{5.2b}$$

где $k_{\perp w} = a\sqrt{k_o^2\varepsilon_w - k_z^2}$ – безразмерное поперечное волновое число вне капилляра, ε_w – диэлектрическая проницаемость вещества стенок, H_ν – функция Ханкеля. $k_o = \dfrac{\omega}{c}$ – волновое число в вакууме; $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ – некоторые константы, которые определяются из условий непрерывности соответствующих компонент полей на границе капилляра.

Остальные компоненты поля определяются из уравнений Максвелла как функции от $\mathcal{E}_z(r)$ и $\mathcal{B}_z(r)$,

$$\mathcal{E}_r(r) = \frac{1}{k_o^2\varepsilon_w - k_z^2}\left[-ik_z\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial r} + \frac{\omega k_{\perp w}}{r}\mathcal{B}_z(r)\right] \ , \tag{5.3a}$$

$$\mathcal{E}_\varphi(r) = \frac{1}{k_o^2\varepsilon_w - k_z^2}\left[i\omega\frac{\partial\mathcal{B}_z(r)}{\partial r} + \frac{k_z k_{\perp w}}{r}\mathcal{E}_z(r)\right] \ , \tag{5.3b}$$

$$\mathcal{B}_r(r) = \frac{1}{k_o^2\varepsilon_w - k_z^2}\left[-ik_z\frac{\partial\mathcal{B}_z}{\partial r} - \frac{k_{\perp w}k_o^2\varepsilon_w}{r\omega}\mathcal{E}_z(r)\right] \ , \tag{5.3c}$$

$$\mathcal{B}_\varphi(r) = \frac{1}{k_o^2\varepsilon_w - k_z^2}\left[-i\frac{k_o^2\varepsilon_w}{\omega}\frac{\partial\mathcal{E}_z(r)}{\partial r} + \frac{k_z k_{\perp w}}{r}\mathcal{B}_z(r)\right] \ . \tag{5.3d}$$

Из требования непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей и нормальных компонент вектора индукции и магнитного поля при $r = a$ можно получить следующее дисперсионное уравнение для нахождения спектра поперечных волновых чисел в волноводе:

$$k_z^2\nu^2\left(\frac{1}{k_\perp^2} + \frac{1}{k_{\perp w}^2}\right) = \left(\frac{1}{k_\perp}\frac{J'_\nu(k_\perp)}{J_\nu(k_\perp)} + \frac{1}{k_{\perp w}}\frac{H'_\nu(k_{\perp w})}{H_\nu(k_{\perp w})}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{k_o^2}{k_\perp}\frac{J'_\nu(k_\perp)}{J_\nu(k_\perp)} + \frac{k_o^2\varepsilon_w}{k_{\perp w}}\frac{H'_\nu(k_{\perp w})}{H_\nu(k_{\perp w})}\right) \ , \tag{5.4}$$

где штрих обозначает производную по аргументу функции. Из этого соотношения следует, что в капилляре существует 2 типа мод.

Поперечные моды (при $\nu = 0$)

Их топологические свойства аналогичны свойствам мод идеального металлического цилиндрического волновода. При этом, однако, решение дисперсионного уравнения (5.4) есть комплексная величина, что связано с утечкой излучения на диэлектрической границе капилляра. Эти моды подразделяются на два семейства и

в первом приближении могут быть представлены в виде, соответствующем модам идеального волновода:

***TE*$_{0m}$ – моды.** Данные решения с поперечным волновым числом $k_\perp$ удовлетворяют дисперсионному уравнению:

$$\frac{J_0'(k_\perp)}{J_0(k_\perp)} = -\frac{k_\perp}{k_{\perp w}}\frac{H_0'(k_{\perp w})}{H_0(k_{\perp w})} \ . \tag{5.5}$$

Принимая во внимание условие $k_0 a \gg 1$ и используя асимптотику функций H при больших значениях аргумента, из уравнения (5.5) в первом порядке по параметру $\dfrac{1}{k_o a}$ получаем следующие выражения для поперечного волнового числа, постоянной распространения и пространственной структуры полей:

$$k_\perp^{om} = u_{om} \ , \tag{5.6a}$$

$$k_z = k_o\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u_{0m}}{k_o a}\right)^2\right]\left(1 - i\frac{1}{k_o a}\frac{2}{\sqrt{\varepsilon_w - 1}}\right) = h_{om} - i\gamma_{om} \ , \tag{5.6b}$$

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_r = \mathcal{B}_\varphi = 0 \ , \tag{5.6c}$$

$$\mathcal{E}_\varphi^{0m}(r) = -\frac{k_o}{k_z}J_1\left(u_{0m}\frac{r}{a}\right) \ , \tag{5.6d}$$

$$\mathcal{B}_r^{0m}(r) = J_1\left(u_{0m}\frac{r}{a}\right) \ , \tag{5.6e}$$

$$\mathcal{B}_z^{0m}(r) = -i\frac{k_\perp}{h_{0m}a}J_0\left(u_{0m}\frac{r}{a}\right) \ . \tag{5.6f}$$

Здесь u_{0m} – решение уравнения

$$J_1(u_{0m}) = 0.$$

Таким образом, в первом порядке по малому параметру $\dfrac{1}{k_o a}$ электрическое поле в этом семействе мод чисто азимутальное, а магнитное поле в силу неравенства $\mathcal{B}_z \ll \mathcal{B}_r$ (поскольку $k_\perp \ll h_{om}$) почти радиальное.

***TM*$_{0m}$ – моды.** Решения с поперечным волновым числом, удовлетворяющим дисперсионному уравнению:

$$\frac{J_0'(k_\perp)}{J_0(k_\perp)} = -\frac{\varepsilon_w k_\perp}{k_{\perp w}}\frac{H_0'(k_{\perp w})}{H_0(k_{\perp w})} \tag{5.7}$$

Аналогично ***TE*** – модам, в первом порядке по параметру $\dfrac{1}{k_o a}$ получаем следующие выражения для поперечного волнового числа, постоянной распространения и

пространственной структуры полей:

$$k_\perp^{om} = u_{om} \ , \tag{5.8a}$$

$$k_z = k_0 \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u_{0m}}{k_o a}\right)^2\right]\left(1 - i\frac{1}{k_o a}\frac{2\varepsilon_w}{\sqrt{\varepsilon_w - 1}}\right) = h_{om} - i\gamma_{om} \ , \tag{5.8b}$$

$$\mathcal{E}_\varphi = \mathcal{B}_r = \mathcal{B}_z = 0 \ , \tag{5.8c}$$

$$\mathcal{B}_\varphi^{0m}(r) = \frac{k_z}{k_o} J_1\left(u_{0m}\frac{r}{a}\right) \ , \tag{5.8d}$$

$$\mathcal{E}_r^{0m}(r) = J_1\left(u_{0m}\frac{r}{a}\right) \ , \tag{5.8e}$$

$$\mathcal{E}_z^{0m}(r) = -i\frac{k_\perp}{k_z a} J_0\left(u_{0m}\frac{r}{a}\right) \ . \tag{5.8f}$$

В первом порядке по малому параметру $\dfrac{1}{k_o a}$ магнитное поле в этом семействе мод чисто азимутальное, а электрическое поле в силу неравенства $\mathcal{E}_z \ll \mathcal{E}_r$ почти радиальное.

Топология силовых линий электрического поля в этих двух семействах мод такова, что они не могут быть возбуждены линейно или эллиптически поляризованным гауссовым пучком. Поэтому, с точки зрения эксперимента, наибольший интерес представляет третье семейство мод, которые существуют при $\nu > 0$ и называются гибридными модами $\boldsymbol{EH_{\nu m}}$.

Гибридные моды (при $\nu > 0$)

Используя асимптотики функций H, дисперсионное уравнение (5.4) при $\nu > 0$ приводится к виду:

$$J_{\nu-1}(k_\perp) \sim \frac{k_\perp}{2k_{\perp w}} (\varepsilon_w + 1) J_\nu(k_\perp) \ . \tag{5.9}$$

В силу малости параметра $\dfrac{1}{k_o a}$ в волноводе $k_z \simeq k_o$ и отношение

$$\frac{k_\perp}{k_{\perp w}} \simeq \sqrt{1 - \frac{k_z^2}{k_o^2}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_w - 1}} \ll 1 \ . \tag{5.10}$$

Поэтому из (5.9) в первом порядке поперечное волновое число для гибридных мод определяется уравнением $J_{\nu-1}(k_\perp) \simeq 0$. Отсюда мы можем определить действительную часть постоянной распространения, а в следующем порядке малости по параметру $\dfrac{1}{k_o a}$ и мнимую часть постоянной распространения.

Структура поля имеет следующий вид по порядку малости $\frac{1}{k_0 a} \ll 1$:

$$k_\perp^{\nu m} = u_{\nu m} \ , \tag{5.11a}$$

$$k_z \simeq k_o \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{u_{\nu m}}{k_o a}\right)^2\right] - i\left(\frac{u_{\nu m}}{k_o a}\right)^2 \frac{1}{2a}\frac{\varepsilon_w + 1}{\sqrt{\varepsilon_w - 1}} = h_{\nu m} - i\gamma_{\nu m} \ , \tag{5.11b}$$

$$\mathcal{E}_z^{\nu m}(r,\varphi) = -\frac{u_{\nu m}}{k_o a} J_\nu\left(u_{\nu m}\frac{r}{a}\right)\sin(\nu\varphi)\exp\left(-ih_{\nu m}z - \gamma_{\nu m}z\right) \ , \tag{5.11c}$$

$$\mathcal{B}_z^{\nu m}(r,\varphi) = \frac{u_{\nu m}}{k_o a} J_\nu\left(u_{\nu m}\frac{r}{a}\right)\cos(\nu\varphi)\exp\left(-ih_{\nu m}z - \gamma_{\nu m}z\right) \ , \tag{5.11d}$$

$$\mathcal{E}_r(r,\varphi) = J_{\nu-1}\left(u_{\nu m}\frac{r}{a}\right)\sin(\nu\varphi)\exp\left(-ih_{\nu m}z - \gamma_{\nu m}z\right) \ , \tag{5.11e}$$

$$\mathcal{E}_\varphi(r,\varphi) = J_{\nu-1}\left(u_{\nu m}\frac{r}{a}\right)\cos(\nu\varphi)\exp\left(-ih_{\nu m}z - \gamma_{\nu m}z\right) \ , \tag{5.11f}$$

$$\mathcal{B}_r = -\frac{h_{\nu m}}{k_0}E_\varphi, \qquad B_\varphi = \frac{h_{\nu m}}{k_0}E_r \ . \tag{5.11g}$$

Остановимся теперь отдельно на семействе гибридных мод. В нулевом приближении по параметру $k_o a$ можно получить следующее выражение для компонент электрического поля:

$$\mathcal{E}_z = 0 \ , \tag{5.12a}$$

$$\mathcal{E}_r = J_{\nu-1}\left(u_{\nu m}\frac{r}{a}\right)\sin(\nu\varphi)\exp\left(-ih_{\nu m}z - \gamma_{\nu m}z\right) \ , \tag{5.12b}$$

$$\mathcal{E}_\varphi = J_{\nu-1}\left(u_{\nu m}\frac{r}{a}\right)\cos(\nu\varphi)\exp\left(-ih_{\nu m}z - \gamma_{\nu m}z\right) \ . \tag{5.12c}$$

Переходя в декартову систему в поперечном сечении, получим следующее выражение для поля:

$$\mathcal{E}_z = 0 \ , \tag{5.13a}$$

$$\mathcal{E}_y = J_{\nu-1}\left(u_{\nu m}\frac{r}{a}\right)\cos[(\nu-1)\varphi]\exp\left(-ih_{\nu m}z - \gamma_{\nu m}z\right) \ , \tag{5.13b}$$

$$\mathcal{E}_x = J_{\nu-1}\left(u_{\nu m}\frac{r}{a}\right)\sin[(\nu-1)\varphi]\exp\left(-ih_{\nu m}z - \gamma_{\nu m}z\right) \ , \tag{5.13c}$$

откуда видно, что поле будет иметь линейную поляризацию только при $\nu = 1$.

Семейство гибридных мод при $\nu = 1$, в отличие от $\boldsymbol{TE}$ – и $\boldsymbol{TM}$ – мод, имеет максимум электрического поля на оси. Этот факт и топологическая структура силовых линий позволяют достигать высокой эффективности трансформации гауссова лазерного пучка с линейной поляризацией электрического поля в моды семейства $\boldsymbol{EH_{1m}}$, а это значит, что таким пучком только эти моды и будут возбуждаться. Из анализа выражения для мнимой части постоянной распространения (5.11b) следует, что в случае стеклянного капилляра ($\varepsilon_w = 2.25$) самой добротной является гибридная

мода $\boldsymbol{EH_{11}}$, которую называют также *фундаментальной модой* диэлектрического капилляра. Ниже приведены основные характеристики моды $\boldsymbol{EH_{11}}$.

Структура поля (в первом приближении) имеет вид

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{B}_z = 0 \ , \tag{5.14a}$$

$$\mathcal{E}_r(r,\varphi) = J_0\left(2.405\frac{r}{a}\right)\sin(\varphi)\exp\left(-ihz-\gamma z\right) \ , \tag{5.14b}$$

$$\mathcal{E}_\varphi(r,\varphi) = J_0\left(2.405\frac{r}{a}\right)\cos(\varphi)\exp\left(-ihz-\gamma z\right) \ , \tag{5.14c}$$

$$\mathcal{B}_r = -\frac{h}{k_0}\mathcal{E}_\varphi, \qquad B_\varphi = \frac{h}{k_0}\mathcal{E}_r \ . \tag{5.14d}$$

Постоянная распространения при условии $k_o a \gg 1$ имеет вид

$$h \simeq k_o\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2.405}{k_o a}\right)^2\right] \ , \tag{5.15}$$

а коэффициент затухания излучения

$$\gamma = \left(\frac{2.405}{k_o a}\right)^2 \frac{1}{2a}\frac{\varepsilon_w+1}{\sqrt{\varepsilon_w-1}} \ , \tag{5.16}$$

где ε_w – диэлектрическая проницаемость стенок капилляра.

Возможность хорошего согласования с линейно поляризованными лазерными пучками и наибольшая величина добротности выделяет *фундаментальную моду* из всего семейства гибридных мод и, как правило, одной из важных задач при постановке численного эксперимента является задача об оптимальном возбуждении этой моды лазерным пучком. Для решения этой задачи необходимо определить оптимальные параметры лазерного пучка, обеспечивающие максимальную эффективность преобразования энергии входного лазерного излучения в *фундаментальную моду*. Оптимальные условия возбуждения достигаются при диаметре пучка в 0.65 раз меньше диаметра капилляра и положении перетяжки пучка на входе волновода.

5.2 Базовая система уравнений на эволюцию ионизирующего импульса в капилляре

В предыдущих главах данной диссертации рассматривались случаи, когда кубичная нелинейность доминировала. При этом в главах 1, 4 пространственная структура лазерного импульса из-за нелинейности не изменялась, в то время как в главах 2, 3

исследовалась ситуация, когда пространственные эффекты важны, и они оказывают значительное влияние на продольную динамику лазерного импульса.

Рассмотрим теперь случай, когда интенсивность лазерного излучения в капилляре достаточно высока, так что ионизация газа является основным механизмом нелинейности и она может привести к существенной модификации пространственной структуры волнового пакета в волноводе. Отметим, что в предыдущей главе (Глава 4) было проведено исследование влияние ионизационной нелинейности на динамику квазисолитонной волновой структуры в случае, когда ионизация была возмущающим фактором для последней. Известно, что одним из основных типов нелинейностей при большой мощности лазерного излучения в прозрачных нерезонансных средах является самофокусировочная нелинейность. В случае квазимонохроматического излучения она полностью характеризуется параметром $\mathcal{P}_{cr}$ – критической мощностью самофокусировки[17] , который полностью определяется параметрами среды. В частности, эта величина определяется плотностью среды. Самофокусировка излучения приводит к образованию особенности в пространственном и временном распределении электрического поля в импульсе на расстоянии z_o (2.64), (2.75). В случае, когда z_o велико по сравнению с характерными масштабами изменения поля, вызванными влиянием других типов нелинейности, влиянием самофокусировочной нелинейности можно пренебречь. В частности, если наблюдаются значительные изменения спектра лазерного импульса и пространственной структуры интенсивности, вызванные ионизацией газа на длине капилляра существенно меньшей длины самофокусировки, то основным механизмом нелинейности будет ионизационная нелинейность, и влиянием самофокусировочной нелинейности можно пренебречь. Эти условия можно выполнить в случае низких давлений газа в капилляре. Поэтому в качестве основного нелинейного эффекта, имеющего место при взаимодействии сверхсильного лазерного поля с газом в капилляре, мы рассмотрим полевую ионизацию газа.

Следует отметить, что принципиальное отличие ионизационной нелинейности от керровской состоит в ее нестационарности. Керровская нелинейность связана с периодическим нелинейным движением электронов в потенциальной яме, причем

[17]Например, для квазимонохроматического излучения [266]:

$$\mathcal{P}_{cr} = 5.850 \frac{c\sqrt{\varepsilon_o}}{4\pi k_o^2 \varepsilon'} \ ,$$

где $\varepsilon = \varepsilon_o \cdot (1 + \varepsilon'|E|^2)$, $k_o = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_o}$.

период этого движения в газах мал по сравнению с оптическим периодом, что и позволяет рассматривать ее как стационарную нелинейность. Ионизационная же нелинейность связана с нелинейным ангармоничным движением электронов при их туннелировании под потенциальным барьером, образованным атомным потенциалом и потенциалом лазерного поля, причем в интересующем нас случае туннельной ионизации время туннелирования меньше или порядка оптического периода. Последствием нестационарности ионизационной нелинейности является возможность перестройки частоты лазерного излучения в коротковолновую область спектра (см. раздел 5.3.2) [15, 75, 182, 195, 223].

5.2.1 Эволюционное уравнение для лазерного импульса

Дабы понять суть физики ионизационно-индуцированной самокопрессии в газонаполненном капилляре и определения предельных возможностей укорочения длительности волнового пакета, необходимо провести детальное численное исследование динамики лазерного импульса. Наша ключевая идея – использовать нейтральный газ с такой концентрацией, чтобы в условиях ионизации газа обеспечить нарушение условия одномодового распространения излучения из-за рефракции на образующейся плазме и, таким образом, приводить к возбуждению нелинейного плазменного волновода, в котором могут распространяться собственные утекающие моды [165]. Такой ионизационно-индуцированный плазменный волновод может обеспечить аномальную дисперсию групповых скоростей, необходимую для самокомпрессии импульса. Существование такого волновода связано с резкой зависимостью вероятности ионизации газа от интенсивности поля в лазерном импульсе, приводящей к образованию резкого (на масштабе длины волны) скачка показателя преломления. По сути, такой плазменный волновод полностью аналогичен капилляру, но, в отличие от последнего, обладает существенно меньшей величиной относительного показателя преломления и, как следствие, худшей добротностью. Однако ввиду наличия внешней границы (стенок самого диэлектрического капилляра) излучение в нем может распространяться на расстояния, значительно превышающие эффективную длину каналирования свободного плазменного волновода. В разделе 5.3.3 будет получено условие нарушения одномодового распространения излучения в волноводе в условиях ионизации газа. Пространственно-временная эволюция лазерного излучения в диэлектрическом капилляре описывается волновым уравнением с соответствующи-

ми граничными условиями, которые обсуждаются ниже (см. раздел 5.2.2). В случае линейно-поляризованного поля в условиях ионизованного газа это уравнение имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + \Delta_\perp \mathcal{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{P}_{nl}}{\partial t^2} \ , \tag{5.17}$$

где $\mathcal{P}_{nl}$ – поляризационное слагаемое, описывающее нелинейный процесс ионизации газа. Здесь мы учли, что в условиях ионизации среды газовой дисперсией в эволюционном уравнении можно пренебречь, поскольку дисперсия плазмы, образующейся в результате ионизации газа, превалирует над дисперсией нейтральных частиц уже при степени ионизации порядка процента, так как рассматриваются низкие давления нейтрального газа в несколько десятков Торр.

Переходя в сопровождающуюся систему координат $\tau = t - \dfrac{z}{c}$ и пренебрегая отраженной волной, поскольку плотность образующейся плазмы $\mathcal{N}$ много меньше критического значения $\mathcal{N}_{cr} = \dfrac{m\omega_o^2}{4\pi e^2}$ ($\mathcal{N} \ll \mathcal{N}_{cr}$, ω_o – несущая частота) и полагая, что поле в волновом пакете изменяется незначительно на масштабах длины волны, а поперечный размер пучка больше по сравнению с характерным продольным масштабом поля (квазиоптический пучок), волновое уравнение (5.17) можно записать в следующем виде

$$-\frac{2}{c}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z \partial \tau} + \Delta_\perp \mathcal{E} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{P}_{nl}}{\partial \tau^2} \ . \tag{5.18}$$

Рассмотрим подробнее характер ионизационной нелинейности. Для туннельного механизма ионизации поляризационный отклик, связанный с процессом образования плазмы, может быть найден в явном виде, используя следующие соображения. Электроны, вырванные полем из атома, можно описывать на языке классических, а не квантовых[18] уравнений. Однако в случае взаимодействия достаточно разреженного газа со сверхсильным лазерным полем можно воспользоваться классическими уравнениями движения для электронов, пренебрегая кулоновским полем притяжения иона по сравнению с электрическим полем в световой волне. В частности, можно написать кинетическое уравнение для функции распределения электронов $f(v)$ по скоростям:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + v\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e\mathcal{E}}{m}\frac{\partial f}{\partial v} = \mathcal{F}\left(v^2\right) \ . \tag{5.19}$$

[18]Поляризация единицы объема плазмы определяется выражением $\boldsymbol{P} = -e\mathcal{N}_e\langle \boldsymbol{r} \rangle$, где $\langle e\boldsymbol{r} \rangle$ – средний дипольный момент частиц, $\mathcal{N}_e$ – концентрация электронов. Эта величина может быть в принципе рассчитана с использованием формализма квантовой механики, основанного на решении уравнения Шредингера или уравнения на матрицу плотности.

Функция $\mathcal{F}(v^2)$, стоящая в правой части, описывает источник рождения частиц, а зависимость ее от v^2 означает равновероятность направлений скоростей рождающихся частиц. Более того, поскольку импульс, приобретаемый электронами в поле волны, много больше импульса электрона в атоме, можно считать их рождающимися в состоянии покоя. Тогда

$$\mathcal{F}\left(v^2\right) = \tilde{\mathcal{N}} W(|\mathcal{E}|)\delta(v) \ , \tag{5.20}$$

где $W(|\mathcal{E}|)$ – вероятность рождения электронов (вероятность ионизации), $\delta(v)$ – дельта-функция Дирака, $\tilde{\mathcal{N}}$ – концентрация нейтральных атомов.

В результате можно получить уравнения для изменения концентрации электронов $\mathcal{N} = \int\limits_{\boldsymbol{v}} f(v)dv$ и плотности тока $\mathcal{J} = -e\int\limits_{\boldsymbol{v}} f(v)vdv$:

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau} = W(|\mathcal{E}|)\tilde{\mathcal{N}} \ , \tag{5.21a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau} = \frac{e^2\mathcal{E}}{m}\mathcal{N} \ . \tag{5.21b}$$

Из сохранения полного числа частиц в системе следует, что

$$\tilde{\mathcal{N}} + \mathcal{N} = \mathcal{N}_o \ \Rightarrow \ \tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_o - \mathcal{N} \ . \tag{5.22}$$

В результате (5.21) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau} = W(|\mathcal{E}|)\cdot(\mathcal{N}_o - \mathcal{N}) \ , \tag{5.23a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau} = \frac{e^2\mathcal{E}}{m}\mathcal{N} \ . \tag{5.23b}$$

Ток $\mathcal{J}$, определяемый из решения системы (5.21b), есть *ток поляризации*. Его нелинейная зависимость от поля и определяет нелинейность взаимодействия атома с полем. Вид этой нелинейности определяется функцией $W(|\mathcal{E}|)$. В результате мы получаем следующие выражение для поляризационного отклика, описывающего процесс образования плазмы:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}_{nl}}{\partial \tau^2} = \frac{e^2}{m}\mathcal{N}\mathcal{E} \ . \tag{5.24}$$

Правая часть в (5.24) отвечает за нагревные потери энергии в лазерном импульсе, связанные с преобразованием части энергии электрического поля в импульсе в энергию дрейфового движения электронов, остающуюся у них после окончания действия лазерного импульса.

Подставляя (5.24) в (5.18), волновое уравнение для электрического поля волны можно представить в следующем виде:

$$-\frac{2}{c}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z \partial \tau} + \Delta_\perp \mathcal{E} = \frac{\omega_{po}^2}{c^2}\mathcal{N}\mathcal{E} \ , \tag{5.25}$$

где $\omega_{po}^2 = \dfrac{4\pi e^2 \mathcal{N}_o}{m}$ – электронная плазменная частота. Здесь и далее $\mathcal{N}$ концентрация плазмы нормирована на концентрацию нейтрального газа $\mathcal{N}_o$.

Уравнение (5.25) описывает динамику электрического поля в лазерном импульсе, распространяющемся вдоль оси z в безграничной среде. Чтобы учесть волноводный характер распространения излучения, уравнение (5.25) необходимо дополнить соответствующим граничным условием на стенке капилляра. Одну из возможных упрощенных постановок такой граничной задачи будет рассмотрена ниже (см. раздел 5.2.2).

Для иллюстрации отличительных особенностей динамики самовоздействия обсудим отдельно те эффекты, которые не учитываются при переходе к НУШ.

Полагая изменения в спектре лазерного излучения (изменение ширины и несущей частоты $\Delta\omega$) в процессе нелинейного взаимодействия с газом малыми по сравнению с начальной несущей частотой ω_o ($\Delta\omega/\omega_o \ll 1$), воспользуемся приближением медленно меняющейся амплитуды и представим поле в виде

$$\mathcal{E}(z, \boldsymbol{r}_\perp, \tau) = \mathcal{A}(z, \boldsymbol{r}_\perp, \tau) \exp(i\omega_o \tau) + c.c. \tag{5.26}$$

Тогда для комплексной амплитуды поля $\mathcal{A}$ получим следующее уравнение

$$-2ik_o \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} - \frac{2}{c}\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial z \partial \tau} + \Delta_\perp \mathcal{A} = \frac{\omega_{po}^2}{c^2} \mathcal{N} \mathcal{A} \ , \tag{5.27}$$

где $k_o = \dfrac{\omega_o}{c}$. Второе слагаемое в уравнении (5.27) учитывает, в частности, дисперсию плазмы и нестационарную рефракцию, поэтому при изучении распространения длинных импульсов или рассмотрении плазмы с низкой плотностью (т.е. при низких давлениях газа, заполняющего диэлектрический капилляр), им можно пренебречь. В этом случае пространственно-временная эволюция лазерного излучения внутри диэлектрического капилляра описывается хорошо известным *параболическим уравнением*

$$-2ik_o \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} + \Delta_\perp \mathcal{A} = \frac{\omega_{po}^2}{c^2} \mathcal{N} \mathcal{A} \ . \tag{5.28}$$

В случае распространения фемтосекундных импульсов в газонаполненном диэлектрическом капилляре, при достаточно высоких давлениях учет дисперсии плазмы необходим, т.е. необходимо решать уравнение (5.25), (5.27), так как в этом случае дисперсия и нестационарная рефракция могут приводить к ряду существенно новых эффектов.

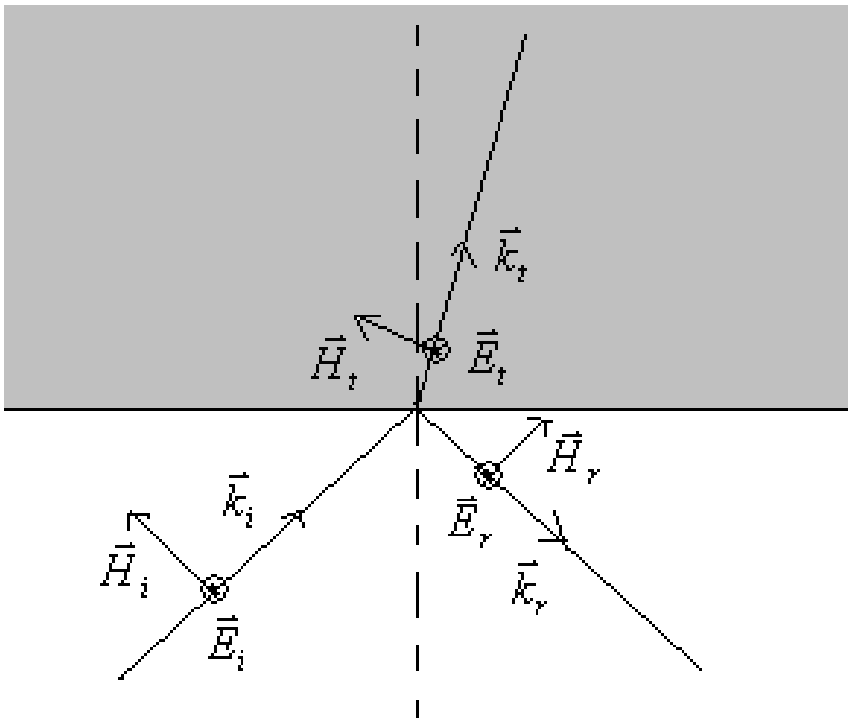


Рис. 5.2: Падение плоской волны на границу раздела двух сред.

5.2.2 Граничные условия

Ключевым моментом при постановке задачи о распространении лазерного излучения в диэлектрическом газонаполненном капилляре является вывод граничного условия на стенке капилляра, учитывающего эффект утечки излучения. Для получения граничного условия мы рассмотрим вакуумный капилляр с радиусом a, в котором распространение излучения происходит в линейном режиме. При выводе граничных условий используется условие сверхразмерности капилляра ($k_o a \gg 1$), откуда следует, что в каждой точке на стенке поле можно представить в виде локально плоской волны. Поэтому для получения граничного условия найдем сначала граничные условия для плоской волны на плоской границе двух сред для различной поляризации.

Сначала рассмотрим задачу о падении плоской $\boldsymbol{TE}$ – волны на плоскую границу раздела двух сред (1 среда – вакуум, $\varepsilon = 1,\ \mu = 1$, 2 среда – диэлектрик $\varepsilon_w,\ \mu = 1$), а затем обобщим задачу на $\boldsymbol{TM}$ – волну.

Запишем уравнения Максвелла:

$$rot\boldsymbol{\mathcal{E}} = -ik_o\boldsymbol{\mathcal{H}} \ , \tag{5.29a}$$

$$rot\boldsymbol{\mathcal{H}} = ik_o\varepsilon\boldsymbol{\mathcal{E}} \ , \tag{5.29b}$$

а также условия непрерывности тангенциальных компонент

$$\mathcal{E}_{1\tau} = \mathcal{E}_{2\tau} \ , \tag{5.30a}$$

$$\mathcal{H}_{1\tau} = \mathcal{H}_{2\tau} \ . \tag{5.30b}$$

$\boldsymbol{TE}$ – волна

Поля в средах имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)} = \boldsymbol{z}_o\mathcal{E}_i \exp\left(-ik_{1x}x - ik_{1y}y\right) \ , \tag{5.31a}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(r)} = \boldsymbol{z}_o\mathcal{E}_r \exp\left(-ik_{1x}x + ik_{1y}y\right) \ , \tag{5.31b}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(t)} = \boldsymbol{z}_o\mathcal{E}_t \exp\left(-ik_{2x}x - ik_{2y}y\right) \ . \tag{5.31c}$$

Второе условие (5.30) с учетом уравнения Максвелла (5.29a), если расписать ротор по координатам, даст нам следующее выражение

$$\left.\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial y}\right|_{y=0} = -ik_o\left(\mathcal{H}_{ix} + \mathcal{H}_{rx}\right) = ik_0\cos\theta_o(\mathcal{R}-1)\cdot\mathcal{E}_i \ , \tag{5.32}$$

где

$$\mathcal{H}_{ix} = \mathcal{E}_i\cos\theta_o \ , \qquad \mathcal{H}_{rx} = -\mathcal{E}_r\cos\theta_o \ , \tag{5.33}$$

θ_o – угол падения, $\mathcal{R}$ – коэффициент отражения на границе раздела двух сред [248]

$$\mathcal{R} = \frac{\cos\theta_o - \sqrt{\varepsilon_w - \sin^2\theta_o}}{\cos\theta_o + \sqrt{\varepsilon_w - \sin^2\theta_o}} \ . \tag{5.34}$$

С учетом (5.30a), $\mathcal{E}_i$ можно выразить следующим образом

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_i(\mathcal{R}+1) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_i = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}+1} \ . \tag{5.35}$$

Подставляя (5.35) и (5.34) в (5.32), окончательно получим граничное условие для $\boldsymbol{TE}$ – волны

$$\left.\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial y}\right|_{y=0} = ik_o\cos\theta_o\frac{\mathcal{R}-1}{\mathcal{R}+1}\mathcal{E} = -ik_o\sqrt{\varepsilon_w - \sin^2\theta_o}\cdot\mathcal{E} \ . \tag{5.36}$$

$\boldsymbol{TM}$ – волна

Поля в средах имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(i)} = \boldsymbol{z}_o \mathcal{H}_i \exp\left(-ik_{1x}x - ik_{1y}y\right) \ , \tag{5.37a}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(r)} = \boldsymbol{z}_o \mathcal{H}_r \exp\left(-ik_{1x}x + ik_{1y}y\right) \ , \tag{5.37b}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(t)} = \boldsymbol{z}_o \mathcal{H}_t \exp\left(-ik_{2x}x - ik_{2y}y\right) \ . \tag{5.37c}$$

В этом случае

$$\mathcal{R} = \frac{\varepsilon_w - \sqrt{\varepsilon_w - \sin^2\theta_o}}{\varepsilon_w \cos\theta_o + \sqrt{\varepsilon_w - \sin^2\theta_o}} \ . \tag{5.38}$$

С учетом уравнения Максвелла (5.29b), если расписать ротор по координатам, даст нам следующее выражение

$$\left.\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right|_{y=0} = ik_o\left(\mathcal{E}_{ix} + \mathcal{E}_{rx}\right) = ik_o \cos\theta_o(\mathcal{R}-1)\cdot\mathcal{H}_i \ , \tag{5.39}$$

где

$$\mathcal{E}_{ix} = -\mathcal{H}_i\cos\theta_o \ , \qquad \mathcal{E}_{rx} = \mathcal{H}_r\cos\theta_o \ . \tag{5.40}$$

С учетом (5.30b) $\mathcal{H}_i$ можно выразить следующим образом

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_i + \mathcal{H}_r = \mathcal{H}_i(\mathcal{R}+1) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_i = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{R}+1} \ . \tag{5.41}$$

Подставляя (5.41) и (5.38) в (5.39), получим окончательное граничное условие для $\boldsymbol{TM}$ – волны

$$\left.\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right|_{y=0} = ik_o\cos\theta_o\frac{\mathcal{R}-1}{\mathcal{R}+1}\mathcal{H} = -ik_o\frac{\sqrt{\varepsilon_w - \sin^2\theta_o}}{\varepsilon_w}\cdot\mathcal{H} \ . \tag{5.42}$$

Учитывая сверхразмерность капилляра ($k_0 a \gg 1$), а это означает, что падение будет скользящим $\left(\theta_o \to \dfrac{\pi}{2}\right)$, условие (5.42) для $\boldsymbol{TM}$ – волны можно переписать в виде

$$\left.\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y}\right|_{y=0} = -ik_o\frac{\sqrt{\varepsilon_w - \sin^2\theta_o}}{\varepsilon_w}\cdot\mathcal{E} \ . \tag{5.43}$$

Теперь мы имеем граничное условие на плоской границе раздела сред для обеих поляризаций лазерного импульса:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y}\right|_{y=0} = -ik_o\sqrt{\varepsilon_w - \sin^2\theta_o}\cdot\mathcal{E} \qquad (\textbf{TE} \text{ – волна}) \ , \tag{5.44a}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y}\right|_{y=0} = -ik_o\frac{\sqrt{\varepsilon_w - \sin^2\theta_o}}{\varepsilon_w}\cdot\mathcal{E} \qquad (\textbf{TM} \text{ – волна}) \ . \tag{5.44b}$$

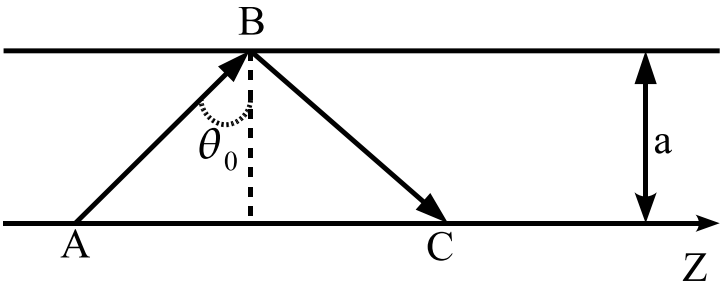


Рис. 5.3: Схематическое представление падения луча на границу волновода

Особенность данных граничных условий состоит в том, что они задают излучение наружу капилляра, т.е. характеризуют величину вектора Пойнтинга[19]. Для дальнейшего построения граничного условия в капилляре мы воспользуемся следующим обстоятельством. Граничные условия (5.44a), (5.44b) есть не что иное, как условия излучения для каждой из поляризаций, поэтому коэффициент перед амплитудой поля в правой части пропорционален коэффициенту затухания поля для каждой из поляризаций. Определим эти коэффициенты.

Коэффициент затухания в общем виде может быть найден следующим образом. Изменение амплитуды поля от A до C имеет вид:

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_C - \mathcal{E}_A = -\mathcal{T}\mathcal{E}_A \ , \tag{5.45}$$

где $\mathcal{T}$ – коэффициент прохождения плоской волны. На единице длины изменение амплитуды поля есть

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = -\frac{\mathcal{T}}{AC}\mathcal{E} \ , \qquad AC = 2a\tan\theta_o \ , \qquad \mathcal{T} = \mathcal{R} + 1 \ . \tag{5.46}$$

Тогда коэффициент затухания при скользящем падении $\left(\theta_0 \to \dfrac{\pi}{2}\right)$ есть:

$$\gamma = \frac{\mathcal{T}}{2a\tan\theta_o} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \gamma_{\boldsymbol{TE}} \simeq \dfrac{\cos^2\theta_o}{a\sqrt{\varepsilon_w - 1}} \ , & \textbf{TE} \text{ – волна} \\ \gamma_{\boldsymbol{TM}} \simeq \dfrac{\varepsilon_w \cos^2\theta_o}{a\sqrt{\varepsilon_w - 1}} \ , & \textbf{TM} \text{ – волна} \ . \end{cases} \tag{5.47}$$

Сравнивая (5.47) с (5.45), имеем:

$$\left.\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial y}\right|_{y=0} = -i\frac{k_o\cos^2\theta_o}{\gamma_{\boldsymbol{TE}}\cdot a}\mathcal{E} \qquad (\textbf{TE} \text{ – волна}) \ , \tag{5.48a}$$

$$\left.\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial y}\right|_{y=0} = -i\frac{k_o\cos^2\theta_o}{\gamma_{\boldsymbol{TM}}\cdot a}\mathcal{E} \qquad (\textbf{TM} \text{ – волна}) \ . \tag{5.48b}$$

[19]Потери определяются поперечной составляющей вектора Пойнтинга

Теперь вернемся к капилляру. Как было отмечено ранее, линейно или эллиптически поляризованный лазерный пучок из всего множества мод капилляра с наибольшей эффективностью возбуждает семейство мод $\boldsymbol{EH_{1m}}$ (см. раздел 5.1). Основная мода капилляра имеет вид (5.13). Видно, что в первом приближении $\mathcal{E}_x \simeq 0$ и поле моды имеет чисто линейную поляризацию. Поэтому из симметрии очевидно, что доля $\boldsymbol{TE}$ и $\boldsymbol{TM}$ – поляризаций в моде одинакова. В этом случае мы можем взять в качестве коэффициента затухания поля полусумму коэффициентов затухания для $\boldsymbol{TE}$ и $\boldsymbol{TM}$ поляризаций:

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\gamma_{\boldsymbol{TE}} + \gamma_{\boldsymbol{TM}}\right) = \frac{\cos^2\theta_o}{a} \cdot \frac{\varepsilon_w + 1}{2\sqrt{\varepsilon_w - 1}} \ . \tag{5.49}$$

По аналогии с тем, что мы делали перед этим, граничное условие для моды имеет вид:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\right|_{r=a} = -ik_o \frac{2\sqrt{\varepsilon_w - 1}}{\varepsilon_w + 1} \cdot \mathcal{E} \ , \tag{5.50}$$

где a – радиус капилляра. Здесь мы заменили $\dfrac{\partial}{\partial y} \to \dfrac{\partial}{\partial r}$, используя все то же условие сверхразмерности волновода $k_o a \gg 1$. Это граничное условие справедливо и для высших аксиально-симметричных гибридных мод (5.13), поскольку геометрия силовых линий у них аналогична основной моде. Оно нарушается в случае нелинейного взаимодействия поля со стенками.

Необходимо отметить, что в граничное условие (5.50) получено в квазимонохроматическом приближении [20]. Вообще говоря, в более строгой постановке оно будет выглядеть следующим образом

$$\left.\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{2}{c}\frac{\sqrt{\varepsilon_w - 1}}{\varepsilon_w + 1} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} \ , \tag{5.51}$$

которое в случае монохроматического сигнала переходит в (5.50).

Необходимо заметить, что дифференциальное уравнение второго порядка требует, как известно, двух граничных условий. Второе граничное условие по пространственной переменной используется неявно при численном решении уравнения *методом прогонки*. Его смысл заключается в отсутствии особенности на оси капилляра, т.к. цилиндрический лапласиан имеет особенность в точке $r = 0$ (на оси системы).

[20] $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_o} \ll 1$, где $\Delta\omega$ – ширина спектра электромагнитного излучения, ω_o – несущая частота

5.2.3 Балансное уравнение

Для полного определения системы уравнений для описания эволюции лазерного импульса в полом диэлектрическом капилляре в условиях ионизации газа необходимо дополнить уравнением, описывающим изменение концентрации плазмы. Для этого существуют различные подходы. В частности, для разреженного газа уравнение, описывающее изменение концентрации плазмы, может быть получено из решения квантово-механического уравнения Шредингера, описывающего динамику электронной волновой функции в модельном атомном потенциале и внешнем электрическом поле лазерного импульса [220]. Этот подход, однако, является чрезвычайно тяжелым с точки зрения расчета эволюционной задачи, и в случае трехмерной модели атом в уравнении Шредингера данная задача вообще не может быть решена в такой постановке на современных вычислительных мощностях. Другой широко используемый подход, которым мы воспользуемся в нашей работе, основан на применении уравнений ионизационного баланса [210], имеющих в случае однократной ионизации следующий вид (5.23a):

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau} = (1 - \mathcal{N}) W(|\mathcal{E}|) \ , \tag{5.52}$$

где $W(|\mathcal{E}|)$ – вероятность ионизации в единицу времени.

Возможны два типа ионизации, имеющих разные функции $W(|\mathcal{E}|)$: *туннельная и многофотонная*. Какой из этих типов имеет место, определяет параметр $\gamma = \sqrt{\dfrac{\mathcal{I}_p}{2\mathcal{U}_p}}$ – параметр Келдыша, где $\mathcal{I}_p$ – потенциал ионизации атома (энергия связи электрона), $\mathcal{U}_p = \dfrac{e^2\mathcal{E}^2}{4m\omega_o^2}$ – пондеромоторный потенциал, ω_o – частота лазерного поля.

Какой из типов ионизации мы должны выбрать? Ответить на этот вопрос нам поможет физический смысл параметра Келдыша γ.

- При $\gamma \gg 1$ имеет место *многофотонная ионизация*. В этом случае вероятность ионизации в единицу времени

$$W \simeq \left(\frac{e^2\mathcal{E}^2}{8m\omega_o^2\mathcal{I}_p} \right)^k \ , \tag{5.53}$$

  где $k = 1 + \left\langle \dfrac{\mathcal{I}_p}{\hbar\omega_o} \right\rangle$ – число фотонов, которое необходимо поглотить электрону, чтобы стать свободным, квадратные скобки обозначают целую часть.

- При $\gamma \ll 1$ имеет место *туннельная ионизация*. Вероятность ионизации в еди-

ницу времени есть [250]:

$$W(|\mathcal{E}|) \simeq 4\omega_a \frac{\mathcal{E}_a}{|\mathcal{E}|} \exp\left(-\frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}_a}{|\mathcal{E}|}\right) , \tag{5.54}$$

где $\dfrac{1}{\omega_a}$ – атомная единица времени, E_a – атомное поле.

Отметим, что параметр Келдыша γ имеет и другой физический смысл. Для того чтобы стать свободным, электрону необходимо преодолеть потенциальный барьер, образованный атомным потенциалом и потенциалом поля лазерного импульса, шириной ζ_o. Ширину потенциального барьера ζ_o, проходимую барьером при туннелировании, можно оценить из условия

$$e\mathcal{E}\zeta_o = \mathcal{I}_p \quad \Longrightarrow \quad \zeta_o = \frac{\mathcal{I}_p}{e\mathcal{E}(t)} . \tag{5.55}$$

Время туннелирования есть $t_o = \dfrac{\zeta_o}{v}$, где v – характерная скорость электрона в атоме:

$$\frac{mv^2}{2} = \mathcal{I}_p \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\mathcal{I}_p}{m}} . \tag{5.56}$$

Тогда $t_o = \sqrt{\dfrac{m\mathcal{I}_p}{2}}\dfrac{1}{e\mathcal{E}}$. Рассмотрим параметр $\gamma^2 = \left(\dfrac{t_o}{T}\right)^2$, где T – период поля. Это и есть параметр Келдыша. Таким образом, значение параметра Келдыша $\gamma \gg 1$ означает, что время туннелирования электронов через потенциальный барьер велико по сравнению с периодом оптических колебаний. Такая ситуация реализуется для фемтосекундных лазеров ультрафиолетового диапазона длин волн или в оптическом и инфракрасном диапазоне при низких интенсивностях излучения. Теперь ясно, что $\gamma \ll 1$ означает, что туннелирование происходит за время, которое много меньше периода поля (туннельная ионизация). Таким образом, в вероятность многофотонной ионизации входит усредненное по времени значение поля. В вероятность туннельной ионизации входит мгновенное значение поля. Поэтому основной интерес для нас представляет режим туннельной ионизации, имеющий место при $\gamma \ll 1$. Этот механизм ионизации является доминирующим при больших интенсивностях лазерного излучения фемтосекундного диапазона длительностей.

Окончательно суммируя вышесказанное, система уравнений, описывающая распространение лазерного излучения в диэлектрическом капилляре в условиях иони-

зации газа, выглядит следующим образом

$$-\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial z\partial\tau}+\Delta_\perp\mathcal{E}=\beta\mathcal{N}\mathcal{E}\ ,\qquad \beta=\left(\frac{\omega_{po}a}{c}\right)^2\ , \tag{5.57a}$$

$$\left.\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial r}\right|_{r=1}=-\alpha\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau}\ ,\qquad \alpha=4\pi\frac{a}{\lambda}\frac{\sqrt{\varepsilon_w-1}}{\varepsilon_w+1}\ , \tag{5.57b}$$

$$\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial\tau}=(1-\mathcal{N})\cdot W(|\mathcal{E}|)\ , \tag{5.57c}$$

$$W(|\mathcal{E}|)=4\frac{\omega_a}{\omega_o}\cdot\frac{1}{|\mathcal{E}|}\exp\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{|\mathcal{E}|}\right)\ . \tag{5.57d}$$

Здесь введены следующие новые (безразмерные) переменные:

$$z\to z\cdot 2k_oa^2=z\cdot 4z_R\ ,\qquad r\to r\cdot a\ , \tag{5.58}$$
$$\tau\to\frac{\tau}{\omega_o}\ ,\qquad \mathcal{E}\to\mathcal{E}\cdot\mathcal{E}_a\ ,$$

где ω_o – центральная частота широкополосного излучения, $z_R=\dfrac{1}{2}k_oa^2$ – рэлеевская длина. Концентрация плазмы нормирована на концентрацию нейтрального газа $\mathcal{N}_o$.

Система (5.57) решалась численно с использованием метода прогонки и методом Рунге-Кутта 4–го порядка для решения эволюционного уравнения.

5.3 Качественное исследование

Отметим, что при получении исходной системы уравнений (5.57) на динамику ионизирующего лазерного импульса в диэлектрическом капилляре мы пренебрегли квантовым поглощением, которое связано с атомным потенциалом, необходимым для ионизации атомов. В силу определенной взаимосвязи между длительностью волнового пакета и его спектральной шириной сильное спектральное уширение является необходимым условием для получения наиболее короткого импульса. Для увеличения спектральной ширины лазерного импульса будет использована ионизационная нелинейность. Как известно, в процессе изменения показателя преломления образующейся плазмы происходит сдвиг частоты ионизирующего излучения вверх по спектру. При этом конечная картина преобразования спектра зависит не только от темпа ионизации газа при данной амплитуде электромагнитного поля, но и от величины потерь энергии лазерного импульса на формирование плазмы. Эти потери в диапазоне так называемых сверхсильных полей ($\gamma\ll 1$) определяются, в первую очередь, не столкновениями электронов и не расходом энергии на ионизацию атомов,

а затратами на сообщение кинетической энергии рождающимся электронам. Наряду с переменной составляющей скорости, адиабатически перестраиваемой вместе с амплитудой поля, электроны приобретают также и постоянную составляющую, зависящую от фазы поля в момент их рождения и сохраняющуюся после прохождения импульса. Это непосредственно следует из интегрирования уравнения движения:

$$m\frac{dv}{d\tau} = \frac{e}{c}\frac{d\mathcal{A}}{d\tau} \Longrightarrow v = \frac{e}{mc}\left[\mathcal{A}(\tau) - \mathcal{A}(\tau_o)\right] \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{2mc^2}\mathcal{A}^2(\tau) - \frac{e^2}{mc^2}\mathcal{A}(\tau)\mathcal{A}(\tau_o) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathcal{A}^2(\tau_o) \xrightarrow[\tau\to+\infty]{} \frac{e^2}{2mc^2}\mathcal{A}^2(\tau_o)\ , \quad (5.59)$$

где τ_o – момент ионизации.

По аналогии со случаем квазимонохроматических пакетов [102] применим метод моментов для качественного исследования эволюции системы.

5.3.1 Закон сохранения энергии в электромагнитном импульсе

Далее получим уравнение на изменение энергии в лазерном импульсе $\mathcal{I}_{full}$

$$\mathcal{I}_{full} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \quad (5.60)$$

в условиях ионизации газа и «высветки» излучения из капилляра. В дальнейшем более удобно перейти от системы уравнений (5.57) для поля к системе уравнений для динамики векторного потенциала $\mathcal{A}$ поля $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau}$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial z \partial \tau} = -\beta \int\limits_{-\infty}^{\tau} \mathcal{N}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} d\tau' + \Delta_\perp \mathcal{A}\ , \quad (5.61a)$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}\right|_{r=1} = -\alpha \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau}\ , \quad (5.61b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau} = (1-\mathcal{N})W(|\mathcal{A}|)\ . \quad (5.61c)$$

Исходным для дальнейшего рассмотрения является уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau}\right)^2 = \beta\left[-\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\mathcal{N}\mathcal{A}^2\right) - \mathcal{A}^2\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau} + 2\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\mathcal{A}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau}d\tau'\right)\right] +$$
$$+ 2\nabla_\perp\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau}\nabla_\perp \mathcal{A}\right) - \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\nabla_\perp \mathcal{A}\right)^2\ . \quad (5.62)$$

Интегрируя это уравнение (5.62), можно получить уравнение на энергию в лазерном импульсе

$$\frac{d\mathcal{I}_{full}}{dz} = -\beta \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}^2 \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau} d\tau d\boldsymbol{r}_\perp - 2\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} \right)^2 \Bigg|_{r=1} d\tau \ . \tag{5.63}$$

Из выражения (5.63) видно, что первое слагаемое в правой части эволюционного уравнения (5.61a) ответственно не только за эффекты фазовой модуляции, связанные с процессом образования плазмы [75, 182, 223], но и учитывает потери энергии лазерным импульсом на сообщение дрейфовой скорости, образовавшиеся в результате ионизации электронам (см. выражение (5.59)). Таким образом, потери энергии в лазерном импульсе, связанные с нагревом электронов, автоматически учитываются в уравнении (5.61a). Причем величина потерь энергии лазерного импульса на формирование плазмы зависит только от конкретного вида функции $W(|\mathcal{A}|)$. Это легко увидеть, если подставить (5.61c) в (5.63)

$$\frac{d\mathcal{I}_{full}}{dz} = -\beta \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}^2 W(|\mathcal{A}|) \exp\left(- \int\limits_{-\infty}^{\tau} W(|\mathcal{A}|) d\tau' \right) d\tau d\boldsymbol{r}_\perp - \\ - 2\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} \right)^2 \Bigg|_{r=1} d\tau \ . \tag{5.64}$$

Туннельная ионизация (5.54) оказывается уникальным механизмом, который позволяет минимизировать потери (в отличие, например, от ионизации электронным ударом [224]).

Отметим, что эти потери отсутствуют при переходе от (5.61a) к уравнению для комплексной огибающей лазерного импульса в квазимонохроматическом приближении (5.28). При этом второе слагаемое в (5.28) становится чисто фазовым. Это связано с тем, что переход к плавной огибающей подразумевает, что ионизация происходит только в максимумах колебаний светового поля, когда дрейфовая скорость электронов равна нулю. Роль нагревных потерь может существенно возрастать при укорочении длительности ионизирующего импульса и стать определяющей в энергобалансе распространения излучения в газе [49].

Физический смысл второго слагаемого в правой части закона сохранения энергии (5.63) очевиден. Оно отвечает за «утечку» излучения из капилляра.

5.3.2 Закон изменения спектральных характеристик

Далее обратимся к качественному анализу преобразования спектра волнового пакета. В рассматриваемом процессе нестационарного самовоздействия, связанного с ионизацией газа в диэлектрическом капилляре, имеет место смещение спектра лазерного импульса в коротковолновую область. Обратимся к моменту второго порядка

$$\mathcal{I}_{full}\langle\Omega^2\rangle_{\boldsymbol{r}_\perp} = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \left|\mathcal{E}_\omega\right|^2 d\omega d\boldsymbol{r}_\perp = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau}\right)^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{5.65}$$

где $\mathcal{E}_\omega(z,\boldsymbol{r}_\perp,\omega)$ – спектр поля

$$\mathcal{E}_\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\exp(i\omega\tau)d\tau \ . \tag{5.66}$$

Выражение (5.65) описывает смещение центральной частоты электромагнитного излучения и изменение ширины спектра. Это легко можно понять, если в качестве примера рассмотреть лазерный импульс гауссовой формы

$$\mathcal{E}_\omega = \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_o)^2}{2\Delta\omega^2} - i\frac{1}{2}\alpha(\omega-\omega_o)^2\right] + \exp\left[-\frac{(\omega+\omega_o)^2}{2\Delta\omega^2} + i\frac{1}{2}\alpha(\omega+\omega_o)^2\right] \ . \tag{5.67}$$

Для данного распределения можно получить выражение на момент второго порядка $\langle\Omega^2\rangle$ при $\Delta\omega/\omega_o \lesssim 1$

$$\langle\Omega^2\rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^2|\mathcal{E}_\omega|^2 d\omega}{\mathcal{I}_{full}} \simeq \omega_o^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\right)^2\right] \ . \tag{5.68}$$

Как видно из выражения при $\Delta\omega \ll \omega_o$, выражение пропорционально несущей частоты волнового пакета.

Дифференцируя выражение (5.65) один раз по переменной z и используя (5.61), (5.64) получаем уравнение, описывающие эволюцию момента второго порядка $\langle\Omega^2\rangle_{\boldsymbol{r}_\perp}$

$$\frac{d\langle\Omega^2\rangle_{\boldsymbol{r}_\perp}}{dz} = -\langle\Omega^2\rangle_{\boldsymbol{r}_\perp}\frac{d}{dz}\ln\left(\mathcal{I}_{full}\right) + \frac{1}{\mathcal{I}_{full}}\left\{\beta\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}^2\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial\tau}d\tau d\boldsymbol{r}_\perp - 2\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\tau}\right)^2\Bigg|_{r=1} d\tau\right\} =$$

$$= \frac{2\alpha\left[\langle\Omega^2\rangle_{\boldsymbol{r}_\perp} - \langle\Omega_b^2\rangle\right]}{\mathcal{I}_{full}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}^2\Bigg|_{r=1} d\tau + \frac{\beta}{\mathcal{I}_{full}}\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\langle\Omega^2\rangle_{\boldsymbol{r}_\perp}\mathcal{A}^2+\mathcal{E}^2\right]W(|\mathcal{E}|)\times$$

$$\times\exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\tau}W(|\mathcal{E}|)d\tau'\right)d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{5.69}$$

где $\mathcal{A}$ – векторный потенциал, $\langle\Omega_b^2\rangle$ – средняя частота излучения на границе капилляра ($r = 1$):

$$\langle\Omega_b^2\rangle \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}^2 \Big|_{r=1} d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau}\right)^2 \Big|_{r=1} d\tau \ . \tag{5.70}$$

Как видно из выражения (5.69), спектр лазерного импульса будет смещаться в «синюю» область спектра, поскольку концентрация электронов растет в процессе ионизации газа $\dfrac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau} \geq 0$. При этом конечная картина преобразования спектра волнового пакета зависит не только от темпа ионизации газа при данной амплитуде электромагнитного поля, но и от величины потерь энергии лазерного импульса, связанных с «утечкой»излучения из капилляра.

Следует отметить, что в случае линейной задачи ($\beta \equiv 0$) средняя частота *широкополосного излучения* в рамках волнового уравнения будет немного увеличиваться в отличие от приближения медленно меняющихся амплитуд, поскольку потери излучения в капилляре являются частотно-зависимыми (например, для основной моды коэффициент затухания $\gamma \propto \dfrac{1}{\omega^2}$ (5.16)). Очевидно, что это приводит к более быстрой «высветке» более низких частотных компонент по сравнению с высокими частотами в спектре лазерного импульса (см. рисунок 5.4). Поэтому даже в линейной задаче из-за частотных потерь имеет место соотношение

$$\frac{d\langle\Omega^2\rangle_{\boldsymbol{r}_\perp}}{dz} \geq 0 \ .$$

Таким образом, в процессе изменения показателя преломления образующейся плазмы происходит сдвиг частоты и уширение спектра в «синюю»область спектра ионизирующего излучения (см. (5.69)).

5.3.3 Оценка на нарушение одномодовового режима распространения излучения

Дабы понять суть физики ионизационно-индуцированной самокопрессии лазерных импульсов в газонаполненном капилляре, мы сначала рассмотрим идеи, лежащие в основе предложенной схемы.

Наша ключевая идея – использовать газ, имеющий плотность, которая позволила бы нарушить условия одномодового режима распространения излучения из-за формирования плазмы в результате туннельной ионизации и, таким образом, приводить

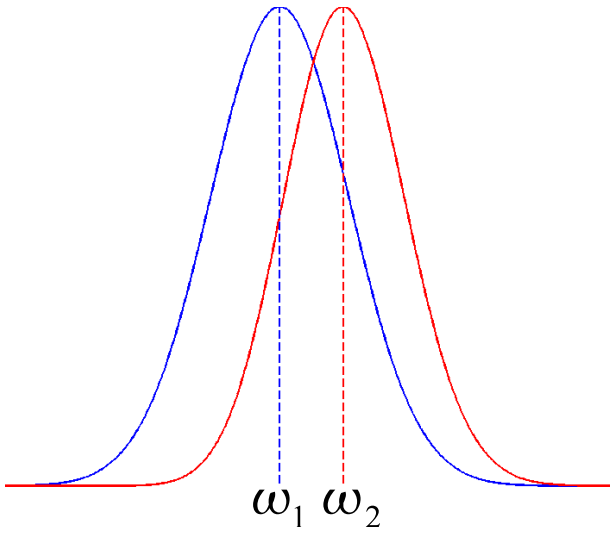


Рис. 5.4: Иллюстрация процесса сдвига несущей частоты лазерного импульса из-за частотно-зависимых потерь в капилляре. Здесь синяя линия – начальный спектр $S_{in}(\omega)$, красная линия – спектр импульса на выходе капилляра $S_{out}(\omega) = S_{in}(\omega) \times \exp\left(-\frac{5}{\omega^2}\right)$, ω_1 и ω_2 – несущие частоты для входного и выходного импульса ($\omega_1 \leq \omega_2$). Спектры нормированы на максимальное значение.

к возбуждению нелинейного плазменного волновода, в котором утекающие собственные моды могут распространяться [165]. Такой ионизационно-индуцированный плазменный волновод может обеспечить аномальную дисперсию групповых скоростей, необходимую для самокомпрессии импульса. Нарушение условия одномодового распространения может быть оценено с помощью концепции Бриллюэна для описания формирования пространственной структуры поля в волноводе. Согласно этой концепции, поперечная структура может быть интерпретирована как результат интерференции лучей, падающих и отраженных от стенки под углом, определяемом поперечным волновым числом [129]: $\theta_{nm} \simeq \frac{\kappa_{nm}}{k_o}$, где $\kappa_{nm} \simeq k_o \left[1 - \frac{u_{nm}^2}{2(k_o a)^2}\right]$ –поперечное волновое число и u_{nm} – m корень уравнения $J_n(u_{nm}) = 0$, $k_o = \frac{\omega_o}{c}$ – волновое число в вакууме, a – радиус капилляра. Нелинейность показателя преломления среды, заполняющей капилляр, приводит к изменению угла падения лучей. Поэтому, если на входе капилляра эффективно возбуждается одна фундаментальная мода, то переход в многомодовый режим распространения излучения будет иметь место, когда, вследствие рефракции излучения на образующейся плазме, бриллюэновский угол изменится на величину, соответствующую возбуждению следующей волноводной моды. Предполагая, что газ полностью однократно ионизирован, условие нарушения одно-

модового распространения в капилляре может быть записано как

$$\mathcal{N}[\mathrm{cm}^{-3}] > \mathcal{N}^{\star}[\mathrm{cm}^{-3}] = \frac{mc^2}{4\pi e^2}\frac{u_{12}^2 - u_{11}^2}{a^2} \simeq \frac{7\times 10^{12}}{a^2}\ , \tag{5.71}$$

где $u_{11} = 2.405$ и $u_{12} = 5.52$ – первый и второй нули Бесселя нулевого порядка. Так, для длины волны $\lambda_o = 0.8\ \mu m$ и диаметра капилляра 150 μm оценка концентрации плазмы, при которой нарушается одномодовый режим распространения излучения в капилляре, дает $\mathcal{N} < 1.2\times 10^{17}$ см$^{-3}$, что при полной однократной ионизации газа соответствует давлению нейтрального газа 3.5 Торр.

Более того, для плотности газа $\mathcal{N} > \mathcal{N}^{\star}$ в полом волноводе, узкий плазменный волновод (по сравнению с поперечным размером капилляра) может быть сформирован, где утекающие собственные моды могут распространяться с поперечной структурой поля, разительно отличающейся от мод самого капилляра. Существование такого волновода связано с резкой зависимостью скорости ионизации от амплитуды лазерного поля, которая ведет к формированию скачка (на масштабе длины волны) к показателю преломления. По сути, такой плазменный волновод полностью аналогичен капилляру, но, в отличие от последнего, обладает существенно меньшей величиной относительного показателя преломления и, как следствие, существенно худшей добротностью. Возможность образования плазменного волновода будет рассмотрена в разделе 5.5. Следует отметить, что использование внешнего капилляра, где используется дифференциальная газовая накачка, может в значительной степени помочь нам в производстве плазменного волновода (газовая струя, где такое волноведущее распространение также обычно встречается на малых длинах [165]), и также излучение может распространяться внутри этого волновода на расстояниях, существенно превышающих длину канала свободно локализованного плазменного волновода из-за текущих внешних границ (стенки капилляра).

5.4 «Квазиодномодовый»режим распространения излучения

В данном разделе будут приведены результаты численного анализа ионизационной динамики лазерного импульса в газонаполненном диэлектрическом капилляре на основе системы уравнений (5.57) при $\mathcal{N} < \mathcal{N}^{\star}$. Расчет проводился для капилляра, заполненного водородом при давлении 2 Торр, с диаметром 185λ и длиной

$L = 2.5z_o = 10z_R$ при оптимальном согласовании входного пучка с фундаментальной модой. Эти параметры являются характерными для экспериментов [14, 15] и позволяют удовлетворить условию одномодового распространения излучения (5.71) через капилляр. В определенном смысле они близки к оптимальным, поскольку потери излучения в капилляре вследствие утечки на стенках не слишком велики (около 25%), а давление не слишком низкое, так что можно наблюдать значительные изменения параметров поля на относительно небольшой трассе.

Распределение поля в лазерном импульсе на входе волновода задавалось в следующем виде

$$\mathcal{E}(r,\tau) = \mathcal{E}_o \exp\left[-2\ln 2\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right)^2 - \left(\frac{r}{a_o}\right)^2\right]\cos(\tau) \tag{5.72}$$

с длительностью $\tau_p = 50.26$ (20 фс в размерных единицах) на длине волны $\lambda_o = 0.8$ мкм при условии оптимального согласования пучка и капилляра ($a_o/a = 0.645$). На рисунке 5.5 представлена динамика интенсивности лазерного импульса $|\hat{\mathcal{E}}(z,r,\tau)|^2$ [$\mathcal{E}(z,r,\tau) = \hat{\mathcal{E}}(z,r,\tau)\exp(i\tau) + c.c.$] для случая, когда начальная амплитуда поля $\mathcal{E}_o$ составляет 0.2, что соответсвует в размерных единицах интенсивности 1.37×10^{15} Вт/см^2. В этом случае, как следует из результатов расчетов, пространственное распределение поля в капилляре близко к структуре фундаментальной моды $\mathbf{EH_{11}}$, что согласуется с результатами экспериментов. Эффективность прохождения при этом составляет 77%. На рисунке 5.6 приведена пространственно-временная эволюция распределения плазмы $\mathcal{N}(\tau, r)$. Как видно из данного рисунка, газ очень быстро ионизуется на переднем фронте импульса. Однако при меньших начальных амплитудах в лазерном импульсе $\mathcal{E}_o$ могут возникнуть несколько областей по радиусу, где образуется плазма из-за деформации лазерного импульса при распространении в диэлектрическом капилляре.

Для демонстрации того, что преобладает «квазиодномодовой»режим распространения излучения через капилляр, мы воспользуемся следующим приемом. Представим пространственную структуру поля $\mathcal{E}(\tau, r)$ в виде разложения по модам капилляра (см. раздел 5.1):

$$\mathcal{E}(z,\tau,\boldsymbol{r}_\perp) = \sum_{\nu,\ m} \mathcal{C}_{\nu m}(z,\tau)\Psi_{\nu m}(\boldsymbol{r}_\perp)\ , \tag{5.73}$$

где $\mathcal{C}_{\nu m}$ – коэффициенты разложения, $\Psi_{\nu m}$ – пространственное распределение моды

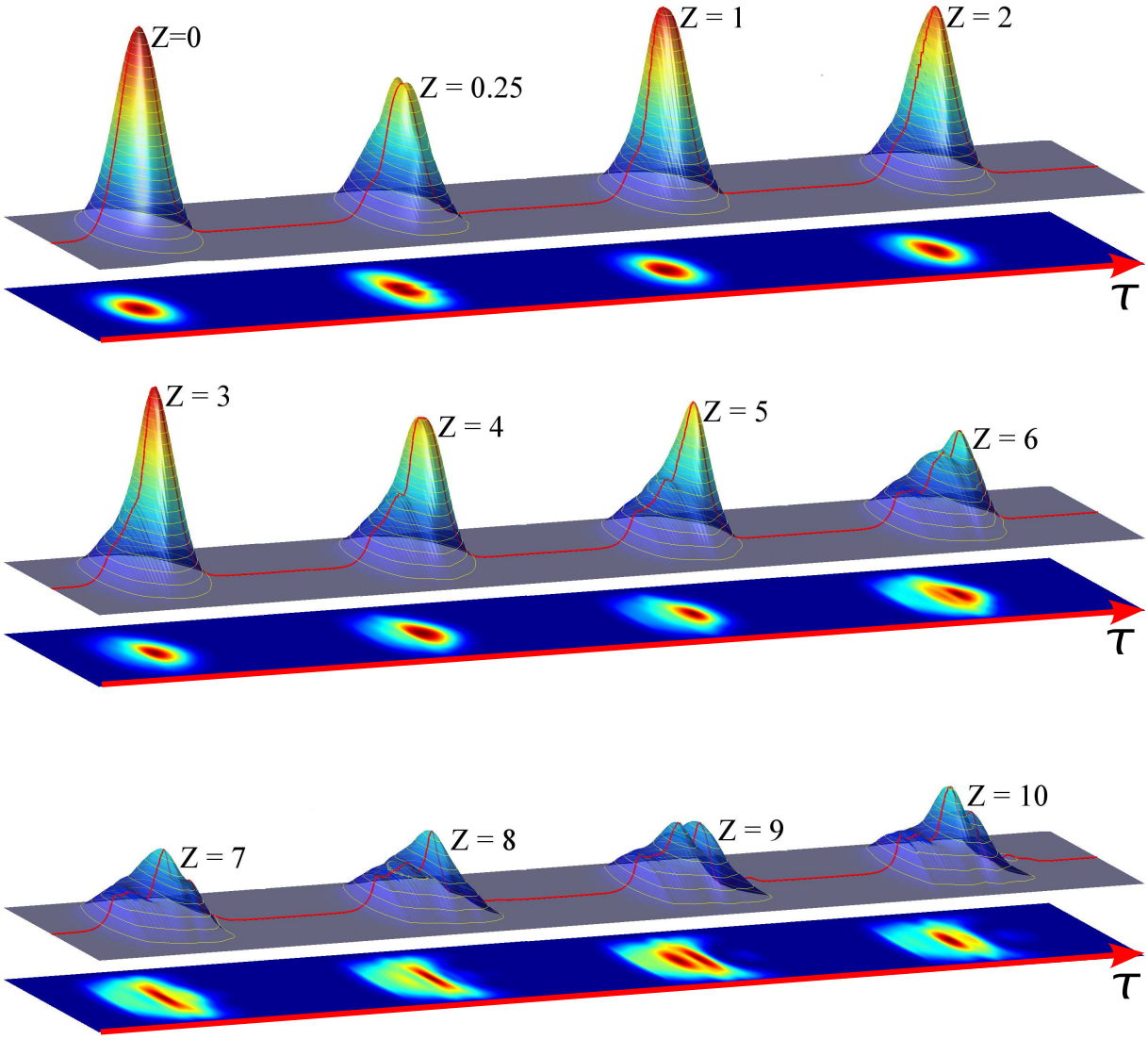


Рис. 5.5: Динамика линейно поляризованного поля $|\mathcal{E}(z,\tau,r)|^2$ длительностью $\tau_p = 50.26$, начальной амплитудой $\mathcal{E}_o = 0.2$ в капилляре диаметром 185λ при $\beta \simeq 21.2$ (давление нейтрального газа 2 Торр в размерных единицах) при условии оптимального согласования пучка и капилляра.

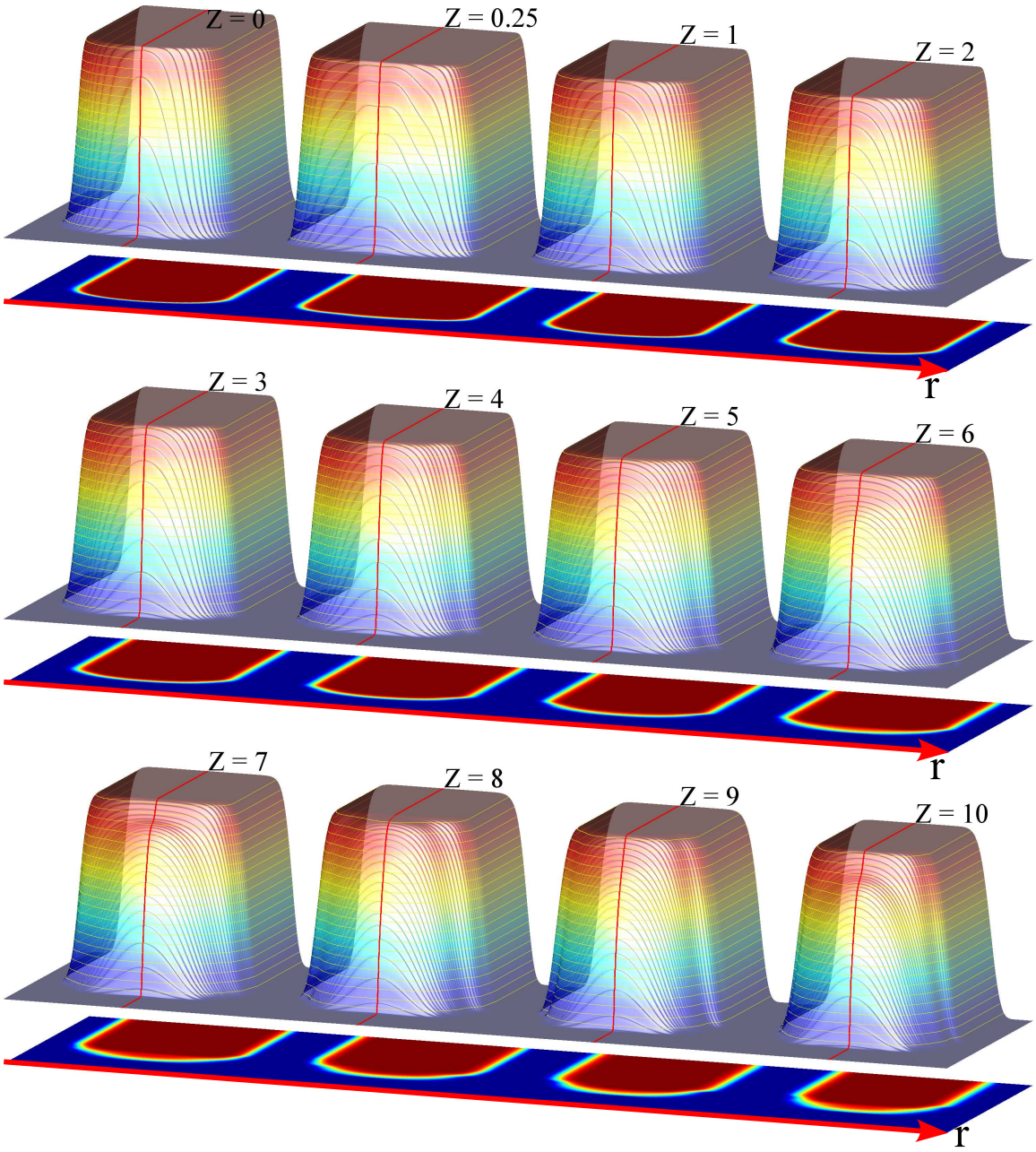


Рис. 5.6: Динамика плазмы $\mathcal{N}(\boldsymbol{r}_\perp, \tau)$. Здесь эволюционная переменная z нормирована на z_R.

капилляра, нормированные условием

$$\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \Psi^2_{\nu m}(\boldsymbol{r}_\perp) d\boldsymbol{r}_\perp = 1 \ . \tag{5.74}$$

Здесь нижние индексы нумеруют моду. Как отмечалось ранее, в диэлектрических капиллярах существует три семейства мод: *поперечные* $\mathbf{TE_{0m}}$ и $\mathbf{TM_{0m}}$ *моды* и *гибридные* $\mathbf{EH}_{\nu\mathbf{m}}$ *моды* (см. раздел 5.1). Однако, в силу топологии силовых линий полей в модах, линейно или эллиптически поляризованный аксиально-симметричный гауссов пучок может эффективно возбуждать только семейство *гибридных мод* $\mathbf{EH_{1m}}$. Поэтому далее везде мы будем подразумевать представление только по *гибридным модам* при $\nu = 1$.

На рис. 5.8 приведена динамика коэффициентов разложения $\hat{\mathcal{C}}_{1m}(z,\tau)$ для четырех низших мод [$m = 1 \ldots 4$: $\mathbf{EH_{11}}$, $\mathbf{EH_{12}}$, $\mathbf{EH_{13}}$, $\mathbf{EH_{14}}$], где

$$\mathcal{C}_{1m}(z,\tau) = \hat{\mathcal{C}}_{1m}(z,\tau) \exp(i\tau) + c.c. \tag{5.75}$$

Как видно из рис. 5.8, на входе капилляра лазерный пучок с максимальной эффективностью возбуждает наиболее добротную фундаментальную моду капилляра $\mathbf{EH_{11}}$, и в процессе дальнейшего распространения поперечная структура поля в основном определяется этой модой. На рисунке 5.7 приведены зависимости изменения энергии для двух мод капилляра: $\mathbf{EH_{11}}$, $\mathbf{EH_{12}}$ от эволюционной переменной z

$$\mathcal{I}_m(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}^2_{1m}(z,\tau) d\tau \ , \tag{5.76}$$

где $m = 1, 2$. Из рисунка 5.7 видно, что в основном вся энергия сосредоточена в *фундаментальной моде* $\mathbf{EH_{11}}$, т.е. $\mathcal{I}_{full}(z) \simeq \mathcal{I}_1(z)$. Таким образом, как следует из рисунков 5.7-5.8, реализуется «квазиодномодовый» режим распространения излучения через капилляр при $\mathcal{N} < \mathcal{N}^\star$. Поэтому при анализе ионизационной динамики импульса в капилляре можно использовать упрощенную систему уравнений, которую можно получить, воспользовавшись одномодовым приближением. Полагая, что на входе капилляра лазерный пучок с максимальной эффективностью возбуждает наиболее добротную «фундаментальную» моду капилляра $\mathbf{EH_{11}}$ и в процессе дальнейшего распространения поперечная структура поля в основном определяется этой модой $\mathcal{E}(z, \boldsymbol{r}_\perp, \tau) \simeq \mathcal{C}_{11}(z,\tau)\Psi_{11}(\boldsymbol{r}_\perp)$. В результате получаем следующую систему уравнений

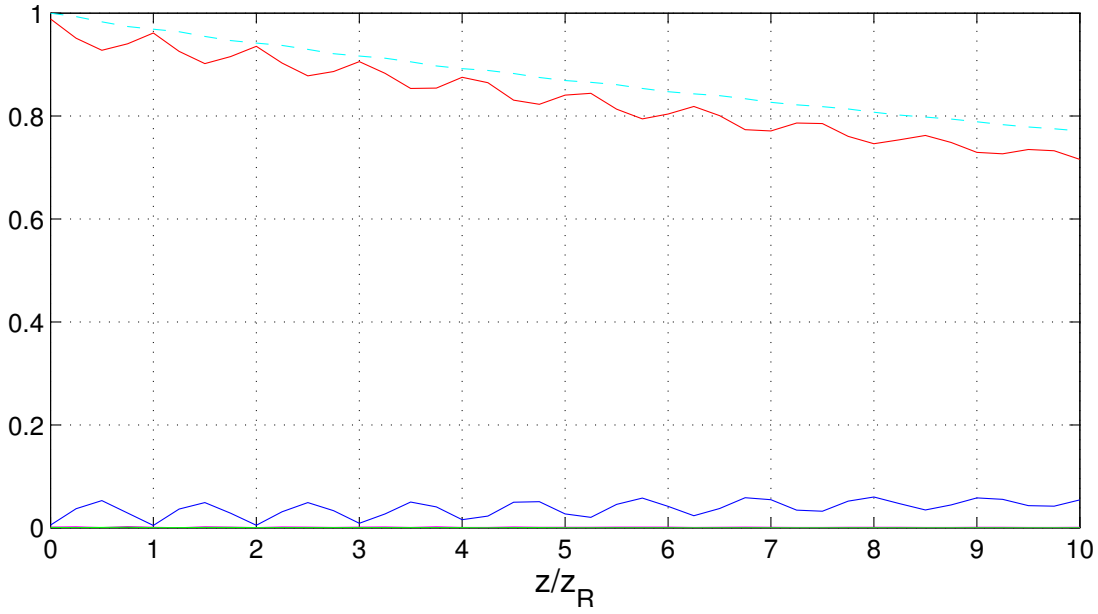


Рис. 5.7: Изменение полной энергии излучения $\mathcal{I}_{full}(z)$ (см. выражение (5.60)) и энергий для двух мод $[\mathcal{I}_1(z)$ и $\mathcal{I}_2(z)]$ (5.76) в зависимости от z. Голубая линия – $\mathcal{I}_{full}(z)$, красная линия – $\mathcal{I}_1(z)$, синяя линия – $\mathcal{I}_2(z)$. Начальная длительность $\tau_p = 50.26$, начальная амплитуда $\mathcal{E}_o = 0.2$, диаметр капилляра 185λ при $\beta \simeq 21.2$ (давление нейтрального газа 2 Торр в размерных единицах) при условии оптимального согласования пучка и капилляра.

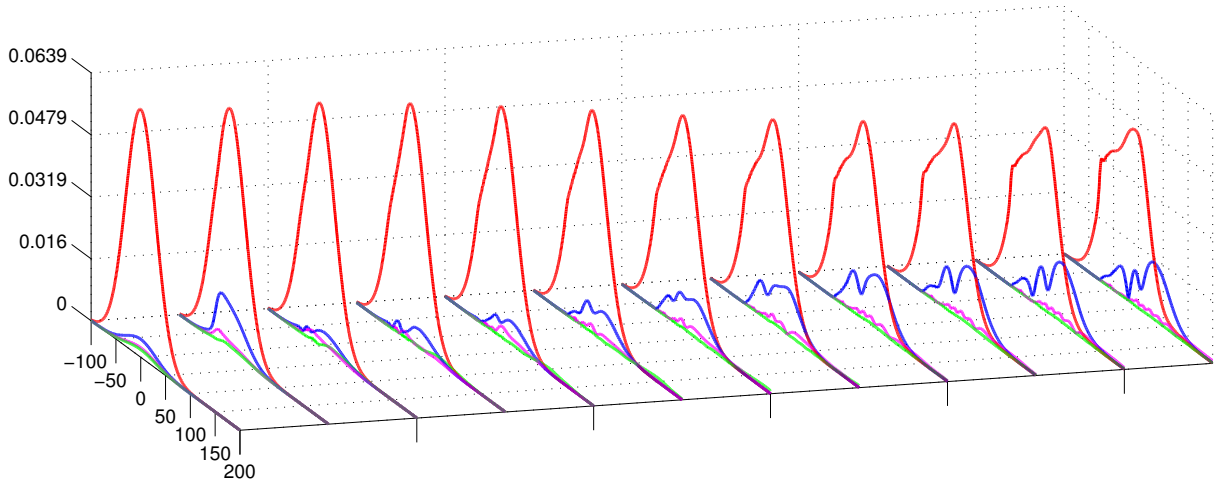


Рис. 5.8: Динамика коэффициентов разложения $\left|\hat{\mathcal{C}}_{1m}\right|^2$ $(m = 1 \ldots 4)$. Начальная длительность $\tau_p = 50.26$, начальная амплитуда $\mathcal{E}_o = 0.2$, диаметр капилляра 185λ при $\beta \simeq 21.2$ (давление нейтрального газа 2 Торр в размерных единицах) при условии оптимального согласования пучка и капилляра.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{11}}{\partial z \partial \tau} + \beta \mathcal{N} \mathcal{C}_{11} + u_{11}^2 \mathcal{C}_{11} + \gamma \frac{\partial \mathcal{C}_{11}}{\partial \tau} \simeq 0 \ , \tag{5.77a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau} = (1 - \mathcal{N}) W(|\mathcal{C}_{11}|) \ , \tag{5.77b}$$

где $u_{11} = 2.405$ – безразмерное поперечное волновое число,

$$\gamma = \frac{u_{11}^2}{2 k_o a} \frac{\varepsilon_w + 1}{\sqrt{\varepsilon_w - 1}} \ .$$

В уравнении (5.77a) пренебрежено зависимостью коэффициента затухания от частоты, считая, что сдвиг частоты и увеличение ширины спектра мало по сравнению с несущей частотой входного лазерного импульса.

Как было показано в разделе 5.3.2 посредством нестационарности ионизационной нелинейности имеется возможность перестройки частоты $\langle \omega(z) \rangle$ и уширения спектра $\langle \Delta\omega(z) \rangle$ лазерного излучения в коротковолновую область спектра (см. уравнение (5.69)). Рис. 5.9 и 5.10 соответствует случаю, когда начальная амплитуда поля составляет $\mathcal{E}_o = 0.1$ и близка к порогу ионизации водорода. В этом случае ионизация происходит в окрестности максимума, так что значительная часть импульса в этом процессе участия не принимает – передний фронт распространяется фактически в вакууме, а задний фронт в однородной плазме. Как следствие, изменения в спектре импульса и в его временной структуре незначительны (см. рисунок 5.10**(b)**). С увеличением амплитуды поля картина меняется существенно. На рисунках 5.11, 5.13 представлены результаты для начальной амплитуды $\mathcal{E}_o = 0.2$. Видно, что в результате ионизации водорода в процесс нелинейного взаимодействия с газом вовлечена значительная часть лазерного импульса, что приводит к существенному увеличению ширины спектра импульса и большой величине сдвига несущей частоты.

Обратимся далее к количественным характеристикам. Зависимости величины сдвига несущей частоты $\langle \omega \rangle$ и ширины спектра $\langle \Delta\omega \rangle$ лазерных импульсов от входной амплитуды поля $\mathcal{E}_o$ представляет большой интерес с точки зрения исследования ионизационной динамики импульса. Зависимость величины сдвига центра масс спектра импульса

$$\langle \omega(z) \rangle = \frac{\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_0^{+\infty} |S(z, \boldsymbol{r}_\perp, \omega)|^2 \omega d\omega d\boldsymbol{r}_\perp}{\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_0^{+\infty} |S(z, \boldsymbol{r}_\perp, \omega)|^2 d\omega d\boldsymbol{r}_\perp} \tag{5.78}$$

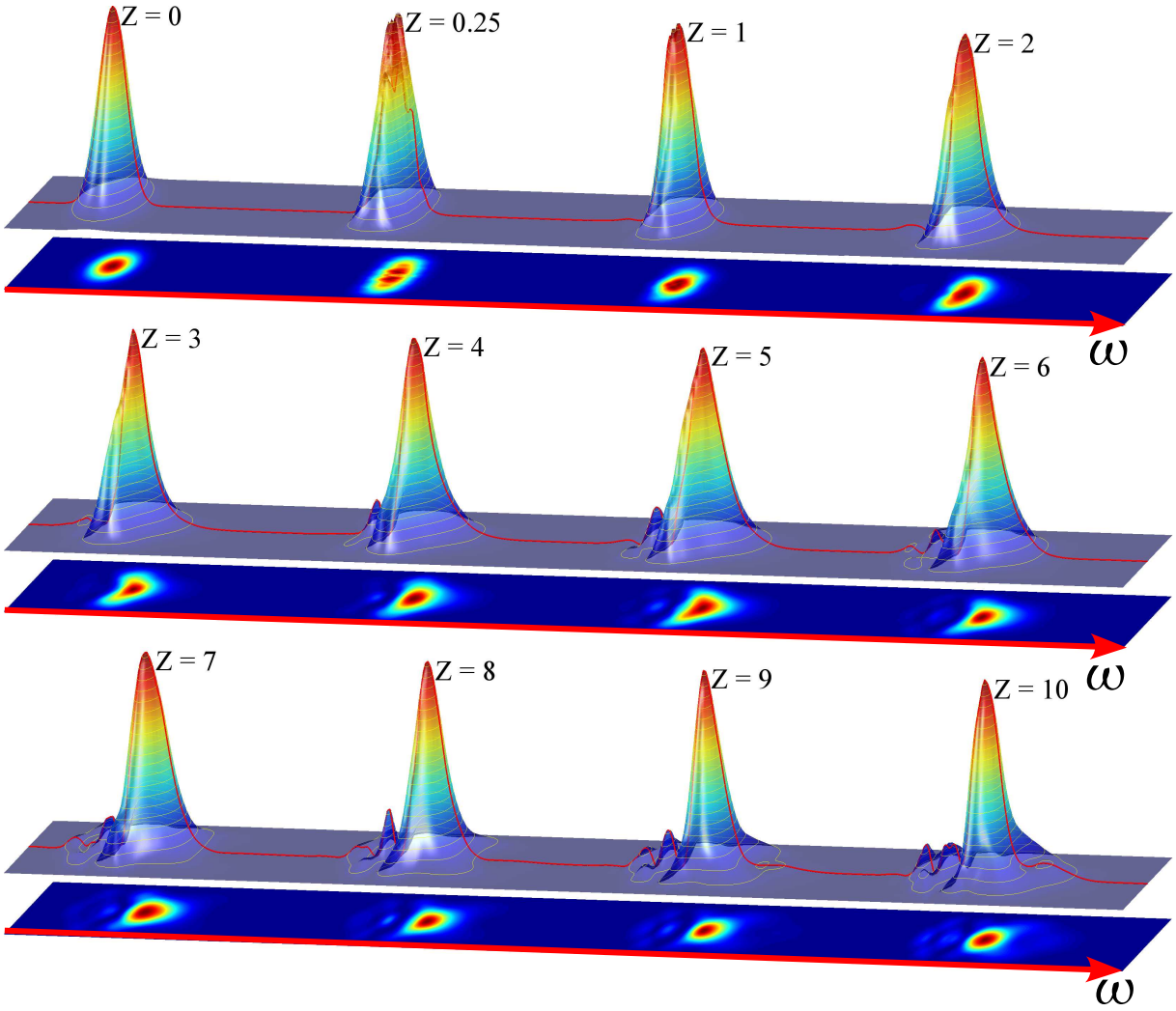


Рис. 5.9: Динамика спектра ионизирующего импульса. Начальная длительность $\tau_p = 50.26$, начальная амплитуда $\mathcal{E}_o = 0.1$ (начальная амплитуда поля близка к ионизационному порогу), диаметром капилляра 185λ, $\beta \simeq 21.2$ (давление нейтрального газа 2 Торра в размерных единицах) при условии оптимального согласования пучка и капилляра. Спектры нормированы на максимальное значение. Частотная ось ω меняется в диапазоне: $\omega = 0.85 \ldots 1.35$ (как на рис. 5.10**(b)**). Эволюционная переменная z здесь нормирована на z_R.

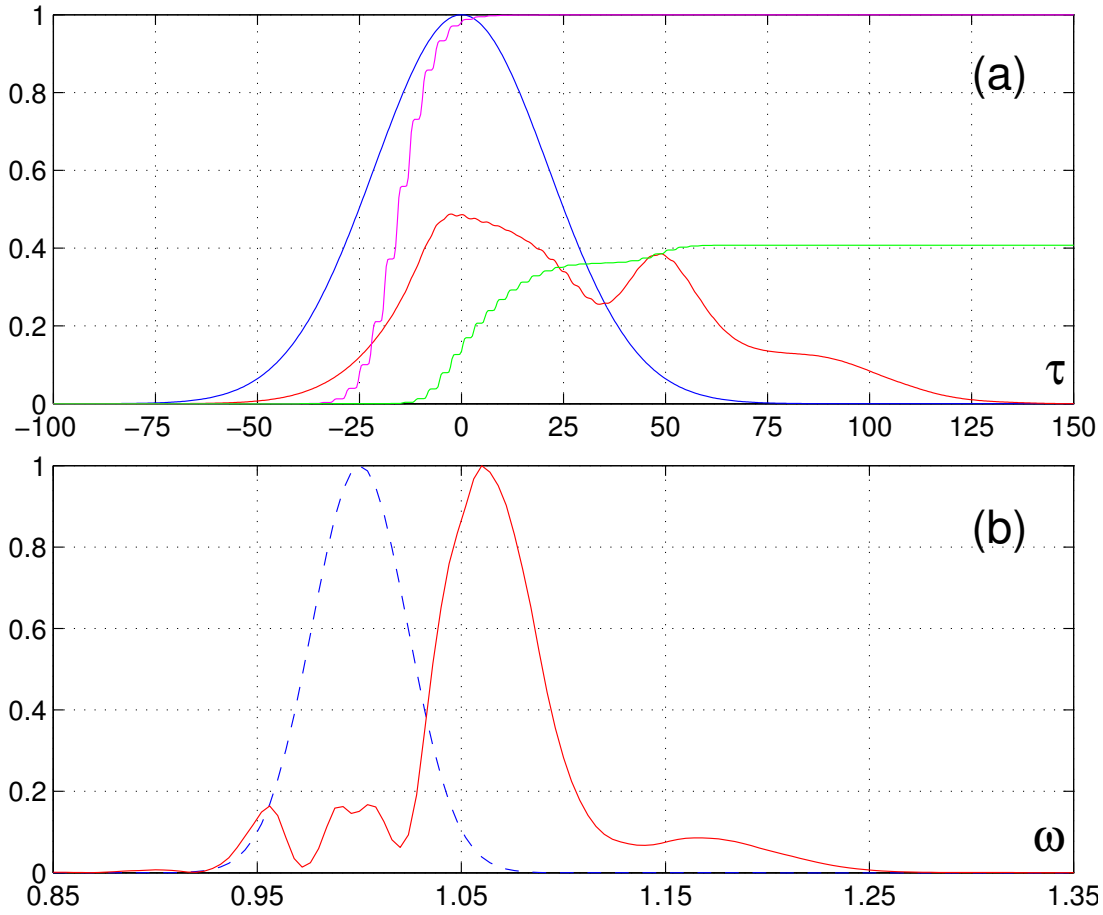


Рис. 5.10: Начальная длительность $\tau_p = 50.26$, начальная амплитуда $\mathcal{E}_o = 0.1$ (начальная амплитуда поля близка к ионизационному порогу), диаметром капилляра 185λ, $\beta \simeq 21.2$ (давление нейтрального газа 2 Торра в размерных единицах). **(a)** Временное распределение огибающей интенсивности волнового пакета $\left|\hat{\mathcal{E}}\right|^2$ и концентрации электронов на оси системы $\mathcal{N}(\tau, r = 0)$. Синяя линия – распределение интенсивности на входе капилляра ($z = 0$), красная линия – интенсивность волнового пакета на выходе капилляра длиной $20z_R$, пурпурная линия – распределение концентрации электронов на входе капилляра $\mathcal{N}(z = 0, \tau, r = 0)$, зеленая линия – распределение концентрации электронов на выходе капилляра. **(b)** Синяя пунктирная линия – спектр ионизирующего импульса на входе нелинейной среды $\mathcal{S}(z = 0, \omega, r = 0)$; красная линия – спектр волнового пакеиа на выходе капилляра. Спектры нормированы на максимальное значение.

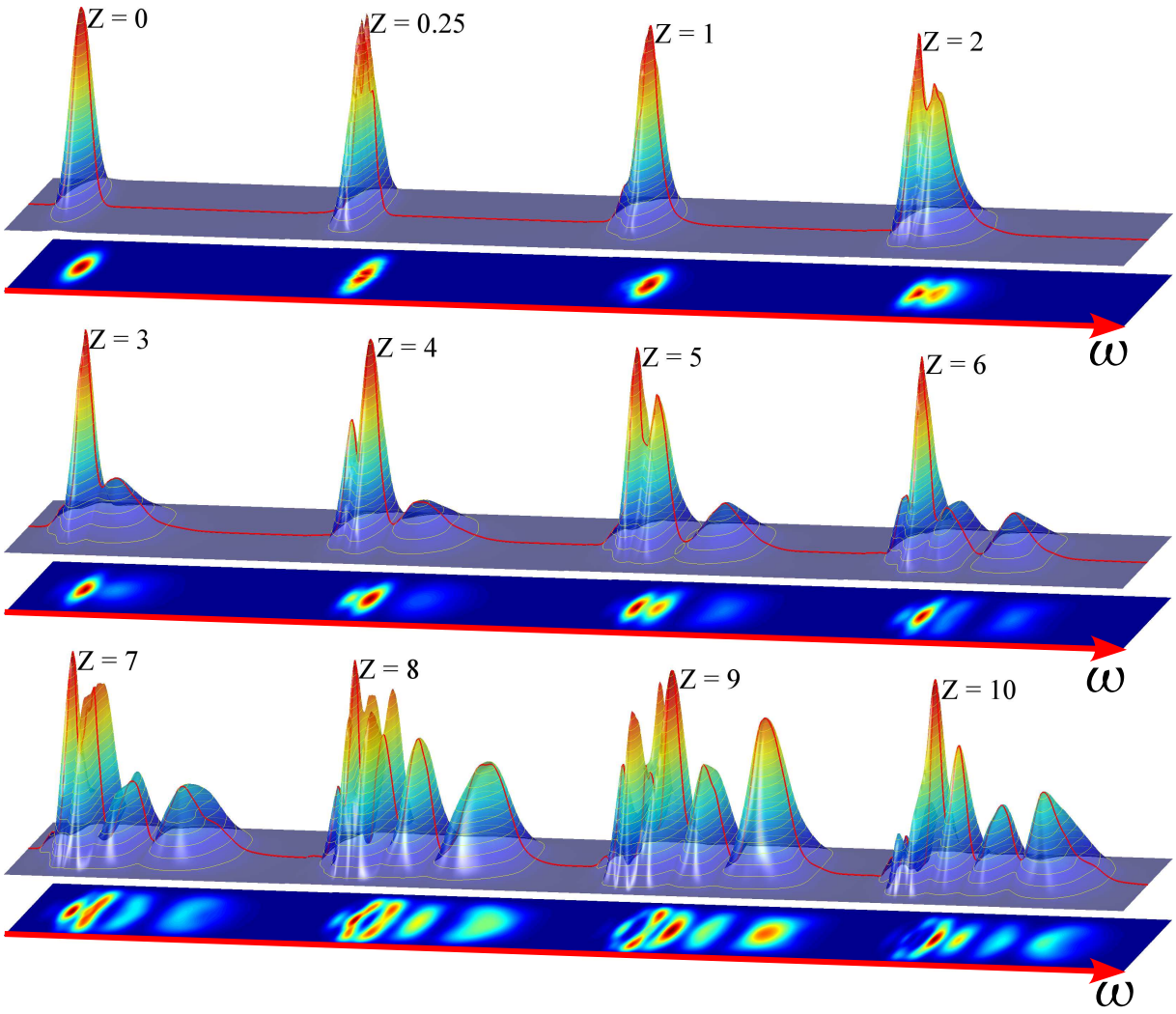


Рис. 5.11: Динамика спектра ионизирующего импульса. Начальная длительность $\tau_p = 50.26$, начальная амплитуда $\mathcal{E}_o = 0.2$, диаметр капилляра 185λ, $\beta \simeq 21.2$ (давление нейтрального газа 2 Торра в размерных единицах) при условии оптимального согласования пучка и капилляра. Спектры нормированы на максимальное значение. Частотная ось ω меняется в диапазоне: $\omega = 0.85 \ldots 1.65$ (как на рис. 5.13(**b**)). Эволюционная переменная z здесь нормирована на z_R.

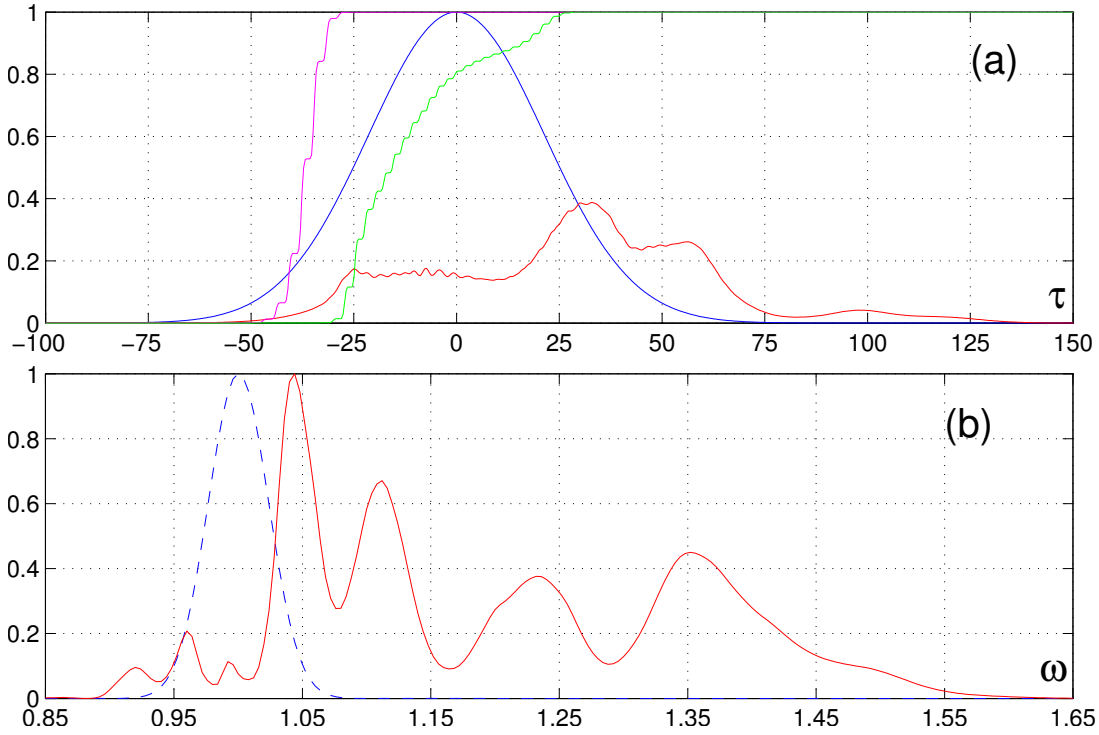


Рис. 5.12: Начальная длительность $\tau_p = 50.26$, начальная амплитуда $\mathcal{E}_o = 0.2$, диаметр капилляра 185λ, $\beta \simeq 21.2$ (давление нейтрального газа 2 Торра в размерных единицах). **(a)** Временное распределение огибающей интенсивности волнового пакета $\left|\hat{\mathcal{E}}\right|^2$ и концентрации электронов $\mathcal{N}(r=0)$ на оси системы. Синяя линия – распределение интенсивности волнового пакета на входе нелинейной среды ($z = 0$), красная линия – распределение интенсивности лазерного импульса на выходе капилляра длиной $20z_R$, пурпурная линия – распределение концентрации электронов, зеленая линия – распределение концентрации электронов на выходе капилляра. **(b)** Синяя пунктирная линия – спектр входного ионизирующего импульса; красная линия – спектр на выходе капилляра. Спектры нормированы на максимальное значение.

от входной амплитуды поля $\mathcal{E}_o$ и начального давления нейтрального газа p представлена на рисунке 5.13**(a)**. При небольшом превышении амплитуды поля над порогом ионизации наблюдается довольно резкая зависимость величины сдвига от интенсивности, что связано с резкой зависимостью доли энергии лазерного импульса, участвующей в ионизации газа, от напряженности поля в импульсе. По мере увеличения интенсивности ионизация распределяется более равномерно по временному профилю импульса, охватывая значительную часть энергии поля в импульсе. Поэтому зависимость величины сдвига центра масс спектра $\langle\omega(z)\rangle$ от входного поля $\mathcal{E}_o$ становится заметно более плавной. Такая же картина наблюдается и в зависимости ширины спектра $\langle\Delta\omega(z)\rangle$

$$\langle\Delta\omega^2(z)\rangle = \frac{\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{0}^{+\infty} |S(z,\boldsymbol{r}_\perp,\omega)|^2 \left(\omega - \langle\omega\rangle\right)^2 d\omega d\boldsymbol{r}_\perp}{\int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp}\int\limits_{0}^{+\infty} |S(z,\boldsymbol{r}_\perp,\omega)|^2 d\omega d\boldsymbol{r}_\perp} \tag{5.79}$$

от начальной амплитуды поля (рис. 5.13**(b)**) – быстрый рост при небольшом превышении над порогом сменяется плавным, близким к асимптотическому при большом превышении.

Как следует из рисунков 5.9, 5.11, наряду с увеличением ширины спектра наблюдается появление амплитудных модуляций спектральной интенсивности, связанных с фазовой модуляцией временной структуры импульса, наводимой ионизационной нелинейностью. В случае *квазиодномодового* режима распространения, благодаря волноводным свойствам капилляра, изменения пространственного распределения спектральной интенсивности усредняются по поперечному сечению пучка, и спектр выходного излучения должен иметь однородную плавную зависимость от расстояния до оси капилляра.

В связи со значительным увеличением ширины спектра лазерных импульсов при ионизации газа в газонаполненных диэлектрических капиллярах была предложена схема компрессии импульсов [15, 182, 210], которая в принципе позволяет достигать предельно малых длительностей лазерного излучения. Было показано, что зависимость фазы в спектре выходного излучения от частоты близка к параболической $\varphi(\omega) \sim \hat{\alpha}\omega^2$ [21] [182]. При этом данный частотный чирп $\varphi_\omega(\omega) \sim \hat{\alpha}\omega$ может быть скомпенсирован при распространении выходного излучения в среде с нормальной дисперсией. Таким образом, в качестве основного элемента оптического компрессо-

[21] $S(\omega) = |S(\omega)|\exp(i\varphi(\omega))$

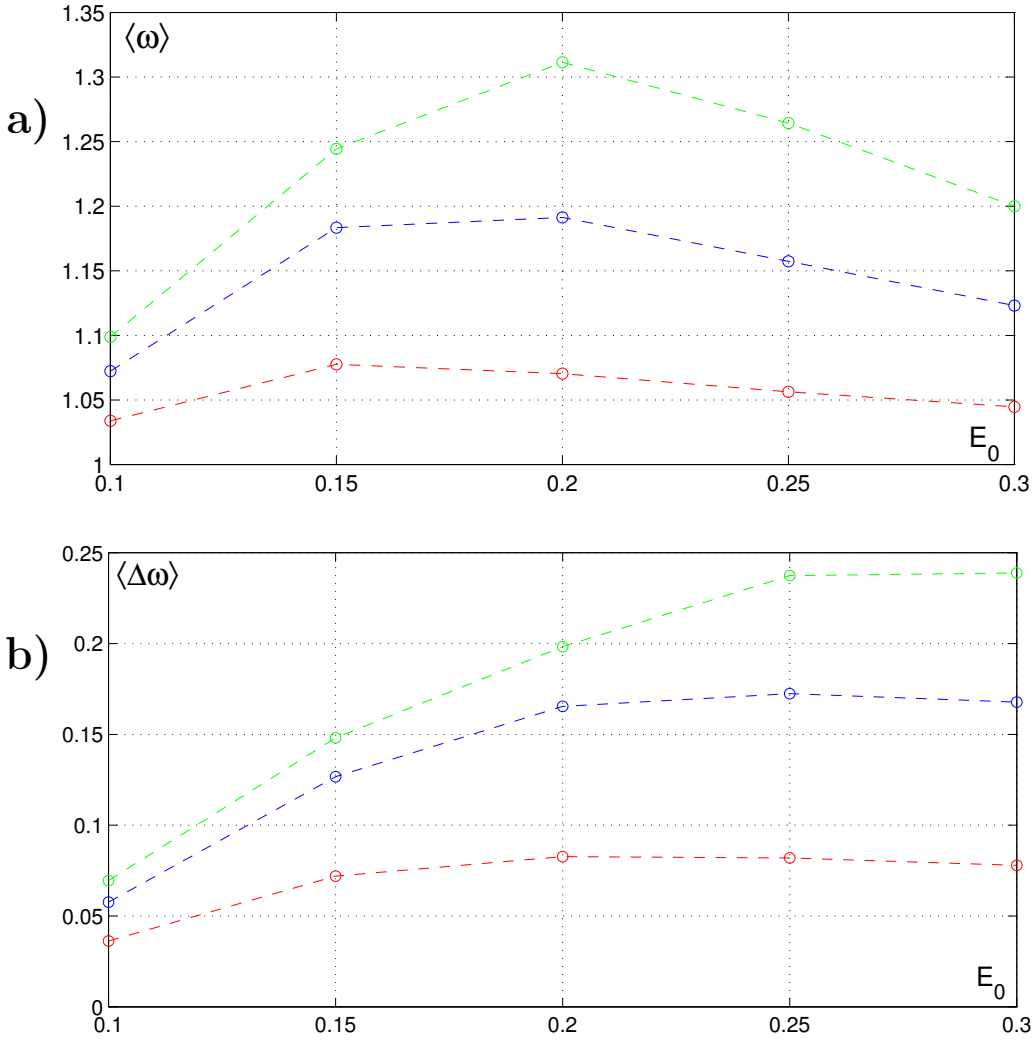


Рис. 5.13: Зависимости величины сдвига несущей частоты $\langle\omega\rangle$ и ширины спектра $\langle\Delta\omega\rangle$ от входной амплитуды поля лазерных импульсов $\mathcal{E}_o$ и от β (начального давления нейтрального газа p): красная пунктирная линия – $\beta \simeq 7.1$ ($p = 1$ Торр), синяя пунктирная линия – $\beta \simeq 21.2$ ($p = 2$ Торр), зеленая пунктирная линия – $\beta \simeq 35.3$ ($p = 3$ Торр). Диаметр капилляра $185 \cdot \lambda$.

ра для компенсации фазовой модуляции в спектре может выступать обычная стеклянная пластина, обладающая в рассматриваемом диапазоне длин волн нормальной дисперсией групповой скорости [15, 210]. Следует отметить также, что вследствие сильно порогового характера ионизационной нелинейности часть лазерного импульса на переднем и заднем фронтах с амплитудой меньше пороговой не участвует в ионизации газа и, соответственно, не приобретает частотной модуляции. Поэтому после прохождения оптического компрессора эта часть образует пьедестал, ухудшающий временной контраст скомпрессированного импульса.

В случае квазиодномодового режима распространения может быть осуществлена однородная по пространству временная компрессия выходного излучения с помощью внешнего компрессора (стеклянная пластина). В случае нарушения одномодового режима распространения пространственное распределение спектральной интенсивности выходного излучения будет неоднородным, что приведет к пространственной неоднородности временного распределения интенсивности в лазерном излучении после компрессии.

5.5 Возбуждение нелинейной моды в капилляре

Как было показано ранее, в процессе ионизации газа лазерным импульсом у него происходит обогащение спектра излучения более короткими длинами волн по сравнению с исходным спектром. Большая длина взаимодействия лазерного излучения с газом, достигаемая при распространении излучения в капилляре, позволяет при относительно низких давлениях газа и концентрации плазмы достичь величин уширения и сдвига спектра импульса в коротковолновую область больше, чем в известных экспериментах с фокусировкой мощного лазерного излучения в плотные газы [195]. Уширение спектра лазерного импульса за счет нелинейного механизма фазовой самомодуляции, обусловленного полевой ионизацией газа, может быть использовано для последующей компрессии импульса линейными дисперсионными элементами [182].

При исследовании трансформации спектра мощных лазерных импульсов, ионизующих газ в капилляре, особое внимание должно быть уделено эффективности прохождения излучения через капилляр и пространственной структуре выходного излучения. Эти параметры содержат в себе непосредственную информацию о динамике процесса взаимодействия излучения с газом в волноводе. В частности, увеличение потерь энергии излучения при наличии в капилляре газа по сравнению с распростра-

нением в откачанном капилляре свидетельствует о нарушении одномодового режима распространения, вызванном рефракцией излучения на образующейся плазме.

Как видно из формулы (5.69), для значительного увеличения сдвига несущей частоты в коротковолновую область спектра ($\langle\omega(z)\rangle \sim \omega_o$, где ω_o – несущая частота импульса на входе в среду) и уширения спектра ионизирующего импульса ($\langle\Delta\omega(z)\rangle \sim \omega_o$) необходимо увеличивать длину капилляра, либо увеличивать давление газа. Поскольку диэлектрические капилляры представляют собой квазиоптические многомодовые волноводы, концентрация плазмы, достижимая в задачах ионизации газов в капиллярах лазерным излучением, оказывается весьма низкой. Попытки увеличения концентрации плазмы приводят к возбуждению высших волноводных мод, имеющих низкую добротность, что приводит к увеличению потерь энергии излучения и плохому качеству пространственного распределения волнового пакета. При этом, в силу низкого давления газа, невозможно использование эффектов баланса самофокусировки и ионизации для обеспечения режима каналирования излучения. В то же время, в работе [165] было показано, что в однородной среде ионизационная нелинейность, в отсутствие фокусирующей нелинейности, является эффективным механизмом для *самоканалирования* лазерного излучения. При ионизации газа возможно образование плазменного волновода, совершенно аналогичного капилляру, но формирующегося самосогласованным образом. В этом канале могут формироваться т.н. моды с утечкой, распространяющиеся на расстояния много больше рэлеевской длины. Существенным недостатком этих плазменных волноводов является низкая добротность вследствие малого контраста диэлектрической проницаемости [22].

В связи с этим возникает вопрос о существовании подобного *нелинейного плазменного волновода* в диэлектрическом капилляре. И хотелось бы надеяться, что, по сравнению со случаем однородной среды, потери вследствие утечки излучения из канала будут значительно снижены наличием стенок капилляра.

Данный раздел посвящен обсуждению и анализу результатов полученных при численном решении системы уравнений (5.57), описывающей пространственно-временную эволюцию поля при распространении мощного лазерного излучения в диэлектрическом капилляре в случае $\mathcal{N} > \mathcal{N}^\star$ (в отличие от предыдущего раздела 5.4, где рассматривалась противоположная ситуация $\mathcal{N} < \mathcal{N}^\star$).

При увеличении параметра β (давления газа) картина эволюции поля радикально

[22] $\dfrac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}_{cr}} \ll 1$, где $\mathcal{N}_{cr}$ – критическая концентрация

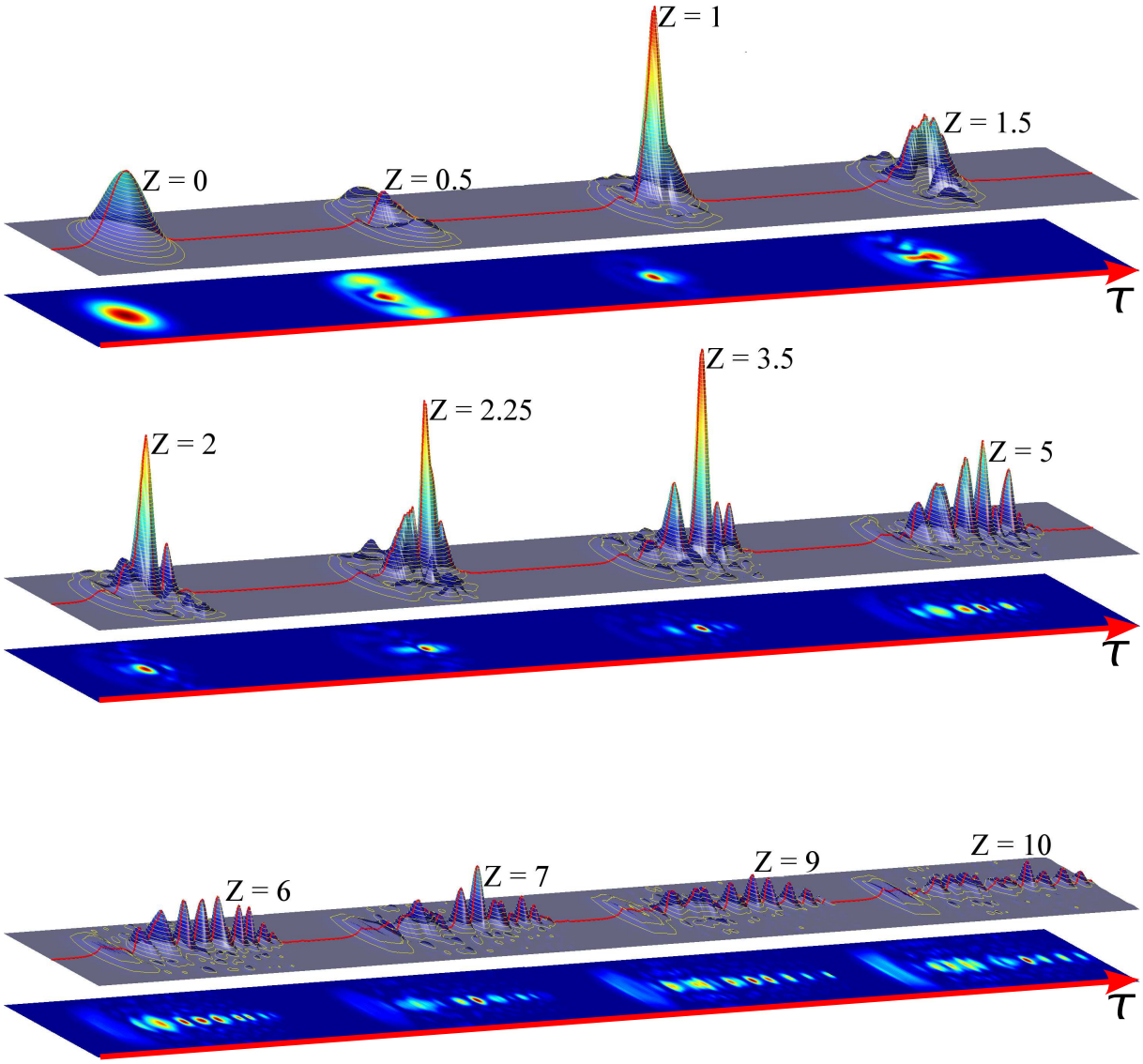


Рис. 5.14: Динамика огибающей интенсивности линейно поляризованного поля $\left|\hat{\mathcal{E}}\left(z,\boldsymbol{r}_{\perp},\tau\right)\right|^2$ длительностью $\tau_p = 50.26$, начальной амплитудой $\mathcal{E}_o = 0.2$ в капилляре диаметром 185λ при $\beta \simeq 53$ (давление нейтрального газа 7.5 Торр в размерных единицах). Временная ось τ меняется в диапазоне: $\tau = -100 \ldots 250$. Эволюционная переменная z нормирована на z_R. Максимальное значение интенсивности достигается на трассе $z = 3.5 z_R$ и равно 2.83.

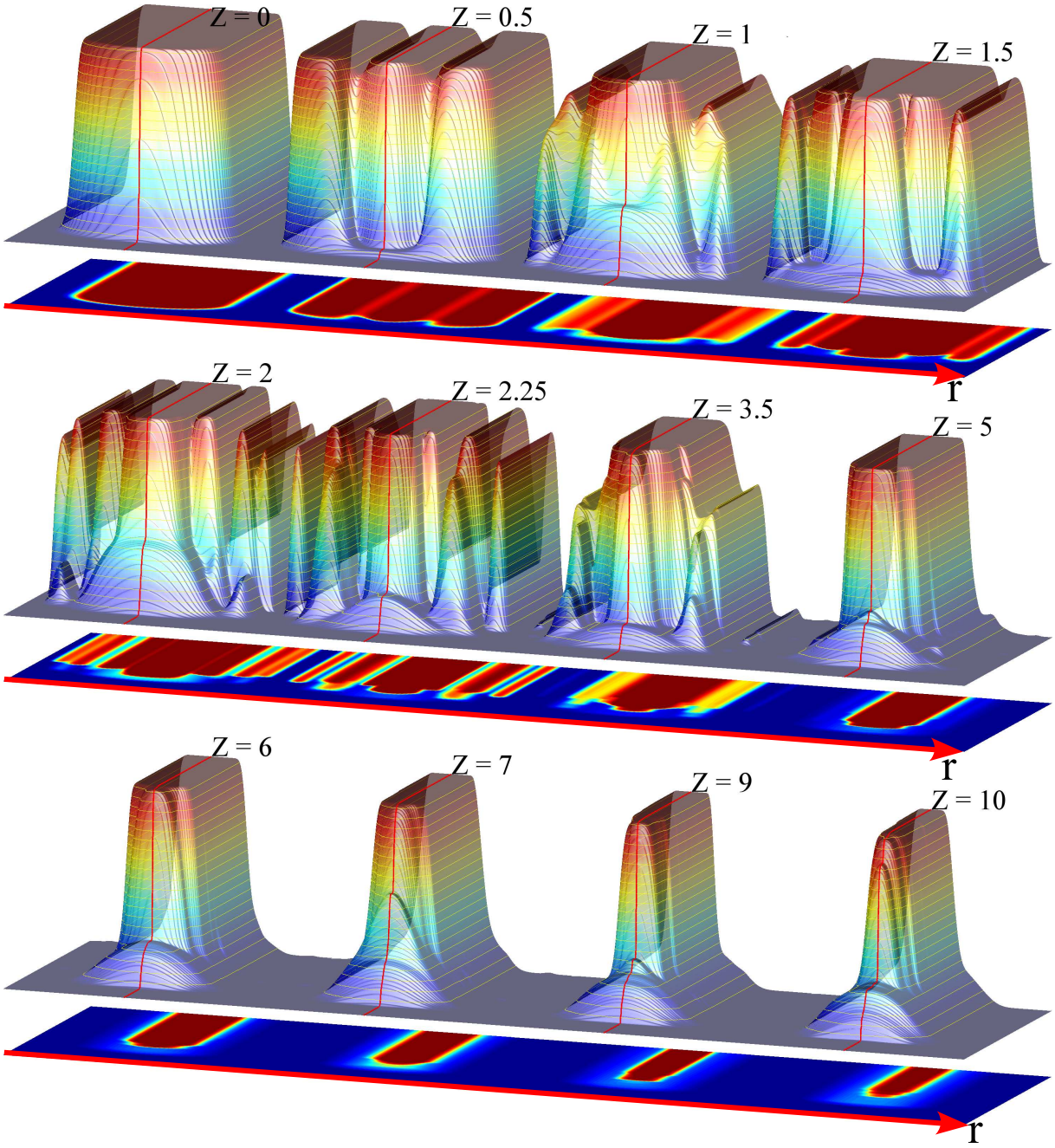


Рис. 5.15: Динамика плазмы $\mathcal{N}(z, \boldsymbol{r}_\perp, \tau)$. Здесь эволюционная переменная z нормирована на z_R. Максимальное значение концентрации равно 1.

меняется. На рисунке 5.14 приведена эволюция огибающей интенсивности лазерного импульса $\left|\hat{\mathcal{E}}\left(z,\boldsymbol{r}_{\perp},\tau\right)\right|^{2}$ ($\mathcal{E}(z,\boldsymbol{r}_{\perp},\tau)=\hat{\mathcal{E}}(z,\boldsymbol{r}_{\perp},\tau)\exp(i\tau)+c.c.$) с начальной амплитудой $\mathcal{E}_o=0.2$ в диэлектрическом капилляре диаметром 185λ, заполненного газом с давлением 7.5 Торр ($\beta\simeq 53$). Видно, что уже на расстоянии $3.5z_R$ произошло разбиение временной структуры волнового пакета на отдельные импульсы с длительностью много меньше начальной с сильной локализацией поля вблизи оси волновода. При таком давлении газа существенно увеличилась потеря энергии излучения из капилляра (эффективность прохождения упала с $\eta\simeq 77\%$ до $\eta\simeq 40\%$). На рисунке 5.15 приведены характерные пространственно-временные распределения плазмы в сечениях капилляра. Как видно из рисунка, пространственное распределение плазмы вначале сильно неоднородно, но в дальнейшем оно становится гладким и хорошо локализуется вблизи приосевой части диэлектрического капилляра. Красной линией показано распределение концентрации электронов на оси волновода.

Как видно из рисунков 5.14-5.15, несмотря на сложное поведение поля, в капилляре имеет место возбуждение «нелинейной»моды в волноводе. Для подтверждения того, что происходит возбуждение «нелинейной»моды на рис. 5.16 приведена динамика поперечной структуры импульса в максимуме импульса по τ $\mathcal{E}^2(z,\boldsymbol{r}_{\perp},\tau_{max})$ в зависимости от z. Меняя давление нейтрального газа, удается управлять шириной плазменного канала. Для сравнения на рисунке 5.17 приводится картина поперечных структур импульса в максимуме импульса по τ в зависимости от z при $\beta\simeq 53$ ($p=7.5$ Торр) и $\beta\simeq 141$ ($p=20$ Торр). Таким образом, при распространении импульса в газонаполненном диэлектрическом капилляре при $\mathcal{N}>\mathcal{N}^{\star}$ происходит формирование плазменного канала с высокой степенью пространственной однородности при относительно высоких величинах концентрации плазмы (см. рис. 5.15). Соответствующая модификация пространственного распределения поля приведена на рисунке 5.16. Видно, что пространственная структура поля будет существенно отличаться от мод «холодного»капилляра и в значительной мере будет определяться наличием плазменного канала.

Так как в однородной среде (в свободном пространстве) [165] существование такого волновода связано с очень резкой зависимостью вероятности ионизации газа от интенсивности поля в лазерном импульсе, и это приводит к образованию резкого (на масштабе длины волны) скачка показателя преломления. По сути, такой плазменный волновод полностью аналогичен капилляру, но, в отличие от последнего, обладает существенно меньшей величиной относительного показателя преломления и, как

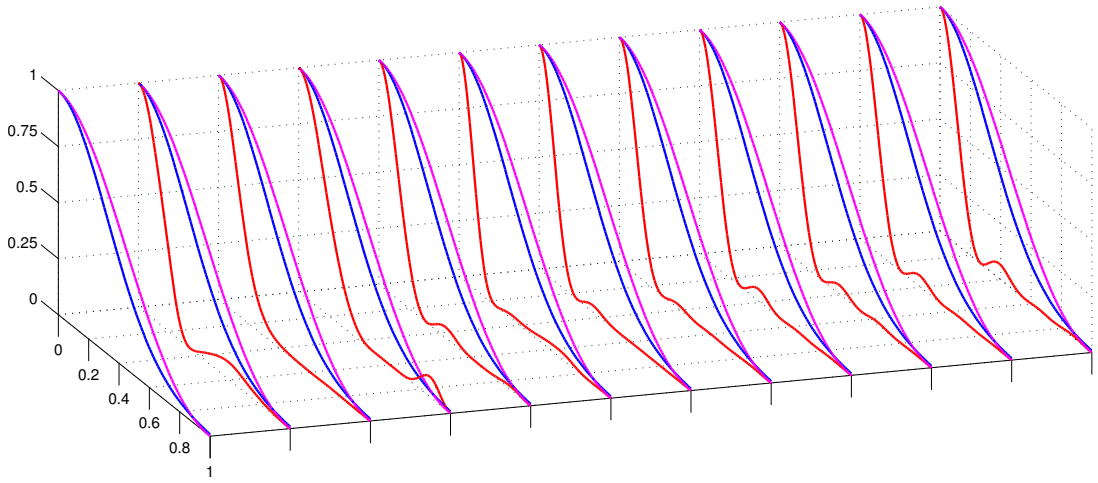


Рис. 5.16: Динамика $\mathcal{E}^2(z, \boldsymbol{r}_\perp, \tau_{max})$ поперечной структуры импульса в максимуме импульса по τ в зависимости от z ($z = 0; 0.5z_R; 1z_R; 1.5z_R; 2z_R; 2.25z_R; 3.5z_R; 5z_R; 6z_R; 7z_R; 9z_R; 10z_R$). Начальная длительность $\tau_p = 50.26$, начальная амплитуда $\mathcal{E}_o = 0.2$, диаметр капилляра 185λ, давление нейтрального газа 7.5 Торр ($\beta \simeq 53$). Синяя линия – начальное распределение интенсивности, пурпурная линия – распределение фундаментальной моды $\mathbf{EH_{11}}$ $[J_0^2(2.405r)]$, красная линия – текущие распределение интенсивности $\mathcal{E}^2(z, \boldsymbol{r}_\perp, \tau_{max})$

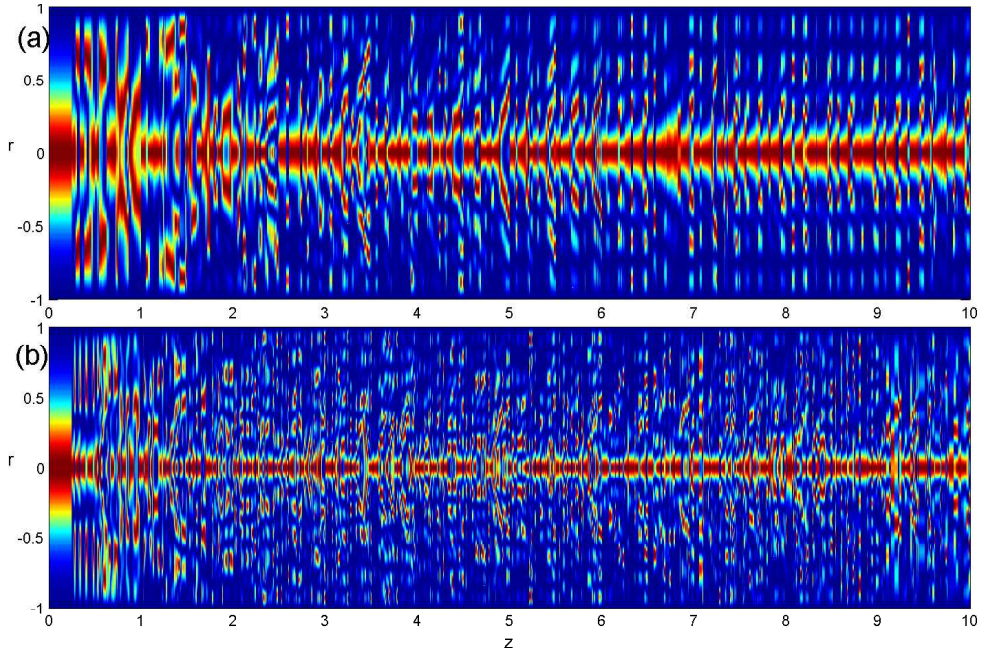


Рис. 5.17: Распределение интенсивности в максимуме импульса $\mathcal{E}^2(z, \boldsymbol{r}_\perp, \tau_{max})$ для двух разных значений β: (a) – $\beta \simeq 53$ ($p = 7.5$ Торр); (b) – $\beta \simeq 141$ ($p = 20$ Торр). Координата z нормирована на z_R

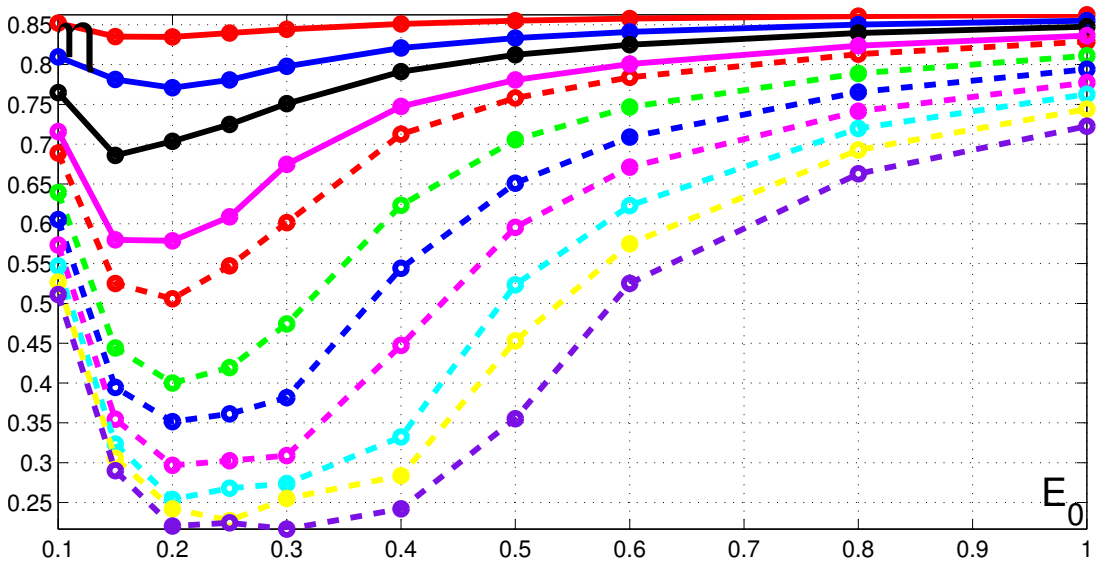


Рис. 5.18: Зависимость эффективности прохождения излучения η через капилляр длиной $10z_R$ и диаметром 185λ от начальной амплитуды $\mathcal{E}_o$ и давления газа: красная линия – 0.5 Торр; синяя линия – 1.5 Торр; черная линия – 2.5 Торр; пурпурная линия – 4 Торр; красная пунктирная линия – 5 Торр; зеленая пунктирная линия – 7.5 Торр; синяя пунктирная линия – 10 Торр; пурпурная пунктирная линия – 12.5 Торр; голубая пунктирная линия – 15 Торр; желтая пунктирная линия – 17.5 Торр; фиолетовая пунктирная линия – 20 Торр. Эффективность прохождения излучения в отсутсвии газа $\eta = 0.85$.

следствие, существенно худшей добротностью. Кроме того, при большом давлении излучение сильно рефрагирует на образовавшейся плазме, что приводит к значительному увеличению потерь, связанных с утечкой, о чем свидетельствует рис. 5.18. Поэтому с увеличением β (давления газа) эффективность прохождения излучения через капилляр должна уменьшаться.

В случае поля большой амплитуды $\mathcal{E}_o$ картина распространения при высоких β (давлениях) существенно иная, что связано с большим превышением над порогом ионизации. Большое превышение амплитуды поля над порогом ионизации приводит к тому, что по мере распространения, несмотря на потери, амплитуда поля остается достаточной для однородной ионизации плазмы в большей части капилляра. Вследствие этого поперечная структура поля деформируется, однако типологически не изменяется (поперечная структура поля близка к *фундаментальной моде* $\mathbf{EH_{11}}$). Это приводит к образованию однородного плазменного канала по всей длине капилляра даже в условиях высокого давления газа. Из-за быстрой ионизации газа передний фронт импульса дробится во времени, однако остальная часть импульса, распространяющаяся в практически однородной плазме, сохраняет гладкую структуру. Это обеспечивает значительно более высокую эффективность распространения. Поэтому при больших начальных амплитудах $\mathcal{E}_o$ эффективность прохождения η должна стремиться к вакуумному значению прохождения излучения η_o ($\eta \xrightarrow[\mathcal{E}_o \sim 1]{} \eta_o$). Из рисунка 5.18 следует, что значительный выигрыш по эффективности транспортировки излучения по капилляру при большом превышении амплитуды поля над порогом ионизации достигается даже при относительно низких давлениях и особенно сильно проявляется при увеличении давления. Таким образом, результаты наших расчетов указывают на возможность образования однородного плазменного канала в газонаполненных диэлектрических капиллярах при относительно высоких давлениях. При этом для создания такого канала необходимо достаточно большое превышение амплитудой поля в лазерном импульсе над порогом ионизации газа.

Подводя итоги можно сказать, что образование *нелинейного плазменного волновода* не приводит к увеличению эффективности прохождения излучения, как можно было надеяться. При высоких давлениях эффективность транспортировки мощного лазерного излучения падает существенно по сравнению с вакуумным капилляром из-за сильной рефракции излучения на образовавшейся плазме.

Общая картина изменений спектра лазерных импульсов (при $\mathcal{N} > \mathcal{N}^\star$) по мере их распространения в капилляре представлена на рисунке 5.19, где приведено рас-

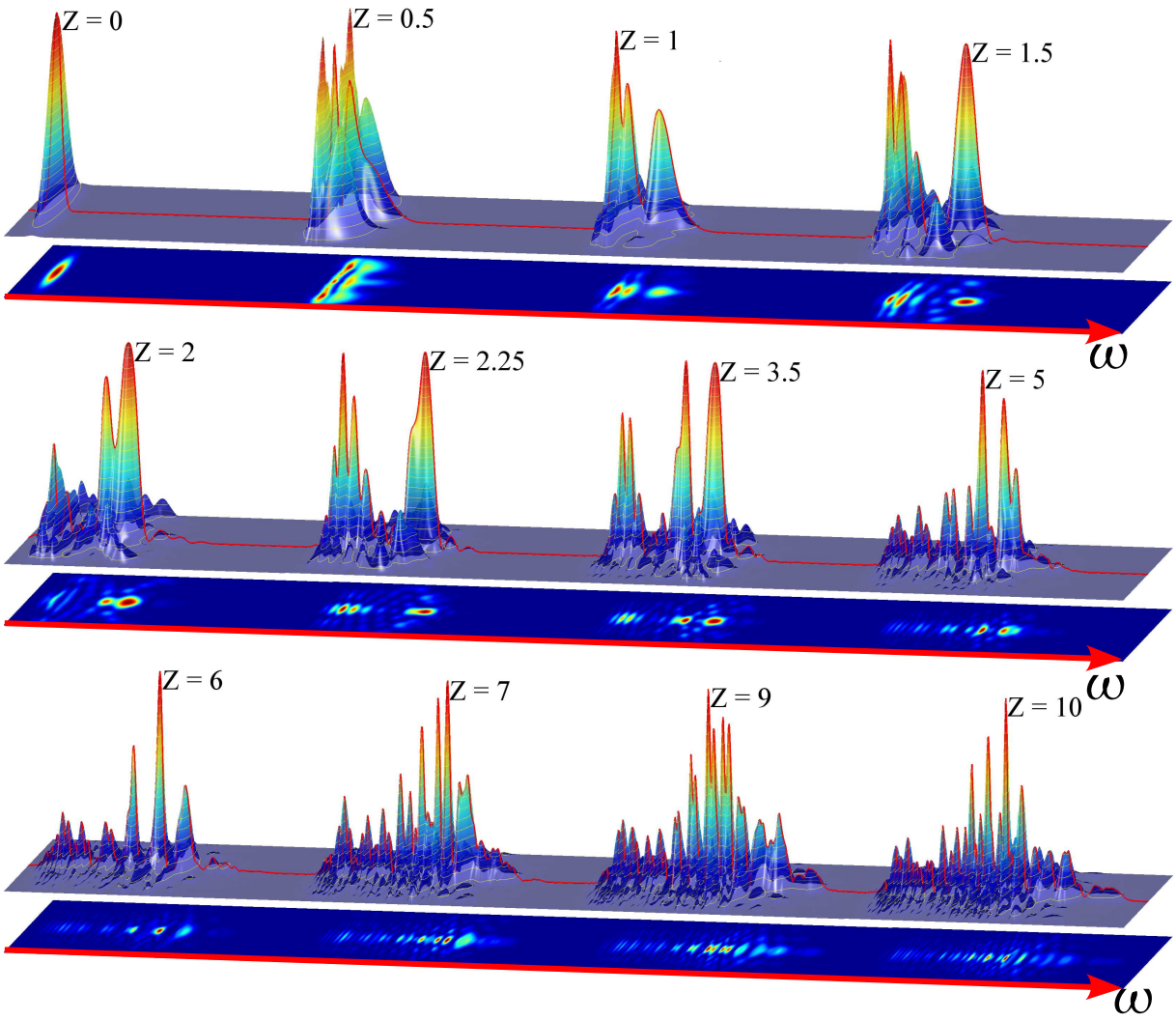


Рис. 5.19: Динамика спектра ионизирующего импульса. Начальная длительность $\tau_p = 50.26$, начальная амплитуда $\mathcal{E}_o = 0.2$, диаметром капилляра 185λ, давление газа 7.5 Торр ($\beta \simeq 53$). Спектры нормированы на максимальное значение. Частотная ось ω меняется в диапазоне: $\omega = 0.85 \ldots 2.35$. Эволюционная переменная z здесь нормирована на z_R.

пределения спектральных интенсивностей при различных значениях z: $z = 0$; $z = 0.5z_R$; $z = 1z_R$; $z = 1.5z_R$; $z = 2z_R$; $z = 2.25z_R$; $z = 3.5z_R$; $z = 5z_R$; $z = 6z_R$; $z = 7z_R$; $z = 9z_R$; $z = 10z_R$. Как следует из рисунка 5.19, пространственное распределение спектральной интенсивности становится неоднородным. Это связано с большой концентрацией плазмы и нарушением квазиодномодового режима распространения и хорошо согласуется с приводившейся выше оценкой. По мере увеличения входной амплитуды поля $\mathcal{E}_o$[23] в лазерном импульсе наблюдается увеличение ширины спектра выходного излучения $\langle\Delta\omega\rangle$, сопровождающееся сдвигом центра масс спектра $\langle\omega\rangle$ в коротковолновую область, величина которого также возрастает с увеличением входной амплитуды поля $\mathcal{E}_o$. Сдвиг центра масс спектра $\langle\omega\rangle$ связан с хорошо известным эффектом синего сдвига частоты вследствие нестационарности нелинейного процесса ионизации газа, при которой происходит уменьшение показателя преломления среды в течение длительности лазерного импульса (см. раздел 5.3.2). Наряду с увеличением ширины спектра наблюдается появление амплитудных модуляций спектральной интенсивности, связанных с фазовой модуляцией временной структуры импульса, наводимой ионизационной нелинейностью.

Зависимости величины сдвига центра масс $\langle\omega\rangle$ и ширины спектра $\langle\Delta\omega\rangle$ выходного излучения от энергии лазерных импульсов представлены на рисунке 5.20. В соответствии с общими физическими представлениями и результатами численных расчетов, величины сдвига центральной частоты $\langle\omega\rangle$ и ширины спектра $\langle\Delta\omega\rangle$ выходного излучения быстро возрастают с увеличением входной энергии лазерных импульсов F[24] до некоторого характерного значения последней, которое для условий нашего численного эксперимента составило примерно $\mathcal{E}_o^\star \simeq 0.3$. При начальной амплитуде поля выше $\mathcal{E}_o^\star$ темп изменения этих величин резко падает и максимальная величина сдвига центральной частоты излучения $\langle\omega\rangle$ в наших численных экспериментах составила примерно $\langle\omega\rangle_{max} \simeq 2.2$ (начальная несущая частота $\langle\omega\rangle = 1$), а ширина спектра увеличилась почти в 20 раз. По нашим представлениям, существование $\mathcal{E}_o^\star$ связано с переходом в режим большого превышения амплитуды электрического поля в лазерных импульсах над порогом ионизации газа. При этом на величину $\mathcal{E}_o^\star$ в первую очередь влияют длительность лазерных импульсов τ_p и длина капилляра. Влияние длительности на величину $\mathcal{E}_o^\star$ очевидно, а зависимость от длины капилляра связана с тем, что сдвиг частоты $\langle\omega\rangle$ и увеличение ширины спектра $\langle\Delta\omega\rangle$ являются интеграль-

[23]При фиксированной длительности τ_p оптического излучения

[24]От начальной амплитуды $\mathcal{E}_o$ при фиксированной длительности τ_p оптического излучения

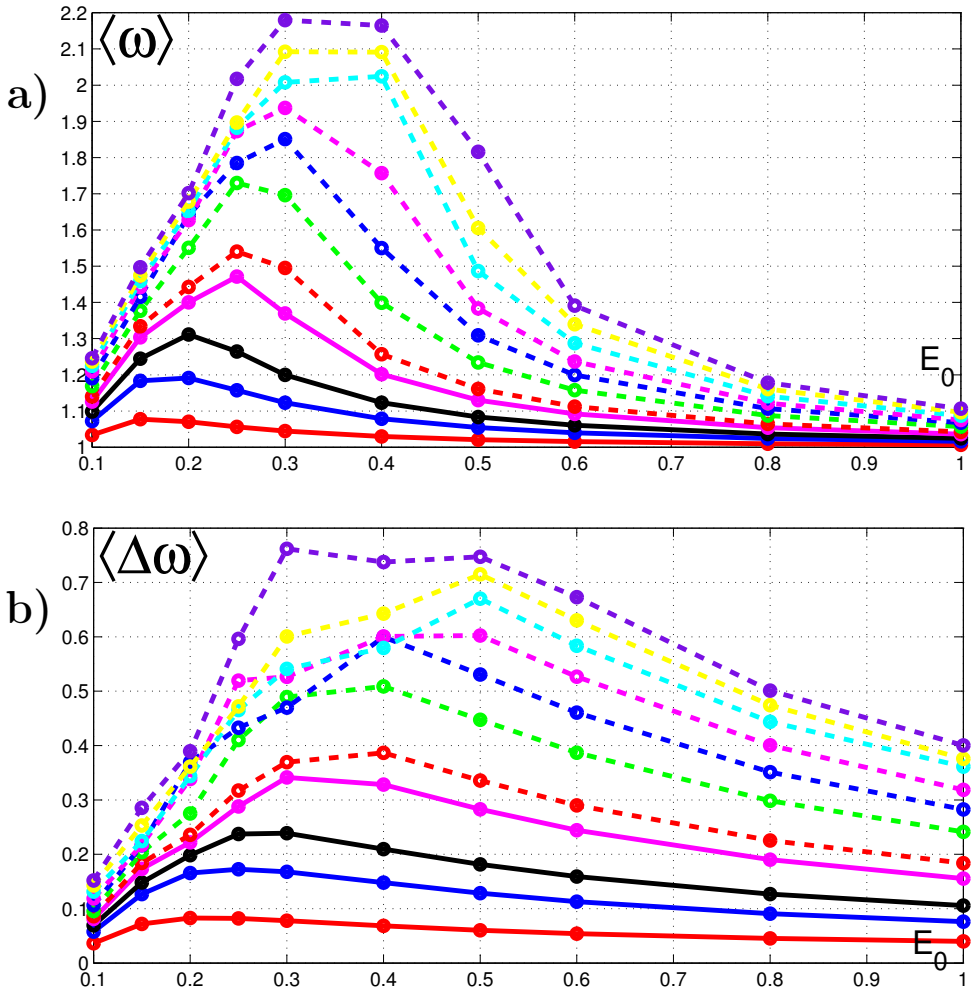


Рис. 5.20: Зависимости величины сдвига несущей частоты $\langle\omega\rangle$ **(a)** и ширины спектра $\langle\Delta\omega\rangle$ **(b)** от входной амплитуды поля $\mathcal{E}_o$ и от давления газа: красная линия – 0.5 Торр; синяя линия – 1.5 Торр; черная линия – 2.5 Торр; пурпурная линия – 4 Торр; красная пунктирная линия – 5 Торр; зеленая пунктирная линия – 7.5 Торр; синяя пунктирная линия – 10 Торр; пурпурная пунктирная линия – 12.5 Торр; голубая пунктирная линия – 15 Торр; желтая пунктирная линия – 17.5 Торр; фиолетовая пунктирная линия – 20 Торр. Диаметр капилляра 185λ.

ными эффектами, накапливающимися вдоль трассы распространения. Как видно из рисунка 5.20, зависимости сдвига центральной частоты $\langle\omega\rangle$ и ширины спектра $\langle\Delta\omega\rangle$ от давления газа (или β) в рассматриваемом диапазоне давлений эти зависимости практически линейны.

Таким образом, результаты исследований пространственной структуры спектра выходного излучения показывают, что капилляры диаметром $185{\cdot}\lambda$ и длиной $10z_R$ могут эффективно использоваться для уширения спектров лазерного излучения вплоть до энергий в несколько мДж в импульсе, что на порядок превосходит уровень энергий, достигаемых при использовании керровского механизма уширения спектра лазерных импульсов.

5.6 Ионизационный компрессор

Идея ионизационной самокомпрессии лазерного импульса впервые была предложена в работе [102], где показано, что ионизационно-индуцированная частотная модуляция в волновом пакете может быть компенсирована в плазме, приводя к компрессии импульса. В работе [188] впервые было экспериментально продемонстрирована ионизационно-индуцированная самокомпрессия с 26 до 13 фемтосекунд для лазерного импульса, распространяющегося в капилляре. Однако, такое распространение существенно неодномерно, и механизм компрессии до сих пор был не ясен.

В данной разделе мы сначала заглянем внутрь физики в рамках эффекта ионизационно-индуцированной самокомпрессии лазерных импульсов, распространяющихся в газонаполненных директических капиллярах, а затем продемонстрируем возможность их компрессии к длительностям с малым числом осцилляций. В заключении мы покажем, что концепция ионизационно-индуцированной самокомпрессии может быть промасштабирована к высоким энергиям в лазерном импульсе, покрывая диапазон от суб-мДж до мультиджоульного уровня, направленная к формированию выходных лазерных импульсов с мощностью петаваттного уровня. Эти результаты открывают возможность получения источников высокоэнергетичных лазерных импульсов с малым числом колебаний поля, в частности, используя традиционную титан-сапфировую лазерную систему высокой мощности.

На рисунке 5.21 показана эволюция огибающей интенсивности лазерного импульса с начальной длительностью 25 фс и начальной амплитудой $\mathcal{E}_o = 0.25$ в диэлектрическом капилляре, заполненном водородом с давлением газа в 20 Торр и диаметром

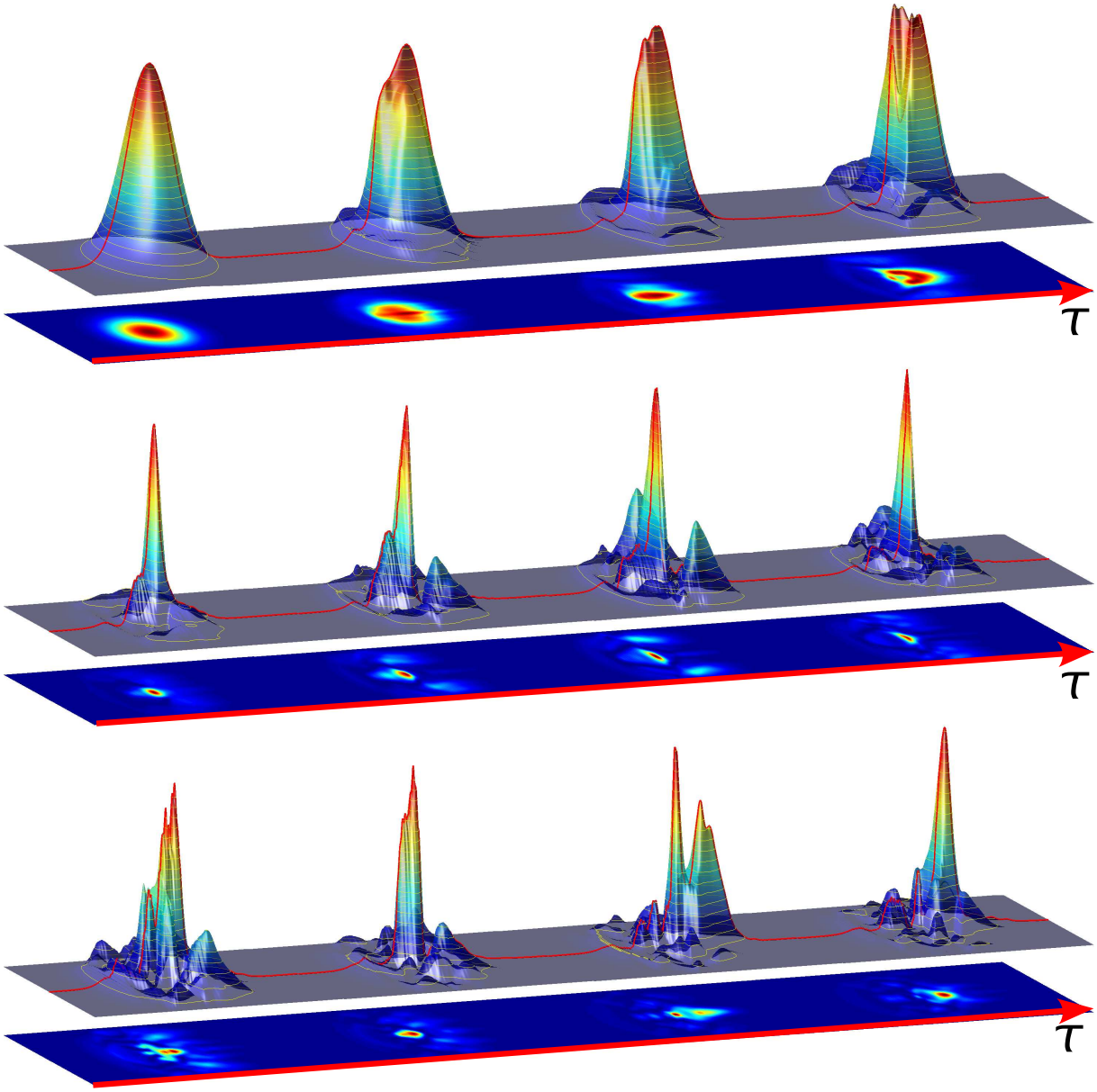


Рис. 5.21: Динамика огибающей интенсивности линейно поляризованного поля $\left|\hat{\mathcal{E}}\left(z,\boldsymbol{r}_{\perp},\tau\right)\right|^{2}$ с начальной длительностью $\tau_p = 50.26$, начальной амплитудой $\mathcal{E}_o = 0.25$ в капилляре диаметром 150 μm. Давление газа 20 Торр ($\beta \simeq 53$). $z = 0;\ 0.063z_R;\ 0.125z_R;\ 0.188z_R;\ 0.313z_R;\ 0.375z_R;\ 0.438z_R;\ 0.5z_R;\ 0.625z_R;\ 0.688z_R;\ 0.813z_R;\ 0.875z_R$. Интенсивность нормирована на максимальное значение.

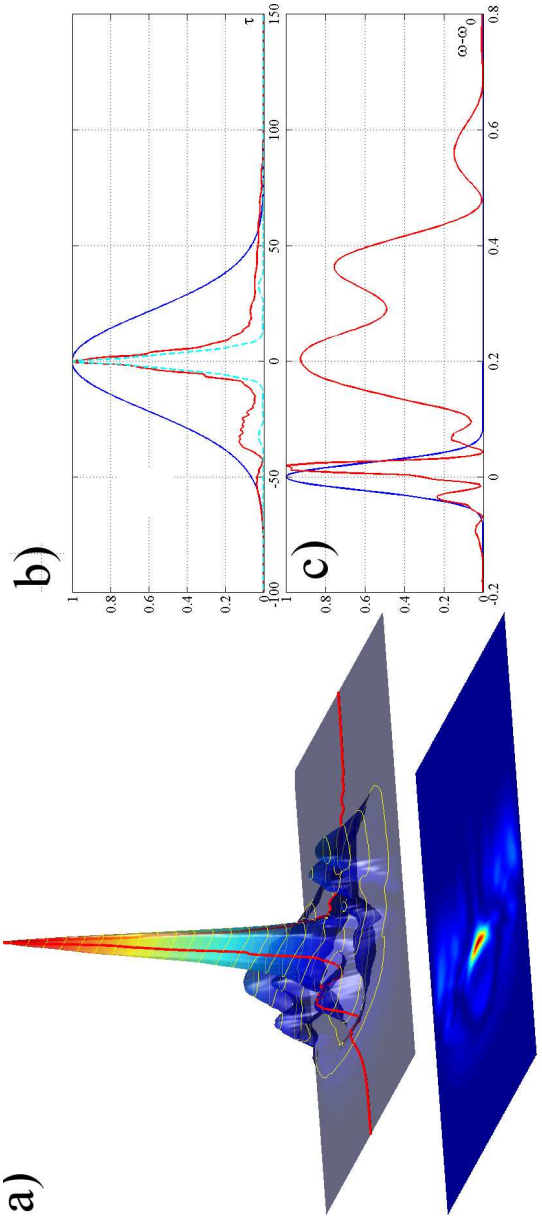


Рис. 5.22: **(a)**: Пространственно-временное распределение интенсивности излучения на выходе капилляра длиной $0.5z_R$. **(b)**: Синяя линия – временная структура интенсивности входного лазерного импульса; красная линия – на выходе диэлектрического капилляра; голубая линия – временная структура волнового пакета на выходе идеального компрессора. Амплитуды интенсивностей нормированы на максимальное значение. **(c)**: Спектр лазерного импульса на входе капилляра (синяя линия) и на выходе капилляра (красная линия), используемый для компрессии.

капилляра 150 μm. Интенсивность электрического поля на входе в волновод была достаточной, чтобы газ оказывался полностью ионизован уже передним фронтом импульса. Ясно, что несмотря на сложное поведение поля, нелинейная мода возбуждается в волноводе (поле сильно локализовано вблизи оси волновода). Таким образом, значительная задняя часть входного импульса теперь захвачена внутрь нелинейного узкого плазменного волновода, приводя к повышению эффекта фокусировки, то есть повышает интенсивность в приосевой области. Из рисунка видно, что на длине капилляра $z = 0.5z_R$ длительность волнового пакета уменьшилась до 3.6 фс, что чуть более одного периода колебаний поля. На рисунке 5.22**(a)** приведено пространственно-временное распределение сжатого лазерного импульса. Фактор компрессии (отношение первоначальной длительности импульса к минимальной длительности) – 7. Этот расчет точно показывает создание узкого (по сравнению с диаметром капилляра) плазменного канала, способного обеспечить аномальный характер дисперсии групповых скоростей, а эти полые капилляры, заполненные водородом, пригодны для компрессии фемтосекундных импульсов мДж уровня к импульсам с длительностью в несколько периодов поля.

На рисунке 5.22**(c)** представлен спектр лазерного импульса с теми же начальными параметрами, что и на рисунке 5.21 на выходе капилляра длинной $z = 0.5z_R$. Результат самокомпрессии оптического излучения на длине $z = 0.5z_R$ представлен на рисунке 5.22**(a)**. На рисунке 5.22**(b)** приведено распределение интенсивности волнового пакета на выходе капилляра при $r = 0$ (на оси волновода). Как следует из рисунка, наряду с узкой скомпрессированной частью в распределении интенсивности присутствуют «крылья», содержащие небольшую долю энергии выходного сигнала. Полная компенсация фазы позволяет достичь максимально возможной *самокомпрессии* выходного импульса, когда его длительность определяется только шириной спектра. Результат оптимальной *самокомпрессии* может быть получен обратным преобразованием Фурье спектра на рисунке 5.22**(c)** (красная линия). Как следует из рисунка 5.22**(b)**, при идеальной компрессии может быть получен лазерный импульс длительностью в один период поля (2.6 фс в размерных единицах). Важно отметить, что *самосжатие* волнового пакета по сечению пучка в наших численных экспериментах однородно, что свидетельствует о квазиодномодовом режиме распространения излучения в *нелинейном плазменном волноводе*.

Интерпретация результатов численного моделирования пространственно–временной задачи

Для интерпретации полученных результатов обратимся к работе [102], в которой была впервые исследована возможность самокомпрессии лазерных импульсов в одномерном случае в приближении медленно меняющихся амплитуд. В данной работе проанализировали динамику ионизирующего импульса в предварительно ионизованной среде ($\mathcal{N}_o$ – концентрация плазмы). Уравнение, описывающее динамику волнового пакета, имеет вид

$$-2ik_o\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}-\frac{(1-\varepsilon)}{c^2\varepsilon}\frac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial\tau^2}+\frac{\omega_{po}^2}{c^2}\frac{(\mathcal{N}-\mathcal{N}_o)}{N_o}\mathcal{B}=0\ , \tag{5.80a}$$

$$\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial\tau}=W(|\mathcal{B}|)\ , \tag{5.80b}$$

где $\varepsilon = 1-\dfrac{\omega_{po}^2}{\omega_o^2}$ – диэлектрическая проницаемость невозмущенной плазмы, $\omega_{po}^2 = \dfrac{4\pi\mathcal{N}_o e^2}{m}$. Систему уравнений (5.80) можно переписать в безразмерном виде

$$-i\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}=\frac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial\tau^2}-\mathcal{N}\mathcal{B}\ , \tag{5.81a}$$

$$\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial\tau}=W(|\mathcal{B}|)\ . \tag{5.81b}$$

Далее ограничимся приближением нелинейной геометрической оптики для исследования самокомпрессии волнового пакета $\mathcal{B}=\Psi\exp(-i\varphi)$. В результате получим следующую систему уравнений для $\rho=\dfrac{\Psi^2}{2}$ и $\Omega=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho\Omega)=0\ , \tag{5.82a}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z}+\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\simeq-2W(2\rho)\ . \tag{5.82b}$$

При выводе уравнения (5.82b) мы воспользовались следующим приближением:

$$W(2\rho)\gg\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial\tau^2}\right)\ . \tag{5.83}$$

Система уравнений (5.82) имеет автомодельное решение, если $W=\rho^p$. Тогда решения для ρ и Ω можно искать в следующем виде

$$\rho=(\tau-\tau_o)^{1/p}u(z)\ , \tag{5.84a}$$

$$\Omega=-(\tau-\tau_o)v\ . \tag{5.84b}$$

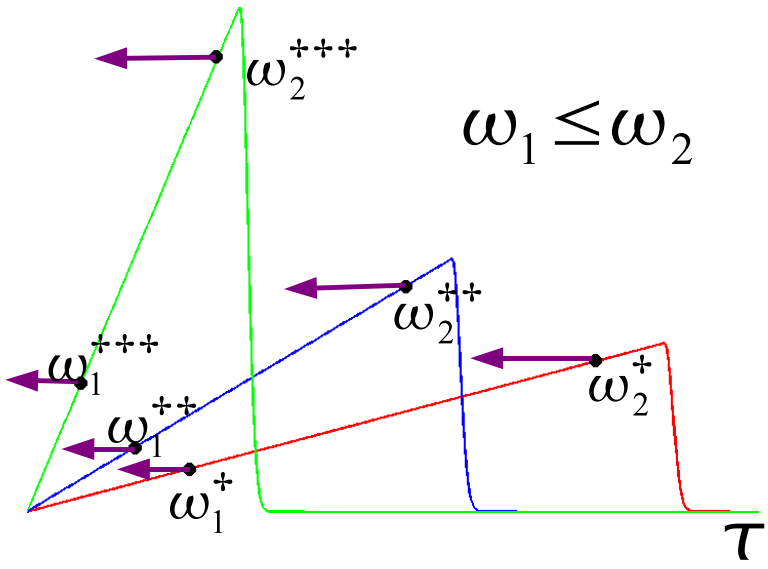


Рис. 5.23: Схематическое изображение процесса самокомпрессии импульса. Передний фронт импульса расположен с левой стороны.

Где функции u и v удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\frac{du}{dz} = \frac{p+1}{p} uv \ , \tag{5.85a}$$

$$\frac{dv}{dz} = v^2 + 2u^p \ . \tag{5.85b}$$

Далее ограничимся наиболее простым случаем, когда $p = 1$. Тогда решение с граничными условиями $u(z_o) = u_o$ и $v(z_o) = 0$ имеет следующий вид :

$$\sqrt{2u_o}(z - z_o) = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u}{u_o}\right)}} \exp(-\zeta^2) d\zeta \ . \tag{5.86}$$

Вблизи координаты $z = z^\star = z_o + \sqrt{\dfrac{\pi}{8u_o}}$, где имеет место особенность, можно получить следующие решение для $u(z)$:

$$u(z) \simeq \frac{1}{8(z^\star - z)^2 \ln\left(\dfrac{1}{z^\star - z}\right)} \tag{5.87}$$

и $v(z)$:

$$v(z) \simeq \frac{1}{z^\star - z} \ . \tag{5.88}$$

Как видно из выражения (5.87), длительность импульса $\tau_p(z)$ уменьшается по следующему закону:

$$\tau_p(z) = \sqrt{\frac{\mathcal{I}}{u(z)}}\Bigg|_{z\to z^\star} \simeq (z^\star - z)\sqrt{8\mathcal{I}\ln\left(\frac{1}{z^\star - z}\right)}\ , \tag{5.89}$$

где $\mathcal{I} = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(z,\tau)d\tau$ – энергия в импульсе (интеграл задачи). Таким образом, по мере распространения волновой пакет будет укорачиваться ($\tau_p \xrightarrow[z\to z^\star]{} 0$). Следует отметить, что данный результат справедлив при

$$W(2\rho) \gg \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial\tau^2}\right)\ , \tag{5.90}$$

т.е.

$$2u\cdot(\tau - \tau_o)^4 \simeq 1\ .$$

Это означает, что имеет место ограничение на минимально возможную длительность лазерного импульса [102]

$$\tau_p^{min} = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{I}}}\ .$$

Таким образом, комбинированное действие аномальной дисперсии групповых скоростей и ионизационной нелинейности необходимо для достижения эффекта ионизационно-индуцированной самокомпрессии для лазерных импульсов [102] (см. выше), так как самофазовая модуляция, вызываемая ионизацией газа полем, имеет частоты в передней части импульса ω_1 ниже, чем в задней ω_2. Подобный импульс может быть компрессирован в среде с аномальной дисперсией, где синие спектральные компоненты могут догнать красные, так как обладают более высокой групповой скоростью. Используемые условия могут быть реализованы в частично ионизированной плазме, где групповая скорость

$$v_{gr}(\omega) = c\cdot\sqrt{1 - \frac{\omega_{po}^2}{\omega^2}} \tag{5.91}$$

растет с увеличением частоты и, как следует в дальнейшем, задняя часть импульса догоняет переднюю. Однако, несмотря на сам диэлектрический капилляр, плазма, производимая в течение процесса ионизации газа, обладает аномальной дисперсией, величины ее несущественны для групповых спектральных компонентов. На рисунке 5.23 представлен схематично процесс укорочения лазерного импульса по мере его распространения в нелинейной среде.

Для понимания предельной возможности подобной компрессии мы рассмотрим упрощенный одномерный случай подобно работе [102], но на основе волнового уравнения для реального электрического поля, которое выходит за пределы приближения медленно меняющихся амплитуд. В этом случае поле в лазерном импульсе может быть представлено в следующей форме:

$$\mathcal{E}(z,\tau,r) \simeq \mathcal{A}(z,\tau)\Phi^{nl}(r) \ , \tag{5.92}$$

где $\Phi^{nl}(r)$ – поперечное распределение нелинейной моды в плазменном капилляре [например, установленный поперечный профиль, как на рис. 5.16 (красная линия)]. Далее ионизационная динамика поля в капилляре управляется следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial z \partial \tau} + (\tilde{\alpha} + \mathcal{N})\mathcal{A} = 0 \ , \tag{5.93a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \tau} = (1-\mathcal{N})W(|\mathcal{A}|) \ , \tag{5.93b}$$

где $\tilde{\alpha}$ – дисперсия среды, определяемая в данном случае характерным поперечным масштабом нелинейной моды в плазменном волноводе $\tilde{a}$, то есть $\tilde{\alpha} \propto \dfrac{1}{\tilde{a}^2}$.

На рисунке 5.24 показана эволюция треугольного импульса для коэффициента дисперсии $\tilde{\alpha}$, определяемого эффективным поперечным размером нелинейного плазменного волновода (см. рисунок 5.16)

$$\mathcal{A}(z=0,\tau) = \mathcal{A}_{in}\cos(\tau)\begin{cases} \tau/\tau_o, 0 \le \tau < \tau_o \\ \exp\left(-\dfrac{2\ln 2}{16\pi^2}(\tau-\tau_o)^2\right), \tau \ge \tau_o \end{cases} \tag{5.94}$$

при $\mathcal{A}_{in} = 0.075$, $\tau_o = 55\pi$, $\tilde{\alpha} = 5$. Отметим, что длительность входного импульса, определяемая по полувысоте максимальной интенсивности, составляет девять периодов поля ($\tau_p^{in} = 9T_o$). Как видно из этого рисунка, лазерный импульс компрессируется до 1.6 колебаний поля ($\tau_p^{out} \simeq 1.6T_o$), то есть этот метод может обеспечить даже импульсы ниже одного периода поля. Однако, когда используется одномерная модель по отношению к реальной ситуации, мы должны остерегаться того факта, что передняя часть импульса, распространяясь в не ионизированном газе, имеет наибольшую групповую скорость и не участвует в эффекте компрессии. Это понижает энергетическую эффективность компрессии, но не существенно, так как энергия этой части импульса может быть мала.

Подводя итоги, можно говорить, что возбуждение *нелинейной моды в капилляре* (см. рисунки 5.17) и уширение спектра электромагнитного излучения за счет нелинейного механизма фазовой самомодуляции, обусловленного полевой ионизации газа

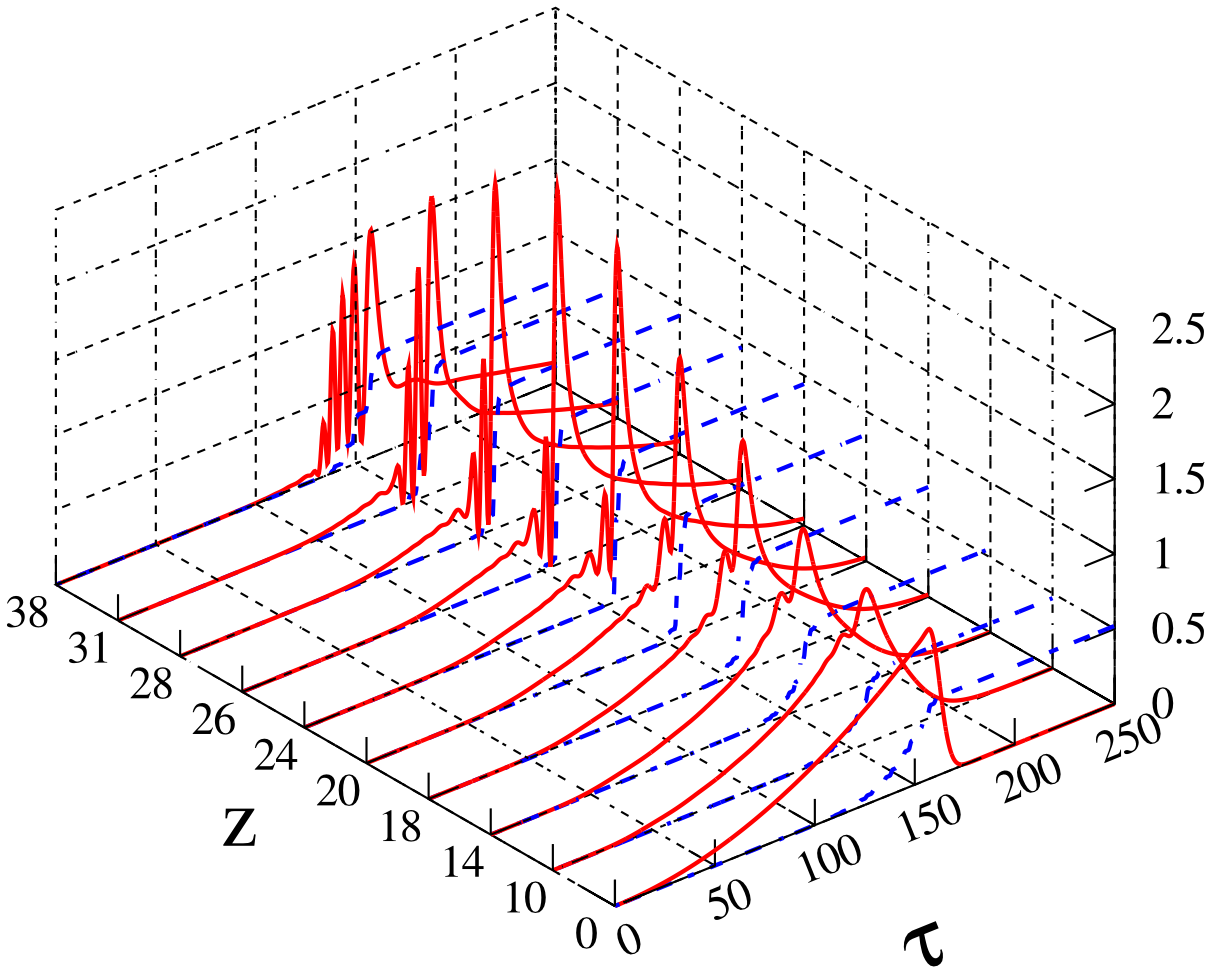


Рис. 5.24: Самокомпрессия ионизирующего импульса в среде с низкочастотной дисперсией в рамках редуцированного одномерного волнового уравнения (1D+1). Начальная параметры волнового пакета: $\tau_p^{in} = 9T_o$, $\mathcal{A}_o = 0.075$. Длительность сжатого лазерного импульса $\tau_p^{out} \simeq 1.2T_o$, $\alpha = 5$. Интенсивность увеличилась в 2.5 раза в результате компрессии лазерного импульса ($\mathcal{A}_{out} = \sqrt{2.5}\mathcal{A}_{in}$). Красная линия – распределение огибающей интенсивности $|\hat{\mathcal{A}}(z,r,\tau)|^2$ [где $\mathcal{A}(z,r,\tau) = \hat{\mathcal{A}}(z,r,\tau)\exp(i\tau) + c.c.$], синяя линия – распределение концентрации плазмы. Интенсивность нормирована на начальное значение.

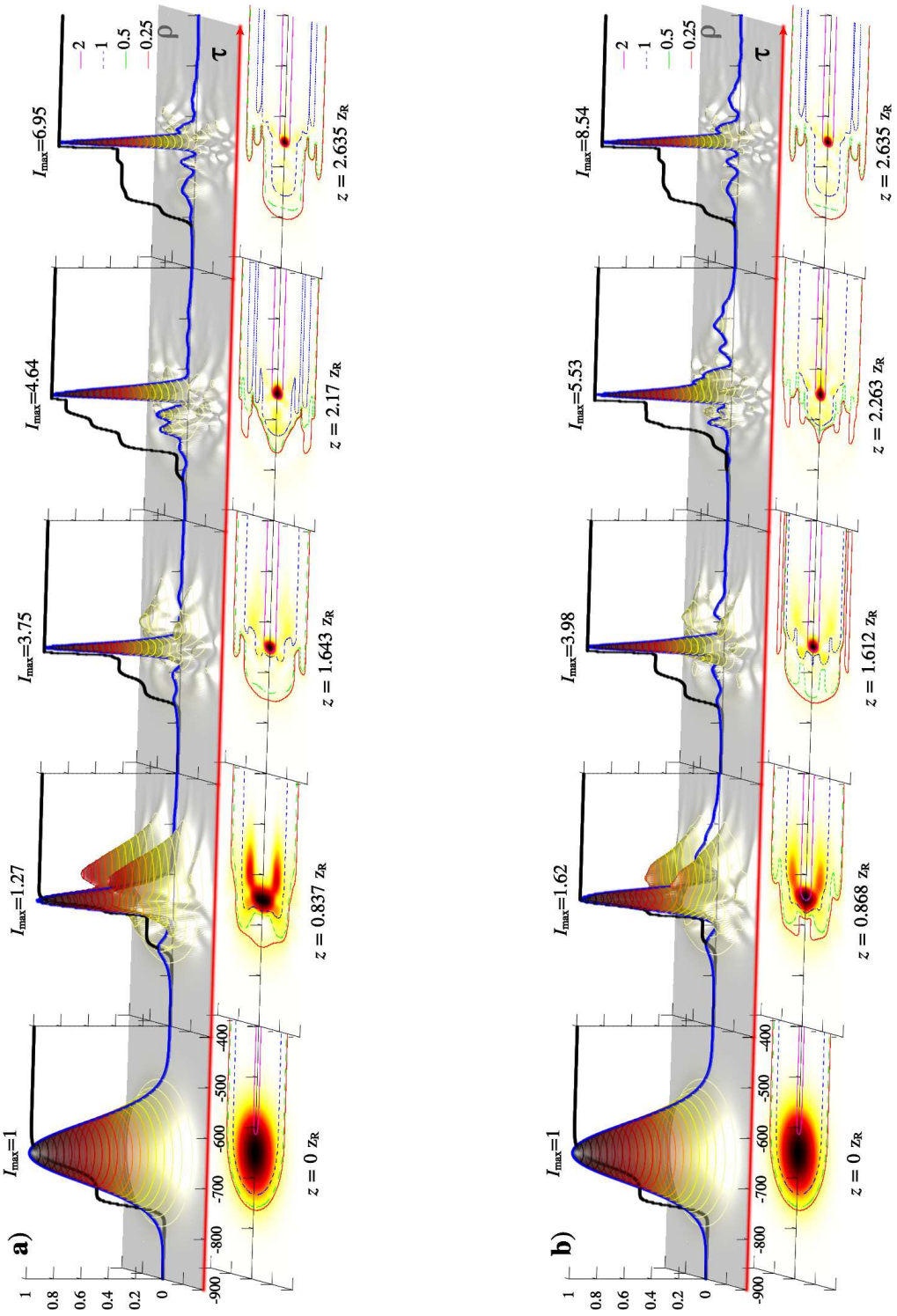


Рис. 5.25: Динамика распределения интенсивности $|\hat{E}\,(z,r,\tau)\,|^2$ $[E(z,r,\tau) = \hat{E}(z,r,\tau)\exp(i\tau) + c.c.]$ и плотности плазмы $\mathcal{N}(r,\tau)$ для входного лазерного импульса длительностью 60 фемтосекунд и с амплитудой $\mathcal{E}_o = 0.55$ при различных значениях диаметра капилляра и давления гелия: **(a)** $d_{cap} = 300\ \mu m$, $p = 2$ Торр; **(b)** $d_{cap} = 1200\ \mu m$, $p = 0.125$ Торр. Интенсивность нормирована на максимальное значение.

приводит к тому, что ионизирующий импульс по мере распространения в диэлектрическом капилляре *самокомпрессируется*.

Крайне привлекательна идея применения ионизационно индуцированного эффекта самокомпрессии, который не имеет ограничений по мощности лазерного импульса, к высокоэнергетичным импульсам, особенно для компрессии ниже одного периода поля. Главное ограничение исходит из факта, что мощность лазерного импульса не должна превышать критическую мощность для самофокусировки, то есть ионизационная нелинейность должна превалировать. Это требование может быть удовлетворено путем выбора подходящего значения давления газа.

Очевидно, что для лазерных импульсов с высокой энергией мы должны использовать, во-первых, газы с наибольшим ионизационным потенциалом, и, во-вторых, с большим диаметром. Мы выбрали гелий как атом с наибольшим потенциалом ионизации и, что более важно, это позволяет имплементировать две стадии режима ионизации в течении распространения импульса. Так как мы вынуждены использовать большой диаметр капилляра, где коэффициент аномальной дисперсии очень мал, необходимо генерировать узкий плазменный волновод, как обсуждалось выше, который может быть сформирован на первой стадии ионизации, когда гелий однократно ионизируется передней частью импульса. Затем, на второй стадии, оставшаяся часть импульса, когда двухкратная ионизация гелия имеет место быть, может испытать эффект самокомпрессии.

На рисунке 5.25**(a)** мы представили результаты расчетов уравнения (5.57) для линейно поляризованного лазерного импульса с длительностью 60 фемтосекунд и с энергией 130 мДж, распространяющегося в диэлектрическом капилляре при давлении гелия 2 Тор. Как видно из рисунка, пространственная структура лазерного поля, захваченная внутрь плазменного волноводаи распространяющаяся со слегка измененной поперечной структурой, то есть в форме нелинейной моды самоподдерживающегося сформированного волновода. Более того, в течение распространения лазерный импульс сжимается до минимальной длительности в 6 фемтосекунд на длине капилляра $L = 2.635 z_R = 18$ см с энергетической эффективностью около 18% (оценено на уровне спадения интенсивности e^2 раз). Профиль интенсивности лазерного импульса на оси ($r = 0$) на входе и выходе капилляра показан на рисунке 5.26. Кроме узкой скомпрессированной части лазерного импульса (штриховая линия) распределение интенсивности на рисунке 5.26 имеет крылья, содержащие небольшую долю энергии выходного сигнала. Для сравнения мы также представили на рисунке

5.26 спектрально ограниченный импульс с длительностью 3.6 фемтосекунды (непрерывная линия), соответствующий спектру сжатого импульса. Выполненное моделирование показывает, что достаточно высокая эффективность предложенной техники компрессии может быть достигнута как в перспективе ее энергетической эффективности (выше 20%) и относительно упрощенной реализации, где корректный выбор длины диэлектрического капилляра важен в первую очередь.

Наиболее важная проблема этой техники – энергетическая масштабируемость. Несмотря на то, что базовая система уравнений (5.57) не позволяет самоподобие с этими диаметрами капилляра, так как потери излучения γ зависят от диаметра капилляра $\gamma \propto \dfrac{1}{\alpha a^2}$. Для большего диаметра эти потери становятся несущественными. Таким образом, когда данные потери, связанные с излучением, пренебрежительно малы, решения системы уравнений (5.57) должны быть масштабированными для фиксированного значения β. Чтобы доказать это утверждение, мы представили на рисунке 5.25**(b)** результаты численных расчетов для тех же входных параметров, что и на рисунке 5.25**(a)**, но для диаметра 1.2 мм и также давления газа в 0.125 Торр, что соответствует такому же значению параметра β. Как ясно видно из рисунка, динамика распространения лазерного импульса практически такая же в обоих случаях, и даже длины компрессии идентичны $L = 2.635 z_R$. В этом частном случае, лазерный импульс с длительностью 60 фемтосекунд с энергией 2 Дж сжимается до 6 фемтосекунд на дистанции порядка $L \simeq 3$ м, таким образом, будучи способным достигнуть в сжатом импульсе мощности в 50 ТВт.

В заключении, мы предлагаем механизм эффекта ионизационно-индуцированной самокомпрессии, когда мощный фемтосекундный лазерный импульс распространяется в газонаполненном диэлектрическом капилляре. Этот механизм из-за формирования нелинейного плазменного волновода, чья аномальная дисперсия позволяет сгруппировать спектральные компоненты коротких длин волн, повышаясь в случае ионизации газа и будучи способным скомпрессировать лазерный импульс даже ниже одного периода поля. Эффект самокомпрессии может быть применен к высокоэнергетичным лазерным импульсам, где масштабируемость к джоульному уровню энергии показана.

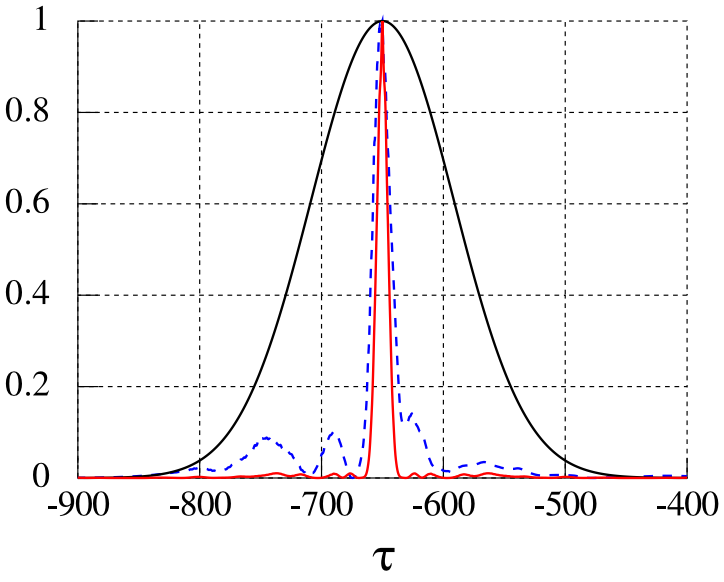


Рис. 5.26: Временные профили лазерного импульса: черная сплошная линия – входной импульс; штриховая – скомпрессированный импульс на длине $L = 2.635 z_R$; красная сплошная линия – спектрально ограниченный импульс

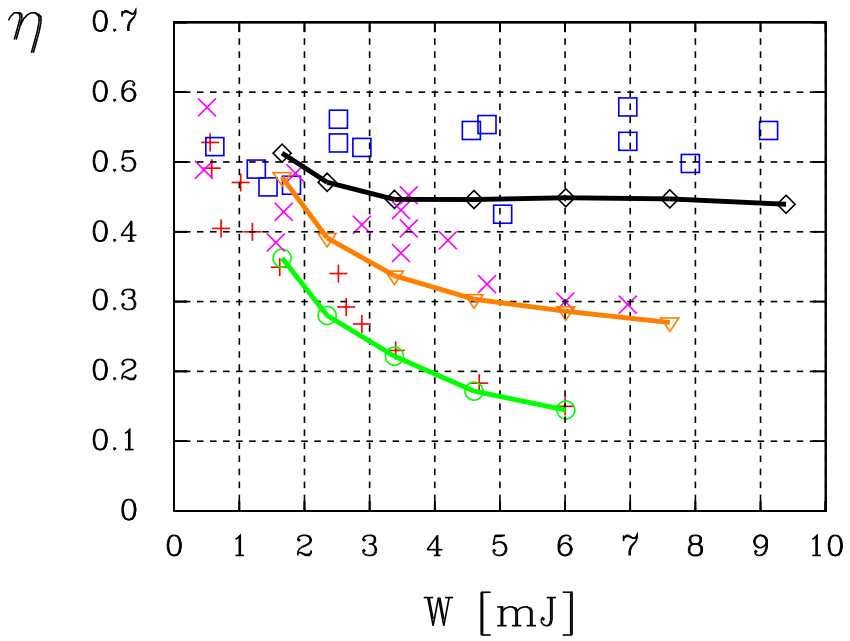


Рис. 5.27: Эффективность прохождения излучения η в зависимости от начальной энергии W для разных давлений He: □ – давление 3 Торр (эксперимент); × – давление 10 Торр (эксперимент); + – давление 30 Торр (эксперимент); черная линия – давление 5 Торр (теория); оранжевая линия – давление 10 Торр (теория); зеленая линия – давление 30 Торр (теория).

5.7 Эксперимент

В экспериментах использовалось лазерное излучение Ti:Sa фемтосекундного лазера [211] с длительностью импульса $\tau_p \simeq 70 - 80$ фс, частотой повторения $F = 10$ Гц, длиной волны излучения $\lambda \simeq 800$ нм и энергией в импульсе W до 10 мДж. Лазерное излучение поступало в вакуумную камеру и фокусировалось сферическим зеркалом на входной торец диэлектрического капилляра диаметром $d = 75$ мкм и длиной $L \simeq 5$ см в пятно диаметром 50 мкм по уровню $1/e^2$. В выполненных экспериментах применялась дифференциальная откачка капилляра. Для этого капилляр помещался в сосуд, заполненный газом до требуемого давления, газ поступал в капилляр через прорези в стенке, а входной и выходной торцы капилляра выводились в основную вакуумную камеру, откачиваемую до давления $\leq 10^{-2}$ Торр. Дифференциальная откачка позволила значительно повысить давления газа, с которыми можно было работать, по сравнению с ранее выполненными нами экспериментами [210], так как позволила избежать влияния плазмы, создаваемой интенсивным лазерным излучением перед входом в капилляр. С выхода капилляра излучение коллимировалось линзой (материал $BK7$, толщина ~ 2.5 мм), и параллельный пучок выводился через окно вакуумной камеры такой же толщины. Как показывают оценки, уширение лазерного импульса в линзе и выходном окне вакуумной камеры даже при минимальной длительности импульса, наблюдавшейся в эксперименте (~ 40 фс), не превышало 3 фс. Спектр излучения, прошедшего через капилляр, измерялся с помощью спектрометра (модель $S150$, фирма SOLAR). Увеличенное изображение выходного торца капилляра регистрировалось CCD камерой. Для характеристики прошедшего через капилляр импульса использовался метод FROG на второй гармонике [56]. Энергия лазерного импульса на входе в капилляр и на выходе измерялась калиброванными фотодиодами. Давление газа в капилляре (He и Ar) в ходе экспериментов менялось в диапазоне $p = 1 - 30$ Торр.

Зависимость эффективности прохождения фемтосекундного лазерного излучения через капилляр от энергии в лазерном импульсе для разных давлений He представлена на рисунке 5.28. На рисунке сплошными линиями показаны результаты численных расчетов. Эффективность прохождения излучения через пустой капилляр составляла примерно $50 - 55\%$ и определялась эффективностью возбуждения основной моды капилляра и потерями энергии при распространении в капилляре [210]. Во всем диапазоне использованных энергий лазерного импульса она не менялась. Аналогично

вела себя зависимость и при низких (менее 3 Торр) давлениях Не. При больших давлениях газа по мере роста энергии наблюдалось снижение эффективности прохождения энергии лазерного импульса через капилляр, причем скорость снижения эффективности прохождения энергии увеличивалась с ростом давления. Для капилляра диаметром 75 мкм оценка концентрации плазмы, при которой нарушается одномодовый режим распространения излучения в капилляре, дает $\mathcal{N} > \mathcal{N}^\star = 4.8 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$, что соответствует давлению газа при двухкратной ионизации газа $p^\star = 7.5$ Торр.

Интенсивное фемтосекундное излучение, распространяясь в газе, производит ионизацию газа, что приводит к уширению спектра лазерного излучения в сторону коротких длин волн [195]. Как показали наши измерения, уширение спектра становится более существенным при увеличении энергии лазерного импульса и роста давления газа в капилляре. На рисунке 5.28**(a)** приведен вид спектров лазерного импульса на выходе капилляра, заполненного Не ($p = 20$ Торр), при различных энергиях в лазерном импульсе.

Как видно из рисунка 5.28**(a)**, эффективная ширина спектра, первоначально составлявшая величину ~ 15 нм, значительно увеличивалась, спектральный диапазон при максимальной энергии в лазерном импульсе достигал величины $\sim 150 - 200$ нм. Одновременно происходил сдвиг «центра масс» спектра в сторону более коротких длин волн.

Длительность лазерного импульса на выходе капилляра, не заполненного газом, измеренная по FROG методике, была такой же, как и на входе в капилляр. При заполнении капилляра газом наблюдалось укорочение длительности импульса на выходе капилляра (самокомпрессия) аналогично работе [188]. На рисунке 5.28**(b)** представлены временные распределения интенсивности лазерных импульсов: прошедшего через пустой капилляр ($\tau_{in} \simeq 76$ фс) и скомпрессированного при прохождении через капилляр, заполненный аргоном при $p = 1$ Торр ($\tau_{out} \simeq 41$ фс, $W = 5.9$ мДж), восстановленные из обработки FROG изображений. Ошибка восстановления при FROG обработке не превышала 1%. Для данного давления аргона наблюдалось хорошее соответствие между спектром, восстановленным при обработке FROG изображения, и спектром, измеренным спектрометром. Зависимость длительности скомпрессированного импульса на выходе капилляра от энергии лазерного импульса для давления аргона в капилляре $p = 1$ Торр приведена на рисунке 5.29. Как видно отсюда, длительность импульса на выходе капилляра уменьшалась по мере увеличения энергии

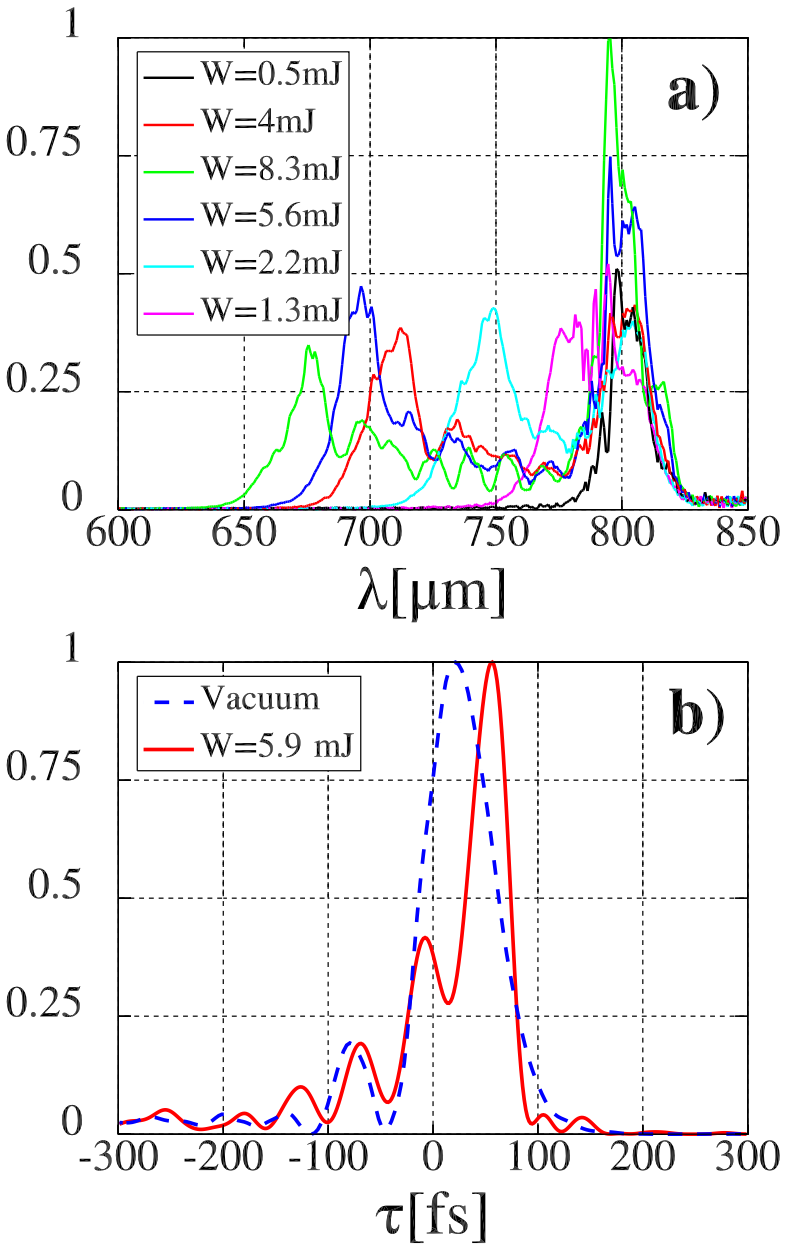


Рис. 5.28: **(a)** Спектр лазерного импульса на выходе капилляра, заполненного He при давлении $p = 20$ Торр, для разных значений энергии лазерного импульса: $W = 0.5$ мДж, $W = 2.2$ мДж, $W = 4$ мДж, $W = 8.3$ мДж; **(b)** Временные распределения интенсивности фемтосекундных импульсов востановленные с помощью FROG: синяя пунктирная линия – импульс на входе в капилляр с длительностью 76 фс, красная сплошная линия – импульс на выходе капилляра с длительностью 40 фс, заполненного Ar при давлении 1 Торр, $W = 5.9$ мДж.

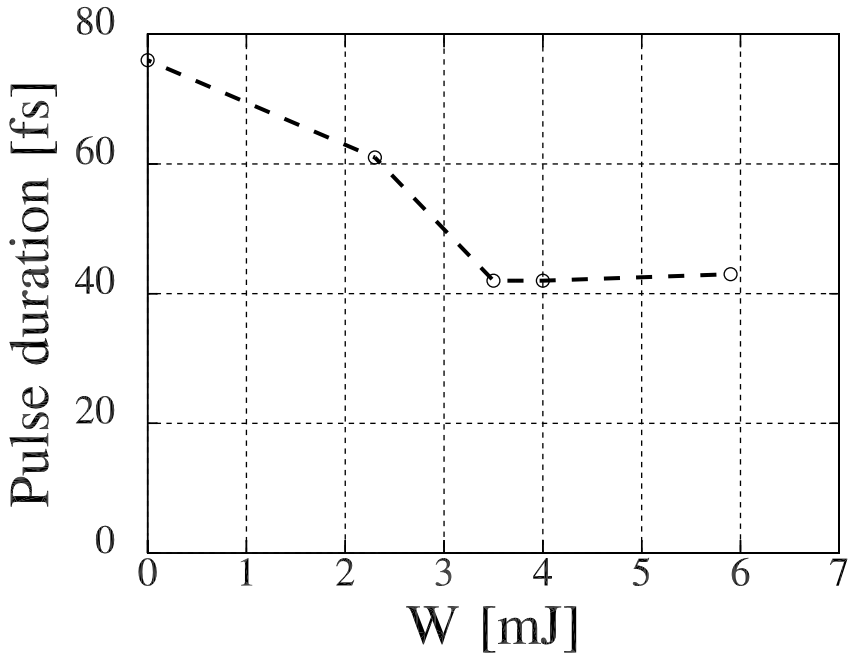


Рис. 5.29: Зависимость длительности лазерного импульса на выходе капилляра, заполненного Ar при $p = 1$ Торр от энергии лазерного импульса

в лазерном импульсе. Минимальная длительность импульса, измеренная при этом давлении газа, составила величину 41 фс.

При больших давлениях газа в капилляре, как отмечалось выше, уширение спектра было более значительным и можно было бы ожидать более значительного уменьшения длительности импульса на выходе капилляра. Однако корректная обработка FROG изображений при больших давлениях оказалась невозможной в условиях нашего эксперимента. Это было связано с тем, что в эксперименте в схеме FROG измерений использовался нелинейный кристалл KDP толщиной 300 мкм, ограничивающий спектральную полосу измерения. Поэтому при больших давлениях газа восстановленный из обработки FROG изображений спектр был обрезан в области коротких длин волн по сравнению с измерениями со спектрографа, а само FROG изображение несло информацию об автокорреляционной функции, соответствующей только части спектра лазерного импульса. Оценка длительности импульса по этой неполной информации, тем не менее, может быть проведена. Для давления Ar в капилляре $p = 3$ Торр минимальное значение длительности импульса на выходе капилляра может быть оценено как $\tau_{min} \simeq 30$ фс.

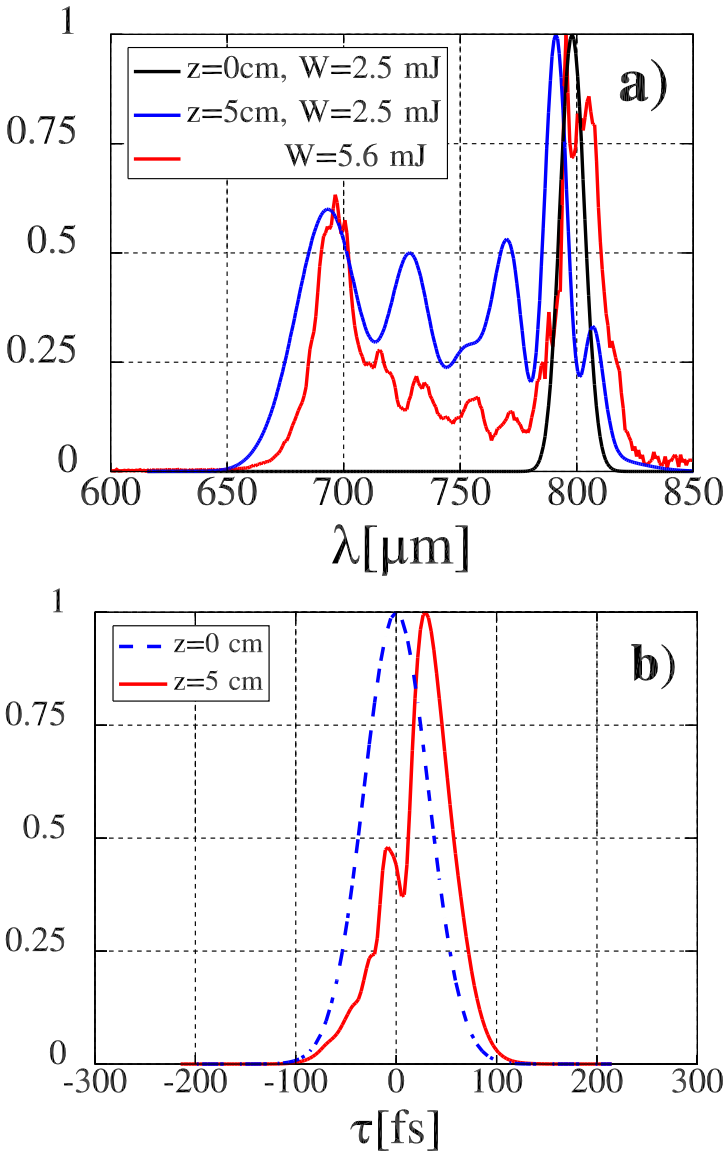


Рис. 5.30: **(a)** Спектры лазерного импульса при распространении в капилляре длиной 5 см, заполненного He при давлении $p = 20$ Торр для параметров, указанных на рисунке: черная линия – начальное распределение с энергией в импульсе $W = 2.5$ мДж; синяя линия – выходное распределение с начальной энергией $W = 2.5$ мДж (теория); красная линия – выходное распределение с начальной энергией $W = 5.6$ мДж (эксперимент); **(b)** Распределение интенсивности лазерного импульса на оси капилляра как функция сопутствующего времени при $z = 0$ и $z = 5$ см. Исходный лазерный импульс с энергией $W = 5.9$ мДж и длительностью $\tau_p = 76$ фс вводился в капилляр диаметром $d = 75$ мкм, заполненный аргоном при давлении $p = 1.5$ Торр.

Результаты численного моделирования распространения лазерного импульса в гелии при $p = 20$ Торр и в аргоне при $p = 1.5$ Торр в рамках данного рассмотрения для начальной длительности импульса $\tau = 76$ фс представлены на рисунках 5.30(**a,b**). На рисунке 5.30(**a**) изображен расчетный спектр лазерного импульса для энергии импульса $W = 2.5$ мДж на входе и выходе из капилляра. Также изображен экспериментально полученный спектр, соответствующий энергии импульса $W = 5.6$ мДж. Отметим, что наиболее близкие картины расчетных и экспериментальных спектров наблюдались в случае, когда в расчете бралась энергия в импульсе примерно в $1.5-2$ раза меньше, чем в эксперименте. Это связано, по-видимому, с тем, что экспериментальное распределение лазерного пучка на входе в капилляр отличалось от предполагавшегося в теории гауссовского распределения, что приводило к менее эффективному возбуждению основной моды капилляра [14]. На рисунке 5.30(**b**) представлены временные распределения интенсивности лазерного импульса на оси капилляра при $z = 0$ и $z = 5$ см. Как видно из рисунка 5.30(**b**), входной импульс с начальной длительностью $\tau_p = 76$ фс на выходе капилляра длиной $z = 5$ см сжался до $\tau_p = 44$ фс, что хорошо согласуется с экспериментальными результатами, при этом наблюдается также и хорошее качественное соответствие временных распределений, получаемых и в численном расчете, и в эксперименте; рисунок 5.28(**b**). Однако следует отметить, что результат компрессии чувствителен к выбору длины капилляра. Как следует из результатов численного расчета, по мере распространения импульс испытывает достаточно сложную динамику, демонстрируя на некоторых трассах более чем двукратное сжатие.

5.8 Обсуждение результатов

Предложена система уравнений, описывающая пространственно-временную эволюцию поля при распространении мощного лазерного излучения при ионизации газа в диэлектрическом капилляре.

Предложен метод ионизационно-индуцированной самокомпрессии лазерных импульсов в диэлектрических капиллярах, заполненных газом. Показано, что производящий ионизацию газа лазерный импульс может быть самоскомпрессирован к длительностям с небольшим числом осцилляций поля в результате возбуждения нелинейного плазменного волновода. Подобный эффект используется для высокоэнергетичных лазерных импульсов, и продемонстрирована возможность масштабирования

его к джоулевым уровням энергии.

Ключевой идеей укорочения лазерных импульсов является использование газа при сравнительно более высоких давлениях, когда с учетом образующейся плазмы нарушаются условия одномодового распространения излучения в диэлектрическом капилляре и возможно возбуждение ионизационно-нелинейного плазменного волновода, в котором могут распространяться утекающие моды. Существование такого волновода связано с резкой зависимостью вероятности ионизации газа от интенсивности поля в лазерном импульсе, что приводит к образованию резкого (на масштабе длины волны) скачка показателя преломления. За счет действия ионизационной нелинейности происходит частотная модуляция лазерного импульса, в результате которой формируется чирп с повышением частоты от передней к задней части импульса. Создание более узкого плазменного канала в диэлектрическом капилляре способно обеспечить аномальный характер групповой скорости, что приведет к сжатию исходного ионизирующего импульса, поскольку в среде с аномальной дисперсией групповой скорости синие спектральные компоненты могут догнать красные, так как имеют более высокую групповую скорость.

Проведено исследование энергетической эффективности прохождения излучения через капилляр, пространственной структуры излучения на выходе капилляра и структуры спектра выходного излучения. Определены зависимости ширины и величины сдвига центра масс спектра от энергии лазерных импульсов, давления газа. Получено значительное увеличение ширины спектра лазерных импульсов (почти на порядок), сопровождающееся сдвигом центра масс спектра в коротковолновую область спектра. Показано, что после преодоления ионизационного порога эти величины слабо зависят от изменений интенсивности лазерного излучения. Показано, что в определенном интервале энергий лазерного излучения возможно получение больших ширин спектра с хорошей однородностью пространственного распределения спектральной энергии.

Показана возможность получения однородного плазменного канала в диэлектрических капиллярах при высоких давлениях. Произведена теоретическая оценка минимальной амплитуды поля, при котором образуется однородный плазменный канал, в зависимости от давления газа, заполняющего капилляр.

Теоретически показано, что образование плазменного канала не приводит к увеличению эффективности прохождения излучения, как можно было надеяться. При высоких давлениях эффективность транспортировки мощного лазерного излучения

падает существенно по сравнению с вакуумным капилляром из-за сильной рефракции излучения на образовавшейся плазме.

В заключительном разделе приведены экспериментальные результаты по ионизационно-индуцированной самокомпрессии лазерного импульса в диэлектрическом волноводе. Продемонстрировано хорошее согласие результата эксперимента и результатов численных расчетов.

Глава 6

Самокомпрессия мултипетаваттных лазерных импульсов в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны

Существенный прогресс в лазерной технологии, произошедший в последнее время, главным образом основан на усилении чирпованных лазерных импульсов (CPA) [178], позволяя генерировать ультракороткий лазерный импульс с длительностью в 30 фс и пиковой мощностью более 1 ПВт [179]. Несколько общемировых проектов на пути к десятипетаваттному уровню и выше теперь находятся в активном развитии [25]. Однако генерация импульсов с малым числом колебаний поля и высокой мощностью, в частности, ниже 10 фс для Ti:Sa лазеров на длине волны около 800 нм, все еще труднопреодолимая задача. Дальнейшее увеличение мощности генерируемого лазерного излучения сопряжено со значительными техническими трудностями. Трудности связаны, в первую очередь, со стойкостью оптических элементов при огромных мощностях лазерного излучения. Это приводит к необходимости значительного увеличения геометрических размеров используемой оптики, что представляет технически очень сложную задачу. Поэтому для достижения уровней мощности в сотни тераватт и выше были предложены схемы усиления, альтернативные стандартной схеме усиления частотно-модулированных импульсов.

Большой спрос на высокоинтенсивные лазерные импульсы с малым числом ко-

[25] www.extreme-light-infrastructure.eu/; http://www.izest.polytechnique.edu/.

лебаний поля для различных диапазонов применения от генерации аттосекундного импульса [112] до ускорения частиц [161] бросает вызов современной лазерной физике. Один из путей основывается на методе оптического параметрического усиления чирпованных лазерных импульсов [45,88,125]. Однако прогресс данной техники в получении высокоэнергичных импульсов был сравнительно медленным. У него крайне высокий потенциал, включающий усиление импульсов с широким спектром, сопровождающимся высоким коэффициентом усиления.

Одним из способов дальнейшего увеличения интенсивности лазерного излучения связывают, в основном, с компрессией лазерных импульсов. Этот процесс является одним из эффективных способов повышения интенсивности поля. На высоком уровне мощности для лазерной компрессии естественно использовать процессы в ионизованной среде, для которой не возникает проблем электрической прочности материалов. Причем, в отличие от твердотельных усилителей, поле в лазерном импульсе не может быть слабым, и, следовательно, схемы с использованием плазмы в качестве активной среды принципиально нацелены на большие поля. Несколько из таких схем исследуются в данной главе диссертации. Недавно был предложен альтернативный путь, основанный на методе генерации импульсов с высокой энергией и малым числом колебаний поля, используя ионизационно-индуцированный эффект самокомпрессии [173] (см. предыдущий раздел), но этот метод еще не был проверен на высоких энергиях.

В прозрачной плазме обсуждаются два процесса укорочения интенсивного лазерного импульса: в результате обратного рамановского рассеяния и при возбуждении кильватерной плазменной волны. Метод компрессии волновых пакетов, связанный с обратным рамановским рассеянием [126], представляет один из наиболее перспективных способов получения интенсивных ультракоротких волновых пакетов с длительностью, сопоставимой с периодом плазменной волны. С помощью данного метода можно получить несфокусированные лазерные импульсы с интенсивностью на выходе в 10^4–10^5 раз выше по сравнению с обычной техникой усиления частотно-модулированных лазерных импульсов [126, 128]. Речь идет о возможности усиления слабого электромагнитного импульса в плазме при его взаимодействии с волной накачкой на сдвинутой частоте, когда плазменные колебания играют роль третьей волны [126]. Будет рассматриваться только встречное распространение импульсов, так как оно обеспечивает большой инкремент усиления на линейной стадии [128]. В общем виде условия синхронизма в терминах частот ω_i и волновых векторов $\boldsymbol{k}_i$

взаимодействующих волн могут быть записаны в следующем образом:

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 \ , \tag{6.1a}$$

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 \ . \tag{6.1b}$$

Накачка имеет большую длительность, но относительно малую интенсивность. Усиливаемый импульс с более низкой частотой должен быть максимально коротким и когерентным. Рассматриваемый механизм усиления и укорочения импульса является чувствительным к неоднородности среды (как регулярной, так и флюктуационной) [128, 185]. Первые экспериментальные исследования рамановской компрессии, проведенные в начале двухтысячных годов, показали, что значительного усиления и, соответственно, укорочения длительности лазерного импульса получить не удалось [17, 106, 212]. Однако в последние годы в связи с развитием лазерной техники было продемонстрировано заметное усиление лазерного импульса при обратном рамановском рассеянии в плазме [138,185], в связи с чем активизировались дальнейшие исследования данного механизма. В реальных условиях плазма является неоднородной и это приводит к ухудшению профиля выходного импульса. Одна из возможностей решения данной проблемы связана с использованием двойного рамановского рассеяния [16, 184]. На первой стадии импульс укорачивается в результате обратного рамановского процесса. На второй стадии рассеянный мощный сверхкороткий лазерный импульс используется как накачка.

Схема самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов, основанная на плазме и использующая локальные особенности релятивистской нелинейности, была проанализирована в работе [167], что, однако, не было экспериментально реализовано. Укорочение импульсов в плазме в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны в прозрачной плазме – довольно интересное явление. Главная его особенность состоит в одномерном возбуждении плазменной волны, которое уже обсуждалось более чем десятилетие назад [79,124,153]. Однако наиболее острая проблема заключается в том, что для ультракоротких импульсов эффект нестационарной самофокусировки [204] может оказывать сильное влияние на динамический процесс самокомпрессии импульса, что до сих пор остается не до конца решенным вопросом. В данной главе будут проведены детальные исследования нового метода самокомпрессии релятивистски сильного лазерного импульса до нескольких колебаний поля в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны. Самосжатие волнового пакета связано с тем, что в условиях возбуждения кильватерной волны в задней части

волнового пакета происходит вытеснение электронов, а в передней части импульса, наоборот, концентрация электронов увеличивается. Следовательно, задняя часть импульса догоняет переднюю часть, так как групповая скорость волнового пакета в плазме увеличивается с уменьшением концентрации электронов.

Структура данной главы следующая. В разделе 6.1.1 будет приведена система уравнений, описывающая динамику релятивистски сильного лазерного импульса в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны. В разделе 6.1.2 будет приведена система уравнений, описывающая задачу усиления лазерных импульсов в процессе обратного рамановского рассеяния в плазме для широкополосного лазерного излучения. В разделе 6.2 приведены результаты экспериментальных исследований рамановского усиления лазерных импульсов в плазме в процессе трехволнового взаимодействия в диэлектрических капиллярах для обеспечения увеличения длины нелинейного взаимодействия. Вторая часть данной главы посвящена перспективному методу самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов петаваттного уровня мощности в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны. Для оперирования с такими большими мощностями в лазерном импульсе необходимо работать с большими размерами волнового пучка. В разделе 6.3 приведены результаты исследования развития пространственно-временной (филаментационной) неустойчивости волнового пакета в условиях нестационарной самофокусировки. Поскольку уширение спектра волнового пакета является необходимым условием укорочения длительности последнего, в разделе 6.4 проведен анализ модификации спектра волнового пакета в условиях нестационарной самофокусировки. В разделе 6.5 проведен количественный и качественный анализ метода самокомпресии лазерных импульсов. В разделе 6.8 будут определены оптимальные начальные параметры лазерного импульса, чтобы обеспечить максимальную компрессию волнового пакета. При этом возникает закономерный вопрос: как повлияют на данный процесс самосжатия импульса различные неустойчивости лазерного пучка? В разделе 6.6 будут приведены результаты исследования влияния шланговой неустойчивости на укорочение волнового пакета. В разделе 6.7 представлены экспериментальные результаты по самокомпрессии лазерных импульсов, вызванной возбуждением кильватерной волны в релятивистском режиме, в газовой струе. В разделе 6.9 будет показано, что в случае значительного превышения амплитуды векторного потенциала по сравнению с релятивистским значением реализуется квазиодномерный режим укорочения длительности лазерного импульса (имеет место насыщение нелинейности).

6.1 Основные уравнения для описания динамики широкополосных лазерных импульсов

Для адекватного описания укорочения лазерного импульса в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны и динамики усиления широкополосных лазерных импульсов в процессе обратного рамановского рассеяния остановимся отдельно на получении уравнений для описания эволюции электромагнитного поля.

6.1.1 Самовоздействие лазерных импульсов в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны

Динамика самовоздействия сверхкоротких релятивистски сильных лазерных импульсов сопровождается заметным преобразованием спектра излучения, связанным с возбуждением кильватерной плазменной волны. В этих условиях общепринятое приближение плавно меняющейся огибающей становится неприменимым. Волновое уравнение для векторного потенциала, описывающее распространение пакета электромагнитных волн вдоль оси z, имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial z^2} + \Delta_\perp \boldsymbol{\mathcal{A}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\mathcal{J}}_\perp \ , \tag{6.2}$$

где $\Delta_\perp = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\boldsymbol{\mathcal{J}}_\perp$ – поперечный ток. В случае лазерных импульсов с характерным поперечным масштабом много большим длины плазменной волны для определения материальной связи $\boldsymbol{\mathcal{J}}_\perp(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ воспользуемся квазиодномерной системой уравнений релятивистской гидродинамики в поле циркулярно-поляризованного излучения $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{x_0} + i\boldsymbol{y_0})\mathcal{A}$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{np}{\sqrt{1+p^2+|a|^2}} = 0 \ , \tag{6.3a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\phi - \sqrt{1+p^2+|a|^2}) \ , \tag{6.3b}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}(n-1) \ . \tag{6.3c}$$

Здесь n концентрация электронов, нормированная на значение концентрации $\mathcal{N}$, когда поле отсутствует; импульс p нормирован на mc, $a = \dfrac{e\mathcal{A}}{mc^2}$, $\phi = \dfrac{e\Phi}{mc^2}$ – нормализованный скалярный потенциал, $t = \omega_o t_{old}$, $z = z_{old}\dfrac{\omega_o}{c}$, ω_o – несущая частота, $\omega_{pl} = \sqrt{\dfrac{4\pi\mathcal{N}e^2}{m}}$ – плазменная частота.

Одномерная модель описания динамики возбуждения кильватерной плазменной волны на основе системы уравнений (6.3) оправдана для волновых полей $\mathcal{A}$ с характерным поперечным масштабом $L_\perp$, много большим длины плазменной волны $\lambda_p = \dfrac{c}{\omega_{pl}}$ $[L_\perp \gg \lambda_p]$. Кроме того, мы будем рассматривать лазерные импульсы с продольным масштабом (длительностью) $L_{||}$ меньшим периода плазменной волны $(L_{||} < \dfrac{c}{\omega_{pl}})$.

Далее получим условие на отсутствия режима пузыря (bubble regime) [151]. Более точное условие на параметры лазерного импульса в случае, когда плазменная волна возбуждается преимущественно только в продольном направлении, можно получить из следующих простых соображений. Можно оценить поперечное смещение электронов $\boldsymbol{x}_\perp$ используя уравнение для движения электрона

$$\frac{d\boldsymbol{p}_\perp}{dt} \sim -\frac{e^2}{mc^2}\nabla_\perp |\mathcal{A}|^2 \ . \tag{6.4}$$

В результате можно получить выражение на смещение электронов в поперечном направлении за длительность лазерного импульса $\boldsymbol{x}_\perp \simeq a^2 L_{||}^2/L_\perp$. Это смещение электронов будет мало по сравнению с радиусом пучка лазерного импульса при выполнении следующего соотношения

$$a \ll L_\perp/L_{||} \ , \tag{6.5}$$

что является условием применимости для нашего подхода. Это условие может быть легко выполнено для ультракоротких лазерных импульсов $L_{||} \ll L_\perp$. Следовательно, динамика электронов будет преимущественно только в продольном направлении. В результате мы можем рассмотреть самовоздействие лазерного импульса в условиях возбуждения квази-одномерной плазменной волны [69] (уравнения (13)–(23)) [т.е. в пренебрежение поперечной плазменных потоков] в отличие от режима пузыря [151].

В случае редкой плазмы, в которой импульсы электромагнитного поля распространяются со скоростью, близкой к скорости света c, нелинейный отклик среды (6.3) можно считать зависящим от $\tau = t - \dfrac{z}{c}$. Используя интегралы уравнений (6.3) для локализованных распределений плотности среды, импульса и поля

$$n + \frac{np}{\sqrt{1+p^2+|a|^2}} = 1 \ , \tag{6.6a}$$

$$p + \sqrt{1+p^2+|a|^2} = 1 + \phi \tag{6.6b}$$

нетрудно получить следующее выражения:

$$n = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1+|a|^2}{(1+\phi)^2}\right] , \tag{6.7a}$$

$$p = \frac{(1+\phi)^2 - 1 - |a|^2}{2(1+\phi)} . \tag{6.7b}$$

Окончательно получаем материальное соотношение $\mathcal{J}_\perp(\mathcal{A})$:

$$\frac{4\pi}{c}\mathcal{J}_\perp = 4\pi\mathcal{N}e\frac{an}{\sqrt{1+p^2+|a|^2}} = \frac{\omega_{pl}^2}{c^2}\frac{\mathcal{A}}{1+\phi} \tag{6.8}$$

и уравнение для скалярного потенциала ϕ

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} = \frac{\omega_{pl}^2}{2\omega_o^2}\left[\frac{1+|a|^2}{(1+\phi)^2} - 1\right] . \tag{6.9}$$

Для детального анализа и определения предельных возможностей предлагаемой схемы самокомпрессии релятивистски сильного лазерного импульса при возбуждении кильватерной плазменной волны нами использован хорошо зарекомендовавший себя подход. Поскольку плотность плазмы $\mathcal{N}$ много меньше критического значения $\mathcal{N}_{cr} = \dfrac{m\omega_o^2}{4\pi e^2}$ [$\mathcal{N} \ll \mathcal{N}_{cr}$, ω_o – несущая частота импульса], в качестве исходного уравнения использовалось волновое уравнение в безотражательном приближении, предполагающее малость изменения поля на масштабах длины волны, а также предполагающее поперечный размер пучка большим по сравнению с характерным продольным масштабом поля (квазиоптический пучок). Данный подход обоснован в работах [19,105,172,240,264] и использован для исследования распространения волновых полей с шириной спектра порядка центральной частоты в линейных и нелинейных средах.

Самосогласованную нелинейную деформацию структуры сверхкороткого лазерного импульса с циркулярной поляризацией электрического поля в процессе нестационарного возбуждения кильватерного следа рассмотрим на основе следующей безразмерной системы уравнений

$$\frac{\partial^2 a}{\partial\tilde{z}\partial\tau} + \frac{\beta a}{1+\phi} - \Delta_\perp a = 0 \tag{6.10a}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} = \frac{\omega_{pl}^2}{2\omega_o^2}\left[\frac{1+|a|^2}{(1+\phi)^2} - 1\right] , \tag{6.10b}$$

где c – скорость света, ω_{pl} – плазменная частота, $\tau = \omega_o\left(t - \dfrac{z}{c}\right)$ – время в сопровождающейся системе координат, $z = \tilde{z}\dfrac{2\omega_o r_o^2}{c}$, $r_\perp = \tilde{r}_\perp r_o$, $\beta = \left(\dfrac{\omega_{pl} r_o}{c}\right)^2$, ω_o – несущая

частота лазерного излучения, r_o – начальный размер лазерного пучка. Она является обобщением на случай широкополосного излучения уравнений, которые обычно используются для исследования процессов в случае квазимонохроматических полей [39,40,175,204,206]. Для простоты изложения далее по тексту знак тильда будет опущен.

Как отмечалось ранее, в задаче о самовоздействии релятивистски сильного лазерного импульса в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны будут рассматриваться волновые пучки с размером, значительно превышающим длину плазменной волны $L_\perp \gg \lambda_p$. Кроме того, будут рассматриваться лазерные импульсы с длительностью примерно 50 фс, и, как отмечалось ранее, это должно быть менее или порядка периода плазменной волны. Это означает, что в основном мы будем рассматривать концентрацию плазмы на уровне $10^{17} \ldots 10^{18}$ см$^{-3}$. Подводя итоги, можно говорить, что мы будем рассматриваться волновые пучки размером в несколько сотен микрон.

В разделе 6.7 при обсуждении результатов экспериментальных данных будет проведен численный анализ на основе PIC кода. Это будет возможно, так как будут рассматриваться более высокие концентрации плазмы ($\sim 10^{19}$ см$^{-3}$) и волновые пучки с размером, всего в несколько раз превышающим длину плазменной волны. Кроме того, будет проведен анализ сравнения результатов численных расчетов, полученных на основе PIC кода и одномерного гидродинамического кода.

Система уравнений (6.10) существенно более сложна и описывает большее число нелинейных эффектов, чем соответствующие ей уравнения для квазимонохроматического излучения

$$i\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} + \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}\frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial \tau^2} + \Delta_\perp \mathcal{B} + \frac{\mathcal{B}\phi}{1+\phi} = 0 \tag{6.11a}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} = \frac{1 + |\mathcal{B}|^2 - (1+\phi)^2}{2(1+\phi)^2} \ , \tag{6.11b}$$

где $\mathcal{B}$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда векторного потенциала. Второе слагаемое в уравнении (6.11a) учитывает частотную дисперсию фоновой плазмы. Как следует из уравнения непрерывности для векторного потенциала

$$i\frac{\partial |\mathcal{B}|^2}{\partial z} = \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{B}^\star}{\partial \tau} - \mathcal{B}^\star \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \tau}\right) + \nabla_\perp \left(\mathcal{B}\nabla_\perp \mathcal{B}^\star - \mathcal{B}^\star \nabla_\perp \mathcal{B}\right) \ , \tag{6.12}$$

в процессе эволюции системы сохраняется полная энергия лазерного импульса

$$\mathcal{I}_o = \int\limits_{\boldsymbol{r}_\perp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{B}|^2 d\tau d\boldsymbol{r}_\perp \ , \tag{6.13}$$

т.е. не учитываются потери энергии на возбуждение плазменных колебаний. Отметим, что соответствующего интеграла нет в рамках исходной системы (6.10), так как $\mathcal{I}_o$ уменьшается вследствие возбуждения кильватерной плазменной волны. При качественном рассмотрении процессов мы будем часто обращаться к уравнениям (6.11a), (6.11b) и (6.12). Дело в том, что динамика самовоздействия квазимонохроматического излучения довольно хорошо изучена. Эффекты (самофокусировочная неустойчивость, коллапс, преобразование частоты и др.), исследованные в рамках (6.11a), (6.11b), проявляются независимо, и их можно описать в ряде случаев количественно по отдельности. Этими результатами мы в дальнейшем воспользуемся как для задания наиболее оптимальных начальных условий при проведении численных расчетов, так и при обсуждении полученных данных.

В системе уравнений (6.11) можно пренебречь дисперсионным расплыванием волнового пакета (т.е опустить второе слагаемое $\dfrac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial \tau^2}$ в уравнении (6.11a)) в случае, если ограничиваться расстояниями $z \ll \dfrac{c\omega^3}{\omega_p^4}$ распространения лазерного импульса с длительностью менее периода плазменной волны в разреженной плазме $\left(\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} \ll 1\right)$

$$i\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} + \Delta_\perp \mathcal{B} + \frac{\mathcal{B}\phi}{1+\phi} = 0 \ , \tag{6.14a}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} = \frac{1 + |\mathcal{B}|^2 - (1+\phi)^2}{2(1+\phi)^2} \ . \tag{6.14b}$$

6.1.2 Усиление лазерных импульсов в процессе обратного рамановского рассеяния в плазме

Далее сделаем попытку обобщить систему уравнений, описывающую процесс рамановского усиления слабого электромагнитного лазерного импульса в плазме при взаимодействии с волной накачкой, когда плазменные колебания играют роль третьей волны на случай лазерных импульсов с шириной спектра порядка несущей частоты.

Волновое уравнение

Динамика самовоздействия ультракоротких релятивистски сильных лазерных импульсов сопровождается заметным изменениям в спектре частот из-за возбуждения плазменных волн. Для таких условий обычно используемое приближение медленно меняющихся огибающих становятся неприменимыми. Поэтому нужно получить адекватные уравнения для исследования взаимодействия таких ультракоротких импульсов с прозрачной плазмой.

Волновое уравнение для безразмерного векторного потенциала $\boldsymbol{a} = \dfrac{e\boldsymbol{\mathcal{A}}}{mc^2}$ волновых пакетов, распространяющихся вдоль оси z, имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial t^2} - \Delta_\perp \boldsymbol{a} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial z^2} = -\boldsymbol{j}_\perp \ , \tag{6.15}$$

где $\Delta_\perp = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$, $\boldsymbol{j}_\perp = \dfrac{\beta n \boldsymbol{a}}{\sqrt{1+p^2+|a|^2}}$ – поперечный ток, связанный с движением электронов; $\beta = \dfrac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}$; $\omega_{pl} = \sqrt{\dfrac{4\pi \mathcal{N} e^2}{m}}$, ω_o – несущая частота; p – импульс электрона, нормированный на mc; n – концентрация электронов, нормированная на $\mathcal{N}$, $\phi = \dfrac{e\Phi}{mc^2}$ – нормированный скалярный потенциал. Как отмечалось в предыдущим разделе 6.1.1, квази-одномерная гидродинамика может быть использована, если лазерные импульсы имеют поперечный размер гораздо шире, чем длина плазменной длины волны $\lambda_p = \dfrac{c}{\omega_{pl}}$. Таким образом, для параметров плазмы n и p, определяющих поперечный ток $\boldsymbol{j}_\perp$ для циркулярно поляризованных лазерных импульсов $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{x_0} + i\boldsymbol{y_0})a$, могут быть записаны следующими уравнениями:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{np}{\sqrt{1+p^2+|a^\Sigma|^2}}\right) = 0, \tag{6.16a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi - \sqrt{1+p^2+|a^\Sigma|^2}\right), \tag{6.16b}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \beta(n - n_o) \ . \tag{6.16c}$$

Соответствующее уравнение (6.15) будет иметь следующий вид

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \Delta_\perp a - \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = -\beta \frac{na}{\sqrt{1+p^2+|a|^2}} \ . \tag{6.17}$$

Уравнения (6.16) и (6.17) Гамильтоновы с действем $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \int\int \left[\frac{|\partial_t a|^2 - |\nabla a|^2}{2\beta} - n\sqrt{1+p^2+|a|^2} + \frac{|\partial_z \phi|^2}{2\beta} + (n-n_o)\phi - n\partial_t \varkappa\right] d\boldsymbol{r}dt \ ,$$

$$p = \partial_z \varkappa. \tag{6.18}$$

Уравнения для огибающих

Для встречно распространяющихся лазерных импульсов векторный потенциал можно записать в виде $a^\Sigma = a + b$, где мы явно разделили волны распространяющихся как в положительном направлении $a = \int_{k>0} a_k^\Sigma e^{ikz+\omega(k)t} dk$, так и в отрицательном направлении $b = \int_{k<0} a_k^\Sigma e^{ikz+\omega(k)t} dk$ оси z. В этом случае отклик плазмы будет иметь форму плавного (на масштабах лазерного импульса) профиля, перемещающегося вдоль импульсов, и волну биений, которая имеет сильную пространственную модуляцию [26]. Таким образом, мы должны представить отклик плазмы как сумму некоторого среднего отклика и членов, которые быстро изменяются в пространстве:

$$n \to n + f + f^\star, \quad p \to p + q + q^\star, \quad f, q \asymp ab^\star \ll 1 \ . \tag{6.19}$$

Здесь мы предположили, что интенсивность импульса a (интенсивности накачки) очень мала $a \lll 1$ и пренебрегли ее влиянием на усредненные параметры плазмы. Таким образом, уравнения для усредненных значений n и p будут похожи на уравнения (6.16):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{np}{\sqrt{1+p^2+|b|^2}}\right) = 0 \ , \tag{6.20a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi - \sqrt{1+p^2+|b|^2}\right) \ , \tag{6.20b}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \beta(n - n_o) \ . \tag{6.20c}$$

Самый простой способ для того, чтобы получить уравнения для быстро меняющихся величин – использование расширенного действия (6.18), где только «усредненные» слагаемые должны быть сохранены и оставлены

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \int\int d\boldsymbol{r}dt \Bigg[& \frac{|\partial_t b|^2 - |\nabla b|^2}{2\beta} + \frac{|\partial_t a|^2 - |\nabla a|^2}{2\beta} - n\sqrt{1+p^2+|b|^2} + \frac{|\partial_z \phi|^2}{2\beta} + \\ & + (n - n_o)\phi - n\partial_t \varkappa + \frac{|\partial_z \varphi|^2}{\beta} + (f^\star \varphi - f^\star \partial_t \varkappa + c.c.) - \frac{n(|a|^2 + 2|q|^2)}{2\sqrt{1+p^2+|b|^2}} - \\ & - \frac{(2pq + ab^\star)f^\star + c.c.}{2\sqrt{1+p^2+|b|^2}} + \frac{n|2pq + ab^\star|^2}{8(1+p^2+|b|^2)^{3/2}} \Bigg] \ ,\end{aligned} \tag{6.21}$$

где $q = \dfrac{\partial \varkappa}{\partial z}$. Удерживание только усредненной величины соответствует пренебрежению членами, пропорциональных не распространяющихся волновых мод. Тем не

[26] Для квази-монохроматических импульсов $a^\Sigma = ae^{i(t+z)} + be^{i(t-z)}$ профиль плазмы будет иметь форму $n \to n + fe^{2iz} + f^\star e^{-2iz}$

менее, сохранение членов только второго порядка малости приведет к пренебрежению всеми эффектами, связанными с обрушением плазменной волны. Отметим, что использование действия (6.21) сохраняет очень важные свойства полученных уравнений – они сохраняют гамильтоновость.

Варьируя действие (6.21) по f, q, φ, получаем уравнения для быстро изменяющихся величин

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{nq + pf}{\sqrt{1+p^2+|b|^2}} - np\frac{2pq + ab^\star}{4(1+p^2+|b|^2)^{3/2}}\right] = 0 \ , \tag{6.22a}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi - \frac{2pq + ab^\star}{2\sqrt{1+p^2+|b|^2}}\right] \ , \tag{6.22b}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \beta f \ . \tag{6.22c}$$

И уравнение (6.17) может быть разделено на два уравнения для волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси z:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = \beta\left[\frac{na + bf}{\sqrt{1+p^2+|b|^2}} - \frac{2npqb + na|b|^2}{2(1+p^2+|b|^2)^{3/2}}\right] - \Delta_\perp a \ , \tag{6.23a}$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = \beta\left[\frac{nb + f^\star a}{\sqrt{1+p^2+|b|^2}} - \frac{2npq^\star a}{2(1+p^2+|b|^2)^{3/2}}\right] - \Delta_\perp b -$$
$$-\beta b \cdot \left[\frac{3n|pq + ab^\star/2|^2}{(1+p^2+|b|^2)^{5/2}} + \frac{\mathcal{R}\mathrm{e}\left[(2pq + ab^\star)f^\star\right] + n|q|^2 + \frac{3}{4}n|a|^2}{(1+p^2+|b|^2)^{3/2}}\right] \ . \tag{6.23b}$$

Отметим, что мы должны удержать член $\dfrac{2npq^\star a}{2(1+p^2+|b|^2)^{3/2}}$ в уравнении для усиливаемого сигнала b, несмотря на его малость в нерелятивистском случае, потому что в релятивистском случае оно будет иметь тот же порядок величины, как и слагаемое $f^\star a$, ответственное за обычное трехволновое взаимодействие. При этом слагаемое на второй строке уравнения (6.23b) дает только нелинейную фазовую модуляцию, которая еще мала в нерелятивистском и релятивистском случаях. Так, зачастую эти слагаемые могут быть опущены.

Приближение однонаправленного распространения

Уравнения (6.23) довольно сложны для численного моделирования. Перепишем их в виде системы эволюционных уравнений для встречно распространяющихся лазерных импульсов с широким спектром, предполагая, что огибающие a, b меняются плавно по масштабу несущей частоты

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t}\right) a \ll a, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\right) b \ll b \ . \tag{6.24}$$

Обратите внимание, что противоположный знак производных может быть того же порядка, как и несущая частота, т.е.

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\right)a\sim a,\quad \left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial t}\right)b\sim b\ . \tag{6.25}$$

Далее перепишем левую часть уравнения (6.23a) для a в следующем виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)a=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)a=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}+2\frac{\partial}{\partial z}\right)a\approx$$
$$\approx 2\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial a}{\partial z}=2\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)a\ . \tag{6.26}$$

Подобную процедуру можно также сделать для уравнения (6.23b). Это предположение соответствует следующим преобразованиям под интегралом действия $\mathcal{S}$

$$\left|\frac{\partial a}{\partial t}\right|^2-\left|\frac{\partial a}{\partial z}\right|^2=\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial a^\star}{\partial t}+\left(\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial a^\star}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial a^\star}{\partial z}\right)-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial a^\star}{\partial z}\approx$$
$$\approx\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial a^\star}{\partial t}+\left(\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial a^\star}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial a^\star}{\partial z}\right)-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial a^\star}{\partial z}=\left(\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial a^\star}{\partial t}+c.c.\right)-2\left|\frac{\partial a}{\partial z}\right|^2\ . \tag{6.27}$$

Здесь мы, во-первых, добавили слагаемые в скобках, сумма которых равна нулю. Позже, используя предположение $\dfrac{\partial a}{\partial t}\approx\dfrac{\partial a}{\partial z}$, мы заменили временную производную $\dfrac{\partial}{\partial t}$ на производную по z $\dfrac{\partial}{\partial z}$. В результате мы получаем симметричную вещественную форму для подынтегральной функции в действии $\mathcal{S}$. Аналогичным образом можно получить выражение для b

$$\left|\frac{\partial b}{\partial t}\right|^2-\left|\frac{\partial b}{\partial z}\right|^2\approx-\left(\frac{\partial b}{\partial z}\frac{\partial b^\star}{\partial t}+c.c.\right)-2\left|\frac{\partial b}{\partial z}\right|^2\ . \tag{6.28}$$

Здесь следует отметить, что уравнение (6.26) может быть заметно усовершенствовано для численного моделирования, если мы будем использовать плазменный закон дисперсии $\omega^2=\beta+k^2$. Действительно, закон дисперсии для волнового пакета a в рамках уравнения (6.26) есть

$$2(k^2-\omega k)=-\beta n\quad\Leftrightarrow\quad\omega=k+\frac{\beta n}{2k}\ . \tag{6.29}$$

Данное выражение правильно описывает закон дисперсии плазмы при больших $k\gg\beta$. Тем не менее, есть особенность для малых $k\to 0$. Эта особенность будет приводить к ошибкам при численном моделировании. Для устранения данной особенности вернемся опять к уравнению (6.23a) и перепишим линейную часть оператора

в Фурье области (ω, k)

$$k^2 - \omega^2 = (k-\omega)(k+\omega) = (k-\omega)(\omega - \omega(k) + \omega(k) + k) \approx (k + \omega(k))(k-\omega) = \\ = (k + \sqrt{\beta + k^2})(k-\omega) \ , \quad (6.30)$$

где $\omega(k) = \sqrt{\beta + k^2}$ – закон дисперсии для постоянной плазмы. В результате получаем следующие закон дисперсии в волновом уравнении

$$\omega = k + \frac{\beta n}{k + \sqrt{\beta + k^2}} \ . \quad (6.31)$$

Как это хорошо видно, в выражении (6.31) отсутствует особенность при любом значении k. Кроме того, данное выражение в точности равно хорошо известным законам дисперсии в вакууме ($\omega = k$ для $n = 0$) и в плазме ($\omega = \sqrt{\beta + k^2}$) при постоянной плотности $n = 1$. К сожалению, выражение в соответствующих дифференциальных операторах в координатном пространстве выглядит довольно сложным, и оно не подходит для аналитических оценок.

В результате система уравнений (6.23a) может быть представлена в следующем виде

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial z} = \beta \hat{K}_a \left[\frac{na + bf}{\sqrt{1 + p^2 + |b|^2}} - \frac{npqb + na|b|^2/2}{(1 + p^2 + |b|^2)^{3/2}} - \frac{1}{\beta}\Delta_\perp a \right] \ , \quad (6.32a)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial z} = \beta \hat{K}_b \left[\frac{nb + af^\star}{\sqrt{1 + p^2 + |b|^2}} - \frac{npq^\star a}{(1 + p^2 + |b|^2)^{3/2}} - \frac{1}{\beta}\Delta_\perp b \right] \ . \quad (6.32b)$$

Здесь мы ввели операторы $\hat{K}_{a,b}$ в соответствии с (6.30)

$$\hat{K}_{a,b} = \frac{-i}{\sqrt{\beta + \hat{k}^2} \pm \hat{k}} \approx \pm \frac{1}{2} \int dz, \quad \hat{k} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z} \ . \quad (6.33)$$

Интегралы для средних величин

Уравнения (6.20) могут быть упрощены, предполагая, что лазерный импульс b распространяется с групповой скоростью, близкой к скорости света, то есть полагая $\frac{\partial}{\partial t} \approx -\frac{\partial}{\partial z}$ в уравнениях (6.20). Полученные уравнения имеют 2 интеграла:

$$n - \frac{np}{\sqrt{1 + p^2 + |b|^2}} = n_o, \quad \sqrt{1 + p^2 + |b|^2} - p = 1 + \phi \ . \quad (6.34)$$

Эти интегралы позволяют найти выражения для n и p с помощью одной скалярной функции $\Phi = 1 + \phi$:

$$\frac{n}{\sqrt{1 + p^2 + |b|^2}} = \frac{n_o}{\Phi}, \quad h \equiv \sqrt{1 + p^2 + |b|^2} = \frac{1 + |b|^2 + \Phi^2}{2\Phi}, \quad p = \frac{1 + |b|^2 - \Phi^2}{2\Phi} \ . \quad (6.35)$$

В свою очередь, функция Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{\beta n_o}{2}\left(\frac{1+|b|^2}{\Phi^2} - 1\right) . \tag{6.36}$$

В результате, правая часть уравнений (6.32) может быть записана в более или менее компактной форме.

В результате получаем базовую систему уравнений, описывающую процесс усиления широкополосных лазерных импульсов в плазме

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial z} = \beta\hat{K}_a\left[\frac{n_o a}{\Phi} + \frac{bf}{h} - \frac{n_o}{\Phi}\frac{bpq + a|b|^2/2}{h^2} - \frac{1}{\beta}\Delta_\perp a\right] , \tag{6.37a}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial z} = \beta\hat{K}_b\left[\frac{n_o b}{\Phi} + \frac{af^\star}{h} - \frac{n_o}{\Phi}\frac{apq^\star}{h^2} - \frac{1}{\beta}\Delta_\perp b\right] , \tag{6.37b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \hat{k}_p\left[\frac{n_o q}{\Phi} + \frac{fp}{h} - \frac{n_o p}{\Phi}\frac{pq + ab^\star/2}{2h^2}\right] = 0 , \tag{6.37c}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \beta\hat{k}_p^{-1}[f] - \hat{k}_p\left[\frac{pq + ab^\star/2}{h}\right] , \tag{6.37d}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{\beta n_o}{2}\left(\frac{1+|b|^2}{\Phi^2} - 1\right) , \tag{6.37e}$$

где $\hat{k}_p = i\hat{k} = \dfrac{\partial}{\partial z}$.

Условия применимости системы уравнений (6.37):

- волновые пучки в поперечном направлении должны значительно превышать длину плазменной волны, чтобы динамика электронов была преимущественно в продольном направлении;
- лазерные импульсы должны плавно меняться на масштабе длины волны, и размер пучка должен быть больше по сравнению с продольным масштабом поля (квазиоптический пучок), чтобы использовать безотражательное приближение;
- групповая скорость усиливаемого импульса должна быть близкой к скорости света, чтобы воспользоваться интегралами при получении уравнения на усредненный скалярный потенциал (6.36).

Нерелятивистское квазимонохроматическое приближение

Далее проведем сравнение системы уравнений (6.37) с классическими уравнениями для трехволнового взаимодействия. Во-первых, для квазимонохроматических

лазерных импульсов $a \to ae^{iz}, b \to be^{-iz}, f \to fe^{2iz}, q \to qe^{2iz}$ с несущим волновым числом, равным единице, можно заменить операторы $\hat{K}_{a,b}$ и $\hat{k}_p$ на

$$\hat{K}_{a,b} = \frac{-i}{\sqrt{\beta + (1 \pm \hat{k})^2} + 1 \pm \hat{k}} \approx \frac{1}{2i}, \quad \hat{k}_p = 2i + i\hat{k} \approx 2i \ . \tag{6.38}$$

Во-вторых, для нерелятивистских интенсивностей можно пренебречь $|b|^2$ и положить $h = \Phi = 1$. Если мы будем дополнительно рассматривать однородную среду $n_o = 1$, то система уравнение (6.37) примет следующий вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{i\beta}{2}\left[a + fb\right] - \frac{i}{2}\Delta_\perp a \ , \tag{6.39a}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{i\beta}{2}\left[b + f^\star a\right] - \frac{i}{2}\Delta_\perp b \ , \tag{6.39b}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \beta f = -2ab^\star \ . \tag{6.39c}$$

Уравнения (6.39) могут быть сведены к классическим уравнениям [126] пренебрегая дифракцией и введением новых переменных $\bar{a} = \sqrt[4]{\beta} a e^{i\beta t/2}$, $\bar{b} = \sqrt[4]{\beta} b e^{i\beta t/2 - i\sqrt{\beta}(t-z)}$, $\bar{f} = -i\beta f e^{i\sqrt{\beta}t}/2$

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{a}}{\partial z} = -\bar{b}\bar{f} \ , \tag{6.40a}$$

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} = \bar{a}\bar{f}^\star \ , \tag{6.40b}$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \bar{a}\bar{b}^\star \ . \tag{6.40c}$$

Далее получим в рамках одномерной модели ($\Delta_\perp \equiv 0$) оценки эффективности усиления лазерного импульса b в процессе обратного рамановского усиления. На линейной стадии, когда истощение накачки a еще несущественно, а амплитуда усиливаемого волнового пакета b мала по сравнению с амплитудой накачки ($|a| \gg |b|$), решение системы уравнений (6.40) может быть получено преобразованием Лапласа уравнений по координате η:

$$\bar{b}(z, \eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \int G(\eta - \eta', z)\bar{b}(\eta', 0)d\eta' \ . \tag{6.41}$$

Для $\eta \gg 1$ имеем

$$G = \frac{\exp(2\sqrt{\eta})}{2\sqrt{\pi\sqrt{\eta}}} \ , \quad \eta = \frac{2a_o^2\omega\omega_{pl}(t+z)(-z)}{2c} \tag{6.42}$$

Следовательно, максимум усиления на линейной стадии G реализуется при $z - ct/2$ и соответствует инкременту неустойчивости $\gamma = a_o\sqrt{\frac{\omega\omega_p}{2}}$. То есть в этой точке импульс

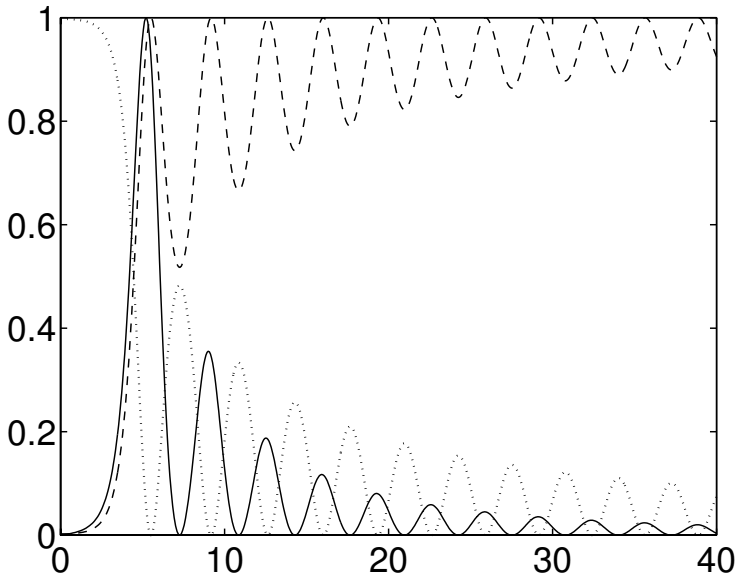


Рис. 6.1: Нормированные профили усиливаемого импульса $\bar{b}$ (сплошная линия), плазменной волны $\bar{f}$ (пунктирная линия) и накачки $\bar{a}$ (точки) в зависимости от времени.

растет по экспоненциальному закону $\exp(\gamma t)$ с инкрементом, в точности совпадающим по величине с тем, что может быть получен в простейшей пространственно однородной задаче. Существенно отметить факт того, что на линейной стадии усиливаемый импульс расширяется в пространстве.

Дальнейшее усиление затравочного импульса b с переходом в нелинейную стадию, когда становится существенным процесс истощения накачки a, можно описать с помощью уравнения синус-Гордона (Sine-Gordon):

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t \partial \zeta} = a_o^2 \sin \mathcal{U} \ , \tag{6.43}$$

где $\zeta = t + z$. Для получения данного уравнения необходимо сделать замены:

$$\bar{a} = a_o \cos\left(\frac{\mathcal{U}}{2}\right) \ , \tag{6.44a}$$

$$\bar{f} = \sqrt{2} a_o \sin\left(\frac{\mathcal{U}}{2}\right) \ , \tag{6.44b}$$

$$\bar{b} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \zeta} \ . \tag{6.44c}$$

Уравнение (6.43) имеет автомодельное решение $\mathcal{U}(t, \zeta) = \mathcal{F}(\xi)$, которое подчиняется следующему уравнению

$$\xi \frac{d^2 \mathcal{F}}{d\xi^2} + \frac{d\mathcal{F}}{d\xi} = \sin \mathcal{F} \ , \quad \xi = 2\sqrt{t\zeta} \ . \tag{6.45}$$

Причем это решение слабо зависит от начальных условий. Соответствующее решение приведено на рисунке 6.1. Решение имеет осциллирующий вид. Амплитуда первого импульса оказывается пропорциональна длине усиления, а его длительность – обратно пропорциональна его амплитуде. Таким образом, на нелинейной стадии усиливаемый импульс b не только усиливается, но и сжимается по длительности.

6.2 Экспериментальные результаты по усилению импульса при обратном рамановском рассеянии

Данный подход, экспериментальная реализация которого дана в этом разделе, базируется на параметрическом процессе усиления фемтосекундных лазерных импульсов при обратном рамановском рассеянии в плазме [126]. Основное преимущество данного подхода заключается в том, что в качестве нелинейной среды используется плазма, не имеющая ограничений по лучевой стойкости. Показано [126], что на линейной стадии обратного рамановского рассеяния наблюдается сильное увеличение длительности короткого усиливаемого импульса (см. раздел 6.1.2) и линейная стадия, таким образом, не подходит для усиления коротких лазерных импульсов. Поэтому для усиления фемтосекундных импульсов в процессе обратного рамановского рассеяния необходимо достижение нелинейной стадии, при которой происходит компрессия усиленного волнового пакета (см. раздел 6.1.2) фактически до длительности затравочного фемтосекундного импульса и которая, по нашим расчетам, должна обладать высокой эффективностью использования накачки. Первые эксперименты [145–147] и теоретические расчеты [61,128] показали, что ключевыми моментами для ее реализации являются протяженность и пространственная однородность плазмы, наличие и величина частотной модуляции в импульсе накачки, а также эффект опрокидывания плазменной волны при низких концентрациях плазмы [127].

Постановка задачи

В настоящем разделе будут продемонстрированы результаты экспериментального исследования усиления фемтосекундного лазерного излучения при обратном рамановском рассеянии в плазме, создаваемой в газонаполненных диэлектрических волноводах (капиллярах), и результаты теоретических расчетов. Применение капилляров для создания плазмы и каналирования взаимодействующих волн позволяет зна-

чительно увеличить длину взаимодействия по сравнению со случаем фокусировки излучения в свободном пространстве, когда дифракция ограничивает область взаимодействия дифракционной длиной. Другой принципиальной особенностью нашей схемы является применение в качестве накачки и усиливаемого сигнала излучения одной и той же тераваттной фемтосекундной лазерной системы. При этом спектры импульса накачки и усиливаемого импульса идентичны друг другу, и выполнение условий синхронизма для возбуждения плазменных колебаний принципиально возможно только при низкой концентрации плазмы, чтобы частота плазменных колебаний была мала или сравнима с шириной спектра лазерного излучения.

Эксперимент

В эксперименте использовался фемтосекундный тераваттный лазерный комплекс на кристаллах Ti:Sa [211], позволяющий получать лазерные импульсы с энергией до 100 мДж на длине волны $\lambda = 0.8$ мкм при длительности импульса 80 фс и частоте повторения 10 Гц. Схема эксперимента приведена на рис. 6.2.

Частотно-модулированный лазерный импульс длительностью 160 пс с выхода последнего каскада усиления лазерной системы разделялся на два импульса, один из которых использовался в качестве импульса накачки (сплошная линия на рис. 6.2). Максимальная энергия импульса накачки в настоящем эксперименте составляла 18 мДж. Вторая часть усиленного излучения лазерной системы после временного сжатия в компрессоре до длительности 80 фс использовалась для создания плазмы (штрих-пунктирная линия) и формирования усиливаемого лазерного импульса (пунктирная линия). Ионизирующий и усиливаемый импульсы имели ортогональную поляризацию и вводились в капилляр со стороны, противоположной импульсу накачки. Энергия ионизирующего импульса составляла 1 мДж, а максимальная энергия усиливаемого импульса – 1 мкДж. Временное совмещение усиливаемого импульса и импульса накачки в капилляре достигалось с помощью линий задержки и контролировалось по генерации неколлинеарной второй гармоники в кристалле $LiIO_3$. Энергии импульсов накачки и усиливаемого импульса регулировались с помощью поляризационных ослабителей. Энергии лазерных импульсов на входе и на выходе из капилляра контролировались с помощью калиброванных фотодиодов $FD1 - FD6$. В эксперименте использовался стеклянный капилляр с внутренним диаметром 30 мкм и длиной $L = 1.5$ см, размещаемый на 5-координатной подвижке в вакуумной камере.

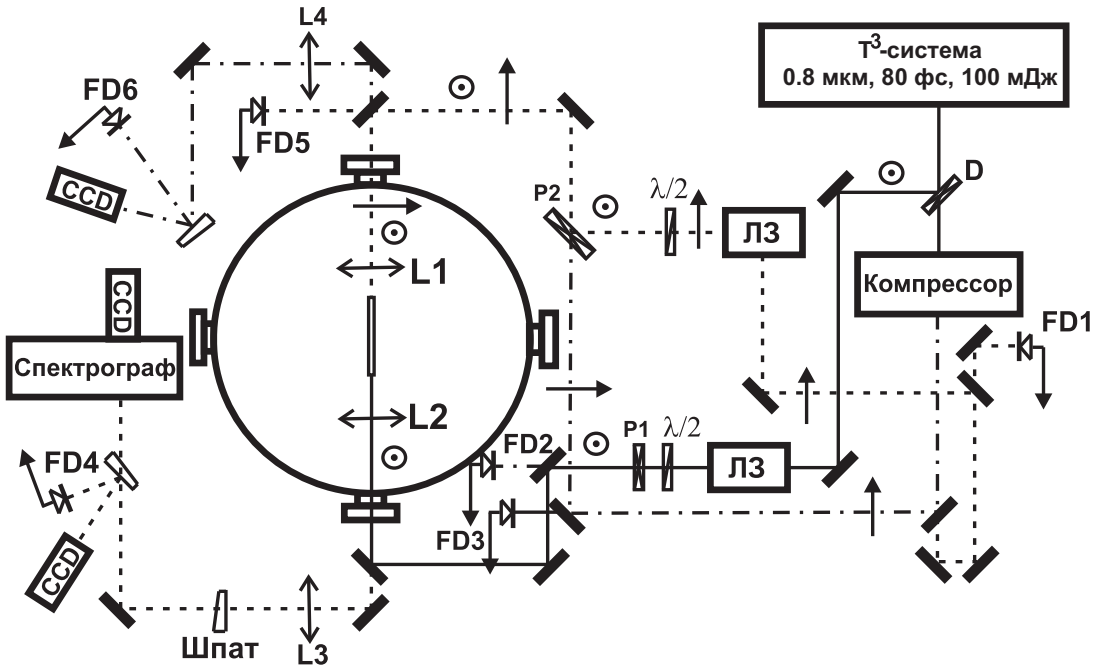


Рис. 6.2: Схема эксперимента. Сплошная линия – канал накачки, пунктир – канал усиливаемого импульса, штрих-пунктир – канал ионизирующего импульса, ЛЗ – линии задержки, $P1, 2$ – поляризаторы, $\lambda/2$ – полуволновые пластинки, D – делитель. Стрелкой отмечена горизонтальная поляризация излучения, кружком с точкой – вертикальная.

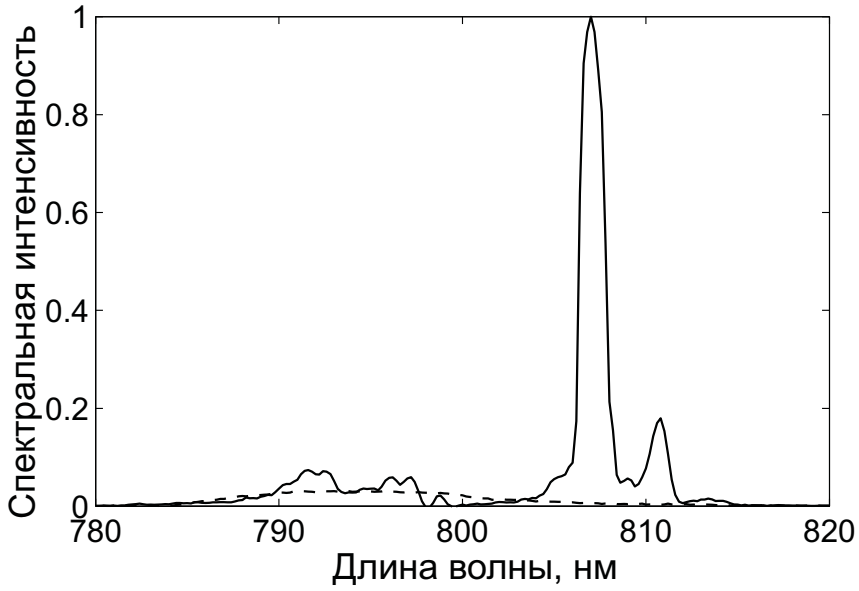


Рис. 6.3: Спектральная интенсивность усиленного сигнала. Пунктиром приведен спектр затравочного импульса.

Линзы $L1$ и $L2$ подбирались таким образом, чтобы обеспечить оптимальное согласование входных пучков с фундаментальной модой капилляра EH_{11}. Максимальная интенсивность накачки и ионизирующего импульса составляла 5×10^{13}Вт/см^2 и 5×10^{15}Вт/см^2 соответственно. Линзы $L3$ и $L4$ переносили изображения выходных торцов капилляра на спектрограф с установленной на его выходе CCD камерой для регистрации спектра усиленного импульса и на CCD камеры для контроля пространственного распределения в пучках всех трех сигналов. Для поляризационной развязки ионизирующего и усиливаемого импульсов использовался клин из исландского шпата.

Ионизирующий лазерный импульс был задержан относительно усиливаемого импульса и импульса накачки на 3 нс, чтобы обеспечить выравнивание концентрации плазмы поперек капилляра. В эксперименте использовался газ Ar, давление которого менялось в диапазоне от 0.3 Торр до 30 Торр. Измеренная эффективность прохождения лазерных импульсов через капилляр составила 25%. Эта величина определяется эффективностью возбуждения моды капилляра, которая, по расчетам, составляет 90%, и потерями моды при распространении по капилляру (70%). Эффективность прохождения излучения через капилляр была одинаковой для вакуумного капилляра и в случае образования и наличия в нем плазмы, что согласуется с результатами работ [14,210], [62] и свидетельствует об одномодовом режиме распространения излучения в капилляре. Результаты, полученные в эксперименте, приведены ниже. При достаточно большой энергии в импульсе накачки в спектре усиливаемого импульса появлялись пики (рис. 6.3). Ширина этих пиков была значительно меньше исходной ширины спектра, а увеличение спектральной интенсивности при максимальном усилении превышало 10^3. В некотрых импульсах спектр усиленного сигнала имел более сложную структуру и состоял из нескольких пиков – одного с максимальной интенсивностью и нескольких меньшей величины, отстроенных от максимума на величину порядка плазменной частоты. На рис. 6.4 представлена зависимость коэффициента усиления по энергии (отношение энергии усиливаемого импульса на выходе капилляра к энергии на входе в капилляр) как функция энергии в импульсе накачки, полученная из обработки спектров усиливаемого импульса. Данные представлены для давления Ar 0.3 Торр и энергии усиливаемого импульса на входе в капилляр ≈ 0.1 мкДж, что соответствует интенсивности $\approx 10^{12}$ Вт/см^2. Результаты представлены для двух значений задержек между усиливаемым импульсом и импульсом накачки, близких к оптимальным. Из рисунка видно, что заметное в экспе-

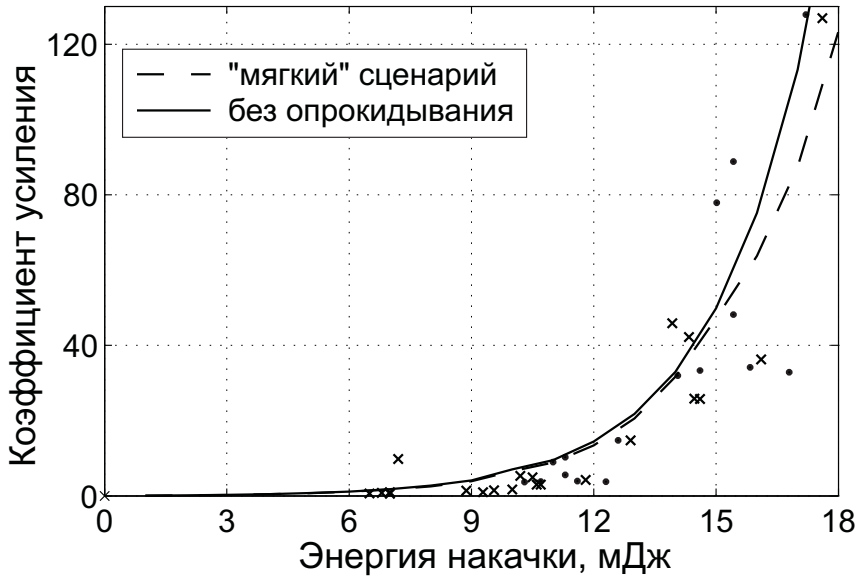


Рис. 6.4: Зависимость коэффициента усиления от энергии накачки. Крестиками и точками представлены экспериментальные значения при двух задержках усиливаемого импульса относительно накачки, линии – теоретический расчет.

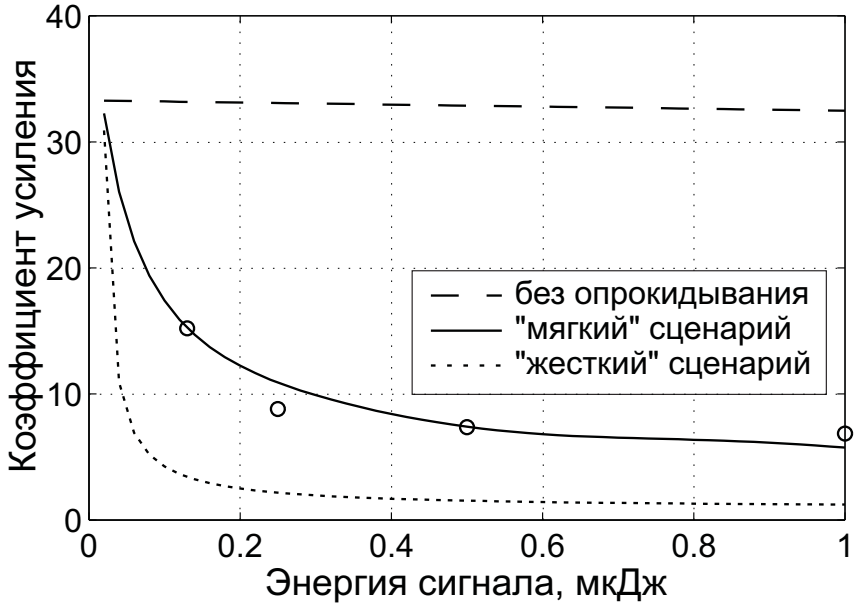


Рис. 6.5: Зависимость коэффициента усиления от входной энергии усиливаемого импульса. Кружки – экспериментальные значения, линии – теоретический расчет при различных моделях опрокидывания плазменной волны.

рименте усиление регистрируется при энергии в импульсе накачки > 6 мДж и быстро нарастает, достигая максимального значения 130 при максимальной накачке. Усиление импульса наблюдалось в диапазоне давлений 0.3-1 Торр. При более высоких давлениях эффект усиления не наблюдался. Для понимания важности различных процессов, играющих роль при обратном рамановском усилении в плазме, представляет интерес зависимость коэффициента усиления от входной энергии усиливаемого импульса (рис. 6.5). Эта зависимость была получена при энергии импульса накачки, близкой к максимальной, но без оптимизации временной задержки между усиливаемым импульсом и импульсом накачки. Падающий характер полученной зависимости свидетельствует о важности нелинейных процессов в наших экспериментальных условиях (на линейной стадии усиления коэффициент усиления не должен зависеть от энергии усиливаемого импульса).

Сравнение результатов экспермента с теорией

Согласно теории, на линейной стадии обратного рамановского усиления в однородной плазме при монохроматических спектрах усиливаемого импульса и импульса накачки должен происходить экспоненциальный рост усиливаемого сигнала с пространственным инкрементом (по полю, в см^{-1}) $\gamma = 2 \times 10^{-20} \lambda \sqrt{I} \times \sqrt{\omega_0 \omega_p}$ [126]. Здесь λ – длина волны накачки в мкм, I – интенсивность накачки в $\text{Вт}/\text{см}^2$, ω_0 и ω_p – центральная частота в спектре накачки и плазменная частота соответственно. При максимальной интенсивности накачки 5×10^{13} $\text{Вт}/\text{см}^2$ и характерной концентрации плазмы $1.4 - 4 \times 10^{16}$ см^{-3} это дает на длине капилляра усиление в $\exp(\gamma L)$ раз, где $\gamma L = 20$, что должно было бы приводить к быстрому росту усиливаемого сигнала и выходу на нелинейную стадию усиления.

Однако условия эксперимента существенно отличались от приведенной выше идеализированной схемы. Большое влияние на усиление оказывает частотная модуляция импульса накачки, который использовался в эксперименте. Зависимость разности мгновенной частоты импульса накачки и центральной частоты усиливаемого импульса изображена на рис. 6.6 сплошной линией. Зависимость построена для случая, когда эти импульсы встречались в центре капилляра. Изменение задержки между импульсом накачки и усиливаемым импульсом приводит к смещению линии вверх или вниз параллельно самой себе. Затухание лазерного излучения при распространении по капилляру приводило к тому, что плазма, создаваемая ионизирую-

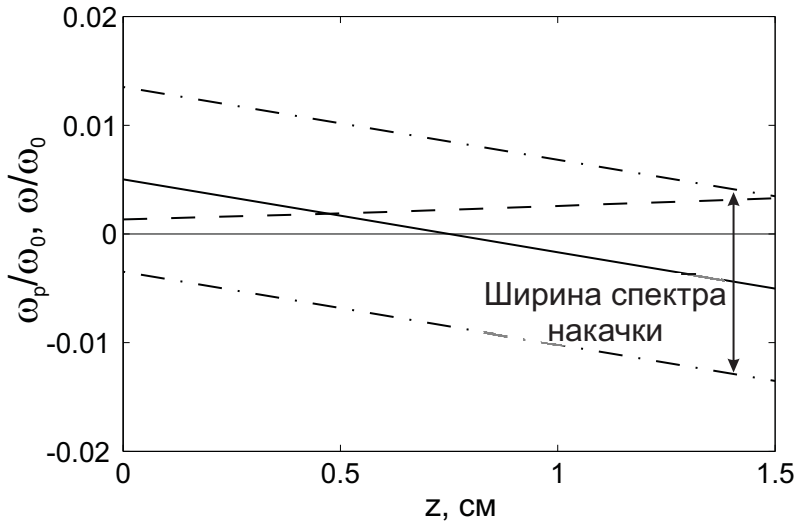


Рис. 6.6: Распределение плазменной частоты (пунктир) и разности мгновенной частоты накачки и центральной частоты усиливаемого сигнала (сплошная линия) вдоль капилляра. Плазменная частота рассчитана при концентрации плазмы 4×10^{16}см$^{-3}$, ширина спектра накачки указана по половине максимума спектральной интенсивности.

щим импульсом, была неоднородна вдоль оси капилляра. Для учета этого эффекта были проведены численные расчеты уравнений баланса для концентраций ионов с зарядами разной кратности аналогично [14, 210]. Распределение плазменной частоты вдоль оси капилляра, полученные из результатов этого расчета, приведено на рис. 6.6 пунктиром. Разница между этой линией и сплошной линией определяет расстройку резонанса трехволнового взаимодействия. Параметр $q = \dfrac{1}{\gamma^2 c}\dfrac{d(\omega - \omega_p)}{dz} \approx 1$, характеризующий влияние частотной модуляции на процесс усиления, оказывается достаточно большим, что приводит к значительному снижению (на порядки) коэффициента усиления.

Принципиальной особенностью нашего эксперимента является, как уже отмечалось, то, что спектры усиливаемого импульса и импульса накачки совпадают. Поэтому для выполнения условий синхронизма плазменная частота должна находиться в пределах ширины спектра этих импульсов (см. рис. 6.6). Отношение ширины спектра накачки к плазменной частоте в диапазоне давлений газа 0.3-1 Торр, при которых экспериментально было получено усиление, составило 3-4.

Наиболее вероятным объяснением падающей зависимости коэффициента усиле-

ния от входной энергии усиливаемого импульса, полученной в эксперименте, нам представляется наличие нелинейного эффекта опрокидывания плазменной волны. Как показывают оценки, потенциал плазменной волны уже на стадии возбуждения затравочным импульсом не намного меньше критической амплитуды [50] $f_{wb} = \frac{mc^2}{2e}\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$, где c – скорость света, при которой наступает опрокидывание, и становится порядка критической в процессе усиления. Поэтому, в силу указанных выше особенностей нашего эксперимента по сравнению с обычными условиями наблюдения обратного рамановского рассеяния, теоретическая постановка задачи требует внесения ряда изменений в хорошо известную теоретическую модель [128]. В первую очередь, это вопрос о влиянии опрокидывания плазменной волны на процесс рамановского усиления и его описания в рамках гидродинамического приближения. Другим существенным моментом является большая в сравнении с плазменной частотой ширина спектра взаимодействующих волн, что делает необходимым для плазменной волны рассмотрение в рамках полного (не укороченного) уравнения.

$$\partial_t a + \partial_z a - i\nabla_\perp^2 a = ibf \tag{6.46}$$

$$\partial_t b - \partial_z b - i\nabla_\perp^2 b = iaf^\star \tag{6.47}$$

$$\partial_{tt} f + \kappa\delta n f = \varpi_p \hat{B}(f)\left[ab^\star + ba^\star\right] \ . \tag{6.48}$$

Здесь a и b – нормированные на mc^2/e комплексные амплитуды вектор-потенциалов волны накачки и усиливаемого импульса соответственно; f – амплитуда потенциала плазменной волны, нормированная на $\frac{mc^2}{2e}\sqrt{\frac{\omega_p}{2\omega_o}}$. Время t нормировано на $t_o = \sqrt{\frac{2}{\omega_o\omega_p}}$, продольная координата z нормирована на ct_o, $\varpi_p = \omega_p t_o$ – нормированная плазменная частота, $\hat{B}(f)$ – оператор опрокидывания.

Наиболее сложный вопрос при гидродинамическом описании процесса обратного рамановского рассеяния – вид оператора опрокидывания $\hat{B}(f)$. Это обусловлено тем, что опрокидывание плазменной волны представляет собой сугубо кинетический процесс и не может быть детально описано в рамках гидродинамического приближения. Тем не менее, удается качественно учесть влияние опрокидывания на процесс рамановского усиления введением оператора опрокидывания плазменной волны $\hat{B}(f)$ из следующих соображений. При малых амплитудах плазменной волны $f < f_{wb}$ влияние опрокидывания ничтожно, т.е. $\hat{B}(f < f_{wb})[R] \approx R$. С другой стороны, этот оператор должен препятствовать росту плазменной волны выше критического значения f_{wb},

т.е. $\mathrm{Re}\,\hat{B}(f \geq f_{wb})[R] \leq 0$. Также представляется разумным, что опрокидывание плазменной волны «портит» плазму так, что на временах обратного рамановского рассеянии (порядка нескольких пикосекунд) плазменная волна не может быть возбуждена вновь, если опрокидывание уже происходило в этой точке ранее.

Можно предложить два крайних сценария поведения плазменной волны после опрокидывания. В «мягком» сценарии оператор $\hat{B}(f)$ лишь ограничивает рост плазменной волны, не уничтожая уже созданную плазменную волну

$$\hat{B}(f)[ab^\star + ba^\star] = \begin{cases} ab^\star + ba^\star\ , & |f| < f_{wb} \\ 0\ , & |f| > f_{wb} \end{cases} . \tag{6.49}$$

Это соответствует модификации только фоновой плазмы, но не существующей плазменной волны. В результате усиление импульса может продолжаться и на некотором удалении от фронта опрокидывания. В «жестком» сценарии опрокидывание полностью уничтожает существующую плазменную волну и запрещает ее возбуждение в этой точке после момента опрокидывания t_{wb}

$$\hat{B}(f)[ab^\star + ba^\star] = \begin{cases} ab^\star + ba^\star\ , & |f| < f_{wb} \\ \delta''(t - t_{wb})\ , & |f| > f_{wb} \end{cases} . \tag{6.50}$$

При таком сценарии усиление импульса возможно только на узком переднем фронте до точки опрокидывания плазменной волны. Как следствие, достигаемые энергии в этом случае значительно меньше (рис. 6.5). Численные расчеты, приведенные в настоящей работе, были выполнены для «мягкого» сценария, представляющегося нам наиболее разумным в силу наиболее близкого соответствия проведенных на его основе расчетов с экспериментом. В пользу «мягкого» сценария свидетельствуют также ряд косвенных признаков из результатов PIC расчетов [50]. Детальное обсуждение возможных сценариев и сопоставление получаемых в их рамках результатов мы адресуем нашей последующей публикации. Здесь же отметим хорошее количественное согласие результатов численных расчетов,приведенных на рис. 6.4, 6.5 и выполненных в рамках «мягкого» сценария опрокидывания, с результатами эксперимента. Пунктирной линией на рис. 6.5 представлена расчетная зависимость коэффициента усиления от энергии затравочного импульса без учета эффекта опрокидывания плазменной волны [$\hat{B}(f) = 1$], сплошной – с учетом опрокидывания в «мягком» режиме, точками – с учетом опрокидывания в «жестком» режиме.

Подводя итоги, отметим, что полученные величины коэффициента усиления лазерных импульсов при обратном рамановском рассеянии в плазме являются рекордными по сравнению с опубликованными до настоящего времени величинами. При подготовке работы к печати авторам стало известно об усилении ≈ 400, достигнутом группой, получившей рекордный до настоящего времени коэффициент усиления 95 [144]. Основными факторами, ограничившими усиление в нашем эксперименте и не позволившими полностью использовать волноводные преимущества капилляра и выйти в нелинейный режим усиления с большим коэффициентом преобразования энергии накачки, явились большая величина частотной модуляции накачки и, согласно нашим теоретическим представлениям и расчетам, опрокидывание плазменной волны. Негативное влияние этих факторов может быть существенно уменьшено за счет частичной временной компрессии импульса накачки и введения исходно небольшой расстройки между несущими частотами затравочного импульса и накачки, которая позволит повысить концентрацию плазмы и, соответственно, повысить порог опрокидывания плазменной волны.

Следует отметить, что сама по себе идея использования рамановских усилителей в плазме для получения фемтосекундных лазерных импульсов сверхбольшой интенсивности является весьма привлекательной и в настоящих экспериментах продемонстрирована возможность ее достижения. Но ее практическая реализация, как обычно, сопряжена с существенными трудностями, преодоление которых является типичным на пути от идеи к ее воплощению.

6.3 Пространственно-временная неустойчивость лазерного импульса в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны

Метод компрессии волновых пакетов, связанный с обратным рамановским рассеянием в плазме [126], представляет один из наиболее перспективных способов получения интенсивных ультракоротких волновых пакетов с длительностью сопоставимой с периодом плазменной волны. Однако рассматриваемый механизм усиления и укорочения импульса является чувствительным к неоднородности среды (как регулярной, так и случайно неоднородной) [128, 185]. Как показали теоретические и экспериментальные исследования, имеется ряд причин ограничивающих эффектив-

ность усиления сигнала в процессе обратного рамановского рассеяния. Среди них в первую очередь надо отметить дополнительную ионизацию плазмы, имеющую место по мере роста амплитуды сигнала, и самовоздействие усиливаемого сигнала на релятивистской нелинейности, которые приводят к нарушению условия трехволнового резонанса. Кроме того, малая концентрация плазмы приводит к опрокидыванию плазменной волны, что также ограничивает длину усиления.

Во второй части данной главы рассмотрим механизм самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов петаваттного уровня мощности в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны. Данный метод, в отличие от предыдущего метода, будет слабо чувствительным к неоднородностям концентрации плазмы, поскольку используется вырожденное четырехволновое взаимодействие. При больших энергиях в лазерном импульсе необходимо работать с широкоапертурными волновыми пучками. В связи с этим возникает важная задача исследования особенностей развития филаментационной неустойчивости в процессе нестационарной самофокусировки, когда длительность лазерного импульса менее периода кильватерной волны.

Самофокусировка волновых пучков относится к числу наиболее важных нелинейных процессов. Превышение мощности электромагнитного излучения над критической мощностью $\mathcal{P}_{cr}$ приводит к заметному усилению взаимодействия поля с веществом и структурным разрушениям [267]. Критическая мощность стационарной самофокусировки пучков электромагнитных волн в плазме, связанная с релятивистской зависимостью массы электронов от их колебательной энергии, была определена в работах [118, 131]. Соответствующее значение критической мощности было подтверждено при экспериментальном исследовании квазистационарной самофокусировки релятивистски сильных лазерных импульсов в плазме [197]. Фокусировка пучка до размеров, определяемых эффектами насыщения релятивистской нелинейности, и последующий захват мощности порядка критической в режиме самоканалирования наблюдался в [32, 33, 74]. Численное моделирование динамики волновых пучков с мощностью, заметно превышающей критическую, показало развитие самофокусировочной неустойчивости, хорошо известной в случае керровской нелинейности [267], и разбиение широкого волнового пучка на набор пучков с мощностью порядка критической [48].

Развитие лазерной техники привело к созданию компактных источников сверхкоротких фемтосекундных релятивистски сильных импульсов, удобных для практических приложений (ускорение частиц, преобразование спектра излучения и др.).

Для таких импульсов принципиальную роль играет конкуренция между электрострикционной и релятивистской нелинейностями. При этом происходит возбуждение плазменной волны и ослабление суммарного нелинейного отклика вблизи переднего фронта импульса, что существенно изменяет характер самовоздействие излучения. Самофокусировка проявляется лишь в задней части импульса, а передняя часть распространяется как в линейной среде и дифракционным образом расплывается [39, 175, 204, 206]. Исследование особенностей развития самофокусировочной неустойчивости при гидродинамическом описании нестационарного нелинейного отклика плазмы рассматривалось в [8]. Было показано, что эта неустойчивость в поле плоской квазимонохроматической волны, в отличие от соответствующего процесса в среде с кубичной нелинейностью, не имеет ярко выраженного поперечного масштаба, для которого инкремент филаментационной неустойчивости максимален. Такая ситуация является типичной для сред с инерцией нелинейного отклика [10, 121, 205, 221, 226, 233, 259, 266]. Численное моделирование методом частиц в ячейках динамики самовоздействия релятивистски сильного лазерного импульса в плазме показывает на начальной стадии образование филамент, которые потом сливаются [207].

В данном разделе представлены результаты теоретического исследования нелинейной стадии развития пространственно-временной неустойчивости расслоения лазерного излучения в плазме. Описание динамики самовоздействия релятивистски сильного импульса основано на волновом уравнении для поля в среде с инерцией нелинейного отклика, связанного с возбуждением кильватерной плазменной волны.

6.3.1 Линейная стадия филаментационной неустойчивости

Для аналитического исследования линейной стадии развития филаментационной неустойчивости, когда длительность лазерного импульса менее периода кильватерной плазменной волны, обратимся к следующей упрощенной системе уравнений [9] в безразмерных переменных

$$2i\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} + \Delta_\perp \mathcal{B} + \frac{1}{4}|\mathcal{B}|^2\mathcal{B} - \mathcal{N}\mathcal{B} = 0 \tag{6.51a}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \tau^2} + \mathcal{N} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \Delta_\perp\right)|\mathcal{B}|^2 \,, \tag{6.51b}$$

которая описывет эволюцию квазимонохроматического волнового пакета в слабо нелинейном режиме ($|\mathcal{B}| < 1$) в случае, когда плазменная волна может возбуждаться

как в продольном, так и в поперечном направлении. Здесь $\mathcal{N} = \dfrac{\delta\mathcal{N}}{\mathcal{N}_o}$ – возмущение концентрации электронов. В уравнении (6.51a) мы пренебрегли слагаемым $\dfrac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\dfrac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial\tau^2}$, ответственного за дисперсионные эффекты, где ω_o – характерная несущая частота. Отметим, что уравнение (6.51b) описывает возможность возбуждаться кильватерной плазменной волны как в продольном, так и в поперечном направлении в отличие от уравнения (6.11b).

Третье слагаемое в уравнении (6.51a) описывает релятивистскую нелинейность, а четвертое слагаемое ответственно за пондеромоторные эффекты. Первое и второе слагаемые в уравнение на возмущение концентрации электронов (6.51b) описывают продольную и поперечную компоненты пондеромоторной силы, соответственно.

Далее определим нелинейный показатель преломления как $\mathcal{R} = \mathcal{N} - \dfrac{|\mathcal{B}|^2}{4}$ и перепишем базовую систему уравнений в следующем виде [13]

$$2i\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} + \Delta_\perp\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{R} \tag{6.52a}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial\tau^2} + \mathcal{R} = \frac{1}{4}\left(\Delta_\perp - 1\right)|\mathcal{B}|^2 \ . \tag{6.52b}$$

Исследование особенности развития самофокусировочной неустойчивости в рамках данной системы уравнений рассматривалось впервые в работе [8]. Далее кратко изложим основные результаты данной работы. Обратимся теперь к изучению неустойчивости, которая может развиться на фоне одномерного (1D) лазерного импульса. Величины $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{R}_0$, описывающие это основное состояние, удовлетворяют следующим уравнениям

$$2i\frac{\partial\mathcal{B}_0}{\partial z} = \mathcal{B}_0\mathcal{R}_0 \ , \tag{6.53a}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{R}_0}{\partial\tau^2} + \mathcal{R}_0 = -\frac{1}{4}|\mathcal{B}_0|^2 \ . \tag{6.53b}$$

Эта система уравнений имеет следующие решение

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}(\tau)\exp\left[-i\frac{z}{2}\mathcal{R}_0(\tau)\right] \ , \tag{6.54a}$$

$$\mathcal{R}_0(\tau) = -\int_\infty^\tau \sin(\tau-\tau')\left[\frac{\mathcal{A}^2(\tau)}{4}\right]d\tau' \ , \tag{6.54b}$$

где $\mathcal{A}(\tau)$ – временное распределение волнового пакета. Величины $\mathcal{A}(\tau)$ и $\mathcal{R}_0$ равны нулю впереди волнового пакета (при $\tau \to \infty$). Примечательно, что в одномерном случае нелинейный показатель преломления модулирует только фазу волнового пакета, но не влияет на амплитудное распределение (6.54a).

Далее исследуем устойчивость решения (6.54) относительно малых поперечных возмущений $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{R}_1$ $\left[|\mathcal{B}_1| \ll \mathcal{A}(\tau),\, \mathcal{R}_1 \ll \mathcal{R}_0\right]$

$$\mathcal{B} = [\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}_1] \exp\left[-i\frac{z}{2}\mathcal{R}_0\right] \ , \tag{6.55a}$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 \ . \tag{6.55b}$$

Подставляя выражения (6.55a), (6.55b) в систему уравнений (6.52), получаем линейную систему уравнений для возмущений

$$2i\frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathcal{B}_1}{\partial x^2} = \mathcal{A}(\tau)\mathcal{R}_1 \ , \tag{6.56a}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{R}_1}{\partial \tau^2} + \mathcal{R}_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1\right)\mathcal{A}(\tau)\left[\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_1^\star\right] \ . \tag{6.56b}$$

Для простоты мы рассмотрели (2D+1) задачу, так как исследуется линейная стадия устойчивости решения (6.54) относительно поперечных возмущений, которая не зависит от размерности задачи. Далее запишем систему уравнений (6.56) для возмущения интенсивности поля $\delta I = \mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_1^\star)$ и рассмотрим возмущения вида $\mathcal{B}_1 \propto \exp(iqx)$

$$\frac{\partial^2 \delta I}{dz^2} + \frac{q^4}{4}\delta I = -\frac{\mathcal{A}(\tau)}{2}q^2\mathcal{R}_1 \ , \tag{6.57a}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{R}_1}{\partial \tau^2} + \mathcal{R}_1 = -\frac{1}{4}(q^2+1)\delta I \ . \tag{6.57b}$$

Ради аналитической простоты рассмотрим случай полубесконечного прямоугольного лазерного импульса $\mathcal{A} = a_o = const$ в области $-\infty < \tau < 0$ и равный нулю $\mathcal{A} = 0$ в противном случае. Мы предположим, что показатель преломления невозмущен на переднем фронте $\left[\mathcal{R}_1(\tau = 0) = 0 \text{ и } \left.\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0\right]$ и применим преобразование Лапласа по переменной τ в системе уравнений (6.57). В результате получаем уравнение для образа интенсивности возмущений $\delta I(z, p, q)$

$$\frac{\partial^2 \delta I}{dz^2} + \frac{q^4}{4}\left[1 - \frac{\alpha^2}{1+p^2}\right]\delta I = 0 \ , \tag{6.58}$$

где $\alpha^2 = \dfrac{a_o^2(1+q^2)}{2q^2}$. Первое слагаемое в квадратных скобках уравнения (6.58) ответственно за дифракцию. Второе слагаемое – ответственно за нелинейные эффекты и зависит от интенсивности в лазерном импульсе.

Динамика в рассматриваемой системе определяется конкуренцией релятивистской нелинейностью (фокусирующая) и стрикционной нелинейностью (дефокусирующей) [см. формулу (6.51)]. Вначале рассмотрим две предельные ситуации. При $p = 0$

отсутствует стрикционная нелинейность [27], и в этом случае возмущения интенсивности $\delta I \propto \exp(\gamma z)$ нарастают с тем же инкрементом, что и в среде со стационарной кубичной нелинейностью [266] $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{q^2\left[\frac{a_o^2}{2} - q^2\right]}$. Максимум инкремента достигает максимального значения $\gamma = \frac{a_o^2}{8}$ при $q_{max} = \frac{a_o}{2}$. В этом случае q_{max} не зависит от координаты z и логарифм возмущения интенсивности $\ln(\delta I) \propto z$ нарастает пропорционально эволюционной координате z. В некотором смысле данный инкремент неустойчивости является максимальным в данной рассматриваемой задаче, так как стрикционная нелинейность будет приводить к уменьшению данного инкремента из-за ее дефокусирующего действия. В другом предельном случае ($p \to \infty$) релятивистская и пондеромоторная нелинейности сильно ослабевают.

Обратное преобразование Лапласа дает следующие формальное решение системы уравнений (6.57)

$$\delta I(z,\tau,q) = \frac{\delta I_o}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+0}^{+i\infty+0}\frac{dp}{p}\exp(p\tau)\left[\exp(i\lambda(q)z) + \exp(-i\lambda(q)z)\right] ,$$

$$\lambda(q) = \frac{q^2}{2}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{1+p}} . \quad (6.59)$$

Решение (6.59) описывает возмущения интенсивности δI для полубесконечного лазерного импульса с граничными условиями, установленными на переднем краю [28]. Следовательно, данное решение не зависит от расстояния от заднего фронта, и длительность может быть выбрана в соответствии с нашими целями. Далее рассмотрим лазерные импульсы короче периода плазменной волны. В этом случае расстояние τ от переднего фронта импульса должно быть меньше 2π (время нормировано на ω_p). В этом случае динамический отклик плазмы преобладает при $p^2 > 1$ и аналитическое рассмотрение возможно для двух частных пределов, которые будут обсуждаться ниже.

Рассмотрим вначале случай, когда дифракция влияет существенно на нелинейные

[27] В этом случае нелинейность среды определяется только стационарной релятивистской нелинейностью, которая связана с зависимость массы электрона от амплитуды падающей волны.

[28] Слагаемое $\frac{\delta I_o}{p}$ в выражении (6.59) является образом преобразования Лапласа от начального профиля лазерного импульса.

эффекты ($\alpha^2 < p^2$). Используя метод перевала можно получить решение для $q < 1$

$$\delta I(z,\tau,q) = \frac{\delta I_o 2^{1/3}}{\sqrt{6\pi}(a_o^2\tau^2 z)^{1/6}} \exp\left[\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a_o^2\tau^2 z}{4}\right)^{1/3}\right] \cos\left[\frac{q^2 z}{2} - \frac{3}{4}\left(\frac{a_o^2\tau^2 z}{4}\right)^{1/3} - \frac{11\pi}{12}\right] . \tag{6.60}$$

Как видно из выражения (6.60), возмущения интенсивности нарастают и осциллируют. Причем скорость нарастания возмущения не зависит от q. В противоположном случае ($\alpha^2 > p^2$) решение для системы уравнений (6.57) имеет следующий вид

$$\delta I(z,\tau,q) \simeq \frac{\delta I_o}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{q(q_b^3 - q^3)}\right)^{-1/2} \exp\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\sqrt{q(q_b^3 - q^3)}\right] , \tag{6.61}$$

где $q_b = \sqrt{2}\left(\dfrac{a_o|\tau|}{z}\right)^{1/3}$.

Таким образом, как видно из выражений (6.60), (6.61) возмущения на линейной стадии нарастают. В первом случае (6.60) возмущения интенсивности нарастают с инкрементом, не зависящим от поперечного волнового числа q. Причем инкремент достигает максимального значения в сечении на плоскости (z,τ) при $\tau \sim z$. Во втором случае (6.61) возмущения интенсивности δI неустойчивы при $0 < q < q_b$ и нарастают с инкрементом, зависящим от поперечного волнового числа q. Инкремент достигает максимального значения при $z \sim \tau$ и $q = q_{max} = \left[\dfrac{a_o}{\sqrt{2}}\right]^{1/3}$. Следовательно, данная неустойчивость будет усиливать неоднородности в задней части импульса $\dfrac{\delta I}{\delta I_o} \sim \exp(\tau)$. Причем для коротких лазерных импульсов ($\alpha^2 < p^2$) возмущение интенсивности будет также изрезано с частотой, которая увеличивается с ростом z.

Таким образом, исследование неустойчивости плоской квазимонохроматической волны на основе системы уравнений (6.51) показывает, что развитие ее при возбуждении плазменной волны существенным образом отличается от соответствующего процесса в среде с кубичной нелинейностью [266]. Эта неустойчивость носит пространственно-временной характер и не имеет ярко выделенного поперечного масштаба, при котором инкремент максимален.

6.3.2 Результаты численного моделирования филаментационной неустойчивости

Проведенное в предыдущем разделе исследование неустойчивости плоской волны квазимонохроматической волны в условиях возбуждения плазменной волны на линейной стадии показало, что она носит пространственно-временной характер, и

данный качественный анализ не дает ответа на важный вопрос, какой выделится масштаб в поперечном распределение волнового пакета в результате данной неустойчивости. Поэтому далее обратимся к численному анализу системы уравнений (6.10), описывающей динамику релятивистски сильных лазерных импульсов в условиях возбуждения кильватерной волны.

Численное исследование аналогичного процесса нестационарной самофокусировки волновых пучков в средах с различным способом установления кубичной нелинейности (релаксационным [121,259], диффузионным [121], звуковым [10,205,233] и др.) показывает формирование особенности, в которую уходит мощность, заметно превышающая критическую мощность самофокусировки. Самофокусировочная неустойчивость оказывается в значительной мере подавленной в нестационарном процессе самовоздействия. В случае самофокусировки импульсного излучения в среде с инерцией нелинейного отклика возникают новые особенности, связанные с тем, что передний фронт распространяется как в линейной среде и, следовательно, испытывает дифракционное расплывание. Очевидно, что этот процесс также приводит к стабилизации самофокусировочной неустойчивости в передней части импульса. Развитие расслоения следует ожидать, в первую очередь вблизи заднего фронта импульса.

Численное моделирование расслоения релятивистски сильного импульса и обработки данных в рамках (3D+1) мерной модели (6.10) представляет собой очень сложную задачу. Для исследования физических процессов мы поступили как при исследовании самофокусировки в условиях недостатка вычислительных ресурсов [121,266] – сохраняя скэйлинг уравнений, уменьшили число пространственных переменных, но увеличили степень нелинейности. На этом основании численное моделирование динамики самофокусировки релятивистски сильного лазерного импульса было проведено с помощью следующей системы уравнений

$$\frac{\partial^2 a}{\partial\tilde{z}\partial\tilde{\tau}} + \frac{\beta a}{1+\phi} - \frac{\partial^2 a}{\partial\tilde{x}^2} = 0 \tag{6.62a}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial\tilde{\tau}^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\frac{1+|a|^4-(1+\phi)^2}{2(1+\phi)^2}. \tag{6.62b}$$

Здесь введены следующие новые переменные: $\tau = \tilde{\tau}/\omega_o$, $x = \tilde{x}x_o$, $z = \tilde{z}2\omega_o x_o^2/c$; $\beta = (\omega_p x_o/c)^2$. Далее по тексту знак тильда будет опущена. Мы использовали два типа граничных условий (6.63) и (6.66) для исследования пространственно-временной неустойчивости лазерного импульса при возбуждении плазменной волны. Традиционно принято задавать граничные распределения волнового поля в виде гауссовых

функций. Поэтому в первой серии расчетов для исследования расслоения релятивистски сильного импульса мы взяли граничное распределение векторного потенциала при $z = 0$ в следующей форме:

$$a(x,\tau) = \frac{\mathcal{F}(x)}{\mathcal{F}_{max}} \exp\left[-\frac{\ln 4\tau^2}{\tau_p^2} + i\tau\right] , \tag{6.63}$$

где τ_p – начальная длительность импульса; $\mathcal{F}_{max}$ – максимальное значение функции $\mathcal{F}(x)$

$$\mathcal{F}(x) = \exp\left[-\ln 4(x-x_o)^2\right] + \exp[-\ln 4(x+x_o)^2] + \varepsilon_q \exp\left[-\ln 4\left(\frac{x}{d}\right)^2\right] , d = 2x_o . \tag{6.64}$$

Это соответствует наличию на гауссовом распределение двух горящих точек, расположенных друг от друга на расстоянии $2x_o$. Отметим, что поскольку уравнение (6.62a) является эволюционным по координате z, то граничные условия при $z = 0$ являются начальными условиями в смысле эволюционной координаты z (в смысле квазимонохроматического уравнения (6.11)). Соответственно, далее по тексту термин «начальный» будет пониматься как «расположенный при малых $z \to 0$».

Следует отметить, что в условиях инерционной нелинейности в процессе эволюции формируются «несимметричные импульсы»(в продольном направлении), у которых поле на переднем фронте меньше, чем на заднем. Соответствующие структуры описываются автомодельными решениями системы уравнений (6.14), которые были найдены в работе [204]. В линейной фокальной области, когда поле на переднем фронте импульса практически не меняется, автомодельные решения для $\mathcal{B}$ и ϕ имеют следующий вид:

$$\mathcal{B} = \alpha u(\zeta) \exp(\alpha\tau + i\gamma z e^{2\alpha\tau}) , \quad \phi = v(\zeta) \exp(2\alpha\tau) , \tag{6.65}$$

где $\zeta = r\exp(\alpha\tau)$, α и γ – положительные константы. Здесь α определяется превышением мощности над критической мощности самофокусировки. Эти решения описывают лазерные импульсы, имеющие форму *рупора*, раскрывающегося в направлении движения. Структура основной автомодельной моды характеризуется экспоненциальным убыванием по радиусу вектор-потенциала и степенным убыванием ($\sim \zeta^{-2}$) потенциала плазменной волны. Специальным образом приготовленные волновые структуры (подобные тем, что формируются при образовании автомодельной структуры типа горн [204, 258, 266]) могут распространяться, практически не меняя своей формы на расстояния, заметно (более чем на порядок) превышающие рэлеевскую длину.

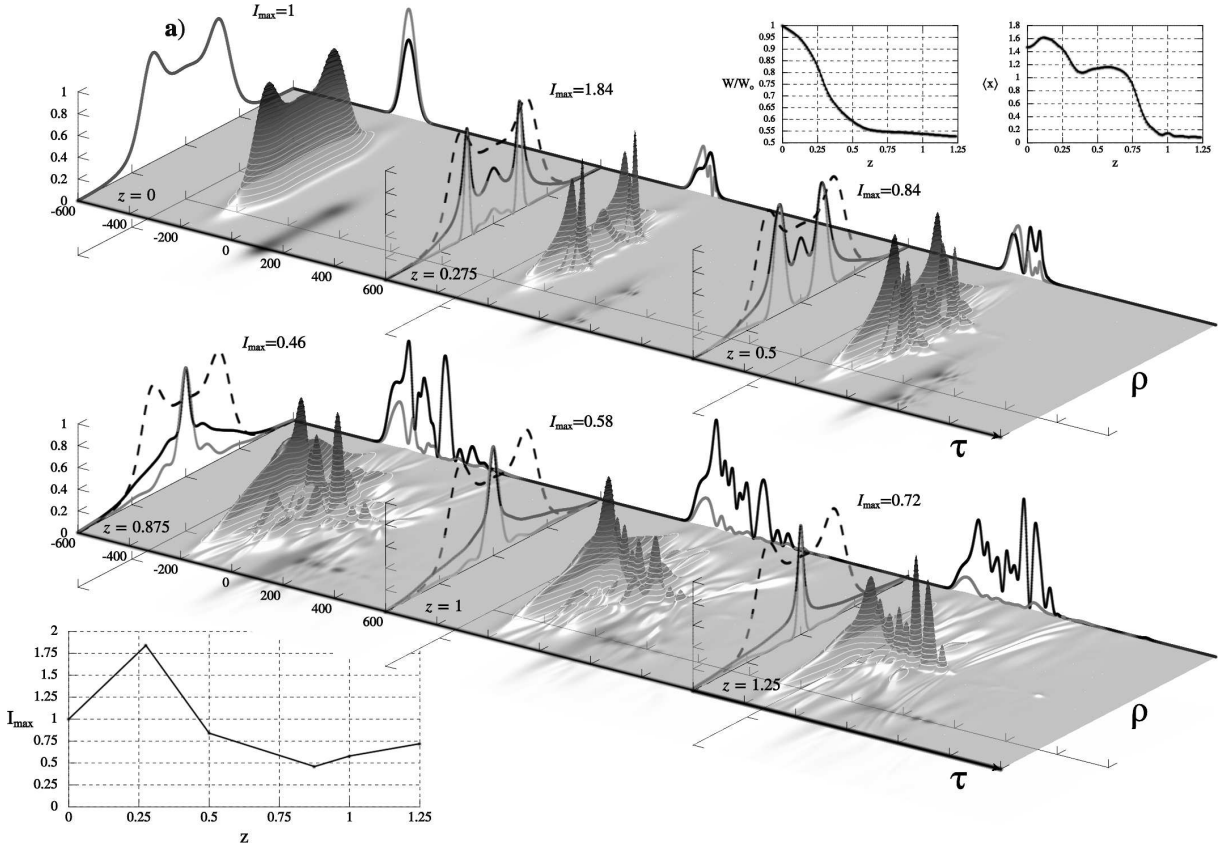


Рис. 6.7: Динамика интенсивности лазерного импульса $I(z,x,\tau) = |\mathcal{E}(z,x,\tau)|^2$ с $\kappa = \tau_p\omega_p = 0.5\pi/\sqrt{2}$ для двух случаев: **a)** для гауссового импульса (6.63) с $\tau_p = 20\pi$, $\varepsilon_q = 2.2$, $d = 4$; $\tau = -450\ldots450$, $x = -6\ldots6$. **b)** Для треугольного импульса (6.66) с $\tilde{\tau}_p = 64\pi$, $\varepsilon_q = 1.8$, $d = 3$; $\tau = -600\ldots600$, $x = -5\ldots5$. Здесь черная пунктирная линия вдоль оси ρ – начальное распределение интенсивности поля по x, серая линия вдоль оси ρ – распределение интенсивности по x в максимуме поля по τ, черная линия вдоль оси ρ – усредненное распределение интенсивности по τ ($Q(x) = \int I d\tau$), черная линия вдоль оси τ – распределение интенсивности по времени при $x = 0$, серая линия вдоль оси τ – распределение интенсивности по τ при $x = x^\star$, где $f(x = x^\star) = f_{max}$. В верхней левой вставке приведена зависимость энергии в импульсе $W(z)$, где W_o – начальная энергия в импульсе; на верхней правой вставке представлена зависимость момента первого порядка $\langle x(z)\rangle$; на нижней левой вставке приведена зависимость максимального значения интенсивности поля I_{max} от z.

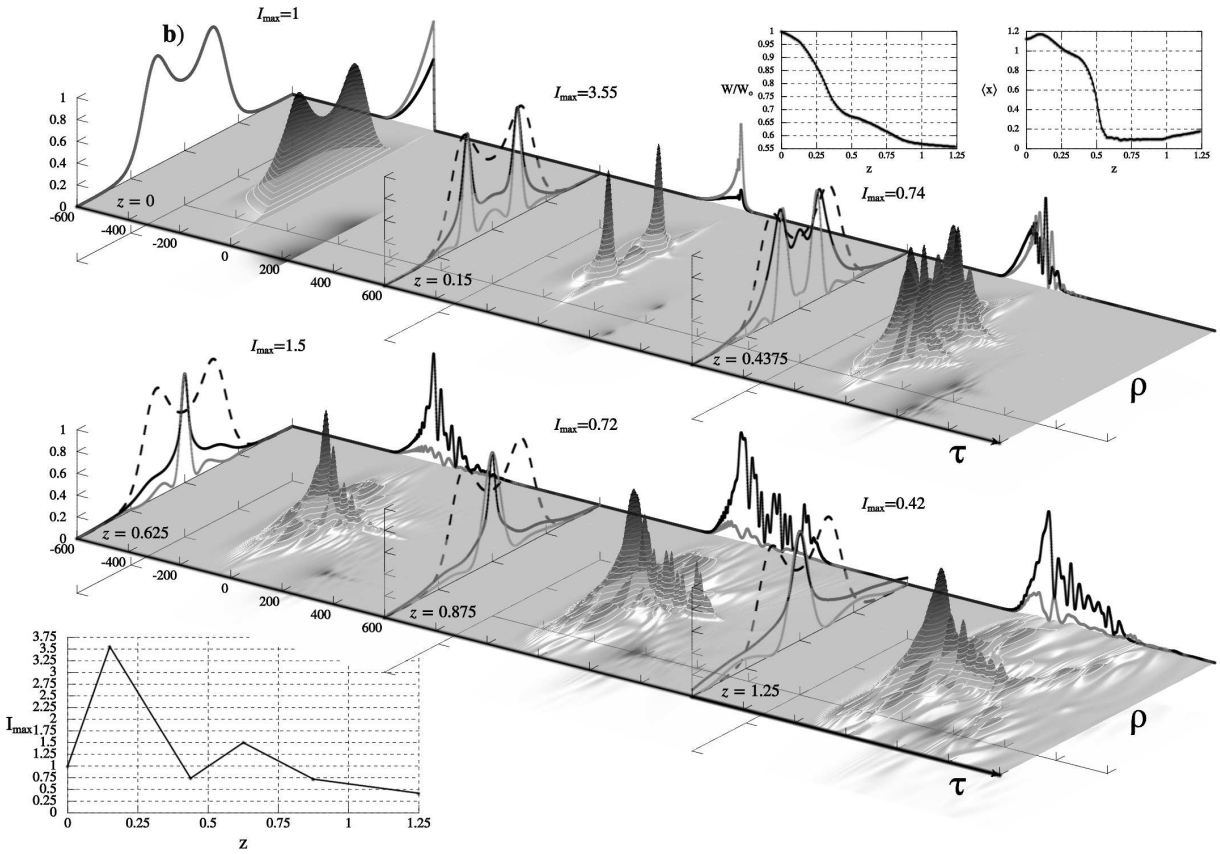


Рис. 6.7: Продолжение рисунка

В качестве граничных распределений второго типа мы выбрали импульсы треугольного вида $\left[\alpha = \dfrac{\ln 2}{2\pi}\right]$

$$a(x,\tau) = \frac{\mathcal{F}(x)}{\mathcal{F}_{max}} \exp(i\tau) \cdot \begin{cases} \dfrac{\tau}{\tilde{\tau}_p}\ , & 0 \le \tau < \tilde{\tau}_p \\ \exp\left[-\alpha(\tau - \tilde{\tau}_p)^2\right]\ , & \tau \ge \tilde{\tau}_p \end{cases}\ , \tag{6.66}$$

для которых трасса выхода на автомодельный режим, очевидно, меньше, чем в случае гауссовой формы (6.63). Причем длительность треугольного лазерного импульса $\tilde{\tau}_p$ подбирали таким образом, чтобы начальная энергия в импульсе, содержащаяся в распределении (6.66), совпадала с начальной энергией в распределении (6.63), т.е $\tilde{\tau}_p = 3\tau_p\sqrt{\dfrac{\pi}{4\ln 2}}$.

Численное моделирование показывает следующее. На рисунке 6.7 представлена динамика интенсивности двухпучкового лазерного поля для двух разных временных форм импульса (6.63) и (6.66) с разными граничными условиями: a) для гауссового импульса (6.63) с $\tau_p = 20\pi$, $\varepsilon_q = 2.2$, $d = 4$; b) для треугольного импульса (6.66) с $\tilde{\tau}_p = 64\pi$, $\varepsilon_q = 1.8$, $d = 3$. Как следует из рисунка 6.7, в эволюции поперечной структуры волнового поля можно выделить два этапа. Сначала происходит самоизоляция начальных возмущений в распределении поля [$z = 0.275$ (см. рисунок 6.7**(a)**), $z = 0.15$ (см. рисунок 6.7**(b)**)]. Время этого процесса слабо зависит как от интенсивности возмущений, так и от расстояния между ними. Затем филаменты притягиваются, и образуется практически та же самая структура волнового поля, как и при эволюции сглаженного граничного распределения поля (см. рисунок 6.7). Для подтверждения эффекта слипания нитей мы вычислили момент первого порядка

$$\langle x \rangle = \frac{2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} x|\partial a/\partial\tau|^2 d\tau dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\partial a/\partial\tau|^2 d\tau dx}\ , \tag{6.67}$$

определяющий «центр масс»интенсивности лазерного поля, на основе данных, полученных в результате численного эксперимента. На рисунках 6.7**(a,b)** момент первого порядка $\langle x \rangle$ представлен на верхней правой вставке. Как видно из этих двух вставок, данный момент монотонно уменьшается по мере распространения импульса в нелинейной среде. Кроме того как видно из верхней левой вставки на рисунках 6.7**(a,b)**, энергия в лазерном импульсе W в процессе слипания неоднородностей уменьшилась приблизительно в два раза, поскольку часть энергии в импульсе тратится на возбуждение плазменной волны.

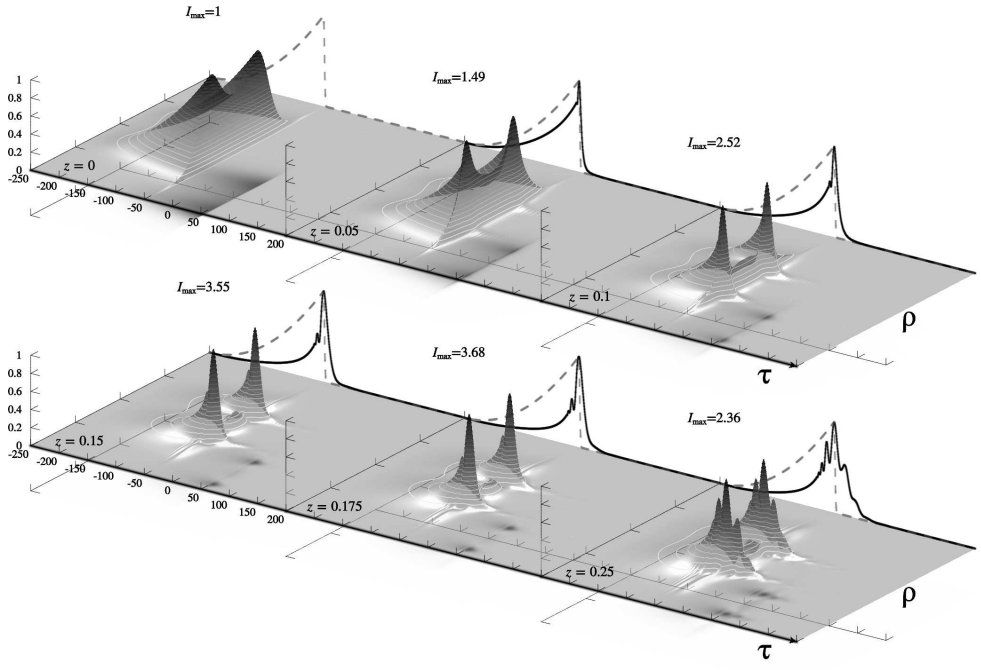


Рис. 6.8: Динамика интенсивности лазерного импульса $|a(\tau, x)|^2$ с $\tilde{\tau}_p = 64\pi$ и $\kappa = \tau_p\omega_p = 0.5\pi/\sqrt{2}$ для случая $\varepsilon_q = 1.8$, $d = 3$, $\tau = -250 \ldots 200$, $x = -5 \ldots 5$. Здесь серая пунктирная линия – начальное временное распределение интенсивности поля, сплошная черная линия – временное распределение интенсивности в максимуме поля по x.

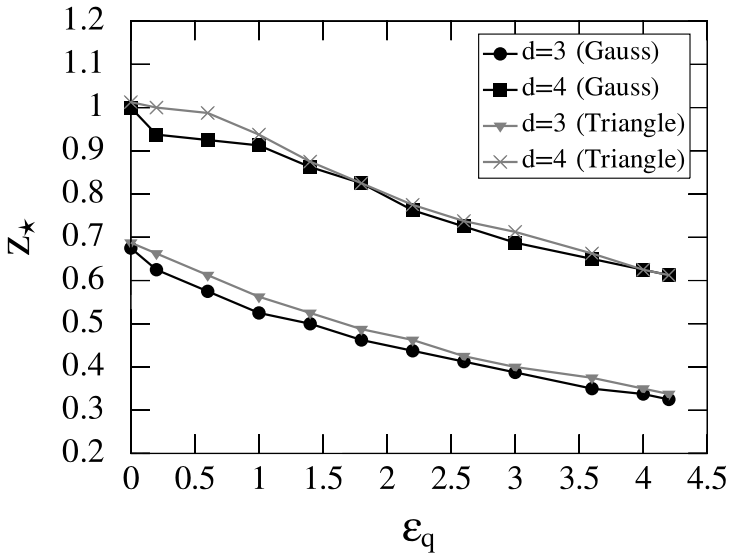


Рис. 6.9: Зависимость длины притяжения нитей $z_\star$ от амплитуды возмущений ε_q для четырех разных случаев: **(a)** для гауссового импульса с $d = 3$ и с $d = 4$; **(b)** для треугольного импульса с $d = 3$ и с $d = 4$.

Остановимся теперь отдельно на структурных особенностях в динамике лазерных импульсов для этих двух типов граничных условий. Как следует из рисунка 6.7**(b)**, на начальной стадии неустойчивости треугольного импульса ($z = 0.15$) имеет место возбуждение автомодельной структуры (6.65) (см., например, [204]) в отличие от импульса гауссовой формы. Данное различие в поведение оптического импульса можно объяснить следующим образом: в связи с тем, что автомодельное решение найдено в отсутствие возможных эффектов линейной дисперсии невозмущенной плазмы [см. систему уравнений (6.14)], то его можно возбудить из начального импульса только в том случае, если длина выхода на данную нелинейную структуру меньше длины дисперсионного расплывания. Очевидно, что длина выхода на автомодельное решение из треугольного (6.66) импульса меньше, чем из гауссового профиля импульса (6.63). На рисунке 6.8 приведена динамика интенсивности треугольного лазерного импульса с $d = 3$, $\varepsilon_q = 1.8$ на начальной стадии неустойчивости в интервале $z = 0 \ldots 0.25$. Как следует из данного рисунка, треугольный импульс трансформируется в автомодельное решение на трассе $z \sim 0.1$. Однако на трассе $z \sim 0.25$ оно начинает разрушаться из-за наличия линейной дисперсии и насыщения нелинейности.

На рисунке 6.9 приведена зависимость длины притяжения нитей $z_\star$ [длина, на которой величина «центра масс» интенсивности $\langle x \rangle$ уменьшается в два раза, т.е. $\langle x(z_\star) \rangle = 0.5 \langle x \rangle_{max}$] от амплитуды возмущения ε_q для четырех разных случаев: **(a)** для гауссова импульса с $d = 3$ (черная линия с кружками) и с $d = 4$ (черная линия с квадратиками); **(b)** для треугольного импульса с $d = 3$ (серая линия с треугольниками) и с $d = 4$ (серая линия с крестиками). Как следует из данного рисунка, скорость притяжения нитей пропорциональна амплитуде возмущения ε_q.

Для иллюстрации притяжения филамент обратимся к системе уравнений (6.14). Будем описывать положение одного из симметричного расположенных одинаковых филамент (например, $x \geq 0$) моментом

$$\langle x \rangle = \frac{1}{W_o} \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} x |\mathcal{B}|^2 dx dy. \tag{6.68}$$

Для этой величины на основе системы уравнений (6.11) нетрудно получить

$$\frac{d^2 \langle x \rangle}{dz^2} = -\frac{2}{W_o} \int\limits_0^{+\infty} |\mathcal{B}(x = 0, y)|^2 \phi(x = 0, y) dy \leq 0. \tag{6.69}$$

Для упрощения записи мы считаем, что в области между симметричными филаментами $\phi(x = 0, y) \ll 1$. Отсюда, в силу положительности потенциала кильватерной

волны в области лазерного импульса, как и в случае кубичной нелинейности, имеет место эффект притяжения. Наша интерпретация процесса притяжения филамент заметно отличается от предложенной в работе [207], в которой аналогичный эффект был обнаружен и исследован методом частиц в ячейках. В ней взаимодействие возникающих неоднородностей плазмы объясняется притяжением токов, возбуждаемых в среде. В нашем упрощенном описании динамики системы этот процесс не учитывается.

Далее подведем итоги анализа, проведенного в данном разделе. Численное и аналитическое исследование пространственно-временной неустойчивости сверхкороткого (с длительностью, меньшей длины плазменной волны) релятивистски сильного лазерного импульса при возбуждении кильватерной волны показало, что в эволюции начальных возмущений поперечного распределения амплитуды поля можно выделить два этапа. Сначала происходит самоизоляция поперечных неоднородностей поля и формирование филаментов. Затем филаменты притягиваются, и образуется фактически та же самая структура, что и при эволюции «сглаженного»распределения поля. Этот процесс удается пояснить на основе уравнения для «центров масс»интенсивностей возникающих неоднородностей. Вычисления показывают, что между двумя филаментами возникает сила притяжения, определяемая неоднородным показателем преломления среды (полем кильватерной волны). Это означает, что волновые пучки с мощностью, заметно превышающий критическую мощность релятивистской самофокусировки, на промежуточном этапе потенциально (при наличии соответствующих неоднородностей) могут разбиться на набор пучков. Однако, затем в процессе установления произойдет формирование плавного поперечного распределения поля. Таким образом, понятие критической мощности имеет в случае инерционной нелинейности первоначальный смысл минимальной мощности, при превышении которой происходит самофокусировка излучения. Неучитывавшиеся ранее эффекты насыщения нелинейности и дисперсия плазмы приводят к стабилизации коллапса и увеличению длительности лазерного импульса по мере его распространения.

6.4 Анализ модификации спектра лазерного импульса

Развитие методов создания оптических импульсов с длительностью в несколько периодов поля относится к наиболее важному направлению в области когерентной и нелинейной оптики. Оптические импульсы с длительностью менее 10 фс востребованы в самых различных областях как фундаментальных, так и прикладных исследований – от спектроскопии с высоким временным разрешением, позволяющей исследовать быстропротекающие процессы [107], до лазерных методов ускорения частиц [137]. Предельно короткие импульсы активно обсуждаются для получения терагерцовых видеоимпульсов [38, 54, 76, 180, 225] и аттосекундных [23, 244] импульсов в диапазонах вакуумного ультрафиолета и мягкого рентгена.

Уменьшение длительности сверхкоротких лазерных импульсов достигается с помощью специальных приемов. В процессе компрессии можно выделить два основных этапа – спектральное уширение и собственно сжатие импульса. Современные методы компрессии используют на первом этапе уширение спектра. Для решения этой задачи используют различные типы нелинейных механизмов уширения спектра. С целью увеличить спектральную ширину импульса его пропускают через нелинейную среду, показатель преломления которой меняется под действием электрического поля световой волны. В частности, для мощных лазерных импульсов предложено использовать полые диэлектрические капилляры, заполненные газообразной средой в условиях преобладания керровской [141] или ионизационной [14, 15, 182, 210] нелинейности. Отметим, что использование здесь капилляров направлено на решение ключевой проблемы взаимодействия лазерных импульсов с веществом, а именно увеличение длины взаимодействия, т.к. в свободном пространстве длина эффективного нелинейного взаимодействия ограничена дифракционной расходимостью лазерного пучка. Для непосредственного сжатия обычно используют набор призм или дифракционных решеток. Эффективным для получения предельно коротких импульсов является и применение зеркал с управляемой дисперсией.

В последние годы весьма активно обсуждаются различные схемы самокомпрессии лазерных импульсов в волноведущих системах, также использующие керровскую [85] и ионизационную [173,188] нелинейности. В частности, в работе [173] была продемонстрирована возможность получения предельно коротких импульсов с мультимилли-

джоульным уровнем энергии.

В свободном пространстве для увеличения спектральной ширины лазерного импульса с миллиджоульным уровнем энергии предлагается использовать процесс филаментации. Филаменты являются нелинейными образованиями, которые существуют за счет баланса фокусировки, связанной с керровской нелинейностью, и дифракции, а также рефракции на образующейся плазме. Филаментная структура ионизованной области способна обеспечить довольно протяженную трассу взаимодействия лазерного импульса с веществом. Компрессия импульса наблюдается при наличии одиночной филаменты, формирующейся в газе сравнительно высокого давления при мощности лазерного импульса, не сильно превышающей критическую мощность самофокусировки [177]. Тем не менее, как показывает детальный анализ, проведенный в [109, 174], энергетическая эффективность (доля начальной энергии, содержащаяся в сжатой части лазерного импульса на выходе нелинейной среды) такого метода невысока и составляет несколько процентов.

Подводя итоги, следует отметить, что необходимым условием для укорочения лазерного импульса является проблема уширение его спектра с помощью подходящей нелинейности среды. Поэтому на начальном этапе в решении проблемы самокомпрессии лазерных импульсов представляется важным провести анализ модификации спектра лазерного импульса в процессе нестационарной самофокусировки в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны. Следует отметить, что в ранних работах были проведены в рамках одномерной модели исследования по управлению частотой спутного слабого лазерного импульса в неоднородном распределении плотности плазмы в кильватерной волне, создаваемое другим мощным лазерным импульсом [133, 134].

Для иллюстрации особенностей динамики самовоздействия импульсов с малым числом периодов поля обратимся к численному решению системы уравнений (6.10). На рисунке 6.10 показана типичная динамика интенсивности поля и спектра оптического импульса, у которого начальная длительность τ_p меньше периода плазменной волны T_{pl} ($\tau_p \simeq 0.088 T_{pl}$). На входе нелинейной среды задавался импульс следующего вида:

$$a(\tau, r) = a_o \exp\left(-2\ln 2 \frac{\tau^2}{\tau_p^2} - \frac{\ln 2}{2} r^2 + i\tau\right) . \qquad (6.70)$$

Поскольку самовоздействие лазерного импульса связано с возбуждением кильватерной плазменной волны, передний фронт импульса распространяется в невоз-

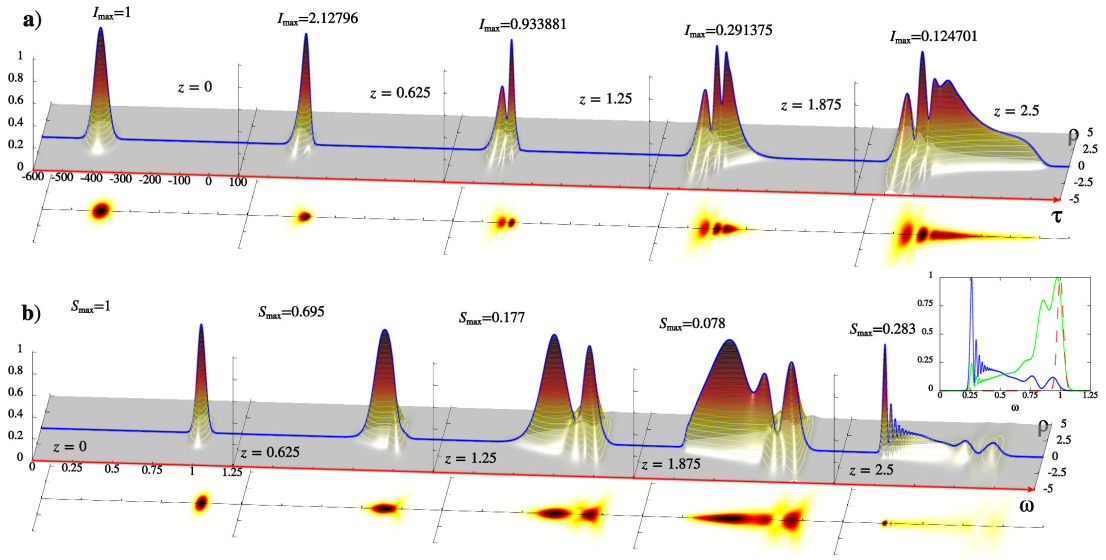


Рис. 6.10: На рисунке приведена динамика циркулярно поляризованного оптического поля с начальными параметрами: $\tau_p = 15\pi$, $a_0 = 1.8$, $\kappa = \tau_p\omega_{pl} = 0.555$; здесь рисунок **(a)** – распределение интенсивности импульса $|\mathcal{E}|^2$, рисунок **(b)** – распределение спектральной интенсивности $S(\omega) = |\int \mathcal{E}(\tau, r)e^{i\omega\tau}d\tau|^2$. На вставке приведены следующие распределения спектра: красная пунктирная линия – начальный спектр на оси пучка, синяя линия – выходной спектр импульса на оси пучка, зеленая линия – усредненный спектр по пучку выходного импульса ($|\int S(\omega, r)rdr|^2$).

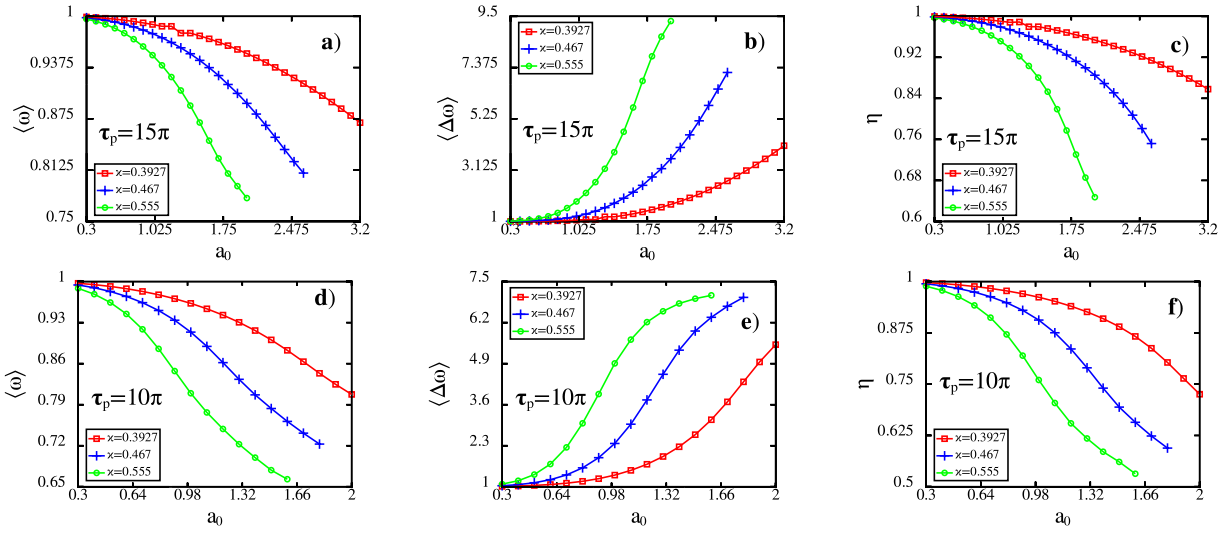


Рис. 6.11: На рисунке представлены зависимости средней несущей частоты $\langle\omega\rangle$ **(a,d)**, средней ширины спектра $\langle\Delta\omega\rangle = \langle\Delta\omega_{out}\rangle / \langle\Delta\omega_{in}\rangle$ **(b,e)** и энергии в импульсе $\eta = \dfrac{\mathcal{I}_{out}}{\mathcal{I}_{in}}$ **(c,f)** в зависимости от начальной амплитуды a_o для двух разных длительностей τ_p ($\tau_p = 15\pi$, $\tau_p = 10\pi$) и концентраций плазмы $\varkappa = \tau_p\omega_{pl}$ на выходе нелинейной среды $z = 2.5$.

мущенной плазме (линейная среда), в то время как остальная часть импульса распространяется в области возмущения плазмы. Как следует из рисунка 6.10**(a)**, передняя часть волнового пакета дифрагирует, в то время как в задней части лазерного импульса начинает развиваться самофокусировка, а также происходит преобразование спектра в длинноволновую часть (см. рисунок 6.10**(b)**). Если не обращать внимание на изрезанность интенсивности лазерного импульса $I(z,\tau,r) = |\mathcal{E}|^2$ $\left(\text{где } \mathcal{E}(z,\tau,r) = -\dfrac{\partial a}{\partial \tau}\right)$, то, как следует из рисунка 6.10**(a)**, пространственно-временное распределение импульса в результате нестационарной самофокусировки принимает форму *рупора*, раскрывающегося в направлении переднего фронта волнового пакета. Из рисунка 6.10**(b)** видно, что в процессе самовоздействия имеет место значительное преобразование спектра в длинноволновую область. В частности, как следует из вставки на рисунке 6.10**(b)**, максимум спектра на оси пучка смещается вплоть до двух октав в красную область спектра.

Обратим внимание, что модуляцию в распределении интенсивности волнового пакета можно понять, если обратиться к выражению (6.60), которое описывает линейную стадию развития пространственно-временной самофокусировочной неустойчивости. Из данного выражения видно, что данная неустойчивость будет усиливать заднюю часть волнового пакета и также вызывать модуляцию в продольном профиле лазерного импульса. Следует отметить, что схожая модуляция в распределении интенсивности в продолном направлении лазерного импульса наблюдалась ранее в работе [204], в которой исследовалась нестационарная самофокусировка квазимонохроматического волнового пакета с длительностью менее периода плазменной волны в процессе возбуждения кильватерной волны.

Для качественного исследования преобразования спектра лазерного импульса мы обратимся к системе уравнений (6.11). В рассматриваемом процессе нестационарного самовоздействия на кильватерной волне имеет место смещение частоты вниз по спектру. Для описания этого эффекта воспользуемся следующим соотношением

$$\langle\omega\rangle = -\frac{1}{2}\frac{d\langle\tau\rangle}{dz} \ , \tag{6.71}$$

связывающим среднюю частоту волнового поля $\langle\omega\rangle$

$$\mathcal{I}_o \cdot \langle\omega\rangle = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \omega|\mathcal{B}(\omega, r_\perp)|^2 r dr d\omega \ . \tag{6.72}$$

с центром масс пакета $\langle\tau\rangle$

$$\mathcal{I}_o \cdot \langle\tau\rangle = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \tau|\mathcal{B}|^2 r dr d\tau \ . \tag{6.73}$$

Здесь $\mathcal{I}_o = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} |\mathcal{B}|^2 r dr d\tau$ – энергия в лазерном импульсе. Из уравнений (6.11a) и (6.12) для центра масс волнового пакета $\langle\tau\rangle$ можно получить следующие выражение

$$\frac{d^2\langle\tau\rangle}{dz^2} = \frac{4\pi}{\mathcal{I}_o}\frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} |\mathcal{B}|^2 \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\phi}{1+\phi}\right) r dr d\tau \ . \tag{6.74}$$

Отсюда следует, что центр масс волнового поля $\langle\tau\rangle$ по мере его распространения смещается к задней части лазерного импульса. Оценку данного эффекта проведем в случае ультракороткого импульса ($\tau_o\omega_{pl} \ll 1$) в редкой плазме $\left(\frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2} \ll 1\right)$ воспользовавшись автомодельными решениями, найденными в работе [204] при $\phi \ll 1$.

В линейной фокальной области, когда поле на переднем фронте импульса практически не меняется, используем следующие автомодельные решения для $\mathcal{B}$ и ϕ:

$$\mathcal{B} = \alpha u(\zeta)\exp(\alpha\tau + i\gamma z e^{2\alpha\tau}) \ , \tag{6.75a}$$

$$\phi = v(\zeta)\exp(2\alpha\tau) \ , \tag{6.75b}$$

где $\zeta = r\exp(\alpha\tau)$, α и γ – положительные константы. Здесь α определяется превышением мощности над критической мощностью самофокусировки. Эти решения описывают импульсы, имеющие форму *рупора*, раскрывающегося в направлении движения. Структура основной автомодельной моды характеризуется экспоненциальным убыванием по радиусу вектор-потенциала и степенным убыванием ($\sim \zeta^{-2}$) потенциала плазменной волны.

Таким образом, для импульса длительностью τ_p, из (6.74) получаем

$$\frac{d^2\langle\tau\rangle}{dz^2} \simeq \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}\frac{2\sigma}{\tau_p}\left[\exp(2\alpha\tau_p) - 1\right] \ , \tag{6.76}$$

где $\sigma \equiv v(\zeta = 0) \simeq 1.5$. При вычислении интеграла по автомодельной переменной ζ предполагалось, что распределение поля в плазменной волне является более плавным, чем распределение электромагнитного поля. Для смещения центра масс волнового пакета по продольной координате $\langle\tau\rangle$ находим выражение

$$\langle\tau\rangle \simeq \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}\frac{\sigma}{\tau_p}\left[\exp(2\alpha\tau_p) - 1\right] z^2 \ . \tag{6.77}$$

Отсюда видно, что сдвиг частоты $\langle\omega\rangle$ (по модулю) возрастает в линейной фокальной области пропорционально пройденному расстоянию z в нелинейной среде

$$\langle\omega\rangle \simeq -\frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}\frac{\sigma}{\tau_p}\left[\exp(2\alpha\tau_p)-1\right]z\ . \tag{6.78}$$

Вне линейной фокальной области ($z > z_f$) характерный поперечный масштаб поля на переднем фронте лазерного импульса растет по мере распространения пропорционально пройденному расстоянию z. Поэтому для оценки смещения центра масс волнового пакета $\langle\tau\rangle$ воспользуемся другим автомодельным решением, найденным в работе [204]

$$|\mathcal{B}| = \alpha\frac{z_f}{z}u(\zeta)\exp(\alpha\tau)\ , \tag{6.79a}$$

$$\phi = \frac{z_f^2}{z^2}v(\zeta)\exp(2\alpha\tau)\ . \tag{6.79b}$$

Интегрируя (6.74) при тех же предположениях, находим для $\langle\tau\rangle$ выражение

$$\langle\tau\rangle \simeq \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}\frac{2\sigma z_f^2}{\tau_p}\left[\exp(2\alpha\tau_p)-1\right]\left[\frac{z-z_f}{z_f}-\ln\frac{z}{z_f}\right]\ . \tag{6.80}$$

Для $z > z_f$ имеем

$$\langle\tau\rangle \simeq \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}\frac{2\sigma}{\tau_p}\left[\exp(2\alpha\tau_p)-1\right]zz_f\ . \tag{6.81}$$

Из выражения (6.81) видно, что сдвиг частоты $\langle\omega\rangle$ при $z \gg z_f$ достигает своего максимального значения

$$|\langle\omega\rangle_{max}| \simeq \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}\frac{\sigma z_f}{\tau_p}\left[\exp(2\alpha\tau_p)-1\right]\ . \tag{6.82}$$

Таким образом, в нелинейной фокальной области смещение центра масс $\langle\tau\rangle$ увеличивается по линейному закону. Отсюда можно получить более точную оценку на длину трассы распространения импульса, на которой можно не учитывать дисперсию плазмы. Смещение «центра масс» волнового пакета (6.81) мало по сравнению с длительностью лазерного импульса τ_p на трассе

$$z \ll \frac{\omega_o^2}{\omega_{pl}^2}\frac{\tau_p^2}{2\sigma z_f}\frac{1}{\exp(2\alpha\tau_p)-1}\ . \tag{6.83}$$

Все эти соотношения следует рассматривать как оценочные в условиях, пока «центр масс» волнового пакета $\langle\tau\rangle$ не сместился на величину порядка длительности импульса τ_p. На больших трассах начинает сказываться изменение формы волнового поля. Качественно понятно, что приосевая часть волнового пакета ($r \simeq 0$)

смещается с большей скоростью, чем периферийная ($r \to +\infty$). По мере смещения «центра масс» лазерного импульса $\langle\tau\rangle$ к задней части импульса происходит самофокусировка волнового поля именно в этой области, где интенсивность излучения максимальна. При этом, в дальнейшем следует ожидать формирование характерной рупорообразной структуры импульса.

В заключение данного раздела приведем результаты по модификации спектра релятивистски сильного лазерного импульса (6.70) в условиях возбуждения плазменной волны, основанные на численном решении системы уравнений (6.10). Зависимости величины сдвига средней несущей частоты

$$\mathcal{I}\cdot\langle\omega(z)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbf{r}_\perp} \omega\,|\mathcal{E}(z,\omega,r)|^2\,dr_\perp d\omega\ , \quad \mathcal{I}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbf{r}_\perp} |\mathcal{E}|^2 dr_\perp d\tau \tag{6.84}$$

и средней ширины спектра

$$\mathcal{I}\cdot\langle\Delta\omega(z)\rangle]^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbf{r}_\perp} (\omega-\langle\omega\rangle)^2|\mathcal{E}(z,\omega,r)|^2 dr_\perp d\omega\ , \tag{6.85}$$

а также доли энергии в лазерном импульсе $\eta(z) = \dfrac{\mathcal{I}(z)}{\mathcal{I}_{in}}$ от начальных параметров импульса (a_o, τ_p) и от концентрации плазмы представлены на рисунке 6.11. Здесь $\mathcal{E} = -\dfrac{\partial a}{\partial\tau}$ – напряженность электрического поля в лазерном импульсе.

Энергия в лазерном импульсе уменьшается, так как процесс возбуждения кильватерной плазменной волны не является адиабатическим (см. рисунки 6.11**(c,f)**). Очевидно, что с уменьшением начальной длительности оптического импульса данный эффект будет все более заметным.

Остановимся теперь отдельно на модификации спектра лазерного импульса. Как следует из рисунка 6.11, имеет место значительное смещение спектра лазерного импульса в красную область (см. также вставку на рисунке 6.10**(b)**). Например, как следует из результатов численного моделирования, в зависимости от начальных параметров задачи можно ожидать сдвиг спектра до $\langle\omega\rangle_{min} \simeq 0.65$ (см. рисунок 6.11**(d)**), а уширение спектра до $\langle\Delta\omega\rangle_{max} \simeq 9$ (см. рисунок 6.11**(b)**). Причем из рисунка 6.11 видно, что величина данного смещения зависит от начальной длительности волнового пакета τ_p, поскольку амплитуда спектральной интенсивности векторного потенциала $|a|^2_\omega$, которая является источником для плазменной волны (см. уравнение (6.10b)), вблизи $\omega \simeq \omega_{pl}$ увеличивается с уменьшением начальной длительности лазерного импульса.

Таким образом, как следует из результатов численного моделирования, в процессе самовоздействия лазерного импульса в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны происходит значительное уширение его спектра. В связи с чем можно надеяться, что при благоприятных условиях удастся укоротить длительность волнового пакета вплоть до одного периода колебаний поля.

6.5 Самокомпрессия лазерного импульса в процессе самофокусировки релятивистски сильного лазерного излучения

В данном разделе представлены результаты по самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов в широкой области параметров (концентрации плазмы, энергия в импульсе). Как было показано в предыдущем разделе, увеличение длины взаимодействия мощного лазерного излучения с веществом, которое достигается за счет самоканалирования импульса в плазме благодаря релятивистской самофокусировке в режиме насыщения, приводит к заметному преобразованию спектра лазерного импульса. Как было показано в нашей работе [214] (см. также раздел 6.3.2), режим самофокусировки в условиях возбуждения плазменной волны является устойчивым, так как в данном случае критическая мощность имеет первоначальный смысл минимальной мощности, при превышении которой происходит самофокусировка пучка. Следовательно, отсутствует ограничение на энергию излучения, которая может содержаться в филаменте.

Нестационарное самовоздействие лазерного излучения, очевидно, приводит к уменьшению длительности импульса. В автомодельном режиме (6.75) происходит укорочение импульса до значений $\sim \dfrac{1}{\alpha}$, т.е. в условиях существенного превышения мощности над критической компрессия может быть заметной. Рассмотрим этот эффект более детально. Для качественного исследования изменения длительности импульса, как и выше, воспользуемся методом моментов. Для момента второго порядка $\langle(\tau - \langle\tau\rangle)^2\rangle$ из уравнения (6.11) и (6.12) с точностью до членов первого порядка по параметру дисперсии $\left(\dfrac{\omega_p^2}{\omega_o^2} \ll 1\right)$ нетрудно получить

$$\frac{d^2\langle(\tau - \langle\tau\rangle)^2\rangle}{dz^2} \simeq -\frac{4\pi}{\mathcal{I}_o}\frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\phi}{1+\phi}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau|\mathcal{B}|^2\right) r dr d\tau \ . \tag{6.86}$$

Здесь $\mathcal{I}_o$ – энергия волнового пакета, $\langle\tau\rangle = 2\pi\mathcal{I}_o^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\tau|\mathcal{B}|^2 r dr d\tau$ – «центр масс» интенсивности волнового пакета. В рамках автомодельного решения для поля в случае квазимонохроматического излучения [204] можно получить выражение для длины среды

$$z_c \simeq \frac{\omega_o^2}{\omega_p^2}\frac{2\tau_o^3}{\pi\alpha\mu[\exp(2\alpha\tau_o)-1]}\ , \tag{6.87}$$

при прохождении которой длительность лазерного импульса обращаться в нуль. Здесь

$$\mu = \int\limits_0^{+\infty}\left[\left(\frac{dv}{d\zeta}\right)^2\zeta^2 + 4v^2 + 4v\left(\frac{dv}{d\zeta}\right)\right]d\zeta\ , \tag{6.88}$$

где τ_o - начальная длительность импульса. Как следует из выражения для z_c, при существенном превышении мощности над критической ($\alpha\tau_o \gg 1$) в автомодельном режиме происходит экспоненциальное уменьшение длины самокомпрессии z_c.

Самосжатие волнового пакета связано с тем, что в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны в задней части волнового пакета будет происходить вытеснение электронов, а в передней части лазерного импульса, наоборот, концентрация электронов будет увеличиваться. В результате задняя часть волнового пакета будет догонять переднюю часть, так как групповая скорость лазерного импульса в плазме увеличивается с уменьшением концентрации электронов. Отметим, что благодаря процессу самофокусировки, будет иметь место дополнительное усиление поля в лазерном импульсе, что приведет к большим градиентам концентрации электронов и, соответственно, к увеличению темпа уменьшения длительности волнового пакета. С этим и связано экспоненциальное уменьшение длины нелинейной среды, на которой длительность лазерного импульса обратится в нуль.

Для проверки полученного качественного результата обратимся к численному моделированию исходной системы уравнений (6.10). Будем использовать два разных типа начальных условий при исследовании компрессии лазерных импульсов. В первой серии расчетов будем задавать на входе треугольный импульс с последующим экспоненциальным затуханием с $\mu = \dfrac{\ln 2}{8\pi^2}$, для которого, как отмечалось ранее, трасса выхода на автомодельный режим самая короткая

$$a = a_o\exp\left[-\frac{\ln 2}{2}r^2 + i\tau\right]\begin{cases}\dfrac{\tau}{\tau_p}\ , & 0\le\tau<\tau_p\\ \exp\left[-\mu(\tau-\tau_p)^2\right]\ , & \tau\ge\tau_p\ ,\end{cases} \tag{6.89}$$

во второй серии — импульс в форме супергаусса

$$a = a_o \exp\left[-\frac{\ln 2}{2} r^2 + i\tau - 32 \ln 2 \left(\frac{\tau}{\tau_p}\right)^6\right] . \qquad (6.90)$$

Численное моделирование показывает следующее. На рисунке 6.12 представлена динамика интенсивности поля для двух разных временных форм импульса (6.89) и (6.90).

Как следует из рисунка 6.12**(a)**, волновой пакет с начальным распределением вида (6.89) по мере распространения в нелинейной среде сжимается как в поперечном, так и в продольном направлениях. Причем, как следует из данного рисунка, на трассе $z = 0.6875$ происходит максимальное сжатие лазерного импульса до двух периодов колебаний поля (во временной области). Степень компрессии составила в этом случае 3.6. Затем волновой пакет начинает расплываться во временной области из-за влияния дисперсии фоновой плазмы.

Во второй серии расчетов начальное распределение волнового пакета задавалось в виде (6.89). Как следует из результатов численного моделирования, по мере распространения лазерного импульса в нелинейной среде имеет место преобразование временной структуры поля к структуре, близкой к автомодельной, а затем происходит значительное уменьшение длительности волнового пакета (см. рисунок 6.12**(b)**). Из рисунка 6.12**(b)** видно, что импульс на длине $z = 1.1625$ укоротился в 11.5 раз, что соответствует лазерному импульсу с 1.5 колебаний поля, причем эта длительность близка к длительности спектрально-ограниченного лазерного импульса, которая составляет один период колебаний поля. Как видно из рисунка 6.12**(b)**, имеет место усиление интенсивности поля в 12.8 раза. Это увеличение связано с фокусировкой поля как в поперечном, так и в продольном направлении.

Отметим, что лазерный импульс с супергауссовым профилем (см. рисунок 6.12**(b)**) укорачивается более сильно, чем треугольный импульс. Это связано с тем, что имеются две стадии сжатия волнового пакета. На первой стадии компрессия импульса достигается (приблизительно в три раза), когда происходит трансформация супергауссова профиля лазерного импульса к автомодельному профилю ($z \sim 0.4$). На второй стадии волновой пакет сжимается аналогично лазерному импульсу с начальным треугольным профилем.

Как следует из рисунка 6.13**(a)**, в процессе самокомпрессии волнового пакета происходит значительное смещение и уширение его спектра. На верхней вставке рисунка 6.13**(b)** приведены усредненные характеристики спектра, из которых видно,

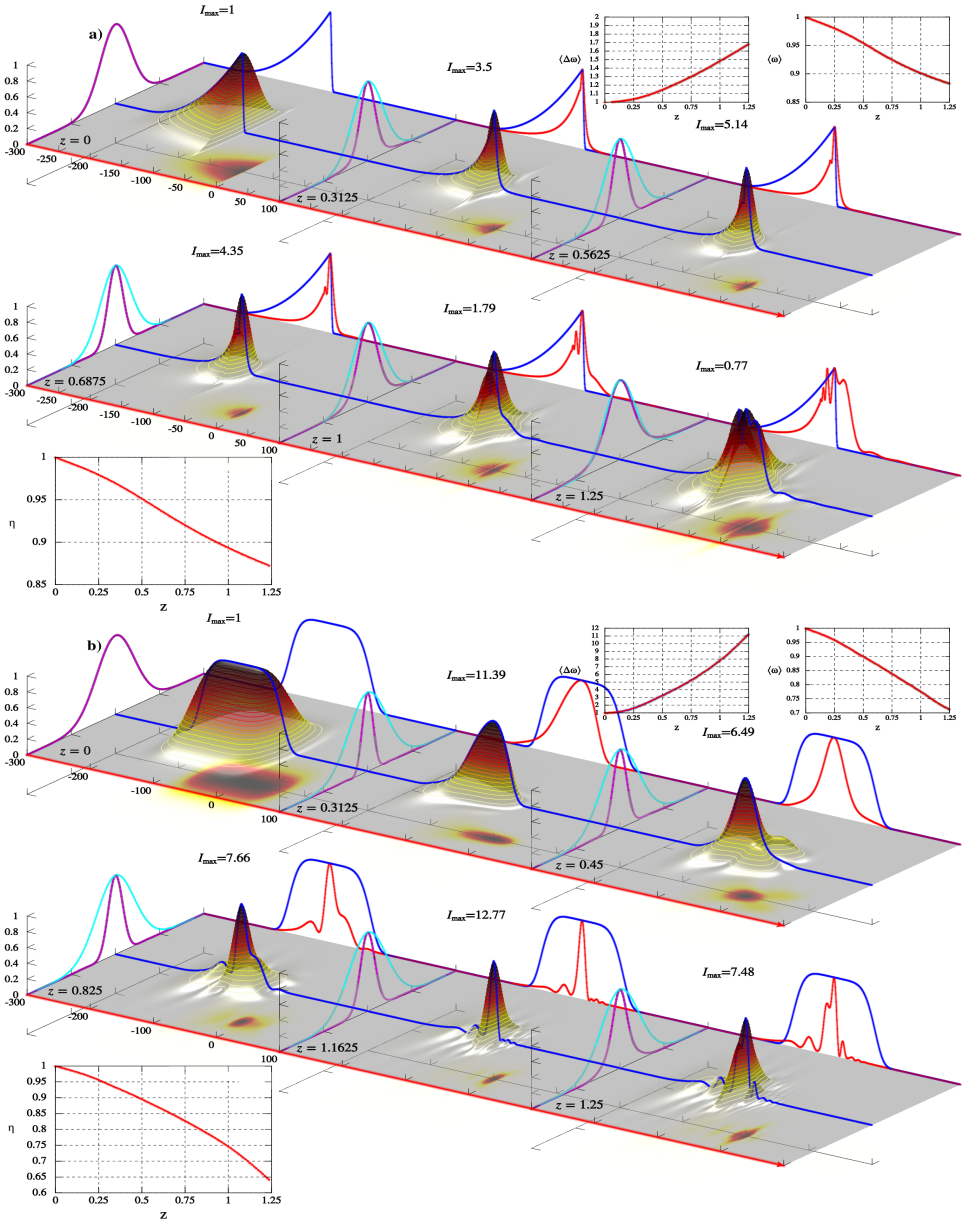


Рис. 6.12: Динамика интенсивности лазерного импульса $I(z,x,\tau) = |\mathcal{E}(z,r,\tau)|^2$ (где $\mathcal{E} = -\frac{\partial a}{\partial \tau}$) для двух разных типов начальных условий: **(a)** $\tau_p = 48\pi$, $a_o = 2.4$, $\tau_p = 0.07T_{pl}$; **(b)** $\tau_p = 40\pi$, $a_o = 2.0$, $\tau_p = 0.4T_{pl}$. Интенсивность нормирована на максимальное значение. На верхней левой вставке приведена зависимость средней ширины спектра лазерного импульса $\langle\Delta\omega\rangle$; на верхней правой вставке – средняя несущая частота $\langle\omega\rangle$; на нижней вставке – для энергии в импульсе $\eta = \frac{\mathcal{I}(z)}{\mathcal{I}_o}$, где $\mathcal{I}_o$ - начальная энергия в волновом пакете. Здесь синяя линия – начальный временный профиль лазерного импульса на оси пучка $[I(\tau, r = 0]$; красная линия – текущий временной профиль импульса на оси пучка; голубая линия – начальное распределение интенсивности поля в поперечном направлении; фиолетовая линия – текущее распределение лазерного импульса в поперечном направлении.

что спектр импульса смещается на 25%, и при этом тот уширяется в 11 раз. На рисунке 6.13**(b)** представлены распределения интенсивности лазерного импульса на оси пучка ($r = 0$) на входе и на выходе нелинейной среды. Наряду с узкой скомпрессированной частью, в распределении интенсивности присутствуют «крылья». Полная компенсация фазы позволяет достичь оптимальной *самокомпрессии* выходного импульса, когда его длительность определяется только шириной спектра. Результат оптимальной *самокомпрессии* может быть получен обратным преобразованием Фурье спектра на рисунке 6.13**(b)** (пунктирная фиолетовая линия). Как следует из рисунка, при идеальной компрессии из спектра рисунка 6.13**(a)** может быть получен лазерный импульс с длительностью один период колебания поля. Скомпрессированный лазерный импульс можно отнести к классу предельно коротких, в данном случае он несколько длиннее одного периода колебаний поля. Как следует из нижней вставки на рисунке 6.12**(a)**, в волновом пакете содержится около 70 % начальной энергии. Потери энергии связаны с возбуждением кильватерной плазменной волны. Проведенные численные эксперименты свидетельствуют о достаточно высокой эффективности предлагаемого метода, как его энергетической эффективности (доля энергии содержащаяся в центральной части волнового пакета, которая была нами определена, где интенсивность спадает по уровню $\frac{1}{2}$ как в продольном, так и в поперечном направлении), которая составляет 25%, так и в определенной степени простоты его реализации, в которой наиболее чувствительным местом является определение и правильный выбор длины нелинейной среды. Важно отметить, что *самокомпрессия* импульса по сечению пучка в наших численных экспериментах практически однородна.

Как видно из рисунков 6.12**(b)** и 6.13**(b)**, у сжатого лазерного импульса имеется предимпульс, который определяется несдвинутой частью спектра поля. Поэтому, если вырезать спектральные компоненты лазерного импульса, начиная с частоты $\omega_{cut} = 0.7$ (данная граница изображена на рисунке 6.13**(a)** фиолетовой пунктирной линией), то можно получить волновой пакет, который представлен на рисунке 6.13**(b)**. Однако, когда мы устранили предимпульс, то при этом увеличилась длительность сжатого импульса, поскольку мы вырезали часть спектральных компонент. В данном случае длительность импульса в результате действия частотного фильтра увеличилась в 1.4 раза.

В заключении данного раздела отметим следующее. Рассмотренный механизм самокомпрессии лазерного импульса принципиально связан с нестационарной приро-

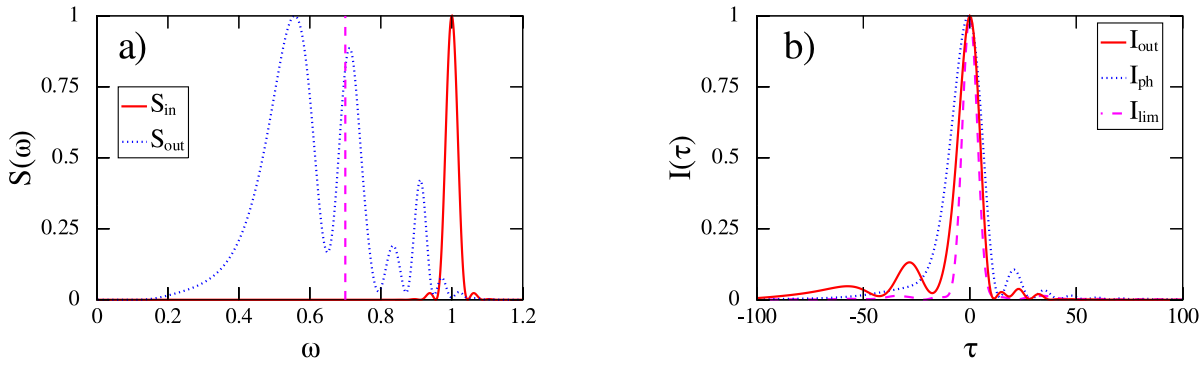


Рис. 6.13: На рисунке **(a)** представлены спектры лазерного импульса: красная линия – начальный спектр поля, синяя пунктирная линия – спектр сжатого импульса; фиолетовая пунктирная линия – граница действия частотного фильтра. На рисунке **(b)** представлены временные профили интенсивности лазерного импульса: красная линия – сжатый импульс на длине $z = 1.1625$, фиолетовая линия – спектрально-ограниченный импульс, соответствующий спектру на рисунке **(a)**, синяя пунктирная линия – результат действия частотного фильтра на сжатый импульс (красная линия)

дой самофокусировки трехмерного волнового пакета в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны с периодом, превышающим начальную длительность лазерного импульса. В этом режиме, благодаря процессу самофокусировки волнового пучка, имеет место существенное уменьшение длины компрессии волнового пакета, поскольку очевидное дополнительное усиление поля будет приводить к увеличению перепада концентрации плазмы электронов и, соответственно, к более сильному различию в скоростях, с которыми распространяется передняя и задняя части лазерного импульса. В результате, задняя часть импульса будет догонять переднюю на меньших расстояниях, что и будет приводит к уменьшению длины компрессии последнего. Чтобы реализовать такой режим укорочения длительности лазерного импульса, необходимо выполнить ряд условий:

- начальная ширина волнового пучка r_o должна значительно превышать длину плазменной волны $\lambda_p = \dfrac{2\pi c}{\omega_p}$ $[r_o > \lambda_p]$, чтобы плазменная волна преимущественно возбуждалась в продольном направлении;

- начальная длительность лазерного импульса должна быть меньше периода плазменной волны $\left[\tau_p < \dfrac{2\pi}{\omega_p}\right]$.

Сделаем далее оценки для существующих лазерных систем [117, 179]. Численные расчеты показывают, что лазерный импульс с начальной длительностью $\tau_p = 53$ фс (20 периодов колебаний поля), $a_o = 0.7$, $\lambda = 0.8$ μm, $r_o = 120$ μm (что соответствует мощности $\mathcal{P} = 1.1$ ПВт) может быть сжат до 7 фс в процессе прохождения через нелинейную среды длиной 15.8 см с невозмущенной концентрацией плазмы $n_e = 7 \times 10^{17}$ см$^{-3}$. Если использовать лазерные импульсы с более высокой мощностью, то можно достичь более сильной компрессии. Например, лазерный импульс с мощностью 10 ПВт (лазерные импульсы с такой мощностью должны быть получены в рамках проекта «ELI» [29]) можно укоротить с 53 фс до 4 фс (1.5 периода колебаний поля) на длине 59 см (см. рисунок 6.12(**b**)).

6.6 Шланговая неустойчивость релятивистски сильных лазерных импульсов

Как было показано в предыдущем разделе, при оптимальных начальных параметрах лазерного излучения удается достичь заметной компрессии лазерного импульса (больше, чем на порядок). При этом возникает закономерный вопрос: как повлияют на данный процесс самосжатия волнового пакета различные неустойчивости лазерного пучка (*филаментационная неустойчивость*, *шланговая неустойчивость* [168,176] и др.). В случае ультрарелятивистских лазерных импульсов фемтосекундной длительности влияние неустойчивостей на динамику взаимодействия ослабляется в силу специфических особенностей излучения (малая длительность импульса; амплитуда осцилляций электрона в поле, сравнимая с длинной волны; утяжеленные электроны и т.д.) в прозрачной плазме по мере укорочения длительности лазерного импульса становится возможным подавление одной из самых опасных неустойчивостей – филаментационной неустойчивости [214]. Для импульсов более коротких, чем длина кильватерной плазменной волны, процесс релятивистской самофокусировки протекает в условиях нестационарного нелинейного отклика среды, и волновой пучок с мощностью, заметно превышающей критическую мощность самофокусировки, фокусируется как целое (без расслоения) [214]. В этом случае создаются благоприятные условия для проявления другой, менее изученной, шланговой неустойчивости [168, 176]. Механизм возбуждения ее принципиально связан с инерцией нелинейного отклика

[29] www.extreme-light-infrastructure.eu/; http://www.izest.polytechnique.edu/.

среды [120]; развитие неустойчивости на нелинейной стадии приводит к нарушению осевой симметрии волнового пучка [96, 116, 120, 168, 176]. В данной разделе представлены результаты аналитических и численных исследований особенностей развития шланговой неустойчивости ультрарелятивистского лазерного импульса с длительностью, меньшей длины плазменной волны, и возможности ее влияния на процесс самокомпрессии релятивистски сильного лазерного импульса.

Численное исследование шланговой неустойчивости и обработка данных в рамках (3+1) мерной модели представляет собой очень сложную задачу. Поэтому для исследования физических процессов мы поступим как при исследовании самофокусировки в условиях недостатка вычислительных ресурсов [121, 152, 266], - сохраняя скэйлинг уравнений, уменьшим число пространственных переменных, но увеличим степень нелинейности. На этом основании численное моделирование динамики самовоздействия релятивистски сильного лазерного импульса проведено с помощью следующей пространственно двумерной системы уравнений:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z \partial \tau} + \frac{\beta a}{1+\phi} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 0 \ , \tag{6.91a}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2} \frac{1 + |a|^4 - (1+\phi)^2}{2(1+\phi)^2} \ . \tag{6.91b}$$

Данная неустойчивость может приводить к дополнительному расслоению импульса в поперечном направлении и смещению центра масс пучка. Для демонстрации смещения центра масс пучка будем вычислять момент первого порядка

$$\langle x(z,\tau) \rangle = \frac{\tau_p}{\mathcal{I}_o} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x |a(z,x,\tau)|^2 dx \tag{6.92}$$

с целью последующего сравнения с результатами аналитического исследования.

Для детального исследования *шланговой неустойчивости* зададим начальное распределение лазерного поля, близкое к тому, которое рассматривалось в работе [96]

$$a(x,\tau) = a_o \exp\left[-\ln 4 \frac{\tau^2}{\tau_p^2} - \ln 4 \left(x - d_1 \frac{\tau}{\tau_p} \right)^2 + i\tau \right] \ . \tag{6.93}$$

На рисунке 6.14 приведены типичные распределения профилей интенсивности лазерного импульса для разных значений коэффициента d_1. Как следует из данного рисунка, при увеличении значения коэффициента d_1 имеет место поворот главной оси эллиптической структуры пространственно ограниченного импульса, что соответствует все большему отклонению направления распространения лазерного импульса от оси z.

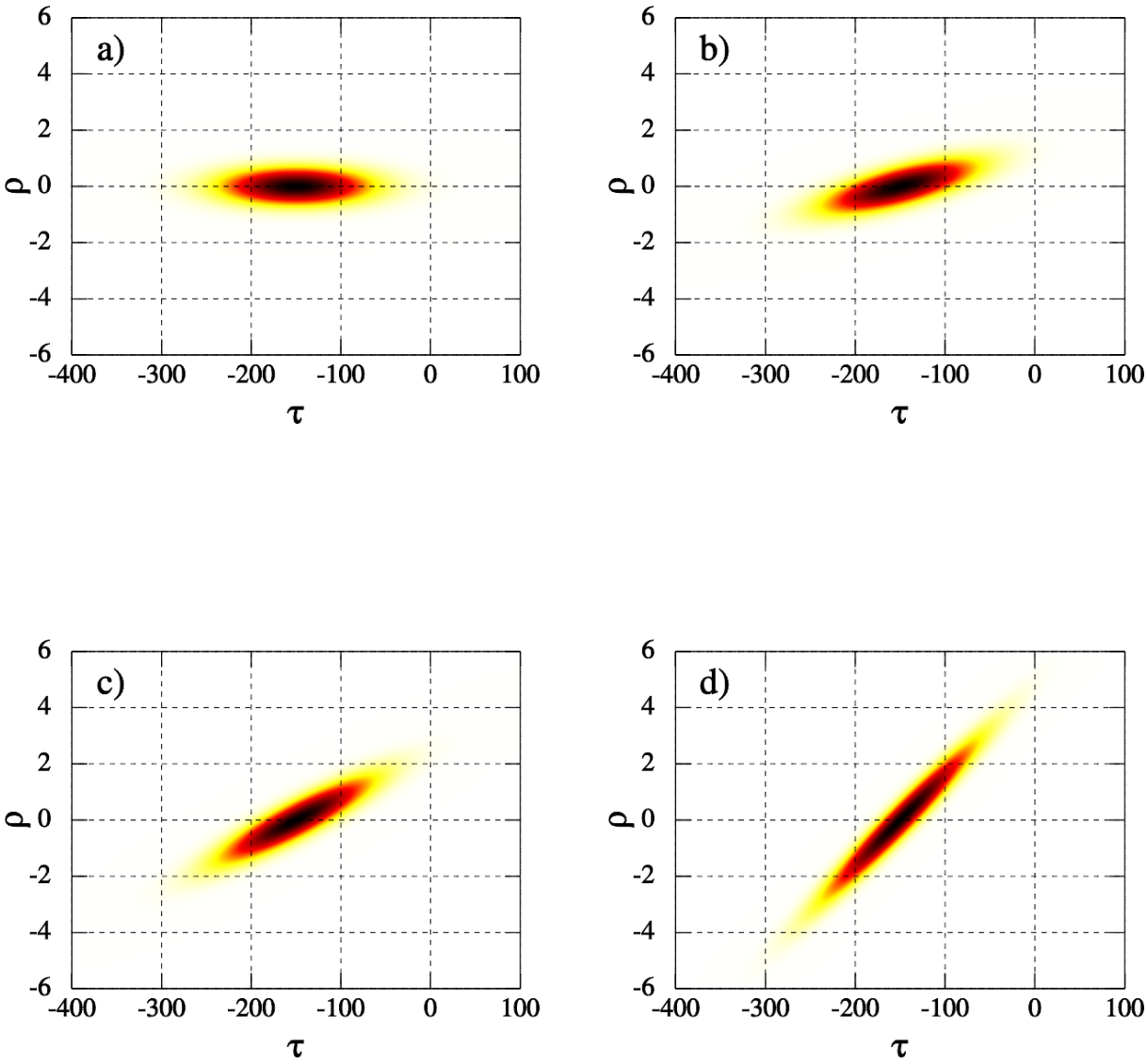


Рис. 6.14: Профили интенсивностей лазерных импульсов (6.93) для четырех случаев: **(a)** $d_1 = 0$; **(b)** $d_1 = 1$; **(c)** $d_1 = 2$; **(d)** $d_1 = 4$.

Численное моделирование показывает следующее. На рисунках 6.15-6.16 представлена динамика интенсивности лазерных импульсов для разных значений коэффициента d_1. Здесь синей пунктирной линией показано начальное временное распределение импульса на оси пучка, красной линией – текущий временной профиль импульса на оси пучка, зеленой линией с малым пунктиром – текущий временной профиль импульса при $x = x^\star$ (где поле достигает максимальное значение по поперечной координате). На рисунке 6.15**(a)** представлена динамика лазерного импульса для случая $d_1 = 0$. Как видно из данного рисунка, пространственно-временное распределение импульса в результате нестационарной самофокусировки принимает форму рупора, раскрывающегося в направлении переднего фронта импульса, и центр масс волнового пучка не смещается в поперечном направлении, т.е. $\dfrac{\partial \langle x(\tau, z)\rangle}{\partial z} = 0$. Отметим, что в результате нестационарного самовоздействия происходит коротковолновая модуляция импульса только в продольном направлении.

Однако при $d_1 \neq 0$ имеет место более сложная динамика пространственно-временной структуры волнового поля, а именно происходит расслоение импульса как в продольном, так и в поперечном направлениях. Как следует из рисунков 6.15**(b)**, 6.16**(a,b)** в эволюции волнового пакета можно выделить два этапа. Сначала происходит поворот главной оси эллиптической структуры пространственно-ограниченного импульса по часовой стрелке (в соответствии с направлением групповой скорости лазерного импульса), сопровождаемый процессом самофокусировки излучения в поперечном направлении. А затем, как видно на рисунках при $z \sim 0.3$, стартует процесс расслоения лазерного импульса в поперечном направлении. Причем, как видно на рисунках, положение $x = x^\star$ (где интенсивность лазерного импульса достигает максимального значения) смещается в область отрицательных значений (см. нижнюю ставку). На верхней вставке приведена зависимость центра масс пучка от z и τ. На рисунках видно, что центр масс пучка смещается только в одну сторону, что согласуется с качественным анализом, который будет представлен далее. Следует отметить, что с увеличением коэффициента d_1 происходит сильное дробление волнового пучка, сопровождаемое значительным смещением центра масс пучка $\langle x(z, \tau)\rangle$.

Формирование такой сложной структуры лазерного импульса можно понять из следующих соображений. Как следует из рисунка 6.15**(a)**, при $d_1 = 0$ имело место дробление импульса только во временной области. Это расслоение можно трактовать как попутное рассеяние лазерного импульса на неоднородностях возмущения концентрации плазмы. Очевидно, что при $d_1 \neq 0$ имеет место уменьшение эффек-

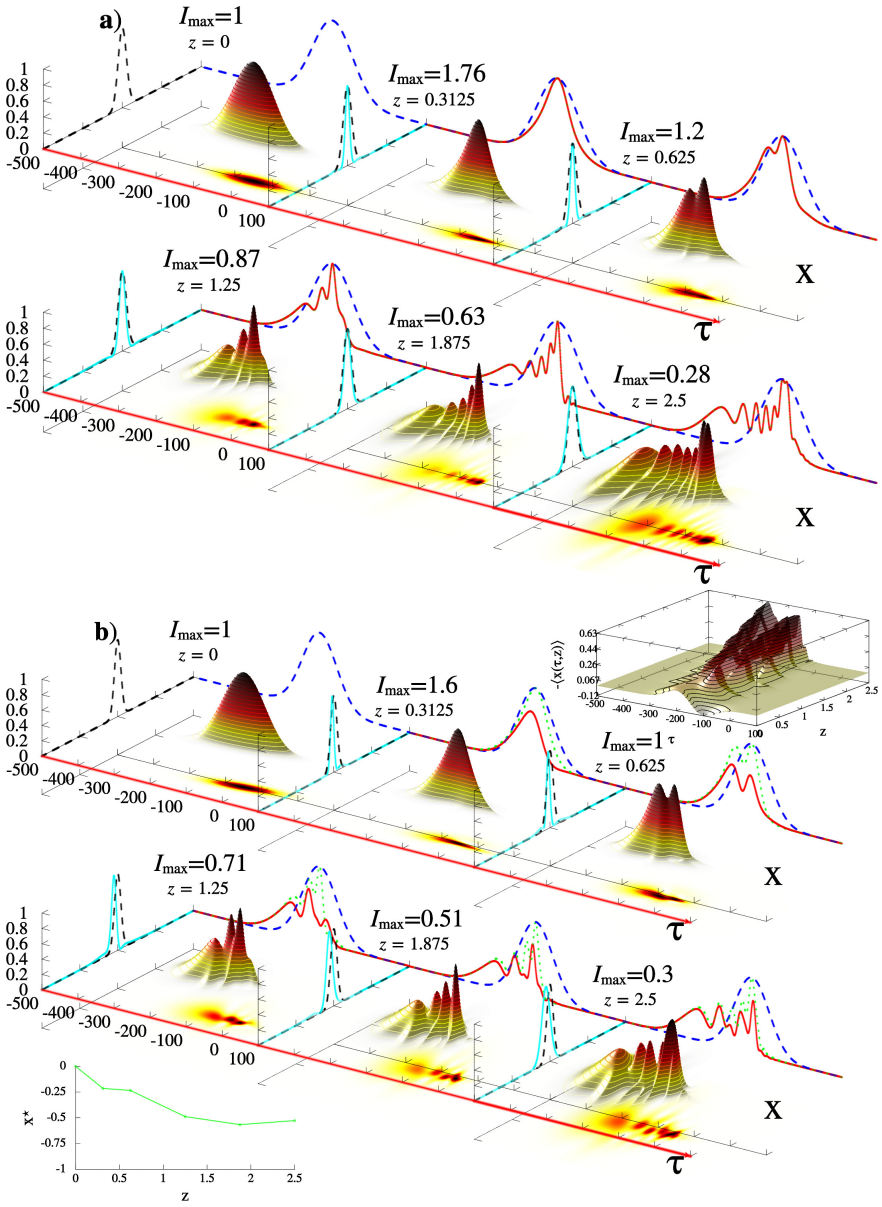


Рис. 6.15: Динамика интенсивности лазерного импульса $I(z,x,\tau) = |\mathcal{E}(z,x,\tau)|^2$ для двух случаев: **a)** $d_1 = 0$, $\tau_p = 40\pi$, $a_o = 1.3$, $\tau_p = 0.18T_{pl}$; **(b)** $d_1 = 0.5$, $\tau_p = 40\pi$, $a_o = 1.3$, $\tau_p = 0.18T_{pl}$. На верхней правой ставке приведена зависимость центра масс волнового пучка $\langle x(z,\tau)\rangle$; на нижней ставке приведена зависимость $x^\star$ (координата, где интенсивность поля достигает максимального значения) от z. Здесь синяя пунктирная линия – начальный временный профиль лазерного импульса на оси пучка; красная линия – текущий временной профиль импульса на оси пучка; зеленая линия с малым штрихом – временной профиль импульса при $x = x^\star$; черная пунктирная линия – начальное распределение интенсивности поля в поперечном направлении; голубая линия – текущее распределение лазерного импульса в поперечном направлении.

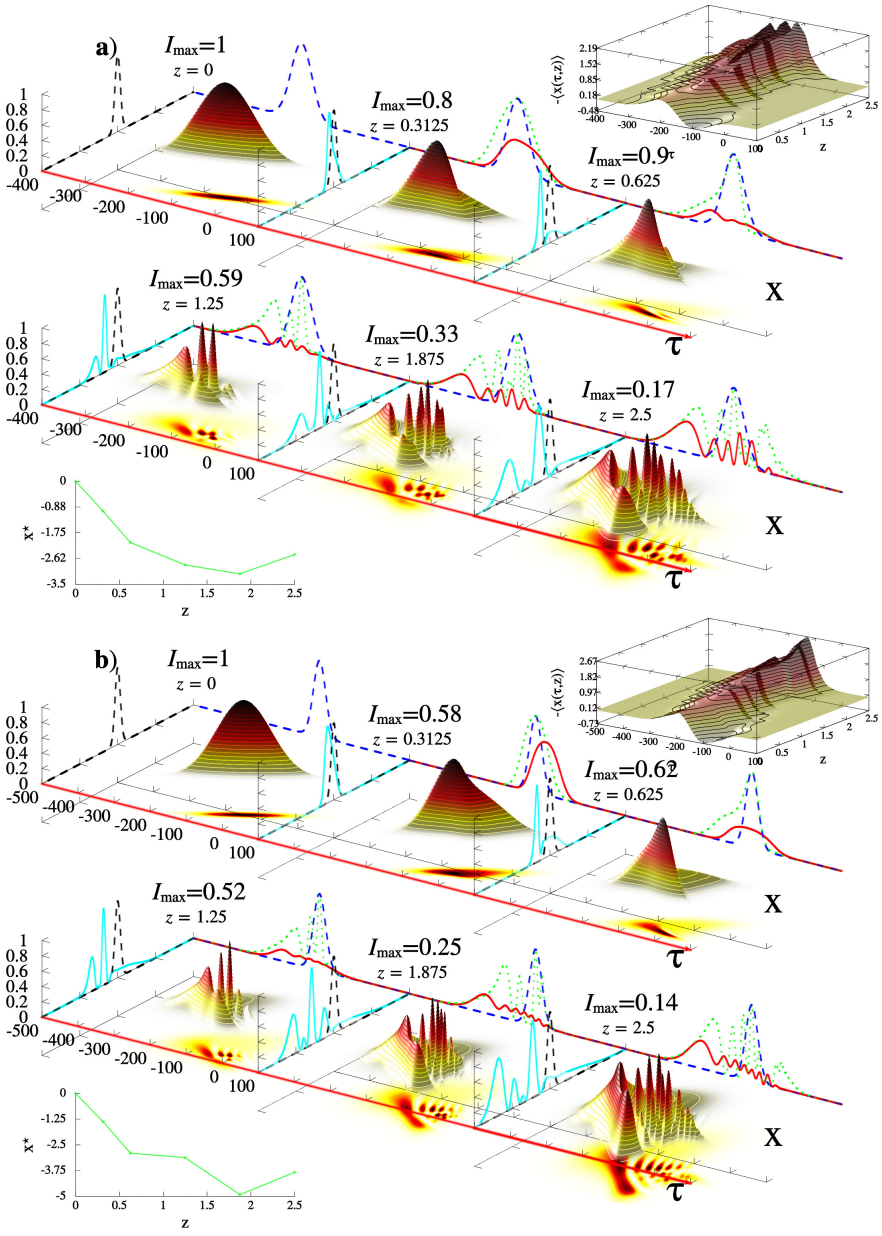


Рис. 6.16: Динамика интенсивности лазерного импульса $I(z,x,\tau) = |\mathcal{E}(z,x,\tau)|^2$ для двух случаев: **a)** $d_1 = 2$, $\tau_p = 40\pi$, $a_o = 1.6$, $\tau_p = 0.18T_{pl}$; **(b)** $d_1 = 3$, $\tau_p = 40\pi$, $a_o = 1.8$, $\tau_p = 0.18T_{pl}$. На верхней правой вставке приведена зависимость центра масс волнового пучка $\langle x(z,\tau)\rangle$; на нижней вставке приведена зависимость $x^\star$ (координата, где интенсивность поля достигает максимального значения) от z. Здесь синяя пунктирная линия – начальный временный профиль лазерного импульса на оси пучка; красная линия – текущий временной профиль импульса на оси пучка; зеленая линия с малым штрихом – временной профиль импульса при $x = x^\star$; черная пунктирная линия – начальное распределение интенсивности поля в поперечном направлении; голубая линия – текущее распределение лазерного импульса в поперечном направлении.

тивной длительности импульса из-за поворота главной оси эллиптической структуры пространственно ограниченного импульса относительно оси τ. Это ясно проиллюстрировано на рисунках 6.15**(b)**, 6.16**(a,b)**. Видно, что с увеличением значения коэффициента d_1 имеет место уменьшение длительности начального импульса на оси пучка (синяя пунктирная линия по продольной координате при $z = 0$). Очевидно, что при фиксированной концентрации фоновой плазмы ухудшается возбуждение плазменной волны в продольном направлении, но под некоторым углом плазменная волна будет хорошо возбуждаться. Поэтому эффективное рассеяние импульса будет теперь происходить эффективно не на оси пучка. Следовательно, формируемую структуру импульса при $d_1 \neq 0$ можно рассматривать как следствие поворота структуры импульса при $d_1 = 0$ на некоторый угол в системе координат, связанной с центром масс пучка, в связи с чем и происходит расслоение лазерного импульса как в продольном, так и в поперечном направлениях.

На рисунке 6.17 приведены зависимости момента первого порядка $\langle x(z, \tau^\star)\rangle$ от эволюционной переменной z при $\tau = \tau^\star$ для двух разных значений коэффициента d_1: **a)** $d_1 = 2$; **b)** $d_1 = 3$ и при разных начальных амплитудах a_0. Здесь $\tau^\star$ – момент времени, когда $\langle x(z, \tau)\rangle$ достигает максимального значения при фиксированном z. Как видно из данных рисунков, центр масс волнового пучка смещается по линейному закону ($\langle x\rangle \sim z$). В целом, как следует из рисунка, с увеличением значения коэффициента d_1 при фиксированной длине нелинейной среды для наблюдения одинакового смещения центра масс пучка необходимо также увеличивать начальную амплитуду a_0. Это можно пояснить следующим образом: с увеличением коэффициента d_1 растет угол между главной осью эллиптической структуры пространственно-ограниченного импульса и оси распространения импульса, следовательно для компенсации данного поворота необходимо увеличивать амплитуду, поскольку как было показано ранее, на начальной стадии неустойчивости (см. рисунки 6.15, 6.16) происходит самофокусировка и поворот профиля интенсивности в плоскости (τ, x), и скорость данного поворота зависит от начальной амплитуды. Обратимся теперь к качественному анализу.

Для качественного исследования смещения центра масс волнового пучка $\langle x(z)\rangle$ из-за нестационарности нелинейного отклика среды для ультракороткого импульса ($\tau_p \ll 2\pi/\omega_p$) в редкой плазме ($\omega_p^2/\omega_o^2 \ll 1$) мы обратимся к следующей системе

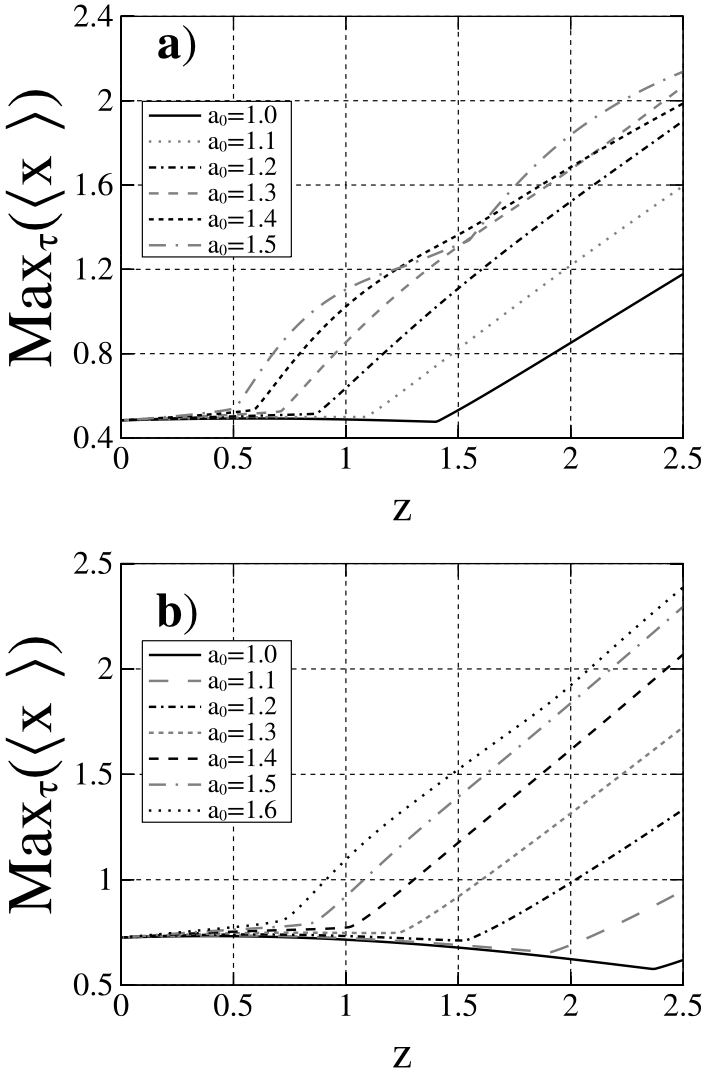


Рис. 6.17: Зависимости момента первого порядка $\langle x(z,\tau^\star)\rangle$ от эволюционной переменной z при $\tau = \tau^\star$ для двух разных значений коэффициента d_1: **a)** $d_1 = 2$; **b)** $d_1 = 3$ и при разных начальных амплитудах a_o. Здесь $\tau^\star$ – момент времени, когда $\langle x(z,\tau)\rangle$ достигает максимального значения при фиксированном z.

уравнений для огибающей волнового пакета $\mathcal{B}(z,x,\tau)$

$$i\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}+\Delta_{\perp}\mathcal{B}+\mathcal{B}\phi=0 \tag{6.94a}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2}=\frac{1}{2}|\mathcal{B}|^4\ , \tag{6.94b}$$

в которой отсутствуют эффекты, связанные с дисперсией фоновой плазмы и насыщением нелинейного отклика среды. Здесь $\mathcal{B}$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда векторного потенциала $a(z,x,\tau)$. Используя уравнение непрерывности для векторного потенциала

$$i\frac{\partial|\mathcal{B}|^2}{\partial z}=\nabla_{\perp}\left(\mathcal{B}\nabla_{\perp}\mathcal{B}^{\star}-\mathcal{B}^{\star}\nabla_{\perp}\mathcal{B}\right)\ , \tag{6.95}$$

можно получить выражение для изменения центра масс волнового пучка $\mathcal{R}(z,\tau)$

$$\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial z^2}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\phi}{\partial x}|\mathcal{B}|^2dx\ , \tag{6.96a}$$

$$\mathcal{R}(z,\tau)=\frac{1}{\mathcal{I}_o}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x|\mathcal{B}|^2dx\ , \tag{6.96b}$$

где $\mathcal{I}_o=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\mathcal{B}|^2dxd\tau$ – энергия в лазерном импульсе. Как следует из выражения (6.96a) для $\mathcal{R}(z,\tau)$, по мере распространения волнового пакета в среде в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны будет происходит смещение пучка в поперечном направлении. Очевидно, что для упрощения анализа задачи удобно перейти в систему координат, связанную с центром масс пучка $\xi=x+\mathcal{R}$ подобно тому, как было сделано в работе [120].

С учетом соотношения

$$\frac{\partial\mathcal{B}(z,x,\tau)}{\partial z}=\frac{\partial\mathcal{B}(z,\xi,\tau)}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{B}(z,\xi,\tau)}{\partial\xi} \tag{6.97}$$

уравнение (6.94a) примет следующий вид

$$i\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}+i\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial\xi^2}+\phi\mathcal{B}=0\ . \tag{6.98}$$

Если перейти к новой функции $\mathcal{A}(z,\xi,\tau)$

$$\Psi=\mathcal{A}\exp\left(\frac{i}{4}\int\limits_{0}^{z}\left(\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial z}\right)^2dz-\frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial z}\xi\right)\ , \tag{6.99}$$

то уравнение для огибающей векторного потенциала (6.98) можно переписать в следующем виде

$$i\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \left(\phi + \frac{\xi}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial z^2}\right)\mathcal{A} = 0 \ . \tag{6.100}$$

Теперь обратимся к уравнению для плазменной волны (6.94b) и перепишем его так же в системе координат, связанной с центром масс пучка. Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial \phi(z,x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi(z,\xi,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tau}\frac{\partial \phi(z,\xi,\tau)}{\partial \xi} \ , \tag{6.101}$$

получаем уравнение для плазменной волны

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \tau^2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tau}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^4 \ . \tag{6.102}$$

Будем искать решение уравнения (6.102) в следующем виде

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \xi + \phi_2 \frac{\xi^2}{2} \ . \tag{6.103}$$

Как видно из результатов численного моделирования (см. рисунок 6.17), радиус кривизны траектории центра масс пучка $\left[\mathcal{R}_c = \frac{\left(\frac{d\mathcal{R}}{dz}\right)^2}{\left(\frac{d^2 R}{dz^2}\right)}\right]$ много больше радиуса волнового пучка. Это позволяет в дальнейшем рассматривать симметричные (относительно траектории центра масс пучка) распределения поля. Коэффициент ϕ_1 выберем из условия обращения в ноль линейно зависящей от ξ части показателя преломления среды в уравнении (6.100). В результате находим

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial z^2} \ . \tag{6.104}$$

Далее будем полагать, что распределение интенсивности лазерного излучения имеет гауссову форму

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{p(\tau)}{a^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{a^2}\right) \ , \tag{6.105}$$

где p определяется превышением мощности излучения над критической для самофокусировки, a – ширина пучка. В результате для коэффициентов разложения (6.103) в приосевом приближении находим

$$\frac{d^2 \phi_1}{d\tau^2} + 2\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tau}\frac{d\phi_2}{d\tau} + \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \tau^2}\phi_2 = 0 \ , \tag{6.106a}$$

$$\frac{d^2 \phi_2}{d\tau^2} = -\frac{p^2}{a^4} \ . \tag{6.106b}$$

Кроме того, из уравнения для лазерного поля (6.100) в автомодельном режиме нестационарного самовоздействия, как в [204], нетрудно получить

$$\phi_2 \simeq -\frac{1}{a^4} \ , \tag{6.107}$$

и преобразовать (6.106b) к виду

$$\frac{d^2\phi_2}{d\tau^2} = p^2\phi_2 \ . \tag{6.108}$$

Используя соответствующее решение $\phi_2 = -\exp(p\tau)$ из (6.108), найдем уравнение для траектории центра масс пучка

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^4\mathcal{R}}{\partial z^2\partial\tau^2} + 2p\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\tau}\exp(p\tau) + \frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial\tau^2}\exp(p\tau) = 0 \ . \tag{6.109}$$

Данное уравнение можно записать более компактно, если ввести следующие переменные: $z = \dfrac{\tilde{z}}{\sqrt{2p}}$, $\eta = \dfrac{\exp(p\tau)}{p}$, $\mathcal{U} = \dfrac{\partial\mathcal{R}}{\partial\tau}$

$$\frac{\partial^2}{\partial\tilde{z}^2}\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\eta} + \eta\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\eta} + 2\mathcal{U} = 0 \ . \tag{6.110}$$

Как отмечалось ранее, для проведения качественного анализа системы мы пренебрегли влиянием дисперсии фоновой плазмы и насыщением нелинейности на динамику лазерного импульса, поэтому мы ограничены малыми $\tilde{z}$. В связи с этим будем искать решение уравнения (6.110) в виде

$$\mathcal{U}(\tilde{z},\eta) \simeq a_0(\eta) + a_1(\eta)\tilde{z} + a_2(\eta)\tilde{z}^2 + a_3(\eta)\tilde{z}^3 \ . \tag{6.111}$$

Подставляя (6.111) в уравнение (6.110), получим решение

$$\mathcal{U}(\tilde{z},\eta) \simeq \frac{1}{\eta^2}\left[C_0 + C_1\tilde{z} + C_2\tilde{z}^2 + C_3\tilde{z}^3\right] - \frac{4}{\eta^3}\left[C_2 + 3C_3\tilde{z}\right] \ , \tag{6.112}$$

где C_0, C_1, C_2, C_3 – константы, определяемые из начальных условий задачи. Таким образом, можно получить окончательное решение для центра тяжести пучка $\mathcal{R}(\tilde{z},\tau)$

$$\mathcal{R}(\tilde{z},\tau) \simeq \frac{p}{2}\left[C_0 + C_1\tilde{z} + C_2\tilde{z}^2 + C_3\tilde{z}^3\right]\left[1 - e^{-2p\tau}\right] - \\ - \frac{4}{3}p^2\left[C_2 + 3C_3\tilde{z}\right]\left[1 - e^{-3p\tau}\right] \ . \tag{6.113}$$

Как следует из выражения (6.113), центр масс пучка $\mathcal{R}(\tilde{z})$ при значительном превышении мощности над критической мощностью самофокусировки ($p \gg 1$) в основном

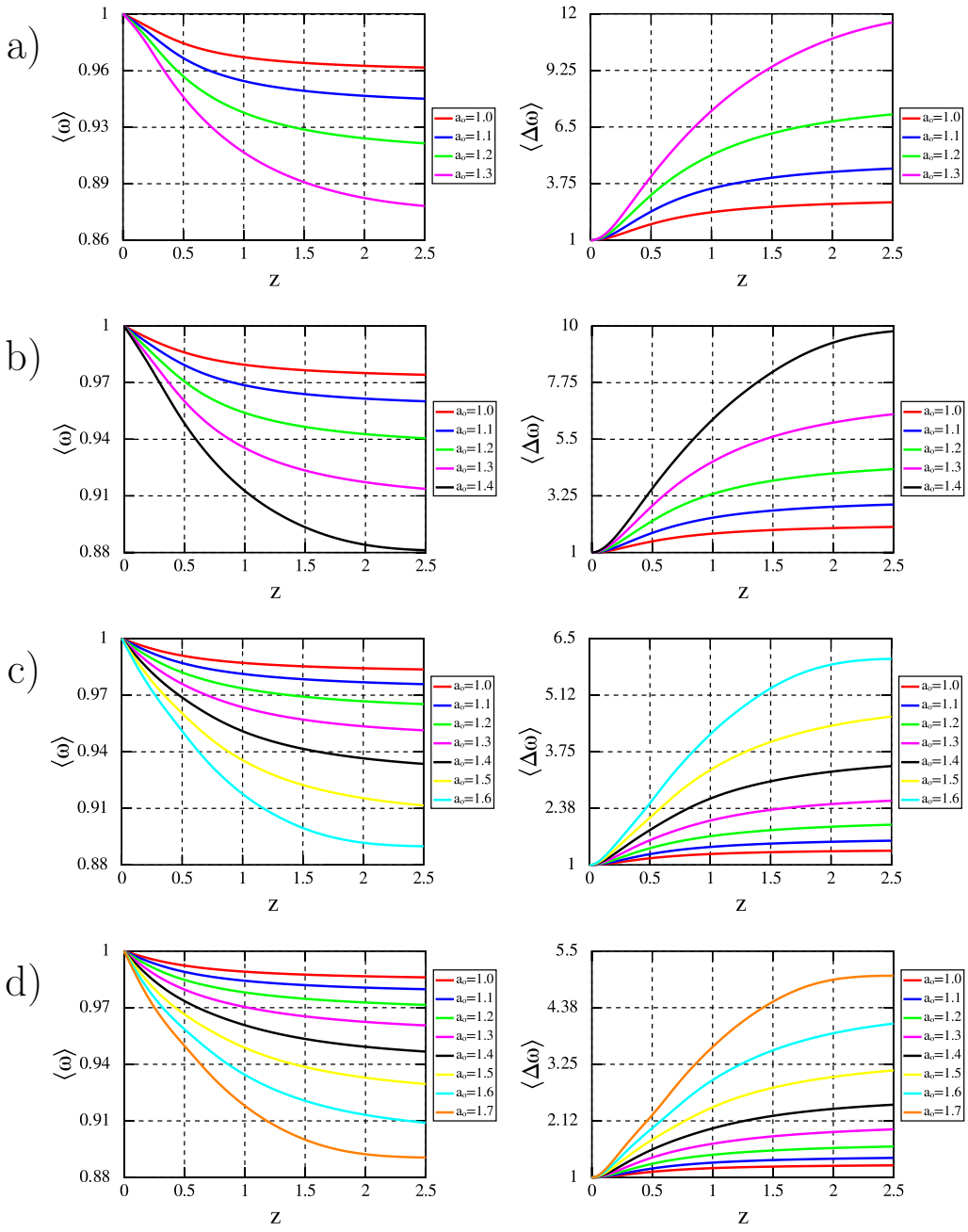


Рис. 6.18: На рисунке представлены зависимости средней частоты $\langle\omega\rangle$ (левый график) и средней ширины спектра лазерного импульса $\langle\Delta\omega\rangle$ (правый график) в зависимости от начальных амплитуд a_o и значений коэффициента d_1: **a)** $d_1 = 0.5$, **b)** $d_1 = 1$, **(c)** $d_1 = 2$, **(d)** $d_1 = 2.5$. Лазерный импульс задавался в виде (6.93) при $\tau_p = 40\pi$.

определяется только вторым слагаемым, т.е. $\mathcal{R} \sim p^{3/2} C_3 z$, где C_3 определяется коэффициентом d_1. Это очень хорошо согласуется с результатами численного моделирования (см. рисунок 6.17).

Как отмечалось во введении данного раздела, мотивацией исследования шланговой неустойчивости является анализ влияния этого явления на процесс укорочения лазерного импульса. Очевидно, что необходимым условием для укорочения лазерного импульса является уширение спектра излучения волнового пакета. Поэтому рассмотрим далее влияние шланговой неустойчивости на процесс уширения спектра. На рисунке 6.18 представлены результаты по модификации спектра релятивистски сильного лазерного импульса (6.93) в условиях возбуждения плазменной волны, основанные на численном решении системы уравнений (6.91). Зависимости величины сдвига средней несущей частоты

$$\mathcal{I} \cdot \langle \omega(z) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbf{r}_\perp} \omega |a(z, \omega, r)|^2 dr_\perp d\omega \tag{6.114}$$

и средней ширины спектра

$$\mathcal{I} \cdot \langle \Delta\omega(z) \rangle]^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbf{r}_\perp} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |a(z, \omega, r)|^2 dr_\perp d\omega \tag{6.115}$$

от начальных параметров импульса (a_o, d_1) представлены на рисунке 6.18. Как следует из рисунка 6.18, сдвиг несущей частоты $\langle \omega(z) \rangle$ и уширение спектра $\langle \Delta\omega(z) \rangle$ ухудшаются с увеличением значения коэффициента d_1. Очевидно, что изменение коэффициента d_1 (что соответствует изменению эффективной длительности волнового пакета τ_p) при неизменной концентрации фоновой плазмы n_o будет приводить к изменению эффективности возбуждения кильватерной плазменной волны. Это видно из выражения для возмущения концентрации плазмы $\dfrac{\delta n}{n_o}$ при $a_o < 1$

$$\frac{\delta n(\tau)}{n_o} \sim \frac{a_o^2}{2} \omega_{pl} \tau_p \exp\left(-\frac{\omega_{pl}^2 \tau_p^2}{4}\right) \sin(\omega_{pl} \tau) \ . \tag{6.116}$$

Увеличение коэффициента d_1 будет приводить к ухудшению самовоздействия волнового пакета (из-за уменьшения $\dfrac{\delta n}{n_o}$) и, соответственно, к ухудшению уширения спектра лазерного излучения. Следовательно, это будет вести к уменьшению степени самокомпрессии лазерного импульса, поскольку уширение спектра является необходимым условием сжатия волнового пакета.

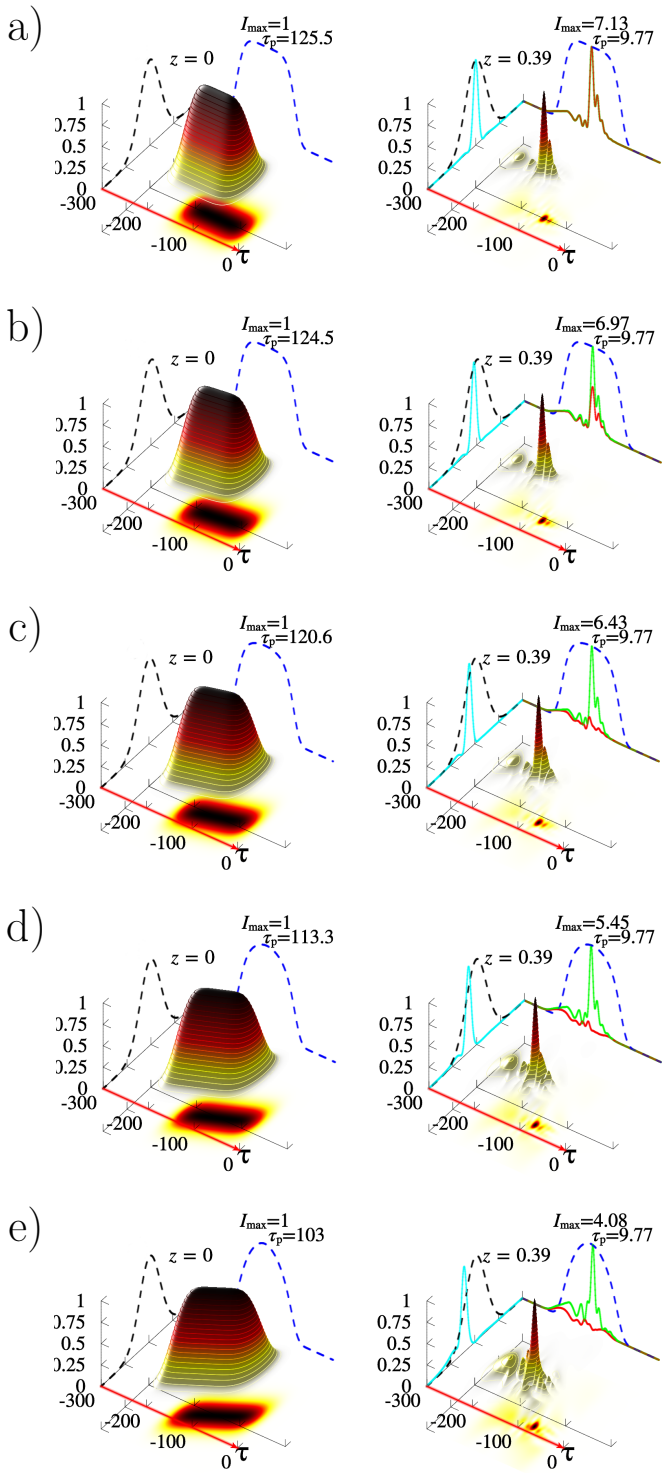


Рис. 6.19: Результаты самокомпрессии лазерного импульса, заданного на входе в нелинейную среду в виде (6.117) $[a_o = 1.2,\ \kappa = 0.83,\ \tau_p = 40\pi]$, при разных значениях коэффициента d_1: **a)** $d_1 = 0$, **b)** $d_1 = 0.5$, **c)** $d_1 = 1$, **(d)** $d_1 = 1.5$, **(e)** $d_1 = 2$. С левой стороны представлено начальное распределение интенсивности поля, а с правой – результат численного моделирования системы уравнений (6.91). Здесь пунктирные линии – начальные распределения импульса в продольном и в поперечных направлениях.

Как видно из рисунков 6.15-6.16, заметное расслоение лазерного импульса как в продольном, так и в поперечном направлениях происходит на трассе порядка $z \sim 1$, что соответствует четырем рэлеевским длинам. Поэтому для наблюдения возможного самосжатия лазерного импульса нужно подобрать такие начальные параметры волнового пакета (профиль импульса, начальная амплитуда), чтобы длина нелинейной среды, на которой импульс укоротится значительно, была меньше $z \sim 1$. На рисунке 6.19 приведены результаты самокомпресии лазерного импульса, заданного на входе нелинейной среды в виде

$$a(x,\tau) = a_o \exp\left[-\frac{\ln 2}{2}\left(x - d_1\frac{\tau}{\tau_p}\right)^2 - 32\ln 2\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right)^6\right] \tag{6.117}$$

при $a_o = 1.2$, $\tau_p = 40\pi$, что соответствует для двухмерной задачи при коэффициенте $d_1 = 0$ лазерному импульсу с мощностью 10 ПВт. Как видно из рисунка 6.19, найденная ранее неустойчивость не влияет на процесс укорочения волнового пакета. Однако поворот главной оси эллипса пространственно ограниченного импульса (при изменении коэффициента d_1) приводит к уменьшению амплитуды сжатого импульса и к ухудшению временной структуры волнового пакета. Это проявляется в появлении в передней части волнового пакета осцилляций (см. рисунок 6.19). Ухудшение качества временной формы волнового пакета связано с ослаблением фазовой самомодуляции при увеличении коэффициента d_1, так как возмущение концентрации плазмы зависит от длительности волнового пакета (см. (6.116)). Однако длительность выходного лазерного импульса (как следует из рисунка), определяемая по уровню половины интенсивности, сохраняется при изменении коэффициента d_1 (данный коэффициент характеризует отклонение лазерного пучка от направления распространения) в рассматриваемых нами пределах $d_1 \leq 2.5$. Это связано с тем, что для устранения филаментационной неустойчивости [214] нами выбран режим, в котором не происходит резонансного возбуждения плазменной волны ($\omega_{pl}\tau_p \ll 1$).

В данном разделе проведено аналитическое и численное исследование шланговой неустойчивости в случае, когда длительность лазерного импульса меньше периода кильватерной плазменной волны. Показано, что для таких лазерных импульсов данная неустойчивость подавлена. Это подтверждает выводы, сделанные в предыдущем разделе [20, 21] относительно возможности значительного укорочения вплоть до одного периода колебаний поля в плазме с докритической концентрацией электронов лазерного импульса с мощностью около 10 ПВт.

6.7 Экспериментальные результаты по укорочению лазерных импульсов в условиях возбуждения плазменной волны

В данном разделе будут представлены результаты экспериментальных и численных исследований самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны, когда начальная длительность волнового пакета сопоставима с периодом плазменной волны. Сначала мы внимательно изучим временные характеристики скомпрессированных лазерных импульсов до длительности 10 фс, используя спектральную фазовую интерферометрию для непосредственной реконструкции электрического поля (SPIDER) после прохождения 100 ТВт, 30 фс лазерного импульса через газовую струю длиной 2 мм. В дальнейшем эти экспериментальные данные были непосредственно сравнены с результатами численного расчетов, полученных на основе 3D PIC моделирования, показывая, что самосжатие волнового пакета происходит совместно с эффектом самофокусировки и фактически основано на возбуждении плазменной волны. Затем на основе упрощенной трехмерной гидродинамической модели (6.10), основанной на квазиодномерном описании возбуждения плазменной волны, которая хорошо качественно согласуется с PIC моделированием и экспериментами, была использована нами для оптимизации с целью генерации лазерных импульсов с малым числом колебаний поля.

Важно отметить, что предыдущие эксперименты в релятивистском режиме [70,162] подтвердили общие прогнозы по укорочению лазерных импульсов в плазменной волне, возбужденной волновым пакетом. Однако, делая шаг вперед по направлению к импульсам с малым числом колебаний поля, мы воспользовались SPIDER-техникой для полного описания волнового пакета, которая доказала свою исключительную пригодность как метода для характеризации для 10 фс лазерных импульсов во временной области [72].

Эксперимент был проведен на твердотельной Ti:Sa лазерной системе (ARCTURUS; 100 ТВт, 30 фс, 800 нм, 10 Гц). Линейно поляризованный лазерный импульс с энергией 1.8 Дж был сфокусирован внеосевой параболой $f/7$ в газовую струю с гелием с фокальным размером с диаметром около 10 мкм, которая обеспечила интенсивность 4×10^{19} Вт/см^2 в вакууме, что соответствует амплитуде безразмерного потенциала $a_o = 4$. Длина газовой струи около 2 мм, а концентрация электронов

менялась в диапазоне $\mathcal{N}_e = (3 \div 15) \times 10^{18}$ см$^{-3}$ посредством изменения давления газа.

Прошедший импульс измерялся коллимированием центральной части лазерного пучка. На рисунке 6.20 показаны SPIDER интерферограммы, спектр импульса (правый график), восстановленные профили интенсивности и фазы (центральные графики) во временной области для электронных плотностей 6.6×10^{18} см$^{-3}$ **(a)** и 1.3×10^{19} см$^{-3}$ **(b)**, соответственно.

Случай низкой плотности (см. рисунок 6.20**(a)**) соответствует плазменной длине волны $\lambda_p = \dfrac{2\pi c}{\omega_{pl}} = 13$ мкм $\left[\omega_{pl} = \sqrt{\dfrac{4\pi e^2 \mathcal{N}_e}{m}}\right.$ – плазменная частота$\left.\right]$, которая превышает длину лазерного импульса $c\tau_p = 9$ мкм. Длительность восстановленного выходного лазерного импульса составляет 10 фс, т.е. коэффициент сжатия составляет ~ 3 (начальная длительность импульса – 30 фс) после прохождения газовой струи длиной 2 мм. В самом деле, как показано ниже, это подтверждается также численным моделированием, указывающим, что оптимальное укорочение длительности лазерного импульса происходит именно на расстоянии 2 мм. Однако для увеличения коэффициента сжатия и получения суб-10 фс волновых пакетов можно использовать более высокие плотности плазмы, так как длина эффективного взаимодействия обратно пропорциональна плотности плазмы $\mathcal{N}_e$. Действительно, в случае более плотной плазмы (см. рисунок 6.20**(b)**), спектр волнового пакета существенно шире, что соответствует спектрально-ограниченному лазерному импульсу длительностью 5 фс, но восстановленный экспериментальный выходной волновой пакет состоит из трех субимпульсов с длительностями между 7 и 10 фс. Важно отметить, что временное разрешение техники SPIDER был около 10 фс. Суммируя полученные результаты, мы можем предложить следующий сценарий взаимодействия: в течение распространения лазерного импульса в плазме имеет место продолжительная компрессия, сопровождаемая эффектом самофокусировки, сжимая пучок в поперечном направлении. Однако существует оптимальная длина компрессии, где лазерный импульс имеет минимальную длительность. При высоких плотностях плазмы мы можем предположить, что оптимальная длина компрессии меньше, чем ширина плазмы, то есть 2 мм, или рамановская неустойчивость разрушает компрессию волнового пакета для входного импульса с длиной $c\tau_p$, сравнимой с плазменной длиной волны λ_p.

Чтобы должным образом проверить эти результаты и оптимизировать генерацию лазерных импульсов с малым числом колебаний поля, мы использовали два

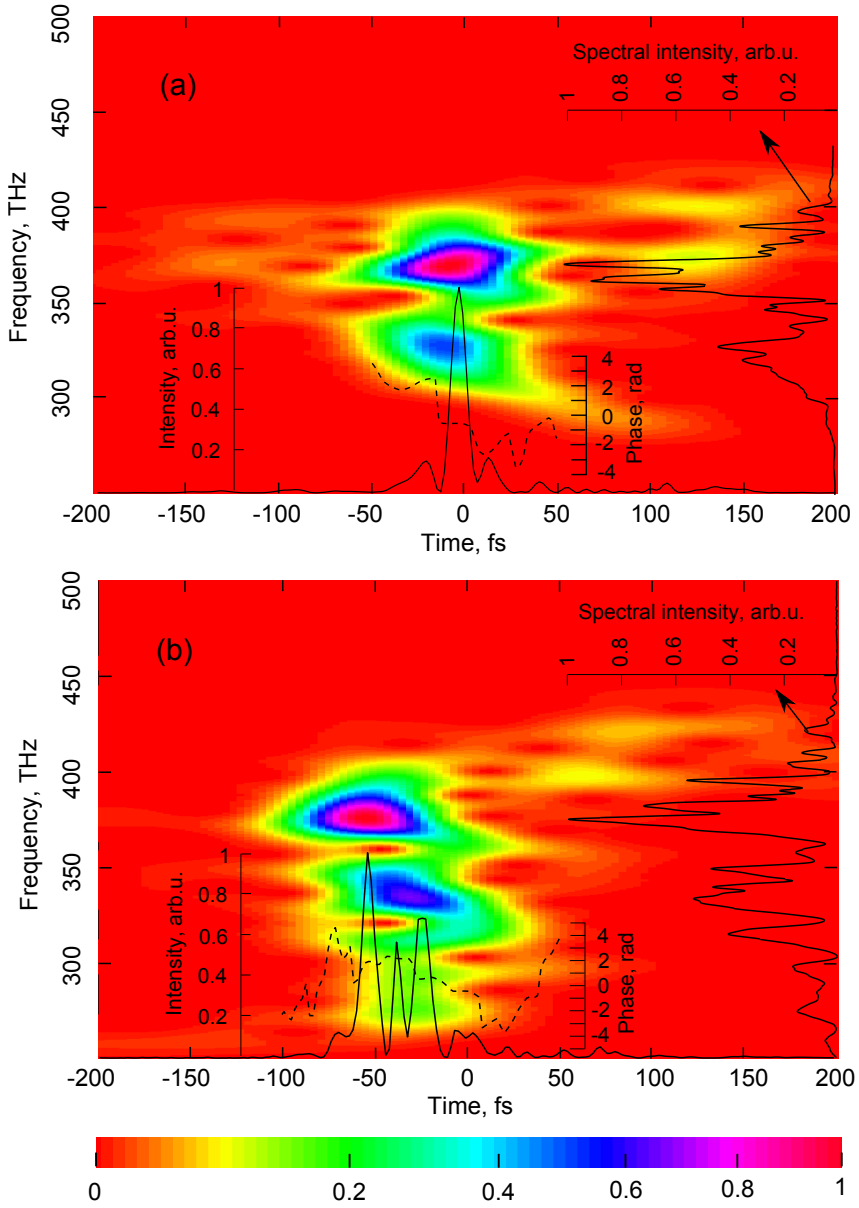


Рис. 6.20: SPIDER интерферограммы, спектр импульса (правый график), восстановленные профили интенсивности и фазы (центральный график) во временной области для электронных плотностей $\mathcal{N}_e = 6.6 \times 10^{18}$ см$^{-3}$ **(a)** и $\mathcal{N}_e = 1.3 \times 10^{19}$ см$^{-3}$ **(b)**, соответственно.

численных кода. Первый представляет собой 3D PIC-код, который требует достаточно сильных вычислительных ресурсов для параметров, относящихся к эксперименту, и второй, более упрощенный код, основанный на приближении одномерной гидродинамики для плазменной волны. Полностью релятивистский 3D PIC-код, разработанный ранее, был применен для ускорения протонов [77]. Это позволяет в некоторых случаях проводить количественное сравнение с экспериментальными данными. Коробка расчета перемещалась со скоростью света $125\lambda \times 125\lambda \times 100\lambda$ и содержала $512 \times 512 \times 1024$ ячеек. В каждой ячейке содержалось 8 квазичастиц. Линейно поляризованный лазерный импульс с гауссовой огибающей

$$a(x, y, t) = a_o \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{b^2} - \frac{t^2}{\tau_p^2}\right]$$

в обоих поперечных (x, y) и продольном t направлениях фокусировался на левый край струи плазмы ($z = 0$). Так как в эксперименте длина газовой струи была сопоставима с релеевской длиной, мы выбрали следующие параметры: $a_o = 4$, $b = 20$ мкм, $\tau_p = 30$ фс и однородную гелиевую газовую струю длиной 2 мм. Первоначальная температура электронов и протонов составляла 20 КэВ.

На рисунках 6.21**(a,b)** мы представили результаты численного расчета для плотности плазмы $\mathcal{N}_e = 6.6 \times 10^{18}$ см$^{-3}$, которые согласуются количественно и качественно с экспериментальными данными, показанными на рисунке 6.20**(a)**. Действительно, лазерный импульс непрерывно укорачивается в течение его распространения в плазме, достигая 10 фс на расстоянии 2 мм. Поскольку компрессия импульса сопровождается релятивистской самофокусировкой, диаметр лазерного пучка сокращается с 20 мкм до 10.6 мкм [см. вставку на рисунке 6.21**(b)**], и выходная интенсивность увеличивается до 5.7×10^{19} $\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$. Наиболее важная особенность компрессии заключается в том, что плазменная волна возбуждается квазиодномерным образом, то есть отличительно от «bubble-режима» [151]. Это хорошо согласуется со слабой релятивистской теорией [204] и подтверждает, что электронная плотность контролируется за лазерным импульсом. Действительно, в начале распространения импульса максимальная плотность возбуждаемой плазменной волны составляет порядка $0.5n_c$, что согласуется с одномерным режимом возбуждения в релятивистском режиме. Однако в ходе распространения она уменьшается, но не меньше чем на $0.23n_c$, то есть электроны под действием пондемоторной силы не выходят из области лазерного импульса как в «bubble-режиме», но в основном проходят через него. При более высоких плотностях плазмы ожидается более эффективная компрессия импульса, если только она не

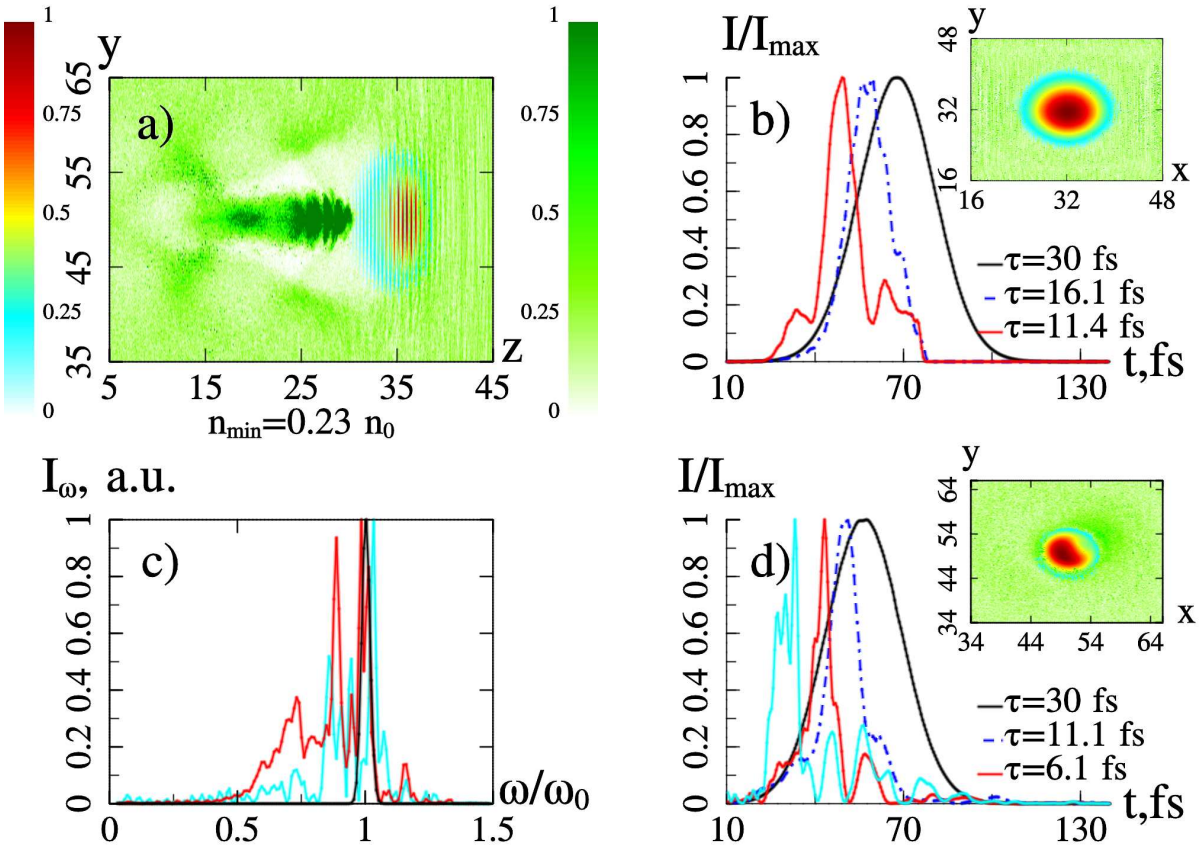


Рис. 6.21: **(a)** Снимок распределения электронной плотности (зеленая шкала) и поля в лазерном импульсе (красная шкала) в момент времени, когда волновой пакет вышел из плазмы длиной 2 мм с концентрацией электронов $\mathcal{N}_e = 6.6 \times 10^{18}$ см$^{-3}$. **(b)** Профили лазерного импульса в разных сечениях z: черная линия - входной импульс ($z = 0$), синяя штрихпунктирная линия - $z = 1.2$ мм, красная линия - $z = 2$ мм (на выходе нелинейной среды). **(c,d)** — Результаты численных расчетов для плазмы длиной 2 мм с концентрацией электронов $\mathcal{N}_e = 1.3 \times 10^{19}$ см$^{-3}$. Черная линия - входной импульс, красная линия — $z = 1.28$ мм и светло-голубая линия - $z = 1.642$ мм соответствуют распределениям спектра импульса и профиля волнового пакета. Синяя штрихпунктирная линия - распределение лазерного импульса при $z = 628$ мкм. На вставках рисунков **(b,d)**: соответствующие профили пучков для двух разных значений концентраций плазмы. **(b)** Диаметр пучка 10.6 мкм (по уровню спадания интенсивности в два раза); **(d)** диаметр пучка - 6.5 мкм.

будет разрушена за счет рамановской или самофокусировочной неустойчивости [79]. Хотя не существует систематических исследований о роли последних при $a_o > 1$ для компрессии импульса, но, тем не менее, с общепринятой точки зрения очевидно, что в сильном релятивистском режиме эти преграды могут быть преодолены с помощью верно подобранных параметров лазерного импульса, особенно его амплитуды, диаметра пучка и длительности импульса. В самом деле, для высоких амплитуд эффективная плазменная частота становится ниже из-за коррекции релятивистской массы, которая уменьшает эффективные нелинейные взаимодействия и может ограничить развитие неустойчивости. Это видно на рисунке 6.21**(d)**, явно демонстрирующем, с одной стороны, компрессию импульса к 6.1 фс на расстоянии 1.28 мм для плотности плазмы $\mathcal{N}_e = 1.3 \times 10^{19}$ см$^{-3}$ и, с другой стороны, подавление искажений лазерного импульса из-за релятивистской самофокусировки и рамановской неустойчивости. Важно отметить, что на дистанции 1.64 мм импульс становится широким (около 8.5 фс) и структурированным, и оба этих фактора увеличиваются в ходе дальнейшего его распространения. Таким образом, сравнивая эти расчеты с экспериментом [см. рисунок 6.20**(b)**], мы можем сделать вывод о том, что компрессия импульса происходит на более короткой дистанции приблизительно в 1 мм. Ультраширокий спектр волнового пакета отражает возможность подобной компрессии [см. рисунок 6.21**(c)**].

Несмотря на удовлетворительность согласования численного моделирования, выполненного с помощью PIC-кода, с экспериментом, следует отметить, что трехмерные расчеты, которые в обязательном порядке необходимы в нашем случае, не могут обеспечить точного описания реального взаимодействия лазерного импульса с плазмой, поскольку имеется высокий уровень флуктуаций, связанный с малым числом квазичастиц в ячейках, которые ограничены нынешними вычислительными мощностями суперкомпьютеров. Кроме того, так как мы заинтересованы в петаваттном классе лазеров, невозможно сделать какие-либо количественные прогнозы такого сравнения. Дабы сделать следующий шаг, мы разработали упрощенный гидродинамический код (см. систему уравнений (6.10)), позволяющий, во-первых, оценить максимальный потенциал схемы компрессии на плазменной волне, и, во-вторых, применить это к петаваттным лазерам системам.

Сначала мы сравнили результаты гидродинамического моделирования (см. рисунок 6.22) с рассчетами на основе PIC-кода и эксперимента. Мы совершенно точно можем сказать, что результаты динамики компрессии импульса для обеих плотностей плазмы находятся в сравнительно хорошем качественном согласии. Для низкой

плотности плазмы $\mathcal{N}_e = 6 \times 10^{18}$ см$^{-3}$ и $a_o = 4$ импульс сжимается, будучи локализованным по всем направлениям, к длительности, сопоставимой с 1.5 колебанием поля, то есть 5 фс на дистанции 2 мм. В то время как для более высоких плотностей $\mathcal{N}_e = 1.3 \times 10^{19}$ см$^{-3}$ и $a_o = 3$ минимальная длительность волнового пакета составляет 1.2 осцилляции поля, то есть 4 фс на дистанции 1.15 мм. В этом случае после прохождения точки компрессии на расстоянии 2 мм импульс разбивается на суб-импульсы, что ясно видно на рисунке 6.22**(b)**. Для сравнения мы также представили на рисунках 6.22**(c,d)** временные профили входного импульса и импульсов с минимальными длительностями вдоль оси, а также их спектры. Интересно, что при высокой плотности плазмы качество компрессии лучше, то есть лазерный импульс (красная линия) лучше локализован и практически не содержит «крыльев»в задней части по сравнению с голубой линией. Следует подчеркнуть, что в течение распространения пик импульса смещается вперед, и его передний край становится круче, делая, таким образом, продольный масштаб меньше поперечного. Из данного моделирования мы можем с уверенностью заявить, что компрессия на плазменной волне способна производить лазерные импульсы с длительностью в несколько осцилляций. В самом деле, в обоих случаях на рис. 6.22 мы действительно получаем импульсы с одним периодом поля и с энергетической эффективностью около 20%.

На рисунке 6.23 мы также показали экспериментальную зависимость длительности лазерного импульса для различных концентраций плазмы вместе с соответствующими результатами оптимизации. Оптимальная интенсивность для компрессии волновых пакетов на кильватерной волне лежит в интервале $a_o \simeq 1 \div 3$, но, чтобы получить наиболее короткую длительность совместно с высокой энергетической эффективностью, плотность плазмы должна быть согласована со входной длительностью лазерного импульса, то есть длина последнего $c\tau_p$ должна быть сопоставима с длиной плазменной волны λ_p. Как видно из рисунка 6.23, для плазмы с длиной 2 мм и входной длительностью 30 фс оптимальная концентрация плазмы составит $\mathcal{N}_e \simeq (0.8 \div 1.2) \times 10^{19}$ см$^{-3}$, завися от интенсивности поля. Например, для $a_0 = 2$ в достаточном широком диапазоне концентрации электронов вокруг 10^{19} см$^{-3}$ (штрихпунктирная голубая линия с точками) можно получить лазерный импульс с длительностью чуть более одного периода поля $\tau_p^{out} \simeq 3.6$ фс с энергетической эффективностью около 20%.

Крайне интригующим вопросом является генерация лазерных импульсов с малым числом колебаний поля с петаваттным уровнем мощности. Отличительная осо-

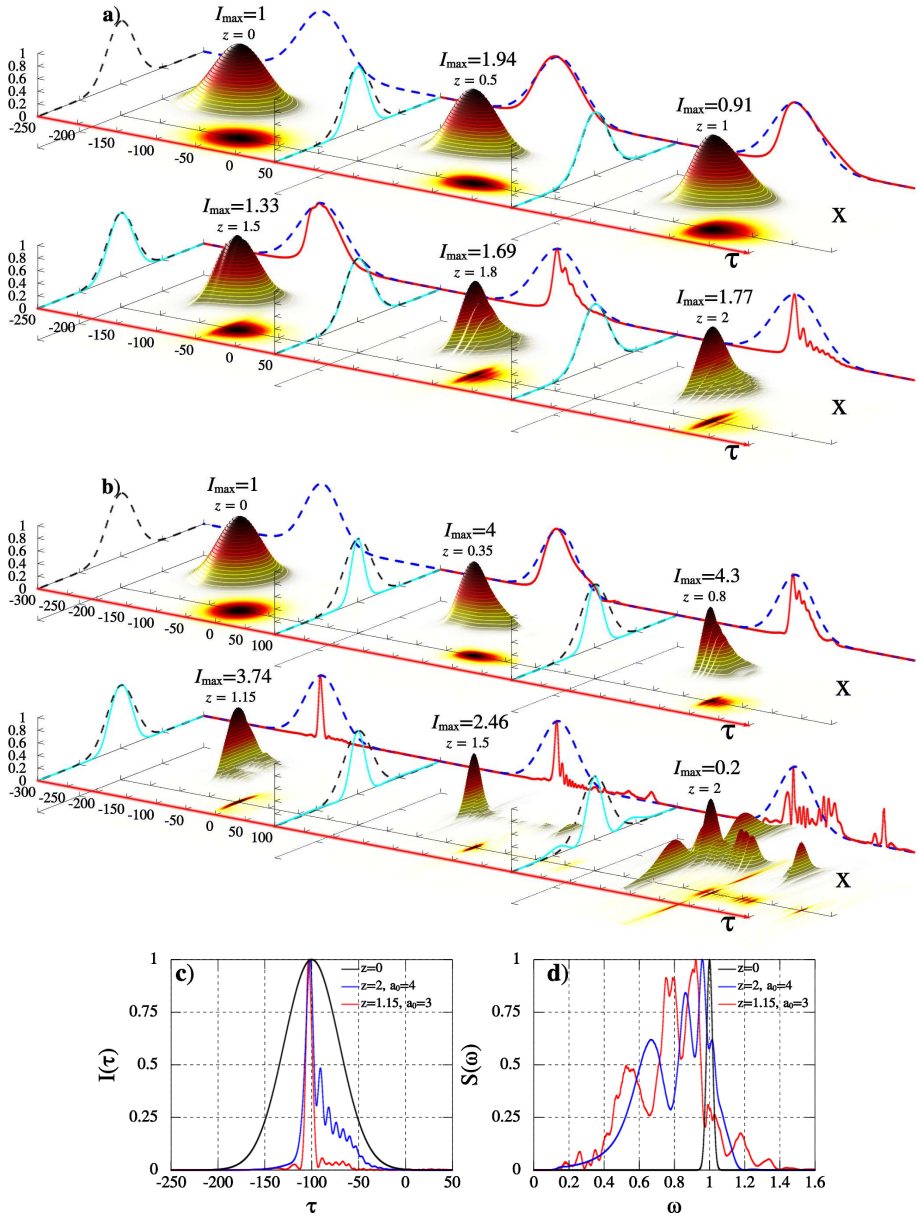


Рис. 6.22: Пространственно-временная динамика интенсивности $I(z, r, \tau)$ лазерного импульса в газовой струе длиной 2 мм при концентрации электронов: **(a)** $\mathcal{N}_e = 6.6 \times 10^{18}$ см$^{-3}$, **(b)** $\mathcal{N}_e = 1.5 \times 10^{19}$ см$^{-3}$. Здесь пунктирная линия – начальное распределение волнового пакета по соответствующей координате, сплошная линия – текущее распределение волнового пакета. **(c)** Распределения интенсивности входного и скомпрессированного лазерного импульса с минимальной длительностью. Здесь синяя линия — распределение интенсивности сжатого импульса при $\mathcal{N}_e = 6.6 \times 10^{18}$ см$^{-3}$. Длительность сжатого импульса (по уровню спадания интенсивности в два раза) составляет 5 фс. Красная линия — распределение интенсивности сжатого импульса при $\mathcal{N}_e = 1.3 \times 10^{19}$ см$^{-3}$. Длительность импульса на длине $z = 1.15$ - 4 фс. **(d)** Распределение спектра.

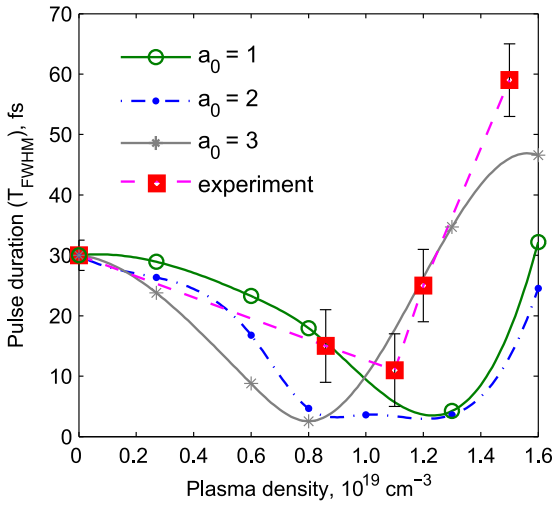


Рис. 6.23: Зависимость длительности сжатого лазерного импульса на выходе плазмы длиной 2 мм от концентрации электронов $\mathcal{N}_e$ и от начальной амплитуды векторного потенциала a_o. Зеленая линия – для начальной амплитуды $a_o = 1$, синяя линия – для $a_o = 2$, серая линия – для $a_o = 3$. Начальная длительность лазерного импульса 30 фс. На рисунке добавлена экспериментальная зависимость длительности сжатого импульса от концентрации электронов (красная линия с квадратиками).

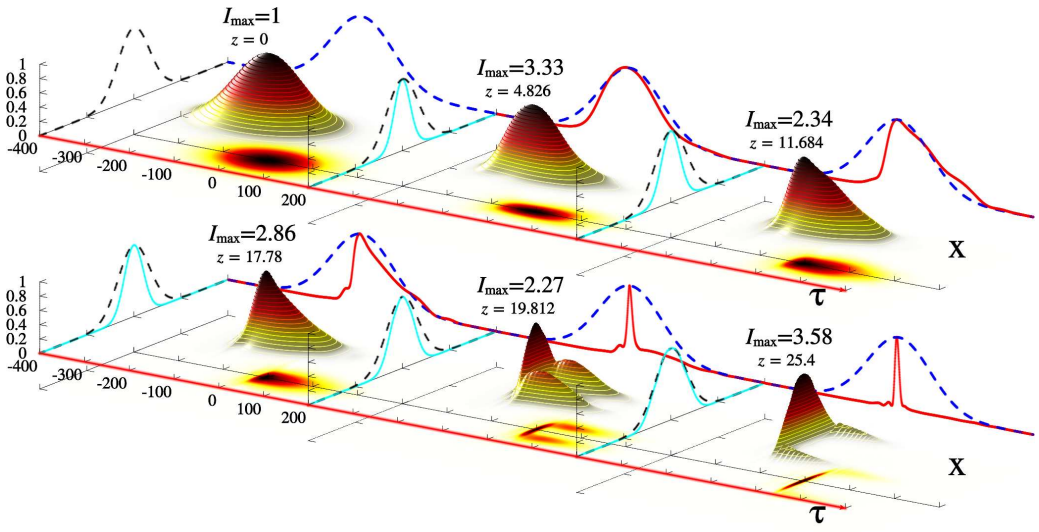


Рис. 6.24: Пространственно-временная динамика интенсивности лазерного импульса петаваттного уровня мощности (начальная длительность 70 фс, энергия в импульсе 70 Дж, $a_o = 4$) в плазме с концентрацией электронов $\mathcal{N}_e = 1 \times 10^{19}$ см$^{-3}$. Обозначения как на рисунке 6.22.

бенность системы уравнений (6.10) состоит в том, что они содержат масштабируемые решения. Действительно, с последующими преобразованиями для пространственной и временной переменных: $\omega_{pl}\tau \to \tau$, $\dfrac{\omega_{pl}z}{c} \to z$, $\dfrac{\omega_{pl}r}{c} \to r$, система уравнений (6.10) могут быть записаны в безразмерном виде. Это означает, что предсказанные расчеты для примера на рис. 6.22 применимы для других параметров лазерных импульсов и плазмы с соответствующей масштабируемостью, т. е. параметры лазерного импульса, такие как лазерная частота ω, длительность импульса τ_p и диаметр пучка d, могут быть промасштабированы фактором $\dfrac{\omega_{pl}}{\omega}$. Но эта масштабируемость не может помочь нам, если мы имеем один тип лазерной системы, то есть если частота ω фиксирована. Однако, чтобы пролить свет на это явление, мы можем воспользоваться масштабируемой аппроксимацией, действительной для сравнительно длинных импульсов, когда приближение огибающей имеет место. Действительно, дабы получить компрессию, мы обычно начинаем с длинных лазерных импульсов, содержащих большое число осцилляций поля. Таким образом, мы предполагаем, $a \propto \mathcal{B}\exp(i\omega\tau)$ и, редуцируя уравнение (6.10a)

$$\frac{2i\omega}{c}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z} - \Delta_{\perp}\mathcal{B} + \frac{\omega_{pl}^2}{c^2}\frac{\mathcal{B}\phi}{1+\phi} = 0 \tag{6.118}$$

следующими масштабами

$$\sqrt{n_o}\omega\tau \to \tau \ , \quad n_o k z \to z \ , \quad \sqrt{n_o}kr \to r \ , \tag{6.119}$$

$\left[\text{где } k = \dfrac{\omega}{c} \text{ и } n_o = \dfrac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}\right]$ теперь можно применить по отношению к огибающей лазерного поля; различие в том, что длина компрессии пропорциональна n_o, то есть плотности плазмы. Для компрессии лазерных импульсов петаваттного уровня мощности для входной амплитуды $a_o \sim 1$ мы должны использовать лазерные пучки большого размера и, более того, как следует из выражений (6.119), низкие плотности плазмы.

Как пример мы проведем оценку для лазерных импульсов мощностью в 1 ПВт с длительностью 500 фс (энергия в импульсе – 500 Дж). Используя масштабируемость (6.119) и результаты расчетов, представленные на рисунке 6.22, мы можем предложить схему компрессии лазерных импульсов на кильватерной волне на основе двух стадий, чтобы получить импульсы с малым числом колебаний поля. На первой стадии, используя плотность плазмы около $\mathcal{N}_e \simeq 5 \times 10^{17}$ см$^{-3}$, волновой пакет скомпрессируется в 7 раз, то есть ниже длительности 70 фс на длине плазмы 4 см с энергетической эффективностью около 20%. На второй стадии лазерный импульс должен быть введен в плазменную струю с концентрацией электронов $\mathcal{N}_e = (3 \div 4) \times 10^{18}$ см$^{-3}$.

После прохождения длины около 4 мм импульс должен был сжаться ниже 10 фс. Таким образом, с эффективностью такой схемы на данной стадии в 20%, мы получим выходной импульс с энергией 20 Дж, что соответствует мощности в импульсе 2 ПВт, и это даже больше, нежели входная мощность, но для короткого импульса.

Другой пример мы представим для непосредственной проверки возможности компрессии импульсов петаваттного уровня к длительности в несколько периодов колебаний поля. На рисунке 6.24 мы представили результаты для плотности плазмы $\mathcal{N}_e = 1 \times 10^{18}$ см$^{-3}$, когда входной лазерный импульс характеризуется следующими параметрами: длительность импульса – 70 фс, ширина пучка – 36 мкм, $a_o = 4$, что соответствует энергии в лазерном импульсе 70 Дж и мощности 1 ПВт. Волновой пакет сжимается до минимальной длительности в 5 фс на длине в 5 см. Как ясно видно, временной и пространственный профили лазерного импульса имеют хорошее качество, а энергетическая эффективность составляет приблизительно 18%, так что на выходе мы получаем лазерный импульс с длительностью 5 фс с мощностью 5 ПВт.

Мы изучили компрессию лазерных импульсов на плазменной волне в комбинации экспериментального и численного исследований. Показано, что в релятивистском режиме ($a_o \sim 1 \div 5$) лазерные импульсы могут эффективно укорачиваться к длительности в несколько периодов колебаний поля. Кроме того, схема промасштабирована к петаваттному уровню, что означает, что на сегодняшний день стандартные лазерные системы, содержащие длинные лазерные импульсы, могут быть скомпрессированы до длительности в несколько периодов колебаний поля петаваттного уровня мощности.

Интересно отметить, что в альтернативном CPA-подходе в расширенной стадии рамановского усиления, когда усиливаемый затравочный импульс компрессируется на длине порядка плазменной длины волны,стадия для компрессии на плазменной волне может в дальнейшем быть применена для получения лазерного импульса с малым числом колебаний поля и высокой мощностью. Это также может быть использовано как дополнительная финальная стадия техники рамановской компрессии или, с правильным выбором параметров плазмы, таких как плотность и длина плазмы. Эффект рамановской компрессии может установить стадию самокомпрессии для дальнейшего укорочения длительности импульса.

6.8 Оптимизация режима самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов

Самокомпрессиия лазерных импульсов мульти-тераваттного уровня мощности

Далее зададимся вопросом оптимизации самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны. На текущий момент наиболее часто встречаются в лабораториях лазерные системы с мощностью в десятки тераватт. Поэтому в начале исследуем режим самокомпрессии лазерных импульсов суб-петаваттного уровня мощности в газовой струе длиной 2 мм на основе численного моделирования системы уравнений (6.10). На вход струи задавался лазерный импульс с плоским фазовым фронтом

$$\boldsymbol{a}(z=0,\tau,r)=a_o\exp\left[-2\ln 2\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right)^2-r^2\right]\cdot\left[\boldsymbol{e}_x\cos(\tau)+\varepsilon\boldsymbol{e}_y\sin(\tau)\right] \tag{6.120}$$

как с линейной ($\varepsilon=0$), так и с циркулярной ($\varepsilon=1$) поляризацией поля и исследовалось, как меняется длительность волнового пакета $\tau_p(z)$ от начальной амплитуды в лазерном импульсе a_o, от концентрации плазмы $\mathcal{N}_e$ и от поляризации лазерного излучения ε. На рисунке 6.25**(a)** представлена характерная пространственно-временная динамика лазерного излучения с циркулярной поляризацией ($\varepsilon=1$) при следующих начальных условиях: $a_o=2.2$, $\tau_p=22\pi$ [что соответсвует в размерных единицах длительности лазерного импульса в 30 фс], $\mathcal{N}_e=8\times10^{18}$ см$^{-3}$ $\left[\frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2}=0.0046\right]$, мощность в лазерном импульсе $\mathcal{P}_o=70$ ТВт. Критическая мощность для стационарной самофокусировки для заданной концентрации плазмы составляет $\mathcal{P}_{cr}\simeq 3.7$ ТВт. Однако, для лазерных импульсов длительностью порядка и менее периода кильватерной плазменной волны критическая мощность самофокусировки будет значительно превышать значение для непрерывного излучения. Отметим, как было показано в работе [214] для лазерных импульсов длительностью менее или порядка периода кильватерной плазменной волны, неустойчивость плоской волны подавлена (см. раздел 6.3).

На рисунке 6.25**(a)** в плоскости перпендикулярной оси τ черной пунктирной линией показано начальное распределение пучка в максимуме лазерного импульса, бирюзовая линия – текущее распределение пучка. На заднем фоне (перпендикулярно оси x) синей пунктирной линией представлено начальное временное распределение

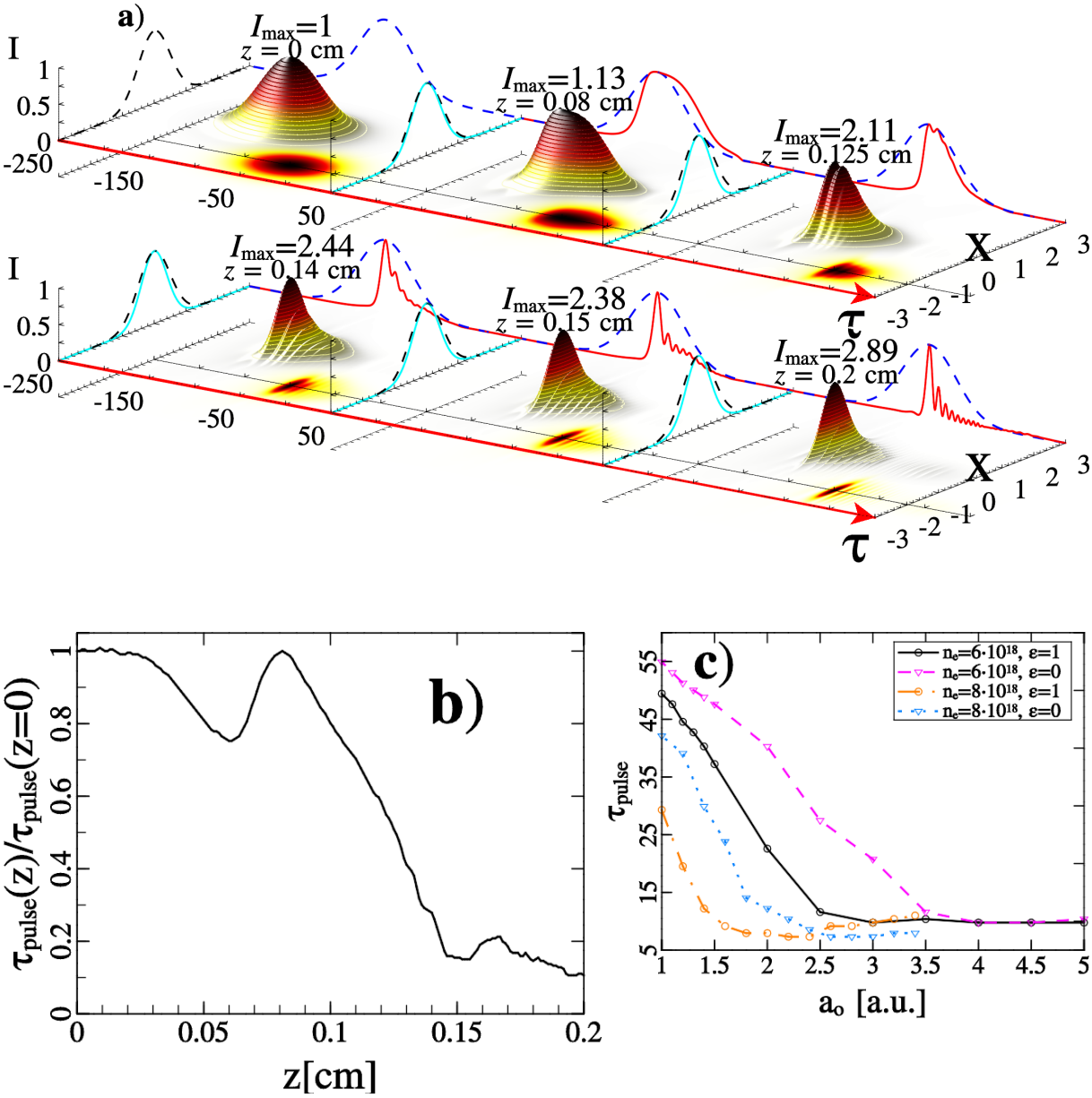


Рис. 6.25: **(a)** Динамика интенсивности лазерного импульса в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны в газовой струе длиной 2 мм. Начальные параметры лазерного импульса: $a_o = 2.2$, $\tau_p = 22\pi$, $\frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2} = 0.0046$. Длительность сжатого лазерного импульса (при $z = 0.2$ мм) $\tau_p = 3$ фс. **(b)** Зависимость длительности лазерного импульса $\frac{\tau_p(z)}{\tau_p(0)}$ от эволюционной переменной z. **(c)** Зависимость длительности волнового пакета на выходе струи длинной 2 мм от концентрации плазмы $\mathcal{N}_e$, от начальной амплитуды a_o и от поляризации лазерного поля ε.

лазерного импульса на оси пучка, красная линия – текущее распределение волнового пакета на оси пучка. Как видно из данного рисунка, при $z = 0.2$ см лазерный импульс сжимается с 30 фс до 3 фс при незначительном уменьшении поперечного размера пучка. На рисунке 6.25(**b**) представлена зависимость длительности волнового пакета τ_p от эволюционной переменной z. Как следует из данного рисунка, на начальном этапе длительность лазерного импульса меняется не монотонным образом. Однако при дальнейшем распространении лазерного импульса в плазме ($z \leq 0.8$ мм) длительность волнового пакета непрерывно уменьшается до $\tau_{pulse} \simeq 3$ фс. Для данного рассматриваемого случая энергетическая эффективность (доля энергии, содержащаяся в сжатом импульсе) составляет 25 %, что соответсвует мощности в сжатом волновом пакете $\mathcal{P} = 176$ ТВт.

После обработки результатов численного моделирования мы построили график зависимости длительности скомпрессированного волнового пакета τ_p (см. рисунок 6.25(**c**)) от начальной амплитуды a_o, концентрации $\mathcal{N}_e$, от поляризации лазерного импульса ε. Данный график может быть в дальнейшем использован для проведения будущих экспериментов. Как следует из данного рисунка, при маленьких амплитудах и концентрации плазмы сжатие лазерного импульса незначительно. Однако при больших начальных амплитудах a_o длительность скомпрессированного лазерного импульса τ_p стремится к периоду колебания поля. Как видно из рисунка, при амплитуде лазерного импульса $a_o \sim 3$ длительность импульса становится порядка периода оптического колебания поля, и при дальнейшем увеличении амплитуды длительность волнового пакета не уменьшается. Очевидно, что сжатие волнового пакета будет сильно зависеть от поляризации излучения ε, поскольку плазменная волна ϕ при заданной амплитуде волнового пакета a_o лучше возбуждается для циркулярно поляризованного импульса (см. рисунок 6.25(**c**)). Как следует из графика, при фиксированной длине газовой струи лазерный импульс с циркулярной поляризацией $\varepsilon = 1$ будет сжиматься примерно в 2 раза сильнее, чем лазерный импульс с линейной поляризацией $\varepsilon = 0$. Отметим, что для получения лазерного импульса с хорошей временной структурой при фиксированной длине струи с увеличенем начальной амплитуды в лазерном импульсе необходимо уменьшать концентрацию электронов $\mathcal{N}_e$.

Самосжатие лазерных импульсов мульти-петаваттного уровня мощности

Далее рассмотрим возможность укорочения лазерных импульсов петаваттного уровня мощности. Очевидно, что для достижения поставленной цели недостаточно просто повышать начальную амплитуду в лазерном импульсе, поскольку, как видно из уравнения, на динамику векторного потенциала в лазерном импульсе (6.10a) при больших амплитудах a происходит насыщение нелинейности, и это приводит, соответственно, к ослаблению темпа самовоздействия волнового пакета в плазме. Кроме того, как видно из уравнения на скалярный потенциал (6.10b), для того, чтобы уменьшить амплитуду скалярного потенциала ϕ, можно уменьшить концентрацию электронов. Поэтому в дальнейшем будем использовать пучок радиусом 50 мкм (увеличили в 5 раз по сравнению с предыдущим случаем) и концентрацию плазмы $\mathcal{N}_e = 2 \times 10^{18}$ см$^{-3}$. В этом случае критическая мощность самофокусировки составит $\mathcal{P}_{cr} \simeq 15$ ТВт.

На рисунке 6.26**(a)** представлен результат самокомпрессии релятивистски сильного лазерного импульса с начальной мощностью $\mathcal{P} = 6$ ПВт в газовой струе длиной 52 мм. Как видно из рисунка, в процессе укорочения лазерного импульса пучок сжался в 3 раза (черная пунктирная линия соответствует начальному распределению пучка, бирюзовая линия – текущее распределение пучка). При этом интенсивность лазерного импульса в процессе взаимодействия с плазмой увеличилась на порядок. В качестве сравнения на рисунке 6.26**(b)** приведено начальное и конечное распределения интенсивности волнового пакета. Как следует из данного рисунка, в результате нелинейной динамики волновой пакет сжался до 3.5 фс, что соответсвует чуть более одного колебания поля (период поля составляет 2.6 фс). Как видно из рисунка, волновой пакет имеет хорошее временное распределение.

Сжатый лазерный импульс можно отнести к классу предельно коротких. Проведенные численные эксперименты свидетельствуют о достаточно высокой энергетической эффективности (доля энергии, содержащаяся в сжатом импульсе), так и в определенной степени простоты его реализации, в которой наиболее, как отмечалось ранее, чувствительным местом является определение и правильный выбор длины нелинейной среды. Важно отметить, что *самокомпрессия* импульса по сечению пучка в наших численных экспериментах практически однородна. Для данного рассматриваемого случая энергетическая эффективность составляет 55%, что значительно выше того, что рассматривалось нами ранее. Следовательно, несмотря на

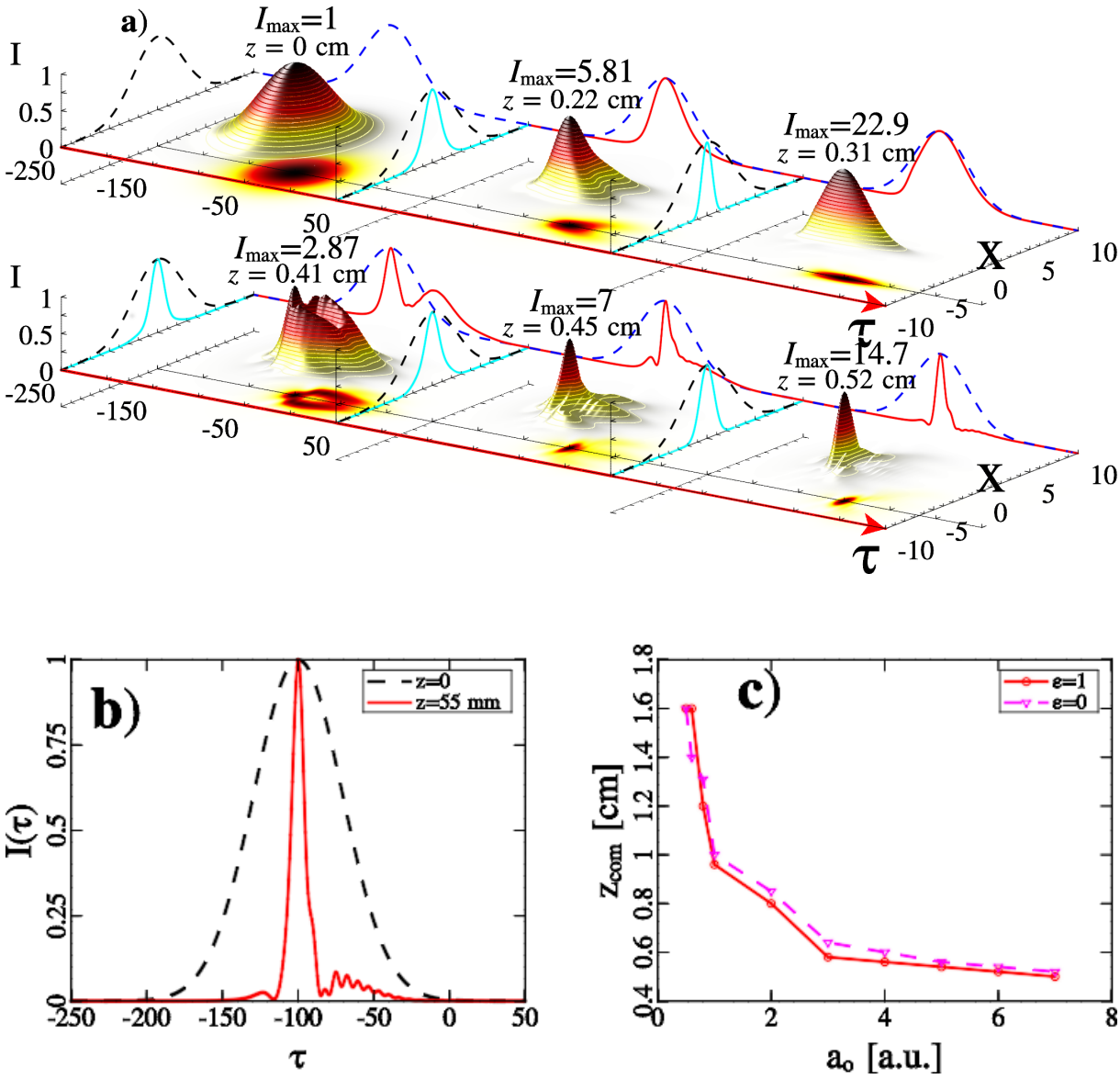


Рис. 6.26: **(a)** Динамика интенсивности лазерного импульса в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны в газовой струе длиной 55 мм, концентрация плазмы $\mathcal{N}_e = 2\times10^{18}$ см$^{-3}$. Начальные параметры лазерного импульса: $\tau_p = 22\pi$, $r_o = 50$ мкм, мощность $\mathcal{P} = 6$ ПВт, $\frac{\omega_{pl}^2}{\omega_o^2} = 0.00115$. Длительность сжатого лазерного импульса (при $z = 0.52$ см) $\tau_p^{out} = 3.5$ фс. **(b)** Распределение нормированной интенсивности лазерного импульса: черная пунктирная линия – начальный профиль ($z = 0$), красная линия – сжатый лазерный импульс ($z = 0.55$ см). **(c)** Зависимость длины компрессии z_{com} лазерного импульса от начальной амплитуды a_o и поляризации в газовой струе с давлением $\mathcal{N}_e = 2 \times 10^{18}$ см$^{-3}$.

потери энергии, связанные с возбуждением кильватерной волны, мощность в сжатом импульсе составляет 27 ПВт. Подводя итоги, отметим, что энергетическая эффективность при сжатии мульти-тераваттных импульсов ниже в два раза, чем при сжатии петаваттных импульсов, поскольку во втором случае концентрация фоновой плазмы в 4 раза меньше и, соответственно, потери на возбуждение кильватерной волны меньше.

Поскольку в процессе самокомпрессии лазерного импульса имеет место значительное увеличение интенсивности излучения, это будет очевидно приводить к насыщению нелинейности и, соответственно, к увеличению длины компрессии z_{comp} волнового пакета. Данный факт проиллюстрирован на рисунке 6.26**(c)**. Как видно из рисунка, длина компрессии лазерного импульса уменьшается по степенному закону $z_{com} \propto a_o^{-0.2}$. Данный результат отличается от предыдущих наших исследований, где нами было аналитически показано, что длина компрессии экспоненциально уменьшается при увеличении амплитуды в лазерном импульсе при $a \sim 1$ (см. выражение (6.87)). Как следует из рисунка, импульс с циркулярной поляризацией ($\varepsilon = 1$) сжимается быстрее, чем с линейной ($\varepsilon = 0$), поскольку при заданной амплитуде излучение с циркулярной поляризацией испытывает большее самовоздействия, чем с линейной. Как отмечалось ранее, чувствительным моментом в задаче по сжатию лазерного импульса является правильный подбор длины струи. Как следует из рисунка 6.26**(c)**, длина компрессии z_{com} слабо зависит от начальной амплитуды в лазерном импульсе начиная с $a_o \sim 3$.

6.9 Одномерная модель

Для качественного объяснения степенного поведения длины компрессии z_{com} лазерного импульса от амплитуды лазерного импульса a_o обратимся к следующей простой модели.

Ранее нами было проведено качественное исследование самокомпрессии лазерного импульса и преобразование спектра волнового пакета [20, 21], где в качестве поперечного распределения лазерного поля мы использовали хорошо известное автомодельное решение, найденное в работе [204]. Эти решения описывают волновые пакеты, имеющие форму *рупора*, раскрывающегося в направлении движения. Структура основной автомодельной моды характеризуется экспоненциальным убыванием по радиусу вектор-потенциала и степенным убыванием потенциала плазменной вол-

ны. Однако, как со всеми автомодельными решениями, остается вопрос о выходе начального распределения волнового пакета на автомодельную структуру. Для устранения данной неопределенности обратимся к одномерной ситуации и рассмотрим динамику самовоздействия лазерного излучения в предварительно приготовленном плазменном канале. В этом случае удается провести более детальное исследование самокомпрессии релятивистски сильного лазерного импульса в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны. В конце данного раздела для полноты картины вернемся к системе уравнений (6.10), чтобы провести сравнение полученных результатов с данными трехмерного анализа, учитывающего самофокусировку излучения.

В начале обратимся к результатам численного моделирования к следующей безразмерной системы уравнений

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \tilde{z}\partial\tilde{\tau}} + \frac{a}{1+\Phi} = 0 \ , \tag{6.121a}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{\tau}^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\frac{1+a^2-(1+\Phi)^2}{2(1+\Phi)^2} \ . \tag{6.121b}$$

Здесь введены следующие новые безразмерные переменные: $z = \dfrac{\tilde{z}2c}{\omega_o}\left(\dfrac{\omega_o}{\omega_p}\right)^2$, $\tau = \dfrac{\tilde{\tau}}{\omega_o}$. Для простоты изложения далее по тексту знак тильда будет опущена.

На рисунке 6.27 представлена типичная эволюция интенсивности импульса в плазме с концентрацией электронов $\mathcal{N}_e = 4 \times 10^{18}$ см$^{-3}$

$$a(z=0,\tau) = a_o \exp\left[-2\ln 2\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right)^2 + i\tau\right] \tag{6.122}$$

при $a_o = 1.25$, $\tau_p = 22\pi$ (что соответствует в размерных единицах длительности волнового пакета в 30 фс), $\omega_o = 2.35 \times 10^{15}$ с$^{-1}$ (это соответствует наиболее распространенной лазерной системы Ti:Sa). Отметим, что начальная длительность лазерного импульса по уровню 1/2 интенсивности составляет 11 периодов поля. Как видно из рисунка 6.27**(a)**, лазерный импульс сжимается в 9 раз на длине $z = 57.5$ (или в размерных еденицах $z = 0.83$ см), что соответствует чуть более одного периода колебаний поля. Особо отметим, что, как следует из результатов численного моделирования, в процессе самосжатия лазерный импульс с начальной длительностью порядка периода плазменных колебаний смещается к переднему фронту плазменной волны и становится существенно короче периода кильватерной волны. Нетрудно видеть из рисунка 6.27**(b)**, что амплитуда скалярного потенциала в области перекрытия с лазерным импульсов меньше единицы ($\Phi_{cross} < 1$), так что насыщение нелинейности можно не учитывать.

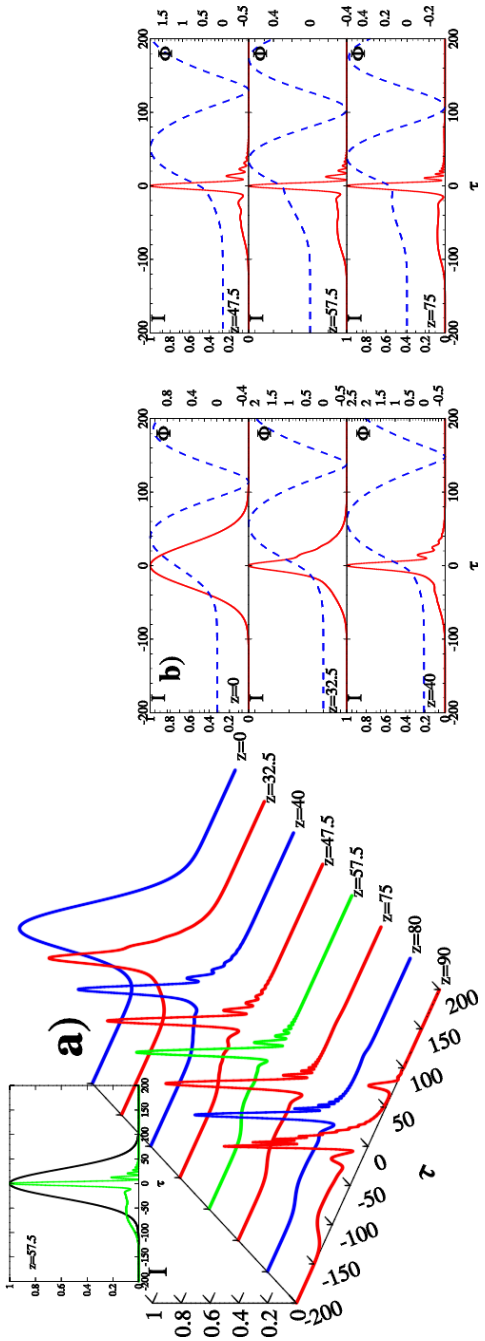


Рис. 6.27: **(a)** Динамика интенсивности лазерного импульса в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны. Начальные параметры лазерного импульса: $a_o = 1.25$, $\tau_p^{in} = 11 \cdot T_o$, $\dfrac{\omega_p^2}{\omega_o^2} = 2 \times 10^{-3}$, где T_o – период оптического поля. Длительность сжатого лазерного импульса (при $z = 57.5$) $\tau_p^{out} = 1.32 \cdot T_o$. На вставке приведено распределения интенсивности при $z = 0$ и $z = 57.5$. **(b)** Динамика интенсивности лазерного импульса (красная линия) и потенциала плазменной волны (синяя пунктирная линия). Здесь интенсивность везде нормирована на максимальное значение.

Для получения аналитических соотношений воспользуемся упрощенной системой, которая описывает динамику квазимонохроматического излучения. Подставляя $a(z,\tau)$ в виде

$$a(z,\tau) = \Psi\left[z, \tau - z\frac{\omega_p^2}{2c\omega_o^2}\right] \exp\left[i\omega_o\left(\tau - z\frac{\omega_p^2}{2c\omega_o^2}\right) - i\frac{\omega_p^2}{2c\omega_o}z\right] , \tag{6.123}$$

получаем следующее уравнение на динамику огибающей волнового пакета $\Psi(z,\tau)$

$$\frac{2}{c}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} + i\omega_o\Psi\right) + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{\Psi\Phi}{1+\Phi} = 0 , \tag{6.124}$$

где ω_o – начальная несущая частота лазерного импульса. Пренебрегая смешанной производной $\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial\tau}$ и введя новые безразмерные переменные $z = \tilde{z}\dfrac{2c}{\omega_o}\left(\dfrac{\omega_o}{\omega_p}\right)^2$, $\tau = \dfrac{\tilde{\tau}}{\omega_p}$ получаем следующую систему уравнений, описывающую самовоздействие квазимонохроматического излучения [204]

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{z}} + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tilde{\tau}^2} + \frac{\Psi\Phi}{1+\Phi} = 0 \tag{6.125a}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tilde{\tau}^2} = \frac{1+|\Psi|^2-(1+\Phi)^2}{2(1+\Phi)^2} . \tag{6.125b}$$

Для простоты изложения далее по тексту знак «тильда» будет опущен. Второе слагаемое в уравнении (6.125a) учитывает частотную дисперсию фоновой плазмы. В этом случае, как следует из уравнения непрерывности

$$i\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial z} + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\Psi^\star\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} - \Psi\frac{\partial\Psi^\star}{\partial\tau}\right] = 0 , \tag{6.126}$$

в процессе эволюции системы сохраняется полная энергия лазерного импульса

$$\mathcal{I}_o = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 d\tau , \tag{6.127}$$

т.е. не учитываются потери энергии на возбуждение плазменных колебаний. Отметим, что соответствующего интеграла нет в рамках исходной системы (6.121), так как $\mathcal{I}_o$ уменьшается при возбуждении кильватерной плазменной волны.

Наличие интеграла (6.127) позволяет провести простое качественное описание укорочения лазерного импульса в процессе возбуждения кильватерной плазменной волны методом моментов распределения поля. Поскольку в процессе нестационарного самовоздействия лазерного излучения имеет место смещение частоты вниз по спектру, то центр масс волнового пакета

$$\langle\tau\rangle = \frac{1}{\mathcal{I}_o}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau|\Psi|^2 d\tau \tag{6.128}$$

не сохраняется

$$\frac{d\langle\tau\rangle}{dz} = -\frac{i}{\mathcal{I}_o}\frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\Psi^\star\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} - \Psi\frac{\partial\Psi^\star}{\partial\tau}\right)d\tau \ . \tag{6.129}$$

Для определения эффективной длительности импульса τ_{pulse} следует воспользоваться моментом второго порядка в виде

$$\tau_{pulse}^2 = \langle(\tau - \langle\tau\rangle)^2\rangle = \frac{1}{\mathcal{I}_o}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\tau^2 - \langle\tau\rangle^2)|\Psi|^2 d\tau = \frac{1}{\mathcal{I}_o}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tau^2|\Psi|^2 d\tau - \langle\tau\rangle^2 \ . \tag{6.130}$$

Умножая уравнение непрерывности (6.126) на τ^2 и интегрируя по переменной τ, получаем следующее уравнение для $\langle\tau^2\rangle$

$$\frac{d^2\langle\tau^2\rangle}{dz^2} = -\frac{2i}{\mathcal{I}_o}\frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tau\left[\frac{\partial\Psi^\star}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} + \Psi^\star\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial\tau} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Psi^\star}{\partial\tau} - \Psi\frac{\partial^2\Psi^\star}{\partial z\partial\tau}\right]d\tau \ . \tag{6.131}$$

Используя уравнение (6.125a), уравнение для эффективной длительности волнового пакета можно записать в следующем виде

$$\frac{d^2\tau_{pulse}^2}{dz^2} = \frac{4\omega_p^2}{\mathcal{I}_o\omega_o^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[2\frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\left|\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right|^2 - \frac{\Phi}{1+\Phi}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau|\Psi|^2\right)\right]d\tau - \frac{d^2}{dz^2}\langle\tau\rangle^2 \ . \tag{6.132}$$

Оставляя в выражении (6.132) члены первого порядка малости по параметру дисперсии фоновой плазмы $\left[\frac{\omega_p^2}{\omega_o^2} \ll 1\right]$, получаем уравнение для изменения эффективной длительности лазерного импульса

$$\frac{d^2\tau_{pulse}^2}{dz^2} \simeq -\frac{4}{\mathcal{I}_o}\frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau|\Psi|^2\right)d\tau \ . \tag{6.133}$$

Здесь нами был использован факт того (см. рисунок 6.27**(b)**), что в области перекрытия волнового пакета с потенциалом плазменной волны амплитуда последнего меньше единицы ($\Phi_{cross} < 1$). Для дальнейшего упрощения уравнения (6.133) возьмем интеграл два раза по частям

$$\frac{d^2\tau_{pulse}^2}{dz^2} \simeq -\frac{4}{\mathcal{I}_o}\frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\xi|\Psi|^2 d\xi d\tau \ . \tag{6.134}$$

Для оценки на амплитуду кильватерной плазменной волны воспользуемся следующим выражением

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} \simeq \frac{1}{2}|\Psi|^2 \ . \tag{6.135}$$

Данное уравнение адекватно описывает динамику плазменной волны, поскольку период плазменной волны больше длительности лазерного импульса (см. рисонок 6.27(**b**)). Подставляя выражение (6.135) в (6.134) и беря в качестве распределения интенсивности волнового пакета прямоугольную форму,

$$|\Psi|^2 = \begin{cases} \mathcal{A}_o^2 \ , & 0 \le \tau < \tau_p \\ 0 \ , & \tau \ge \tau_p \end{cases} \tag{6.136}$$

получаем окончательное уравнение, описывающие изменение длительности волнового пакета

$$\frac{d^2\tau_{pulse}^2}{dz^2} \simeq -\frac{1}{3}\mathcal{I}_o\frac{\omega_p^2}{\omega_o^2}\tau_{pulse} \ . \tag{6.137}$$

Решение данного уравнения можно представить в квадратурах при следующих начальных условиях $\left.\frac{d\tau_{pulse}}{dz}\right|_{z=0} = 0$, $\tau_{pulse}(z=0) = \tau_{in}$

$$\frac{d\tau_{pulse}^2}{dz} = -\sqrt{\frac{4\gamma}{3}}\tau_{in}^{3/2}\sqrt{1-\left(\frac{\tau_{pulse}}{\tau_{in}}\right)^3} \ , \tag{6.138}$$

где $\gamma = \frac{1}{3}\mathcal{I}_o\left(\frac{\omega_p}{\omega_o}\right)^2$. Для оценки длины, на которой длительность волнового пакета обращается в нуль $[\tau_{pulse}(z_{comp}) = 0]$, правую часть данного уравнения мы разложим в ряд по малому параметру $\frac{\tau_{pulse}}{\tau_{in}} \ll 1$. В результате получаем оценку длины среды, на которой длительность лазерного импульса обращается в ноль

$$z_{compr} \simeq \sqrt{\frac{\tau_{in}}{2\mathcal{I}_o}}\frac{\omega_o}{\omega_p} \ . \tag{6.139}$$

Учитывая связь между начальной длительностью и энергией в волновом пакете $\mathcal{I}_o = \tau_{in}\mathcal{A}_o^2$ (с точностью до множителя порядка единицы), получаем выражение для длины среды в размерных единицах

$$z_{compr} \simeq \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}a_o}\left(\frac{\mathcal{N}_{cr}}{\mathcal{N}_e}\right)^{3/2} \ , \tag{6.140}$$

где λ – длина волны, $\mathcal{N}_{cr}$ – критическая концентрация плазмы, $\mathcal{N}_e$ – концентрация плазмы, a_o - безразмерный векторный потенциал. Как видно из выражения (6.140), длина среды z_{compr}, на которой длительность лазерного импульса обращается в нуль, обратно пропорциональна начальной амплитуде лазерного импульса a_o. Также с увеличением концентрации плазмы $\mathcal{N}_e$ данная длина уменьшается по степенному закону с показателем степени $\frac{3}{2}$.

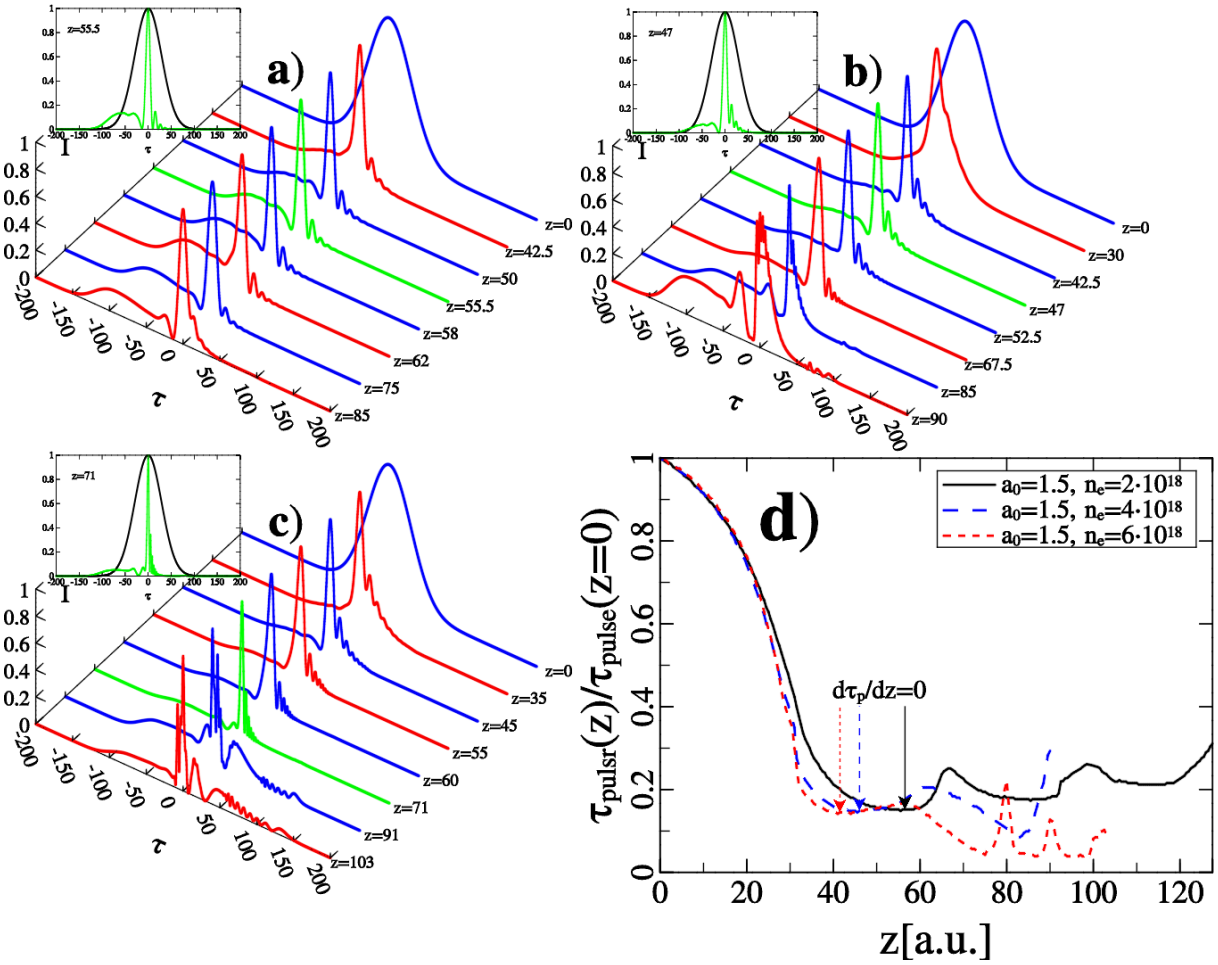


Рис. 6.28: Динамика интенсивности лазерного импульса в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны для трех разных значений концентрации плазм: **(a)** $\mathcal{N}_e = 2 \times 10^{18}$ см$^{-3}$, **(b)** $\mathcal{N}_e = 4 \times 10^{18}$ см$^{-3}$, **(c)** $\mathcal{N}_e = 6 \times 10^{18}$ см$^{-3}$. Начальные параметры лазерного импульса: $a_o = 1.5$, $\tau_p^{in} = 11 \cdot T_o$. На рисунке **(d)** представлена зависимость длительности лазерного импульса τ_{pulse}, вычисленная с помощью момента второго порядка, для трех разных значений концентрации плазмы. С помощью стрелочек на графике показаны положения z_c где производная от длительности волнового пакета от z обращается в ноль $\left.\dfrac{d\tau_{pulse}}{dz}\right|_{z=z_c} = 0$.

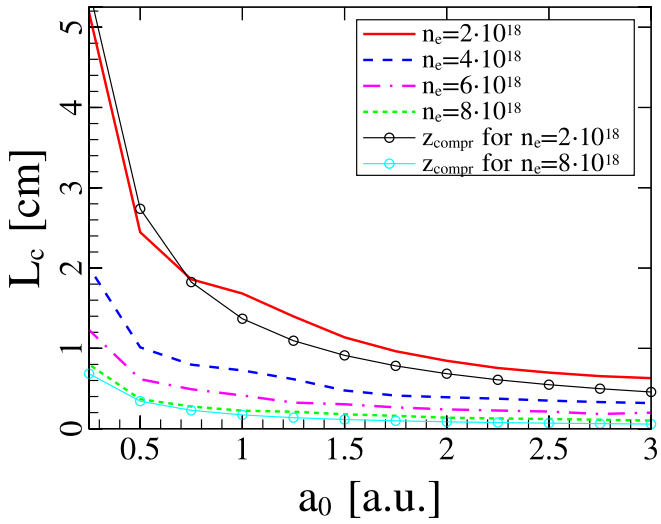


Рис. 6.29: Зависимость длины L_c, на которой производная длительности лазерного импульса от эволюционной координаты z обращается в ноль $\left[\left.\frac{d\tau_{pulse}}{dz}=0\right|_{z=L_c}\right]$, от начальной аплитуды в лазерном импульсе и от концентрации плазмы. Здесь амплитуда в безразмерных единицах, а длина в размерных единицах.

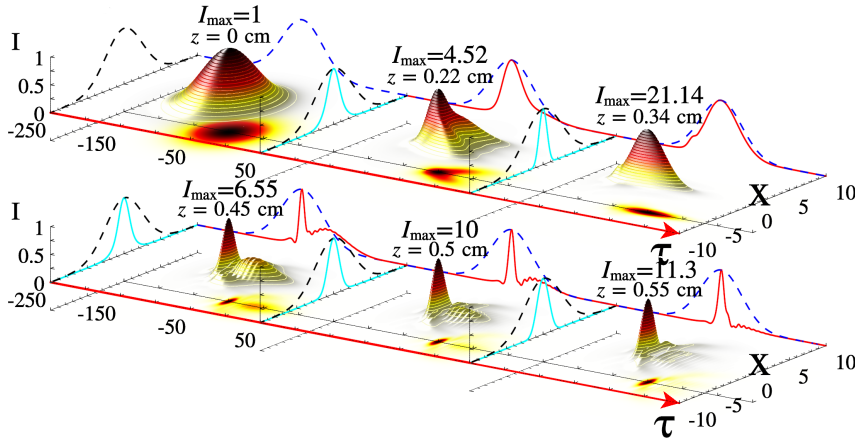


Рис. 6.30: Динамика интенсивности лазерного импульса при учете самофокусировки лазерного излучения в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны в газовой струе длиной 55 мм, концентрация плазмы $\mathcal{N}_e = 2 \times 10^{18}$ см$^{-3}$. Начальные параметры лазерного импульса: $\tau_p = 30$ фс, $r_o = 50$ мкм, мощность $\mathcal{P} = 13$ ПВт, $\frac{\omega_p^2}{\omega_o^2} = 0.00115$. Длительность сжатого лазерного импульса при $z = 0.52$ см составляет $\tau_p = 3.5$ фс.

Для проверки полученного качественного результата (6.139) обратимся к детальному численному моделированию системы (6.121). На рисунке 6.28 представлена динамика интенсивности лазерного (6.122) с $a_o = 1.5$ в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны для трех разных значений концентрации плазмы: $\mathcal{N}_e = 2 \times 10^{18}$ см$^{-3}$, $\mathcal{N}_e = 4 \times 10^{18}$ см$^{-3}$, $\mathcal{N}_e = 6 \times 10^{18}$ см$^{-3}$.

Как следует из рисунка, лазерный импульс значительно сжимается в результате самовоздействия в плазме. Например, как видно из рисунка 6.28**(c)**, в результате нелинейной динамики волновой пакет сжался до длительности менее периода поля $\tau_{pulse} \simeq 0.88 \cdot T_o$. Отметим, что с увеличением концентрации плазмы $\mathcal{N}_e$ уменьшаются крылья в лазерном импульсе. На рисунке 6.28**(d)** представлена зависимость длительности лазерного импульса τ_{pulse}, нормированная на начальную длительность, от эволюционной координаты z. Как следует из данного рисунка, на трассе $z \lesssim 45$ имеет место монотонное уменьшение длительности волнового пакета. Однако потом длительность лазерного импульса меняется не монотонно.

Для сравнения результатов численного моделирования с качественным исследованием необходимо определить z_{compr}. Из-за сложного характера поведения длительности лазерного импульса τ_{pulse} от эволюционной переменной z построим зависимость длины L_c, на которой производная от длительности волнового пакета по z обращается в ноль $\left[\left. \frac{d\tau_{pulse}}{dz} \right|_{z=L_c} = 0 \right]$. На рисунке 6.29 приведена зависимость L_c (в размерных переменных) от концентрации плазмы $\mathcal{N}_e$ и от начальной амплитуды в лазерном импульсе a_o. Для сравнения с теорией на рисунке приведены две кривые, вычисленные по формуле (6.139) для различных концентраций плазмы: $\mathcal{N}_e = 2 \times 10^{18}$ см$^{-3}$ (черная линия с точками), $\mathcal{N}_e = 8 \times 10^{18}$ см$^{-3}$ (бирюзовая линия с точками). Как следует из данного рисунка, результаты численного моделирования находятся в хорошем соответствии с качественным анализом задачи.

В заключение отметим, что, как видно из рисунка 6.28**(d)**, лазерный импульс максимально сжимается на длине среды, которая превышает L_c. Данный факт проиллюстрирован на рисунке 6.28**(d)**, на котором с помощью стрелочек на графике показаны положения L_c для трех разных концентраций плазмы: **(a)** черная линия – L_c для $\mathcal{N}_e = 2 \times 10^{18}$ см$^{-3}$, **(b)** синяя линия с большим пунктиром – L_c для $\mathcal{N}_e = 4 \times 10^{18}$ см$^{-3}$, **(c)** красная линия с малым пунктиром – L_c для $\mathcal{N}_e = 6 \times 10^{18}$ см$^{-3}$. Поэтому выражение для длины среды (6.139) следует рассматривать как оценку снизу.

Для полноты картины обратимся теперь к трехмерной задаче. Основное отличие

здесь связано с возможностью значительного усиления поля в процессе нестационарной самофокусировки. На рисунке 6.30 представлена динамика укорочения длительности аксиально-симметричного лазерного импульса с начальными параметрами (в размерных единицах): длительность $\tau_p = 30$ фс, радиус пучка $r_o = 50$ мкм, мощность $\mathcal{P}_o = 13$ ПВт, концентрвция невозмущенной плазмы $\mathcal{N}_e = 2 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$. На входе задавалось распределение следующего вида (в безразмерных переменных):

$$a(\tau, r) = 6 \exp\left[-\frac{2 \ln 2\tau^2}{(22\pi)^2} - \frac{r^2}{25} + i\tau\right] . \tag{6.141}$$

Как видно из рисунка 6.30, в процессе укорочения волнового пакета пучок сжался в 3 раза (черная пунктирная линия соответствует начальному распределению пучка, бирюзовая линия — текущее распределение пучка). При этом интенсивность лазерного импульса в процессе сжатия волнового пакета увеличилась в 11 раз, а длительность сжатого лазерного импульса составляет 3.5 фс, что соответствует размерности чуть более одного периода колебания поля. Доля энергии, содержащаяся в сжатом лазерном импульсе, составляет 50% от входной энергии, что соответствует мощности в сжатом лазерном импульсе 60 ПВт. Как следует из рисунка, в процессе уменьшения длительности лазерного импульса поперечный размер волнового пучка практически не меняется с $z \sim 0.3$, поэтому самокомпрессию волнового пакета можно рассматривать как квази-одномерную.

Вернемся теперь к рисунку 6.26**(c)**, на котором представлена зависимость длины среды z_{comp}, где длительность лазерного импульса достигает минимального значения, от начальной амплитуды a_o. Как видно из данного рисунка, длина компрессии лазерного импульса уменьшается по степенному закону $z_{comp} \sim a_o^{-0.2}$, что отличается от выражения (6.140). Данное отличие может быть связано с насыщением нелинейности, которая будет приводить к увеличению длины компрессии лазерного импульса, так как в процессе самофокусировки волнового пучка имеет место значительное усиление поля.

Подведем итоги. В данном разделе проведено аналитическое и численное исследование самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны. В рамках одномерной модели получено аналитическое выражение характерной длины самосжатия лазерного импульса. Данная длина (см. выражение (6.140)) обратно пропорциональна начальной амплитуде лазерного импульса a_o, и с увеличением концентрации плазмы $\mathcal{N}_e$ данная длина уменьшается по степенному закону в степени 3/2. Продемонстрировано хорошее со-

гласие зависимости длины компрессии волнового пакета от амплитуды поля и концентрации плазмы с данными численного расчета (см. рисунок 6.29).

Однако, как отмечалось нами выше, выражение характерной длины компрессии z_{compr} лазерного импульса следует рассматривать как оценку снизу, поскольку при выводе данного выражения не учитывалось следующее:

- в отличие от квазимонохроматического случая, лазерный импульс теряет энергию в процессе возбуждения кильватерной плазменной волны $\left[\frac{d\mathcal{I}_o}{dz} \neq 0\right]$;
- необходимо точно учитывать дисперсию плазмы, так как приближение квазимонохрамотичности нарушается. Начиная с некоторого момента, ширина спектра лазерного импульса становится сопоставимой с несущей частотой ($\Delta\omega \sim \omega_o$);
- необходимо учитывать насыщение нелинейности, поскольку это также будет уменьшать темп укорочения лазерного импульса (см. уравнение (6.133)).

6.10 Обсуждение результатов

В данной главе диссертации обсуждались два перспективных механизма укорочения интенсивных лазерных импульсов мульти-петаваттного уровня мощности в плазме, для которой не возникает проблем электрической прочности. В первой части данной главы приведены результаты исследований усиления и укорочения лазерных импульсов в процессе обратного рамановского рассеяния в плазме. Получена система уравнений для отклика среды и для лазерных импульсов для описания такого процесса для широкополосных волновых пакетов, в которой содержится наряду со стоячей плазменной волной, возбуждаемой интерференцией двух лазерных импульсов (распространяющихся на встречу друг друга), также возможность возбуждения кильватерной волны усиливаемой лазерным импульсом. С помощью данной системы уравнений можно исследовать новый режим усиления и укорочения лазерных импульсов в плазме в процессе рамановского усиления, когда затравочный импульс сжимается на нелинейной стадии до длительности, сопоставимой с длиной плазменной волны, и с амплитудой векторного потенциала порядка релятивистского значения. На данном этапе становится важным эффект самовоздействия в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны, который будет обсуждаться во второй

части данной главы диссертации. Отметим, что в этих условиях из-за вырожденного четырехволнового взаимодействия процесс обратного рамановского рассеяния будет значительно подавлен. Усиливаемый лазерный импульс в процессе возбуждения им самим кильватерной волны в дальнейшем сожмется до длительности, сопоставимой с оптическим периодом колебаний поля, что намного меньше длины плазменной волны для редкой плазмы. Таким образом, компрессия усиливаемого лазерного импульса на второй стадии может быть рассмотрена как финальная стадия техники рамановского усиления при правильном подборе параметров плазмы: концентрации электронов и длины.

Экспериментально продемонстрировано усиление фемтосекундных лазерных импульсов на малом уровне энергии при вынужденном рамановском рассеянии в случае встречного распространения усиливаемого фемтосекундного импульса и частотно-модулированного широкополосного импульса накачки с той же несущей частотой в диэлектрических капиллярах, заполненных газовой плазмой. Достигнуты рекордно большие значения коэффициента усиления по спектральной интенсивности усиливаемого сигнала $\sim 10^3$ и по энергии выходного излучения $\sim 10^2$. Проведенное численное моделирование демонстрирует хорошее согласие с результатами эксперимента. Основными факторами, ограничившими усиление в нашем эксперименте и не позволившими полностью использовать волноводные преимущества капилляра и выйти в нелинейный режим усиления с большим коэффициентом преобразования энергии накачки, явились большая величина частотной модуляции накачки и, согласно нашим теоретическим представлениям и расчетам, опрокидывание плазменной волны. Негативное влияние этих факторов может быть существенно уменьшено за счет частичной временной компрессии импульса накачки и введения исходно небольшой расстройки между несущими частотами затравочного импульса и накачки, которая позволит повысить концентрацию плазмы и, соответственно, повысить порог опрокидывания плазменной волны. Результаты эксперимента и теоретических расчетов позволяют предложить гидродинамический метод учета опрокидывания плазменной волны, играющий важную роль в ограничении усиления для рассматриваемой схемы.

Следует отметить, что сама по себе идея использования рамановских усилителей в плазме для получения фемтосекундных лазерных импульсов сверхбольшой интенсивности является весьма привлекательной, и в настоящих экспериментах продемонстрирована возможность ее достижения. Но ее практическая реализация, как обычно, сопряжена с существенными трудностями, преодоление которых является

типичным на пути от идеи к ее воплощению.

Во второй части данной главы теоретически обоснован и экспериментально продемонстрирован новый метод самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов мульти-петаваттного уровня мощности до нескольких колебаний поля при возбуждении кильватерной плазменной волны. Самосжатие волнового пакета связано с тем, что в условиях возбуждения кильватерной волны в задней части волнового пакета происходит вытеснение электронов, а в передней части импульса, наоборот, концентрация электронов увеличивается. Следовательно, задняя часть импульса догоняет переднюю часть, так как групповая скорость волнового пакета в плазме увеличивается с уменьшением концентрации электронов. Как показали результаты аналитических и численных исследований, темп укорочения лазерного импульса протекает по разному в зависимости от величины амплитуды векторного потенциала. В случае, когда амплитуда векторного потенциала мала по сравнению с релятивистским значением, лазерный импульс будет испытывать самофокусировку, что приведет к дополнительному усилению поля. Как показал качественный анализ, в этом случае характерная длина экспоненциально уменьшается с увеличением мощности в лазерном импульсе. В другом предельном случае, когда из-за насыщения нелинейности подавляется самофокусировка (реализуется квазиодномерная ситуация), темп укорочения ниже и зависимость длины компрессии волнового пакета степенная от амплитуды лазерного импульса.

Численное и аналитическое исследование пространственно-временной неустойчивости сверхкороткого (с длительностью, меньшей длины плазменной волны) релятивистски сильного лазерного импульса при возбуждении кильватерной волны показало, что в эволюции начальных возмущений поперечного распределения амплитуды поля можно выделить два этапа. В рассматриваемом случае инерционной нелинейности сначала происходит самоизоляция поперечных неоднородностей поля и формирование филаментов. Затем филаменты притягиваются и образуется фактически та же самая структура, что и при эволюции «сглаженного»распределения поля. Этот процесс удается пояснить на основе уравнения для «центров масс»интенсивностей возникающих неоднородностей. Таким образом, понятие критической мощности имеет в случае инерционной нелинейности первоначальный смысл минимальной мощности, при превышении которой происходит самофокусировка излучения.

Проведено детальное теоретическое исследование шланговой неустойчивости распространяющихся в плазме релятивистски сильных лазерных импульсов с длитель-

ностью менее периода кильватерной плазменной волны. Получено аналитическое выражение для смещения центра масс волнового пучка и проанализировано влияние этой неустойчивости на процесс модификации спектра лазерного излучения для широкой области начальных параметров. Показано, что развитие неустойчивости характеризуется степенной (не экспоненциальной) зависимостью от времени на трассе распространения и не приводит к ухудшению режима самокомпрессии лазерных импульсов.

Наряду с теоретическим анализом был проведен также эксперимент. Мы представили экспериментальные результаты по компрессии лазерного импульса, вызванной возбуждением кильватерной волны в релятивистском режиме, используя спектральную фазовую интерфереметрию для техники непосредственной реконструкции электрического поля для полной характеризации импульса. Результаты показывают, что лазерный импульс с мощностью 100 ТВт с 30 фс до 10 фс в газовой струе длиной 2 мм с концентрацией газа 1.1×10^{19} см$^{-3}$ скомпрессировался к длительности 10 фс, которая была верифицирована посредством полного релятивистски трехмерного PIC кода. Была также использована оптимизированная модель, основанная на гидродинамическом коде, показывая возможность формирования лазерных импульсов с небольшим числом колебаний поля.

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации, состоят в следующем.

1. Найден новый класс одномерных уединенных решений волнового уравнения для циркулярно поляризованного излучения с произвольным числом колебаний поля в средах с безынерционной нелинейностью керровского типа и плазменным законом дисперсии. Особенностью данных волновых солитонов является существование предельного солитона с максимально допустимой энергией и минимальной возможной длительностью (соизмеримой с периодом колебаний поля). Предложен метод самокомпрессии первоначально протяженного лазерного импульса до периода поля на основе концепции солитона высокого порядка.

2. На основе преобразования автомодельного типа показано, что вблизи особенности (в области неограниченного нарастания поля) дисперсионные эффекты ослабляются и существенную роль играет нелинейная дисперсия среды (зависимость групповой скорости от амплитуды поля). Самофокусировка волнового поля сопровождается опрокидыванием продольного профиля импульса и формированием особенности нового типа, в которой на фоне неограниченного роста поля происходит градиентная катастрофа. Это приводит к аномальному уширению спектра излучения, который спадает при больших частотах по степенному закону.

3. Аналитически и численно показано, что в среде с безынерционной нелинейностью керровского типа нелинейная дисперсия приводит к стабилизации самофокусировочной неустойчивости для лазерных импульсов с длительностью менее десяти периодов колебаний поля.

4. Показано, что самофокусировка волнового поля в среде с безынерционной нелинейностью керровского типа и аномальной дисперсией групповой скорости приводит к адиабатическому уменьшению продольного размера волнового пакета

до длительности, соизмеримой с периодом колебаний поля, для широких волновых пучков с солитонным распределением поля по продольной координате. На заключительной стадии компрессии нелинейная дисперсия приводит к формированию ударной волны. На основе данного эффекта предложен новый метод самокомпрессии вплоть до одного колебания поля лазерных импульсов с энергией в десятки мДж.

5. Предложен метод предельной самокомпрессии лазерных импульсов солитонной формы до длительности, соизмеримой с колебанием поля, которая сопровождается сверхширокимсмещением спектра волнового пакета в коротковолновую область в волноведущей системе, заполненной двумя сортами газа с существенно различными потенциалами ионизации для обеспечения независимого управления вкладов керровской и ионизационной нелинейностей. Показано, что данный метод позволяет получить лазерные импульсы с длительностью в несколько сотен аттосекунд в ультрафиолетовой области.

6. Показано, что при распространении мощного фемтосекундного лазерного импульса в диэлектрическом капилляре возможна ионизационно-индуцированная самокомпрессия лазерного импульса с миллиджоульным уровнем энергии вплоть до одного периода колебания поля. Компрессия волнового пакета связана с формированием нелинейного плазменного волновода, аномальная дисперсия которого позволяет сгруппировать коротковолновые спектральные компоненты, появляющиеся в процессе ионизации газа. Продемонстрирована возможность масштабирования данной схемы к джоулеву уровню энергии.

7. Предложен метод самокомпрессии релятивистски сильных лазерных импульсов мульти-петаваттного уровня мощности до нескольких колебаний поля в условиях самофокусировки при возбуждении кильватерной плазменной волны с периодом, превышающим длительность волнового пакета.

8. Аналитически и численно показано, что пространственно-временная неустойчивость сверхкороткого релятивистски сильного лазерного импульса при возбуждении кильватерной волны с периодом, превышающим длительность волнового пакета, подавлена из-за инерции нелинейного отклика. Развитие шланговой неустойчивости, приводящей к нарушению осевой симметрии волнового пучка, характеризуется степенной (не экспоненциальной) зависимостью от длины

распространения, и данная неустойчивость не приводит к ухудшению режима самокомпрессии.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в реферируемых журналах

[A1] *Карташов Д.В., Ким А.В., Скобелев С.А.* Нелинейная динамика волновых полей в нерезонансных средах: от солитонов огибающей к видеосолитонам // *Изв. ВУЗов Радиофизика* — 2003. — Т. 46. — С. 415-428.

[A2] *Карташов Д.В., Ким А.В., Скобелев С.А.* Солитонные структуры волнового поля с произвольным числом колебаний в нерезонансных средах // *Письма в ЖЭТФ.* — 2003. — Т. 78. — С. 722-726.

[A3] *Балакин А.А., Карташов Д.В., Киселев А.М., Скобелев С.А., Степанов А.Н., Фрайман Г.М.* Усиление лазерных импульсов при обратном рамановском рассеянии в плазме, создаваемой в диэлектрических капиллярах // *Письма в ЖЭТФ.* — 2004. — Т. 80. — С. 15-20.

[A4] *Скобелев С.А., Ким А.В.* // О динамических свойствах «упругих» взаимодействий волновых солитонов с малым числом осцилляций поля // *Письма в ЖЭТФ.* — 2004. — Т. 80. — С. 727-731.

[A5] *Литвак А.Г., Миронов В.А., Скобелев С.А.* Динамика самовоздействия сверхкоротких электромагнитных импульсов // *Письма в ЖЭТФ.* — 2005. — Т. 82. — Р. 119-123.

[A6] *Балакин А.А., Литвак А.Г., Миронов В.А., Скобелев С.А.* Структурные особенности динамики самовоздействия сверхкоротких электромагнитных импульсов // *ЖЭТФ.* — 2007. — Т. 131. — С. 408-424.

[A7] *Skobelev S.A., Kartashov D.V., Kim A.V.* Few-Optical-Cycle Solitons and Pulse Self-Compression in a Kerr Medium // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99. — P. 203902.

[A8] *Kim A.V., Skobelev S.A., Anderson D., Hansson T., Lisak M.* Extreme Nonlinear Optics in a Kerr Medium: Exact Soliton Solutions for a Few Cycles Pulses // *Phys.Rev.A.* — 2008. — Vol. 77. — P. 043823.

[A9] *Balakin A.A., Litvak A.G., Mironov V.A., Skobelev S.A.* Self-focusing of few optical cycle pulses // *Phys.Rev.A.* — 2008. — Vol. 78. — P. 061803.

[A10] *Balakin A.A., Litvak A.G., Mironov V.A., Skobelev S.A.* Self-action of few-cycle pulses in a dispersive medium // *Phys.Rev.A.* — 2009. — Vol. 80. — P. 063807.

[A11] *Скобелев С.А., Кулагин Д.И., Степанов А.Н., Ким А.В., Сергеев А.М., Андреев Н.Е.* Ионизационная самокомпрессия интенсивных фемтосекундных импульсов при распространении через газонаполненные диэлектрические капилляры // *Письма в ЖЭТФ.* — 2009. — Т. 89. — С. 641-648.

[A12] *Kim A.V., Skobelev S.A.* Few-cycle vector solitons of light // *Phys.Rev.A.* — 2011. — Vol. 83. — P. 063832.

[A13] *Балакин А.А., Литвак А.Г., Миронов В. А., Скобелев С. А.* О самофокусировке сверхкороткого релятивистски сильного лазерного импульса в плазме // *ЖЭТФ.* — 2011. — Т. 139. — С. 579-586.

[A14] *Skobelev S.A., Kim A.V., Willi O.* Generation of High-Energy Few-Cycle Laser Pulses by Using the Ionization-Induced Self-Compression Effect // *Phys. Rev. Lett.*. — 2012. — Vol. 108. — C. 123904.

[A15] *Balakin A.A., Litvak A.G., Mironov V.A., Skobelev S.A.* Self-compression of relativistically strong femtosecond laser pulses during the excitation of a plasma wake wave // *EPL.* — 2012. — Vol. 100. — P. 34002.

[A16] *Eremin V., Malkov Yu., Korolikhin V., Kiselev A., Skobelev S., Stepanov A., Andreev N.* Study of the plasma wave excited by intense femtosecond laser pulses in a dielectric capillary // *Phys. of Plasma.* — 2012. — Vol. 19. — P. 093121.

[A17] *Pipahl A., Anashkina E.A., Toncian M., Toncian T., Skobelev S.A., Bashinov A.V., Gonoskov A.A., Willi O., Kim A.V.* High-intensity few-cycle laser-pulse generation by the plasma-wakefield self-compression effect // *Phys. Rev. E.* — 2013. — Vol. 87. — P. 033104.

[A18] *Pipahl A., Anashkina E.A., Toncian M., Toncian T., Skobelev S.A., Bashinov A.V., Gonoskov A.A., Willi O., Kim A.V.* Towards high intensity few-cycle pulses using plasma wakefield self-compression effect // *J. Phys.: Conf. Ser.*. — 2013. — Vol. 414. — P. 012011.

[A19] *Balakin A.A., Litvak A.G., Mironov V.A., Skobelev S.A.* Compression of femtosecond petawatt laser pulses in a plasma under the conditions of wake-wave excitation // *Phys. Rev. A.* — 2013. — Vol. 88. — P. 023836.

[A20] *Балакин А.А., Литвак А.Г., Миронов В.А., Скобелев С.А.* Шланговая неустойчивость релятивистски сильных фемтосекундных лазерных импульсов с небольшим числом колебаний поля в плазме в условиях возбуждения кильватерной плазменной волны // *ЖЭТФ.* — 2014. — Т. 145. — С. 591-600.

[A21] *Kim A.V., Litvak A.G., Mironov V.A., Skobelev S.A.* Optimization of the regime of shortening of relativistically strong laser pulses in the process of excitation of a plasma wake wave // *Phys. Rev. A.* — 2014. — Vol. 90. — P. 043843.

[A22] *Kim A.V., Litvak A.G., Mironov V.A., Skobelev S.A.* Extreme self-compression along with superbroad spectrum up-conversion of few-cycle optical solitons in the ionization regime // *Phys. Rev. A.* — 2015. — Vol. 92. — P. 033856.

Статьи в сборниках

[A23] *Skobelev S.A., Mironov V.A., Litvak A.G., Balakin A.A.* Self-focusing dynamics of few optical cycle pulses // *AIP Conf. Proc.* — 2006. — V. 827. — P. 94–99.

[A24] *Ким А.В., Скобелев С.А., Шуралёв М.О.* Солитонные структуры волнового поля с конечным числом колебаний в средах с керровской нелинейностью: от солитонов огибающей к видеосолитонам // *Труды (девятой) научной конференции по радиофизике «Факультет - ровесник Победы»* — 2005. — P. 23-24.

[A25] *Kartashov D.V., Skobelev S.A., and Kim A.V.* Pulse compression and solitons formation in the capillary with gas-plasma mixture // *Technical Digest of XI Int. Conf. on Laser Optics* — 2003. — P. WeR5-20.

[A26] *Kartashov D.V. and Skobelev S.A.* Pulse compression due to self-action and wave breaking in the capillary with gas-plasma mixture // *Technical Digest of II Int. Conf. on Laser Optics for Young Scientists (LOYS-2003)* — 2003. — P. WeS2-P08.

[A27] *Kartashov D.V., Skobelev S.A., and Kim A.V.* New pulse compression technique for few-optical-cycle pulse generation // *Book of Abstracts of 12-th Int. Laser Physics Workshop (LPHYS'03)* — 2003. — P. 262.

[A28] *Skobelev S.A., Kartashov D.V., and Kim A.V.* Few-optical-cycle solitons in nonresonance media: dynamics and stability // *Book of Abstracts of 12-th Int. Laser Physics Workshop (LPHYS'03)* — 2003. — P. 301.

[A29] *Skobelev S.A., Kartashov D.V., and Kim A.V.* Stability and dynamics of few-optical-cycle solitons in nonresonant media // *Proc. of Int. Symposium "Topical Problems of nonlinear wave physics" (NWP-2003).* — 2003. — P. 185-186.

[A30] *Kartashov D.V., Skobelev S.A., and Kim A.V.* Few-optical-cycle solitons in non-resonant media // *Proc. of Int. Symposium "Topical Problems of nonlinear wave physics" (NWP-2003).* — 2003. — P. 249-250.

[A31] *Карташов Д.В., Ким А.В., Скобелев С.А.* Солитонные структуры волнового поля с конечным числом колебаний в нерезонансных средах: от солитонов огибающей к видеосолитонам // *Сборник трудов "Нелинейные волны' 2004".* — 2004. — С. 60-61.

[A32] *Скобелев С.А.* Нелинейная динамика волновых полей в нерезонансных средах: от солитонов огибающей к видеосолитонам // *Сборник трудов конференции молодых ученых "Нелинейные волны' 2004".* — 2004. — С. 102.

[A33] *Balakin A.A., Kartashov D.V., Kiselev A.M., Stepanov A.N., Fraiman G.M., Skobelev S.A.* Amplification of femtosecond laser pulses on stimulated Raman backscattering in capillary plasma // *Proc. of "Frontiers of Nonlinear Physics".* — 2004. — P. 137-138.

[A34] *Balakin A.A., Kartashov D.V., Stepanov A.N., Fraiman G.M., Skobelev S.A.* Amplification of femtosecond laser pulses on stimulated Raman backscattering in capillary plasma // *Proc. of "13-th Int. Laser Physics Workshop (LPHYS'04)".* — 2004. — P. 88.

[A35] *Skobelev S.A., Kartashov D.V., and Kim A.V.* Soliton structures of a wave field with an arbitrary number of oscillations in nonresonance media: from envelope solitons toward videosolitons // *Proc. of "VI Int. Congress on Mathematical Modeling".* — 2004. — P. 172.

[A36] *A.N. Stepanov, Balakin A.A., Fraiman G.M., D.V. Kartashov, Kiselev A.M., Skobelev S.A.*. Nonlinear effects on propagation of highly intense femtosecond laser pulses in gas-filled dielectric capillary tubes // *Proc. of Int. Symposium "Topical Problems of nonlinear wave physics" (NWP-2005).* — 2005. — P. 120-121.

[A37] *Kim A.V., Kulagin D.I., Skobelev S.A., Stepanov A.N.* Ionization-induced spectrum transformation and ultrashort pulse self-compression // *Technical Digest of "XX-th Int. Conf. on Coherent and Nonlinear Optics (ICONO'2007)".* — 2007. — P. IO3/ IV-2.

[A38] *Skobelev S.A., Mironov V.A., Litvak A.G., Balakin A.A.* Self-focusing dynamics of few optical cycle pulses // *Proc. of "3-rd International Conference on Superstrong Field in Plasmas"* — 2005. — P. 94.

[A39] *Stepanov A.A., Balakin A.A., Fraiman G.M., D.V. Kartashov, Kiselev A.M., Skobelev S.A.* Propagation of high intense femtosecond laser pulses in gas-filled dielectric capillary tubes: nonlinear effects // *Proc. of "3-rd International Conference on Superstrong Field in Plasmas"* — 2005.

[A40] *Kartashov D.V, Babin A.A., Stepanov A.N., Kiselev A.M., Sergeev A.M., Skobelev S.A.* Interaction of high power femtosecond laser pulses with gas and plasmas in dielectric capillary tubes // *Proc. of "Int. Conf. on Coherent and Nonlinear Optics*

/Int. Conf. on Lasers, Application, and Technologies (ICONO/LAT 2005)" . — 2005. — P. IWJ1.

[A41] *Skobelev S.A.* Spatio-temporal self-action of few-optical-cycle electromagnetic pulses in nonresonant media // *Proc. of "Russian-German Laser Symposium (RGLS-2005)"*. — 2005.

[A42] *Скобелев С.А.* Динамика самовоздействия сверхкоротких электромагнитных импульсов // *Сборник трудов "Нелинейные волны' 2006"*. — 2006. — С. 142.

[A43] *Litvak A.G., Balakin A.A., N.A. Zharova, Mironov V.A., Skobelev S.A.*. Ultra-short laser pulse self-focusing in dispersive media // *Proc. of "Frontiers of Nonlinear Physics"*. — 2007. — P. 41-42.

[A44] *Balakin A.A., Mironov V.A., Skobelev S.A.*. Ultra-Short laser pulse self-focusing during gas ionization // *Proc. of "Frontiers of Nonlinear Physics"*. — 2010. — P. 147-148.

[A45] *Balakin A.A., Mironov V.A., Skobelev S.A., Litvak A.G.*. Stabilization of filament instability of an ultra-short relativistically strong laser pulse in plasma // *Proc. of "Frontiers of Nonlinear Physics"*. — 2010. — P. 149-150.

[A46] *Kim A.V., Skobelev S.A.* Elliptically polarized few-optical-cycle solitons: structures and its dynamics // *Proc. of the Second International Conference: Nonlinear Waves–Theory and Applications*. — 2010. — P. 199.

[A47] *Скобелев С.А., Ким А.В., Сергеев А.М., Степанов А.Н.* Ионизационная самокомпрессия интенсивных фемтосекундных импульсов при распространении через газонаполненные диэлектрические капилляры // *Сборник трудов "Нелинейные волны' 2008"*. — 2008. — С. 140.

[A48] *Skobelev S.A., Mironov V.A., Litvak A.G., Balakin A.A.* Self-Compression of a Few-Cycle Petawatt Laser Pulses in Transparent Plasma // *Proc. of II Int. Conf. "High Intensity Lasers and High Field Phenomena (HILAS-2012)*. — 2012. — P. JT2A.64 .

[A49] *Toncian T., Cerchez M., Giesecke A.L., Peth C., Swantusch M., Toncian M., Willi O., Albertazzi B., Fuchs J., Anashkina E.A., Skobelev S.A., Bashinov A.V.,*

Gonoskov A.A., and Kim A.V. Short pulse and short wavelength radiation generation by plasma nonlinearities at the Arcturus Laser Laboratory // *Proc. of 22nd International Laser Physics Workshop (LPHYS 13)*. — 2013.

[A50] *Skobelev S.A., Kim A.V., Litvak A.G., Mironov V.A.* Extreme Self-Compression of Few-Cycle Optical Solitons in the Ionization Regime // *Proc. of International Workshop "Nonlinear Photonics: Theory, Materials, Applications"*. — 2015. — P. 130 .

Литература

[1] *Agrawal G. P.* Nonlinear Fiber Optics. — Academic Press, New York, 1994.

[2] *Agrawal G. P.* Nonlinear Fiber Optics. — Academic, San Diego, 2001.

[3] *Akhmediev N., Karlsson M.* Cherenkov radiation emitted by solitons in optical fibers // *Phys. Rev. A.* — 1995. — Vol. 51. — P. 2602.

[4] *Akhmediev N., Karlsson M.* A perturbative theory of soliton propagation in the presence of third order dispersion // *Opt. Commun.* — 1995. — Vol. 114. — P. 321.

[5] *Anderson D., Kim A. V., Lisak M. et al.* Self-sustained plasma waveguide structures produced by ionizing laser radiation in a dense gas // *Phys. Rev. E.* — 1995. — Vol. 52. — P. 4564.

[6] *Anderson D., Kim A. V., Lisak M. et al.* Self-sustained plasma waveguide structures produced by ionizing laser radiation in dense gas // *Phys. Rev. E.* — 1995. — Vol. 52. — P. 4564.

[7] *Andreev A. Ts., Vasilev V. D., Kozlov V. A. et al.* Polarization phase nonreciprocity in all-fiber ring interferometers // *Quantum Electronics.* — 1993. — Vol. 23. — P. 685.

[8] *Andreev N. E., Gorbunov L. M., Mora P., Ramazashvili R.* Filamentation of ultrashort laser pulses propagating in tenuous plasmas // *Phys. Plasmas.* — 2007. — Vol. 14. — P. 083104.

[9] *Andreev N. E., Gorbunov L. M., Pogosova V. I. Kirsanov A. A., Ramazashvili R. R.* Resonant excitation of wakefields by a laser pulse in a plasma // *JETP Lett.* — 1992. — Vol. 55. — P. 571.

[10] *Andreev N. E., Gorbunov L. M., Tarakanov S. V., Zykov A. I.* Dynamics of ponderomotive self-focusing and periodic bursts of stimulated Brillouin backscattering in plasmas // *Phys. Fluids B.* — 1993. — Vol. 5. — P. 1986.

[11] *Andriukaitis G., Balciunas T., Alisauskas S. et al.* 90 GW peak power few-cycle mid-infrared pulses from an optical parametric amplifier // *Opt. Lett.* — 2011. — Vol. 36. — P. 2755.

[12] *Antonsen Th. M., Jr., Bian Zhigang.* Ionization Induced Scattering of Short Intense Laser Pulses // *Physica Scripta.* — 1999. — Vol. 82. — P. 3617.

[13] *Antonsen T. M., Jr., Mora P.* Self-focusing and Raman scattering of laser pulses in tenuous plasmas // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Vol. 69. — P. 2204.

[14] *Babin A. A., Kartashov D. V., Kiselev A. M. et al.* Ionization spectrum broadening and frequency blue-shift of high-intensity femtosecond laser pulses in gas-filled capillary tubes // *Appl. Phys. B.* — 2002. — Vol. 75. — P. 509.

[15] *Babin A. A., Kartashov D. V., Kiselev A. M. et al.* Ionization spectrum transformation of high-intensity femtosecond laser pulses in gas-filled capillary tubes // *Laser Phys.* — 2002. — Vol. 12. — P. 1303.

[16] *Balakin A. A., Fisch N. J., Fraiman G. M. et al.* Numerical modeling of quasitransient backward Raman amplification of laser pulses in moderately undercritical plasmas with multicharged ions // *Phys. Plasmas.* — 2011. — Vol. 18. — P. 102311.

[17] *Balakin A. A., Fraiman G. M., Fisch N. J., Suckewer S.* Backward Raman amplification in a partially ionized gas // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 72. — P. 036401.

[18] *Balakin A. A., Litvak A. G., Mironov V. A., Skobelev S. A.* Self-focusing of few optical cycle pulses // *Phys. Rev. A.* — 2008. — Vol. 78. — P. 061803.

[19] *Balakin A. A., Litvak A. G., Mironov V. A., Skobelev S. A.* Self-action of few-cycle pulses in a dispersive medium // *Phys. Rev. A.* — 2009. — Vol. 80. — P. 063807.

[20] *Balakin A. A., Litvak A. G., Mironov V. A., Skobelev S. A.* Self-compression of relativistically strong femtosecond laser pulses during the excitation of a plasma wake wave // *EPL.* — 2012. — Vol. 100. — P. 34002.

[21] *Balakin A. A., Litvak A. G., Mironov V. A., Skobelev S. A.* Compression of femtosecond petawatt laser pulses in a plasma under the conditions of wake-wave excitation // *Phys. Rev. A.* — 2013. — Vol. 88. — P. 023836.

[22] *Balciunas T., Fourcade-Dutin C., Fan G. et al.* A strong-field driver in the single-cycle regime based on self-compression in a kagome fibre // *Nature Communication.* — 2015. — Vol. 6. — P. 6117.

[23] *Baltuska A., Udem Th., Uiberacker M. et al.* Attosecond control of electronic processes by intense light fields // *Nature (London).* — 2003. — Vol. 421. — P. 611.

[24] *Baltuska A., Wei Z.Y., Pshenichnikov M. S.* Optical pulse compression to 5fs at a 1-MHz repetition rate // *Opt. Lett.* — 1999. — Vol. 22. — P. 102.

[25] *Belenov E. M., Kryukov P. G., Nazarkin A. V. et al.* Exact Solutions of the Self-Induced Transparency Equations // *JETP Lett.* — 1988. — Vol. 47. — P. 523.

[26] *Belenov E. M., Nazarkin A. V., Ushchapovskii V. A.* Dynamics of the propagationand interaction of electromagnetic pulses in two-level media // *Sov. Phys. JETP.* — 1991. — Vol. 73. — P. 422.

[27] *Bergé L.* Wave collapse in physics: principles and applications to light and plasma waves // *Physics Reports.* — 1998. — Vol. 303. — P. 259.

[28] *Bergé L., Rasmussen Jens Juul.* Multisplitting and collapse of self-focusing anisotropic beams in normal / anomalous dispersive media // *Phys. Plasmas.* — 1996. — Vol. 3. — P. 824.

[29] *Bergé L., Scupin S., Lederer F. et al.* Multiple Filamentation of Terawatt Laser Pulses in Air // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 225002.

[30] *Berkovsky A. N., Kozlov S. A., Shpolyansky Y. A.* Self-focusing of few-cycle light pulses in dielectric media // *Phys. Rev. A.* — 2005. — Vol. 72. — P. 043821.

[31] *Bespalov V. G., Kozlov S. A., Shpolyansky Y. A., Walmsley I. A.* Simplified field wave equations for the nonlinear propagation of extremely short light pulses // *Phys. Rev. A.* — 2002. — Vol. 66. — P. 013811.

[32] *Borghesi M., MacKinnon A. J., Barringer L. et al.* Relativistic Channeling of a Picosecond Laser Pulse in a Near-Critical Preformed Plasma // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78. — P. 879.

[33] *Borisov A. B., Borovskiy A. V., Korobkin V. V. et al.* Observation of relativistic and charge-displacement self-channeling of intense subpicosecond ultraviolet (248 nm) radiation in plasmas // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Vol. 68. — P. 2309.

[34] *Born M., Wolf E.* Principles of Optics. — Pergamon, New York, 1968.

[35] *Brabec T., Krausz F.* Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics // *Rev. Mod. Phys.* — 2000. — Vol. 72. — P. 545.

[36] *Braun A., Korn G., Liu X. et al.* Self-channeling of high-peak-power femtosecond laser pulses in air // *Opt. Lett.* — 1995. — Vol. 20. — P. 73.

[37] *Bree C.* Nonlinear Optics in the Filamentation Regime. — Springer Science & Business Media, 2012.

[38] *Brunel F.* Harmonic generation due to plasma effects in a gas undergoing multiphoton ionization in the high-intensity limit // *J. Opt. Soc. Am. B.* — 1990. — Vol. 7. — P. 521.

[39] *Bulanov S. V., Pegoraro F., Pukhov A. M.* Two-Dimensional Regimes of Self-Focusing, Wake Field Generation, and Induced Focusing of a Short Intense Laser Pulse in an Underdense Plasma // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 74. — P. 710.

[40] *Bulanov S. V., Sakharov A. S.* Induced focusing of electromagnetic wave in a wake plasma wave // *JETP Lett.* — 1991. — Vol. 54. — P. 203.

[41] *Bullough R. K., Ahmad F.* Exact Solutions of the Self-Induced Transparency Equations // *Phys. Rev. Lett.* — 1971. — Vol. 27. — P. 330.

[42] *Cardin V., Thire N., Beaulieu S. et al.* 0.42 TW 2 cycle pulses at 1.8 mkm via hollow-core fiber compression // *Appl. Phys. Lett.* — 2015. — Vol. 107. — P. 181101.

[43] *Chang G., Chen L. J., Kärtner F.X.* Fiber-optic Cherenkov radiation in the few-cycle regime // *Opt. Express.* — 2011. — Vol. 19. — P. 6635.

[44] *Chang W., Hölzer P., Travers J. C., Russell P. St. J.* Combined soliton pulse compression and plasma-related frequency upconversion in gas-filled photonic crystal fiber // *Opt. Lett.* — 2013. — Vol. 38. — P. 2984.

[45] *Chekhlov O. V., Collier J. L., Ross I. N. et al.* 35J broadband femtosecond optical parametric chirped pulse amplification system // *Optics Letters.* — 2006. — Vol. 31. — P. 3665.

[46] *Chen C. M., Kelley P. L.* Nonlinear pulse compression in optical fibers: scaling laws and numerical analysis // *J. Opt. Soc. Am. B.* — 2002. — Vol. 19. — P. 1961.

[47] *Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.H.* Self-Trapping of Optical Beams // *Phys. Rev. Lett.* — 1965. — Vol. 13. — P. 479.

[48] *Chiron A., Bonnaud G., Dulieu A. et al.* Experimental observations and simulations on relativistic self-guiding of an ultra-intense laser pulse in underdense plasmas // *Phys. Plasmas.* — 1996. — Vol. 3. — P. 1373.

[49] *Christov I. P.* Phase-dependent loss due to nonadiabatic ionization by sub-10-fs pulses // *Opt. Lett.* — 1999. — Vol. 24. — P. 1425.

[50] *Clark D. S., Fisch N. J.* Simulations of Raman laser amplification in ionizing plasmas // *Phys. Plasmas.* — 2003. — Vol. 10. — P. 3363.

[51] *Corkum P. B., Krausz Ferenc.* Attosecond science // *Science.* — 2007. — Vol. 3. — P. 381.

[52] *Couairon A., Mysyrowicz A.* Femtosecond filamentation in transparent media // *Physics Reports.* — 2007. — Vol. 441. — P. 47.

[53] *Cros B., Courtois C., Matthieussent G. et al.* Eigenmodes for capillary tubes with dielectric walls and ultraintense laser pulse guiding // *Phys. Rev. E.* — 2002. — Vol. 65. — P. 026405.

[54] *Dai Jianming, Xie Xu, Zhang X. C.* Detection of Broadband Terahertz Waves with a Laser-Induced Plasma in Gases // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97. — P. 103903.

[55] *Dalgarno A., Kingston A. E.* The Refractive Indices and Verdet Constants of the Inert Gases // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* — 1960. — Vol. 259. — P. 424.

[56] *DeLong K. W., Trebino R., Hunter J., White W. E.* Frequency-resolved optical gating with the use of second-harmonic generation // *Journal of the Optical Society of America B.* — 1994. — Vol. 11. — P. 2206.

[57] *Delone N. B., Krainov V. P.* Fundamentals of nonlinear optics of atomic gases. — New York: Wiley, 1988.

[58] *Delqué Michaël, Fanjoux Gil, Sylvestre Thibaut.* Polarization dynamics of the fundamental vector soliton of isotropic Kerr media // *Phys. Rev. E.* — 2007. — Vol. 75. — P. 016611.

[59] *Delqué Michaël, Sylvestre Thibaut, Maillotte Hervé et al.* Experimental observation of the elliptically polarized fundamental vector soliton of isotropic Kerr media // *Opt. Lett.* — 2005. — Vol. 30. — P. 3383.

[60] *Dodd R. K., Ellbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C.* Solitons and Nonlinear Wave Equations. — Academic, London, 1982.

[61] *Dodin I. Y., Fraiman G. M., Malkin V. M., Fisch N. J.* Amplification of short laser pulses by raman backscattering in capillary plasmas // *ЖЭТФ.* — 2002. — Т. 122. — С. 723.

[62] *Dorchies F., Marques J. R., Cros B. et al.* Monomode Guiding of 10^{16} W/cm^2 Laser Pulses over 100 Rayleigh Lengths in Hollow Capillary Dielectric Tubes // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 82. — P. 4655.

[63] *Drozdov A. A., Sukhorukov A. A., Kozlov S. A.* Spatio-temporal dynamics of single-cycle optical pulses and nonlinear frequency conversion // *International Journal of Modern Physics B.* — 2014. — Vol. 28. — P. 1442007.

[64] *Dudley J. M., Genty G., Coen S.* Supercontinuum generation in photonic crystal fiber // *Rev. Mod. Phys.* — 2006. — Vol. 78. — P. 1135.

[65] *Duhr O., Nibbering E. T. J., Korn G. et al.* Generation of intense 8-fs pulses at 400 *nm* // *Opt. Lett.* — 1999. — Vol. 24. — P. 34.

[66] *Durand M., Jarnac A., Houard A. et al.* Self-Guided Propagation of Ultrashort Laser Pulses in the Anomalous Dispersion Region of Transparent Solids: A New Regime of Filamentation // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 110. — P. 115003.

[67] *Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Coudrey P. J., Bullough R. K.* Solitons in nonlinear optics. I. A more accurate description of the 2π pulse in self-induced transparency // *J. Phys. A.* — 1973. — Vol. 6. — P. 1337.

[68] *Erkintalo M., Xu Y. Q., Murdoch S. G. et al.* Cascaded Phase Matching and Nonlinear Symmetry Breaking in Fiber Frequency Combs // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 109. — P. 223904.

[69] *Esarey E., Schroeder C. B., Leemans W. P.* Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators // *Rev. Mod. Phys.* — 2009. — Vol. 81. — P. 1229.

[70] *Faure J., Glinec Y., Santos J. J. et al.* Observation of Laser-Pulse Shortening in Nonlinear Plasma Waves // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95. — P. 205003.

[71] *Fedotov A. B., Serebryannikov E. E., Zheltikov A. M.* Ionization-induced blueshift of high-peak-power guided-wave ultrashort laser pulses in hollow-core photonic-crystal fibers // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 76. — P. 053811.

[72] *Gallmann L., Sutter D. H., Matuschek N. et al.* Characterization of sub-6-fs optical pulses with spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction // *Opt. Letters.* — 1999. — Vol. 24. — P. 1314.

[73] *Gedalin M., Scott T. C., Band Y. B.* Optical Solitary Waves in the Higher Order Nonlinear Schrödinger Equation // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78. — P. 448.

[74] *Gibbon P., Jakober F., Monot P., Auguste T.* Experimental study of relativistic self-focusing and self-channeling of an intense laser pulse in an underdense plasma // *IEEE Trans. Plasma Sci.* — 1996. — Vol. 24. — P. 343.

[75] *Gildenburg V. B., Kim A. V., Krupnov V. A. et al.* Adiabatic frequency up-conversion of a powerful electromagnetic pulse producing gas ionization // *IEEE Trans. on Plasma Science.* — 1993. — Vol. 21. — P. 34.

[76] *Gildenburg V. B., Vvedenskii N. V.* Optical-to-THz Wave Conversion via Excitation of Plasma Oscillations in the Tunneling-Ionization Process // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 245002.

[77] *Gonoskov A. A., Korzhimanov A. V., Eremin V. I. et al.* Multicascade Proton Acceleration by a Superintense Laser Pulse in the Regime of Relativistically Induced Slab Transparency // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 102. — P. 184801.

[78] *Goorjian P. M., Silberberg Y.* Numerical simulations of light bullets using the full-vector time-dependent nonlinear Maxwell equations // *JOSA B.* — 1997. — Vol. 14. — P. 3253.

[79] *Gordon D. F., Hafizi B., Hubbard R. F. et al.* Asymmetric Self-Phase Modulation and Compression of Short Laser Pulses in Plasma Channels // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90. — P. 215001.

[80] *Gromov E. M., Talanov V. I.* Nonlinear dynamics of short wave trains in dispersive media // *JETP.* — 1996. — Vol. 83. — P. 73.

[81] *Gromov E. M., Talanov V. I.* Short envelope solitons (combined nonlinear equation) // *Radiophysics and Quantum Electronics.* — 1996. — Vol. 39. — P. 486.

[82] *Hädrich S., Rothhardt J., Eidam T. et al.* High energy ultrashort pulses via hollow fiber compression of a fiber chirped pulse amplification system // *Opt. Express.* — 2009. — Vol. 17. — P. 3913.

[83] *Haelterman M., Sheppard A. P.* The elliptically polarized fundamental vector soliton of isotropic Kerr media // *Phys. Lett. A.* — 1994. — Vol. 194. — P. 191.

[84] *Hauri C. P., Guandalini A., Eckle P. et al.* Generation of intense few-cycle laser pulses through filamentation – parameter dependence // *Opt. Exp.* — 2005. — Vol. 13. — P. 7541.

[85] *Hauri C. P., Kornelis W., Helbing F. W. et al.* Generation of intense, carrier-envelope phase-locked few-cycle laser pulses through filamentation // *Appl. Phys. B.* — 2004. — Vol. 79. — P. 673.

[86] *Hauri C. P., Lopez-Martens R. B., Blaga C. I. et al.* Intense self-compressed, self-phase-stabilized few-cycle pulses at 2 mkm from an optical filament // *Opt. Lett.* — 2007. — Vol. 32. — P. 868.

[87] *Hemmer Michaël, Baudisch Matthias, Thai Alexandre et al.* Self-compression to sub-3-cycle duration of mid-infrared optical pulses in dielectrics // *Opt. Express.* — 2013. — Vol. 21. — P. 28095.

[88] *Herrmann D., Veisz L., Tautz R. et al.* Generation of sub-three-cycle, 16 TW light pulses by using noncollinear optical parametric chirped-pulse amplification // *Opt. Lett.* — 2009. — Vol. 34. — P. 2459.

[89] *Hölzer Ph., Chang W., Travers J. C. et al.* Femtosecond Nonlinear Fiber Optics in the Ionization Regime // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107. — P. 203901.

[90] *Husakou A.V., Herrmann J.* Supercontinuum Generation of Higher-Order Solitons by Fission in Photonic Crystal Fibers // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 87. — P. 203901.

[91] *Husakou A. V., Kalosha V. P., Herrmann J.* Pulse self-compression in the subcarrier cycle regime // *Opt. Lett.* — 2001. — Vol. 26. — P. 1022.

[92] *Husakou A. V., Kalosha V. P., Herrmann J.* Supercontinuum generation and pulse compression in hollow waveguides // *Opt. Lett.* — 2001. — Vol. 26. — P. 1022.

[93] *Itatani J., Zeidler D., Levesque J. et al.* Controlling High Harmonic Generation with Molecular Wave Packets // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 94. — P. 123902.

[94] *Joly N. Y., Nold J., Chang W. et al.* Bright Spatially Coherent Wavelength-Tunable Deep-UV Laser Source Using an Ar-Filled Photonic Crystal Fiber // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106. — P. 203901.

[95] *Jr Lamb G L.* Elements of Soliton Theory. — New York: Wiley, 1980.

[96] *Kaluza M. C., Mangles S. P. D., Thomas A. G. R. et al.* Observation of a Long-Wavelength Hosing Modulation of a High-Intensity Laser Pulse in Underdense Plasma // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 105. — P. 095003.

[97] *Kaplan A. E.* Subfemtosecond Pulses in Mode-Locked 2π Solitons of the Cascade Stimulated Raman Scattering // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 73. — P. 1243.

[98] *Kaplan A. E., Shkolnikov P. L.* Electromagnetic "Bubbles" and Shock Waves: Unipolar, Nonoscillating EM Solitons // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 75. — P. 2316.

[99] *Kapteyn Henry, Cohen Oren, Christov Ivan, Murnane Margaret.* Harnessing Attosecond Science in the Quest for Coherent X-rays // *Science.* — 2007. — Vol. 317. — P. 775.

[100] *Karpman V. I.* Radiation by solitons due to higher-order dispersion // *Phys. Rev. E.* — 1993. — Vol. 47. — P. 2073.

[101] *Kartashov D., Aliăauskas S., Pugžlys A. et al.* Mid-infrared laser filamentation in molecular gases // *Opt. Lett.* — 2013. — Vol. 38. — P. 3194.

[102] *Kim A. V., Lirin S. F., Sergeev A. M., Vanin E. V.* Compression and frequency up-conversion of an ultrashort ionizing pulse in a plasma // *Phys. Rev. A.* — 1990. — Vol. 42. — P. 2493.

[103] *Kim A. V., Litvak A. G., Mironov V. A., Skobelev S. A.* Optimization of the regime of shortening of relativistically strong laser pulses in the process of excitation of a plasma wake wave // *Phys. Rev. A.* — 2014. — Vol. 90. — P. 043843.

[104] *Kim A. V., Skobelev S. A.* Few-cycle vector solitons of light // *Phys. Rev. A.* — 2011. — Vol. 83. — P. 063832.

[105] *Kim A. V., Skobelev S. A., Anderson D. et al.* Extreme nonlinear optics in a Kerr medium: Exact soliton solutions for a few cycles // *Phys. Rev. A.* — 2008. — Vol. 77. — P. 043823.

[106] *Kirkwood R. K., Dewald E., Niemann C. et al.* Amplification of an ultrashort pulse laser by stimulated Raman scattering of a 1 ns pulse in a low density plasma // *Phys. Plasmas.* — 2007. — Vol. 14. — P. 113109.

[107] *Kobayashi T., Shirakawa A., Fuji T.* Sub-5-fs transform-limited visible pulse source and its application to real-time spectroscopy // *IEEE J. Selected Topics in Quantum Electron.* — 2001. — Vol. 7. — P. 525.

[108] *Kodama Y., Hasegawa A.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide // *IEEE J. Quantum Electon.* — 1987. — Vol. 23. — P. 510.

[109] *Kosareva O. G, Murtazin I. N., Panov N. A. et al.* Pulse shortening due to filamentation in transparent medium // *Laser Phys. Lett.* — 2007. — Vol. 126. — P. 4.

[110] *Kosmatova N. E., Shvets V. F., Zakharov V. E.* Computer simulation of wave collapses in the nonlinear Schrödinger equation // *Physica D, Nonlinear Phenomena.* — 1991. — Vol. 52. — P. 16.

[111] *Kozlov V. A., Litvak A. G., Suvorov E. V.* Envelope solitons of relativistic strong electromagnetic waves // *Sov. Phys. JETP.* — 1979. — Vol. 49. — P. 75.

[112] *Krausz F., Ivanov M.* Attosecond physics // *Rev. Mod. Phys.* — 2009. — Vol. 81. — P. 163.

[113] *Kuznetsov E.A.* Wave Collapse in Nonlinear Optics // Topics in Applied Physics: Self-focusing: Past and Present / Ed. by R. W. Boyd, S. G. Lukishova, Y. R. Shen. — Springer, New York, 2009. — Vol. 114.

[114] *Kuznetsov E. A., Musher S. L.* Effect of collapse of sound waves on the structure of collisionless shock waves in a magnetized plasma // *JETP.* — 1986. — Vol. 64. — P. 947.

[115] *Leblond H., Mihalache D.* Models of few optical cycle solitons beyond the slowly varying envelope approximation // *Physics Reports.* — 2013. — Vol. 523. — P. 61.

[116] *Li G., Mori W. B., Ren C.* Laser Hosing in Relativistically Hot Plasmas // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 110. — P. 155002.

[117] *Liang X., Leng Y., Wang C. et al.* Parasitic lasing suppression in high gain femtosecond petawatt Ti:sapphire amplifier // *Opt. Express.* — 2007. — Vol. 15. — P. 15335.

[118] *Litvak A. G.* Finite-amplitude Wave Beams in a Magnetoactive Plasma // *SOVIET PHYSICS JETP.* — 1970. — Vol. 30. — P. 344.

[119] *Litvak A. G., Fraiman G. M.* Interaction of beams of oppositely traveling electromagnetic waves in a transparent nonlinear medium // *Radiophysics and Quantum Electronics.* — 1972. — Vol. 15. — P. 1024.

[120] *Litvak A. G., Mironov V. A., Sher E. M.* Trajectory of the wave field centroid // *Phys. Rev. E.* — 1997. — Vol. 55. — P. 7441.

[121] *Litvak A. G., Sergeev A. M., Mironov V. A.* // Nonlinear Waves 3 / Ed. by A. V. Gaponov-Grekhov, M. I. Rabinovich, Enqelbrecht. — Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990. — P. 240.

[122] *Litvak A. G., Talanov V. I.* A parabolic equation for calculating the fields in dispersive nonlinear media // *Radiophysics and Quantum Electronics.* — 1967. — Vol. 10. — P. 539.

[123] *Lontano M., Lampis G., Kim A. V., Sergeev A. M.* Intense laser pulse dynamics in dense gases // *Physica Scripta.* — 1996. — Vol. 63. — P. 141.

[124] *Lontano M., Murusidze I. G.* Dynamics of space-time self-focusing of a femtosecond relativistic laser pulse in an underdense plasma // *Optics Express.* — 2003. — Vol. 11. — P. 248.

[125] *Lozhkarev V. V., Freidman G. I., Ginzburg V. N. et al.* Compact 0.56 Petawatt laser system based on optical parametric chirped pulse amplification in KD*P crystals // *Laser Phys. Lett.* — 2007. — Vol. 4. — P. 421.

[126] *Malkin V. M., Shvets G., Fisch N. J.* Fast Compression of Laser Beams to Highly Overcritical Powers // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 82. — P. 4448.

[127] *Malkin V. M., Shvets G., Fisch N. J.* Fast Compression of Laser Beams to Highly Overcritical Powers // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 82. — P. 4448.

[128] *Malkin V. M., Shvets G., Fisch N. J.* Ultra-powerful compact amplifiers for short laser pulses // *Phys. Plasmas.* — 2000. — Vol. 7. — P. 2232.

[129] *Marcatili E. A. J., Schmeltzer R. A.* Hollow metallic and dielectric waveguides for long distance optical transmission and lasers // *Bell Syst. Tech. J.* — 1964. — Vol. 43. — P. 1783.

[130] *Marklund M., Shukla P. K.* Nonlinear collective effects in photon-photon and photon-plasma interactions // *Rev. Mod. Phys.* — 2006. — Vol. 78. — P. 591.

[131] *Max C. E., Arons J., Langdon A. B.* Self-Modulation and Self-Focusing of Electromagnetic Waves in Plasmas // *Phys. Rev. Lett.* — 1974. — Vol. 33. — P. 209.

[132] *McLaughlin D. W., Papanicolaou G. C., Sulem C., Sulem P. L.* Focusing singularity of the cubic Schrödinger equation // *Phys. Rev. A.* — 1986. — Vol. 34. — P. 1200.

[133] *Mironov V. A., Sergeev A. M., Vanin E. V., Brodin G.* Localized nonlinear wave structures in the nonlinear photon accelerator // *Phys. Rev. A.* — 1990. — Vol. 42. — P. 4862.

[134] *Mironov V. A., Sergeev A. M., Vanin E. V. et al.* Upper limits for frequency up-conversion in the nonlinear photon accelerator // *Phys. Rev. A.* — 1992. — Vol. 46. — P. R6178.

[135] *Misoguti L., Backus S., Durfee C. G. et al.* Generation of broadband VUV light using third-order cascaded processes // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 87. — P. 013601.

[136] *Mourou G.* Compression of amplified chirped optical pulses // *Appl. Phys. B.* — 1997. — Vol. 65. — P. 205.

[137] *Mourou G. A., Tajima T., Bulanov S. V.* Optics in the relativistic regime // *Rev. Mod. Phys.* — 2006. — Vol. 78. — P. 309.

[138] *Mouroua G. A., Fisch N. J., Malkin V. M. et al.* Exawatt-Zettawatt pulse generation and applications // *Optics Communications.* — 2012. — Vol. 285. — P. 720.

[139] *Nazarkin A., Korn G.* Pulse self-compression in the subcarrier cycle regime // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83. — P. 4748.

[140] *Nibbering E. T. J., Curley P. F., Grillion G. et al.* Conical emission from self-guided femtosecond pulses in air // *Opt. Lett.* — 1996. — Vol. 21. — P. 62.

[141] *Nisoli M., Silvestri S. De, Svelto O.* Generation of high energy 10 fs pulses by a new pulse compression technique // *Appl. Phys. Lett.* — 1996. — Vol. 68. — P. 2793.

[142] *Nisoli M., Silvestri S. De, Svelto O. et al.* Compression of high-energy laser pulses below 5 fs // *Opt. Lett.* — 1997. — Vol. 22. — P. 522.

[143] *Ostrovskii L. A.* Approximate methods in the theory of nonlinear waves // *Radiophysics and Quantum Electronics.* — 1974. — Vol. 17. — P. 344.

[144] *Ping Y., Cheng W., Suckewer S. et al.* Amplification of Ultrashort Laser Pulses by a Resonant Raman Scheme in a Gas-Jet Plasma // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 175007.

[145] *Ping Y., Geltner I., Fisch N. J. et al.* Demonstration of ultrashort laser pulse amplification in plasmas by a counterpropagating pumping beam // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 62. — P. R4532.

[146] *Ping Y., Geltner I., Morozov A. et al.* Raman amplification of ultrashort laser pulses in microcapillary plasmas // *Phys. Rev. E.* — 2002. — Vol. 66. — P. 046401.

[147] *Ping Y., Geltner I., Suckewer S.* Raman backscattering and amplification in a gas jet plasma // *Phys. Rev. E.* — 2003. — Vol. 67. — P. 016401.

[148] *Pipahl A., Anashkina E. A., Toncian M. et al.* High-intensity few-cycle laser-pulse generation by the plasma-wakefield self-compression effect // *Phys. Rev. E.* — 2013. — Vol. 87. — P. 033104.

[149] *Popmintchev Tenio, et al.* Bright Coherent Ultrahigh Harmonics in the keV X-ray Regime from Mid-Infrared Femtosecond Lasers // *Science.* — 2012. — Vol. 336. — P. 1287.

[150] *Porsezian K., Nakkeeran K.* Optical Solitons in Presence of Kerr Dispersion and Self-Frequency Shift // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 76. — P. 3955.

[151] *Pukhov A., ter Vehn J. Meyer.* Laser wake field acceleration: the highly non-linear broken-wave regime // *Applied Physics B.* — 2002. — Vol. 74. — P. 355.

[152] *Rasmussen J. Juul, Rypdal K.* Blow-up in Nonlinear Schroedinger Equations-I A General Review // *Phys. Scr.* — 1986. — Vol. 33. — P. 481.

[153] *Ren C., Duda B. J., Hemker R. G. et al.* Compressing and focusing a short laser pulse by a thin plasma lens // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Vol. 63. — P. 026411.

[154] *Russell P. St. J., Hölzer P., Chang W. et al.* Hollow-core photonic crystal fibres for gas-based nonlinear optics // *Nature Photonics.* — 2014. — Vol. 8. — P. 278.

[155] *Russelll P.* Photonic Crystal Fibers // *Science.* — 2003. — Vol. 299. — P. 358.

[156] *Sakovich A., Sakovich S.* The Short Pulse Equation Is Integrable // *The Journal of the Physical Society of Japan.* — 2005. — Vol. 74. — P. 239.

[157] *Sakovich A., Sakovich S.* Solitary wave solutions of the short pulse equation // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 2006. — Vol. 39. — P. L361.

[158] *Saleh M. F., Chang W., Hölzer Ph. et al.* Theory of Photoionization-Induced Blueshift of Ultrashort Solitons in Gas-Filled Hollow-Core Photonic Crystal Fibers // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107. — P. 203902.

[159] *Sartania S., Cheng Z., Lenzner M. et al.* Generation of 0.1-TW 5-fs optical pulses at a 1-kHz repetition rate // *Opt. Lett.* — 1997. — Vol. 22. — P. 1562.

[160] *Schenkel B., Biegert J., Keller U. et al.* Generation of 3.8-fs pulses from adaptive compression of a cascaded hollow fiber supercontinuum // *Opt. Lett.* — 2003. — Vol. 28. — P. 1987.

[161] *Schmid K., Veisz L., Tavella F. et al.* Few-Cycle Laser-Driven Electron Acceleration // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 102. — P. 124801.

[162] *Schreiber J., Bellei C., Mangles S. P. D. et al.* Complete Temporal Characterization of Asymmetric Pulse Compression in a Laser Wakefield // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 105. — P. 235003.

[163] *Schulz E., Binhammer T., Steingrube D. S. et al.* Intense few-cycle laser pulses from self-compression in a self-guiding filament // *Appl. Phys. B.* — 2009. — Vol. 95. — P. 269.

[164] *Serebryannikov E. E., Zheltikov A. M., Ishii N. et al.* Nonlinear-optical spectral transformation of few-cycle laser pulses in photonic-crystal fibers // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 72. — P. 056603.

[165] *Sergeev A. M., Lontano M., Kim A. V.* Ionization-induced leaking-mode channeling of intense short laser pulses in gases // *Las. and Part. Beams.* — 1999. — Vol. 17. — P. 129.

[166] *Shim Bonggu, Schrauth Samuel E., Gaeta Alexander L.* Filamentation in air with ultrashort mid-infrared pulses // *Opt. Express.* — 2011. — Vol. 19. — P. 9118.

[167] *Shorokhov O., Pukhov A., Kostyukov I.* Self-Compression of Laser Pulses in Plasma // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 91. — P. 265002.

[168] *Shvets G., Wurtele J. S.* Instabilities of Short-Pulse Laser Propagation through Plasma Channels // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 73. — P. 3540.

[169] *Silberberg Y.* Ultrafast physics: Quantum control with a twist // *Nature (London).* — 2004. — Vol. 430. — P. 624.

[170] *Silberberg Y., Barad Y.* Rotating vector solitary waves in isotropic fibers // *Opt. Lett.* — 1995. — Vol. 20. — P. 246.

[171] *Silva F., Austin D.R., Thai A. et al.* Multi-octave supercontinuum generation from mid-infrared filamentation in a bulk crystal // *Nature Communications.* — 2012. — Vol. 3. — P. 807.

[172] *Skobelev S. A., Kartashov D. V., Kim A. V.* Few-Optical-Cycle Solitons and Pulse Self-Compression in a Kerr Medium // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99. — P. 203902.

[173] *Skobelev S. A., Kim A. V., Willi O.* Generation of High-Energy Few-Cycle Laser Pulses by Using the Ionization-Induced Self-Compression Effect // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108. — P. 123904.

[174] *Skupin S., Stibenz G., Bergé L. et al.* Self-compression by femtosecond pulse filamentation: Experiments versus numerical simulations // *Phys. Rev. E.* — 2006. — Vol. 74. — P. 056604.

[175] *Sprangle P., Esarey E., Krall J., Joyce G.* Propagation and guiding of intense laser pulses in plasmas // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Vol. 69. — P. 2200.

[176] *Sprangle Ph., Krall J., Esarey Eric.* Hose-Modulation Instability of Laser Pulses in Plasmas // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 73. — P. 3544.

[177] *Stibenz G., Zhavoronkov N., Steinmeyer G.* Self-compression of millijoule pulses to 7.8 fs duration in a white-light filament // *Opt. Lett.* — 2006. — Vol. 31. — P. 274.

[178] *Strickland D., Mourou G.* Compression of amplified chirped optical pulses // *Opt. Commun.* — 1985. — Vol. 56. — P. 219.

[179] *Sung J. H., Lee S. K., Yu T. J. et al.* 0.1 Hz 1.0 PW Ti:sapphire laser // *Opt. Lett.* — 2010. — Vol. 35. — P. 3021.

[180] *Suvorov E. V., Akhmedzhanov R. A., Fadeev D. A. et al.* Terahertz emission from a metallic surface induced by a femtosecond optic pulse // *Opt. Lett.* — 2012. — Vol. 37. — P. 2520.

[181] *Tajima T., Dawson J. M.* Laser Electron Accelerator // *Phys. Rev. Lett.* — 1979. — Vol. 43. — P. 267.

[182] *Tempea G., Brabec T.* Nonlinear source for the generation of high-energy few-cycle optical pulses // *Opt. Lett.* — 1998. — Vol. 23. — P. 1286.

[183] *Tempea G., Brabec Th.* Theory of self-focusing in a hollow waveguide // *Optics Letters.* — 1998. — Vol. 23. — P. 762.

[184] *Toroker Z., Malkin V. M., Balakin A. A. et al.* Geometrical constraints on plasma couplers for Raman compression // *Phys. Plasmas.* — 2012. — Vol. 19. — P. 083110.

[185] *Trines R. M. G. M., Fiúza F., Bingham R. et al.* Simulations of efficient Raman amplification into the multipetawatt regime // *Nature Physics.* — 2011. — Vol. 7. — P. 87.

[186] *Turitsyn S. K., Fai'kovich G. E.* Stability of magnetoelastic solitons and self-focusing of sound in antiferromagnets // *JETP.* — 1985. — Vol. 62. — P. 146.

[187] *Umstadter D. P., Barty C., Perry M., Mourou G. A.* Tabletop, ultrahigh-intensity lasers: dawn of nonlinear relativistic optics // *Optics and Photonics News.* — 1998. — Vol. 9. — P. 41.

[188] *Wagner N. L., Gibson E. A., Popmintchev T. et al.* Self-Compression of Ultrashort Pulses through Ionization-Induced Spatiotemporal Reshaping // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93. — P. 173902.

[189] *Wegener M.* Extreme Nonlinear Optics. — Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[190] *Whalen P., Moloney J. V., Newell A. C. et al.* Optical shock and blow-up of ultrashort pulses in transparent media // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Vol. 86. — P. 033806.

[191] *Whalen P., Panagiotopoulos P., Kolesik M., Moloney Jerome V.* Extreme carrier shocking of intense long-wavelength pulses // *Phys. Rev. A.* — 2014. — Vol. 89. — P. 023850.

[192] *Whitham G. B.* Linear and Nonlinear Waves. — New York: Wiley, 1974.

[193] *Winful Herbert G.* Polarization instabilities in birefringent nonlinear media: application to fiber-optic devices // *Opt. Lett.* — 1986. — Vol. 11. — P. 3.

[194] *Wood W. M., Focht G., Downer M. C.* Tight focusing and blue shifting of millijoule femtosecond pulses from a conical axicon amplifier // *Opt. Lett.* — 1988. — Vol. 13. — P. 984.

[195] *Wood W. M., Siders C. W., Downer M. C.* Measurement of femtosecond ionization dynamics of atmospheric density gases by spectral blueshifting // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Vol. 67. — P. 3523.

[196] *Yablonovitch E.* Self-phase modulation and short-pulse generation from laser-breakdown plasmas // *Phys. Rev. A.* — 1974. — Vol. 10. — P. 1888.

[197] *Young P. E., Bolton P. R.* Propagation of Subpicosecond Laser Pulses through a Fully Ionized Plasma // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 77. — P. 4556.

[198] *Yudin G. L., Ivanov M. Yu.* Nonadiabatic tunnel ionization: Looking inside a laser cycle // *Phys. Rev. A.* — 2001. — Vol. 64. — P. 013409.

[199] *Zaïr A., Guandalini A., Schapper F. et al.* Spatio-temporal characterization of few-cycle pulses obtained by filamentation // *Opt. Express.* — 2007. — Vol. 15. — P. 5394.

[200] *Zakharov V. E., Kuznetsov E. A.* Quasiclassical theory of three-dimensional wave collapse // *JETP.* — 1986. — Vol. 64. — P. 773.

[201] *Zakharov V. E., Rubenchik A. M.* Instability of waveguides and solitons in nonlinear media // *JETP.* — 1974. — Vol. 38. — P. 494.

[202] *Zakharov V. F ., Shabat A. B.* Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Wave in Nonlinear Media // *Sov. Phys. JETP.* — 1972. — Vol. 34. — P. 62.

[203] *Zhokhov P. A., Zheltikov A. M.* Attosecond shock waves // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 110. — P. 183903.

[204] *Абрамян Л. А., Литвак А. Г., Миронов В. А., Сергеев А. М.* Самофокусировка и релятивистское гидирование ультракоротского лазерного импульса в плазме // *ЖЭТФ.* — 1992. — Т. 102. — С. 1816.

[205] *Андреев Н. Е., Горбунов Л. М., Зыков А. И., Чижонков Е. В.* Переходные нелинейные волны при пондеремоторной самофокусировке излучения в плазме // *ЖЭТФ.* — 1994. — Т. 106. — С. 1676.

[206] *Андреев Н. Е., Горбунов Л. М., Кирсанов В. И., Погосова А. А.* Ускоритель на кильватерной плазменной волне, использующий самомодуляцию каналируемого лазерного импульса // *Письма в ЖЭТФ.* — 1994. — Т. 60. — С. 694.

[207] *Аскарьян Г. А., Буланов С. В., Пегороро Ф., Пухов А. С.* Нелинейная эволюция сверхсильных лазерных импульсов в плазме. Новые эффекты магнитного взаимодействия мощных потоков электромагнитного излучения // *Физика плазмы.* — 1995. — Т. 21. — С. 884.

[208] *Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — Наука, Москва, 1988.

[209] *Ахмедиев Н. Н., Анкевич А.* Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки. — Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[210] *Бабин А. А., Карташов Д. В., Киселев А. М. и др.* Ионизационная трансформация спектра и компрессия мощных фемтосекундных лазерных импульсов в экспериментах по распространению в газонаполненных диэлектрических капиллярах // *Письма в ЖЭТФ.* — 2002. — Т. 76. — С. 645.

[211] *Бабин А. А., Киселев А. М., Сергеев А. М., Степанов А. Н.* Тераваттный фемтосекундный титан-сапфировый лазерный комплекс // *Квантовая электроника.* — 2001. — Т. 31. — С. 623.

[212] *Балакин А. А., Карташов Д. В., Киселев А. М. и др.* Усиление лазерных импульсов при обратном рамановском рассеянии в плазме, создаваемой в диэлектрических капиллярах // *Письма в ЖЭТФ.* — 2004. — Т. 80. — С. 15.

[213] *Балакин А. А., Литвак А. Г., Миронов В. А., Скобелев С. А.* Структурные особенности динамики самовоздействия сверхкоротких электромагнитных импульсов // *ЖЭТФ.* — 2007. — Т. 131. — С. 408.

[214] *Балакин А. А., Литвак А. Г., Миронов В. А., Скобелев С. А.* О самофокусировке сверхкороткого релятивистски сильного лазерного импульса в плазме // *ЖЭТФ.* — 2011. — Т. 139. — С. 579.

[215] *Балакин А. А., Миронов В. А.* Динамика самовоздействия сверхкоротких электромагнитных импульсов // *Письма в ЖЭТФ.* — 2002. — Т. 75. — С. 741.

[216] *Беленов Е. М., Крюков П. Г., Назаркин А. В.* Когерентное усиление импульсов нерезонансной двухуровневой средой // *Письма в ЖЭТФ.* — 1988. — Т. 47. — С. 442.

[217] *Беленов Е. М., Назаркин А. В.* О некоторых решениях уравнений нелинейной оптики бнз приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз // *Письма в ЖЭТФ.* — 1990. — Т. 51. — С. 252.

[218] *Беспалов В. И., Таланов В. И.* О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях // *Письма ЖЭТФ.* — 1966. — Т. 3. — С. 471.

[219] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — Наука, Москва, 1970.

[220] *Ванин Е. В., Даунер М. С., Ким А. В., Сергеев А. М.* О возбуждении сверхкоротких всплесков гармоник излучения при ионизации газа мощным оптическим импульсом // *Письма в ЖЭТФ.* — 1993. — Т. 58. — С. 964.

[221] *Ванин Е. В., Миронов В. А., Пянькина Е. А. и др.* Пространственно-временная динамика двумерных волновых пакетов в средах с релаксационной нелинейностью // *Физика плазмы.* — 1991. — Т. 17. — С. 821.

[222] *Ванин Е. В., Смирнов А. И.* Динамика солитоноподобных волновых сигналов в плавно неоднородных и слабо нестационарных нелинейных средах // *ЖЭТФ.* — 1996. — Т. 110. — С. 1136.

[223] *Гильденбург В. Б., Ким А. В., Сергеев А. М.* О возможности сильного повышения частоты ионизирующего лазерного импульса в газе // *Письма в ЖЭТФ.* — 1990. — Т. 51. — С. 91.

[224] *Гильденбург В. Б., Крупнов В. А., Семенов В.Е.* Автопреобразование частоты и безотражательное распространение высокочастотного электромагнитного импульса в условиях пробоя // *Письма в ЖТФ.* — 1988. — Т. 14. — С. 1695.

[225] *Голубев С. В., Суворов Е. В., Шалашов А. Г.* О возможности генерации терагерцового излучения при оптическом пробое плотного газа // *Письма ЖЭТФ.* — 2004. — Т. 79. — С. 443.

[226] *Горбунов Л. М., Широков А. С.* Развитие самофокусировочной неустойчивости в полуограниченной плазме // *Квантовая электроника.* — 1985. — Т. 12. — С. 146.

[227] *Горшков К. А., Козлов В. А., Островский Л. А.* Когерентное усиление импульсов нерезонансной двухуровневой средой // *ЖЭТФ.* — 1973. — Т. 65. — С. 195.

[228] *Громов Е. М., Таланов В. И.* Короткие солитоны огибающей (комбинированное нелинейное уравнение) // *Изв. ВУЗов Радиофизика.* — 1996. — Т. 39. — С. 735.

[229] *Громов Е. М., Таланов В. И.* Нелинейная динамика коротких цугов волн в диспергирующих средах // *ЖЭТФ.* — 1996. — Т. 110. — С. 137.

[230] *Громов Е. М., Таланов В. И.* Волны, описываемые высшими приближениями нелинейного уравнения Шредингера // *Изв. вузов. Радиофизика.* — 1998. — Т. 41. — С. 222.

[231] *Делоне Н. Б., Крайнов В. П.* Туннельная и надбарьерная ионизация атомов и ионов в поле лазерного излучения // *УФН.* — 1998. — Т. 168. — С. 531.

[232] *Жарова Н. А., Литвак А. Г., Миронов В.А.* Самовоздействие сверхкороткого лазерного импульса в среде с нормальной дисперсией групповой скорости // *Изв. ВУЗов Радиофизика.* — 2003. — Т. 46. — С. 331.

[233] *Жарова Н. А., Литвак А. Г., Миронов В. А.* О нестационарном самовоздействии в среде со стрикционной нелинейностью // *ЖЭТФ.* — 2000. — Т. 118. — С. 1234.

[234] *Жарова Н. А., Литвак А. Г., Миронов В. А.* Самофокусировка ударных волн огибающих волновых пакетов в среде с нелинейной дисперсией // *ЖЭТФ.* — 2006. — Т. 130. — С. 21.

[235] *Жарова Н. А., Литвак А. Г., Петрова Т. А. и др.* О множественном дроблении волновых структур в нелинейной среде // *Письма в ЖЭТФ.* — 1986. — Т. 44. — С. 12.

[236] *Захаров В. Е, Кузнецов Е. А.* Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // *УФН.* — 1997. — Т. 167. — С. 1137.

[237] *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. — Наука, Москва, 1980.

[238] *Кандидов В. П., Голубцов И. С., Косорева О. Г.* Источники суперконтинуума в мощном фемтосекундном лазерном импульсе при распространении в жидкости и газе // *Квантовая электроника.* — 2004. — Т. 34. — С. 348.

[239] *Карташов Д. В., Ким А. В., Скобелев С. А.* Нелинейная динамика волновых полей в нерезонансных средах: о солитонов огибающей к видеосолитонам // *Изв. вузов Радиофизика.* — 2003. — Т. XLVI. — С. 415.

[240] *Карташов Д. В., Ким А. В., Скобелев С. А.* Солитонные структуры волнового поля с произвольным числом колебаний в нерезонансных средах // *Письма в ЖЭТФ.* — 2003. — Т. 78. — С. 722.

[241] *Келдыш Л. В.* Ионизация в поле сильной электромагнитной волны // *ЖЭТФ.* — 1964. — Т. 47. — С. 1945.

[242] *Келих С.* Молекулярная нелинейная оптика. — Наука, Москва, 1981.

[243] *Кившарь Ю. С., Агравал Г. П.* Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[244] *Ким А. В., Рябикин М. Ю., Сергеев А. М.* От фемтосекундных к аттосекундным импульсам // *УФН.* — 1999. — Т. 169. — С. 58.

[245] *Козлов С. А.* Нелинейная оптика импульсов предельно коротких длительностей // Проблемы когерентной и нелинейной оптики / Под ред. И. П. Гуров, С. А. Козлов. — СПб., 2000. — С. 12.

[246] *Козлов С. А., Сазонов С. В.* Нелинейное распространение импульсов длительностью в несколько колебаний светового поля в диэлектрических средах // *ЖЭТФ.* — 1997. — Т. 111. — С. 404.

[247] *Кузнецов Е. А., Мушер С. Л., Шафаренко А. В.* Коллапс звуковых волн в средах с положительной дисперсией // *Письма в ЖЭТФ.* — 1983. — Т. 37. — С. 204.

[248] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — Наука, Москва, 1982.

[249] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — Наука, Москва, 1986.

[250] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. — Физматлит, Москва, 2001.

[251] *Литвак А.Г.* Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. акад. М. А. Леонтовича. — Москва, Атомиздат, 1980.

[252] *Литвак А. Г., Миронов В. А., Скобелев С. А.* Динамика самовоздействия сверхкоротких электромагнитных импульсов // *Письма в ЖЭТФ.* — 2005. — Т. 82. — С. 119.

[253] *Литвак А. Г., Миронов В. А., Скобелев С. А.* Динамика самовоздействия сверхкоротких электромагнитных импульсов // *Письма в ЖЭТФ.* — 2005. — Т. 82. — С. 119.

[254] *Литвак А. Г., Таланов В. И.* Применение параболического уравнения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах // *Изв. ВУЗов Радиофизика.* — 1967. — Т. 10. — С. 539.

[255] *Львов В.С.* Нелинейные спиновые волны. — Наука, Москва, 1987.

[256] *Маймистов А. И.* Некоторые модели распространения предельно коротких электромагнитных импульсов в нелинейной среде // *Квантовая электроника.* — 2000. — Т. 30. — С. 287.

[257] *Миронов В. А.* Пространственно-временная динамика сверхкоротких импульсов в вакууме // *ЖЭТФ.* — 1999. — Т. 116. — С. 35.

[258] *Петрищев В. А., Таланов В. И.* // *Квантовая электроника.* — 1971. — Т. 6. — С. 35.

[259] *Петрищев В. А., Таланов В. И.* О нестационарной самофокусировке света // *Квантовая электроника.* — 1971. — Т. 6. — С. 35.

[260] *Попов В. С.* Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша) // *УФН.* — 2004. — Т. 174. — С. 921.

[261] *Руденко О. В., Сапожников О. А.* Волновые пучки в кубично-нелинейных средах без дисперсии // *ЖЭТФ.* — 1994. — Т. 106. — С. 395.

[262] *Руденко О. В., Сапожников О. А.* Явления самовоздействия пучков волн, содержащих ударные фронты // *УФН.* — 2004. — Т. 174. — С. 973.

[263] *Скобелев С. А., Ким А. В.* О динамических свойствах “упругих” взаимодействий волновых солитонов с малым числом осцилляций поля // *Письма в ЖЭТФ.* — 2004. — Т. 80. — С. 727.

[264] *Скобелев С. А., Кулагин Д. И., Степанов А. Н. и др.* Ионизационная самокомпрессия интенсивных фемтосекундных импульсов при распространении через газонаполненные диэлектрические капилляры // *Письма ЖЭТФ.* — 2009. — Т. 89. — С. 641.

[265] *Таланов В. И.* О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах // *Письма в ЖЭТФ.* — 1965. — Т. 2. — С. 218.

[266] *Таланов В. И., Власов С. Н.* Самофокусировка волн. — ИПФ РАН, Н. Новгород, 1997.

[267] *Шен И. Р.* Принципы нелинейной оптики. — Наука, Москва, 1989.